Aula 5

Ana Gonçalves

Universidade Federal de Minas Gerais

I. Tutorial 5 - Letra a

Sabe-se que a transformada de Z pode ser escrita, de forma compactada como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] * z^{-n} \tag{1}$$

A linha 9 do código abaixo tem sua implementação no matlab

```
1  clear;
2  close all;
3  clc;
4
5  syms n z
6  h = [0 1 2 3 2 1 0];     % h[n] representa uma resposta impulsiva
7  n = 0: length(h)-1;      % n e sym por ser funcao de x
8  stem(n, h); xlabel('n');
9  H = sum(h.*(z.^-n));     % Que equacao e implementada aqui?
10 pretty(H);
```

A saída gerada essa abaixo.

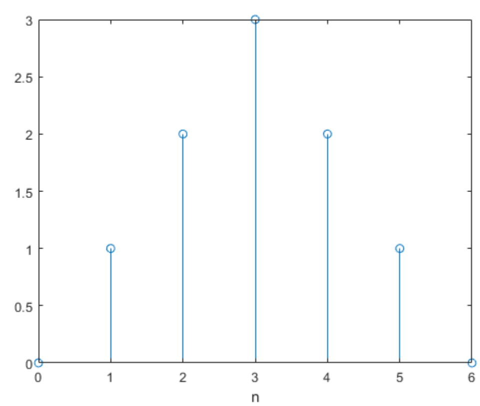


Figura 1: *Gráfico gerado*

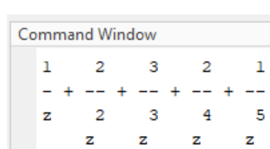


Figura 2: *Command Windows*

A relação entre uma equação a diferenças finitas e uma função de transferência de um sinal de tempo discreto pode ser estudada aplicando-se a transformada Z, relativa a um sistema de 1ª ordem:

$$\underset{n \geq 0}{y[n]} = a_0\, x[n] + b_1\, y[n-1]$$
$$\updownarrow z$$
$$Y(z) = a_0\, X(z) + b_1\, Y(z) \cdot z^{-1}$$

Que reagrupada resulta em:

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 + b_1 \cdot z^{-1}} \equiv \frac{a_0 \cdot z}{z + b_1}$$

II. Tutorial 5 - Letra b

O script abaixo calcula a resposta impulsiva a partir de uma função de transferência

```
clear; close all; clc;

syms z

H = 1/(1 - 0.8*z^(-1));
h = iztrans(H)

n = 0:49;
hn = subs(h,n);
stem(n, hn);
xlabel('n');
ylabel('h[n]');
```

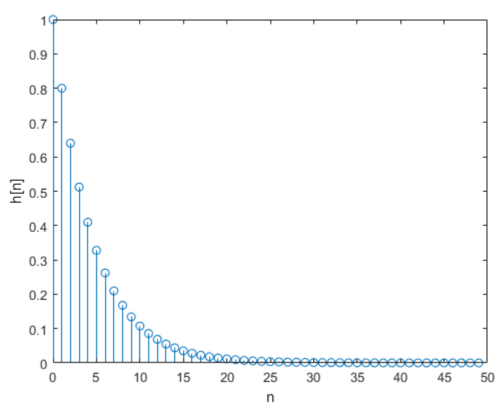


Figura 3: *Gráfico gerado*

A função de transferência é $H(z) = \frac{1}{1-0.8*z^{-1}}$. Abaixo, o valor da transformada inversa de H.

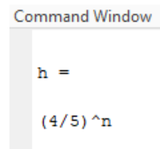


Figura 4: *Command Windows*

III. Tutorial 5 - Letra c

Muda-se o script acima para $\alpha = -0.8$

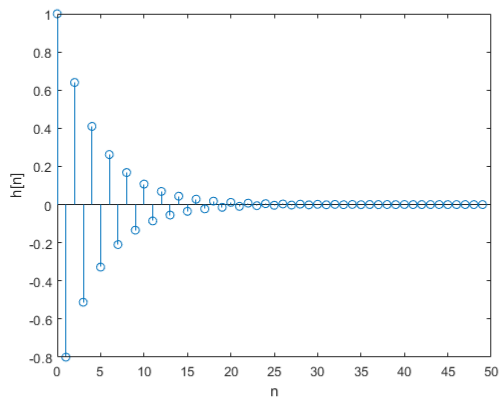


Figura 5: *Gráfico gerado*

Perceptivelmente, quando o valor de $\alpha < 1$ o sinal discreto alterna entre valores positivos e negativos enquanto decai exponencialmente. No gráfico abaixo, tem-se $|\alpha| > 1$.

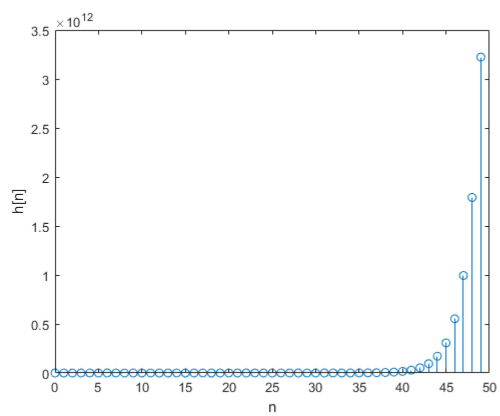


Figura 6: *Gráfico gerado*

Perceptivelmente, o sinal se comporta sob uma envoltória de exponencial crescente.

IV. Tutorial 5 - Letra d

Os polos dos sistemas são alterados para outros valores (-0.8, 1.1 e 0.1)

```
clear; close all; clc;

num = [1 0];
den = [1 -0.8];

% (z - 0)/(z - 0.8) ou (1.z^0 + 0.z^-1)/(1.z^0 - 0.8.z^-1)
% zero: z = 0; polo: z = 0.8

figure(1);
subplot(2,1,1);       % resposta ao degrau
stepz(num, den);      % veja tambem step() e stepplot()

subplot(2,1,2);       % resposta impulsiva
impz(num,den);        % veja tambem impul() e impulseplot()
```

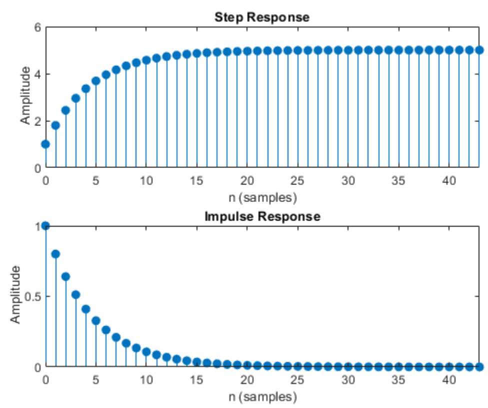


Figura 7: *Gráfico gerado - -0.8*

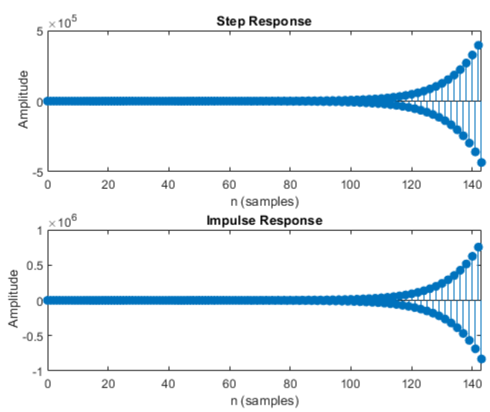


Figura 8: *Gráfico gerado - 1.1*

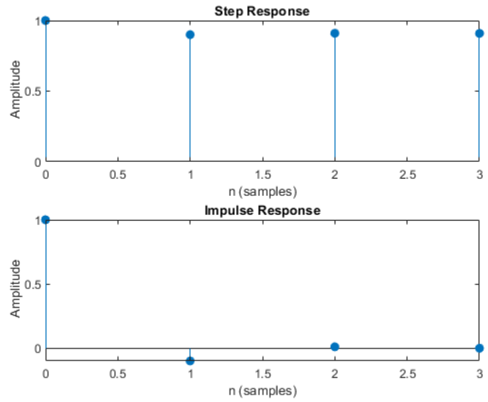


Figura 9: *Gráfico gerado - 0.1*

A análise gráfica dos sinais obtidos mostram que quando o polo z assume um valor z <1 , o sistema assume estabilidade, uma vez que os valores de suas saídas convergem (no caso, para h[n] = 5); uma interpretação plausível é assumir que esse sinal exemplifica algum sistema com a presença de mecanismos que dissipam energia, como, por exemplo, um resistor num circuito RC. Por outro lado, quando o polo do sistema assume z > 1, as suas saídas divergem, assumindo valores desconhecidos para um índice n arbitrário, de forma que a amplitude do sinal de saída assume assumindo envoltória crescente.

V. Tutorial 5 - Letra e

```
clear; close all; clc;

N = 50;
alfa = 0.8;
f = 1/10;
n = 0:N;
x = sin(2*pi*f*n);  % sinal de entrada
h = alfa.^n;        % resposta impulsiva
y = conv(x,h);      % calcula saida

x1 = [x zeros(1,N)];
stem(0:2*N, x1);
hold on;
stem(0:2*N, y);
legend('x', 'y');
xlabel('n');
title('calculo pela convolucao');
```

Nas figuras abaixo os valores de α e da frequência f foram alterados diversas vezes.

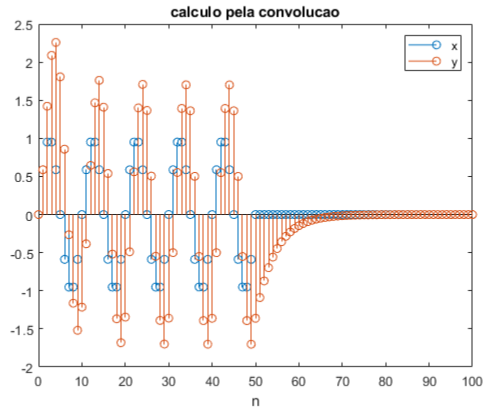


Figura 10: *Gráfico gerado - Sem alteração*

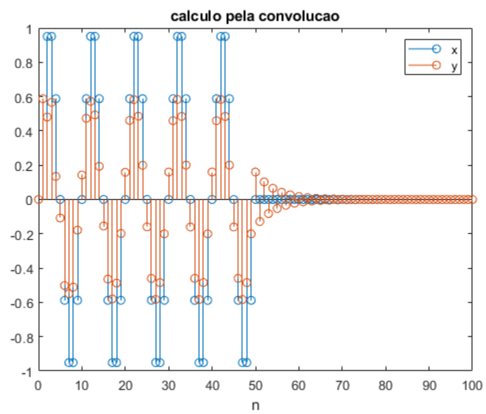


Figura 11: *Gráfico gerado* - $\alpha = -0.8$

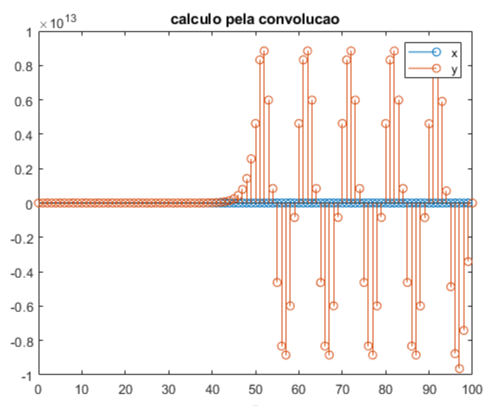


Figura 12: *Gráfico gerado* - $\alpha = 1.8$

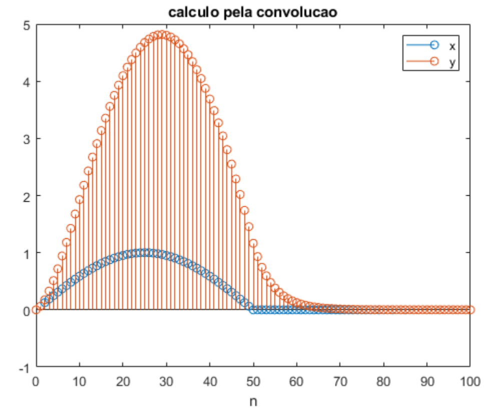


Figura 13: *Gráfico gerado - f = 1/100*

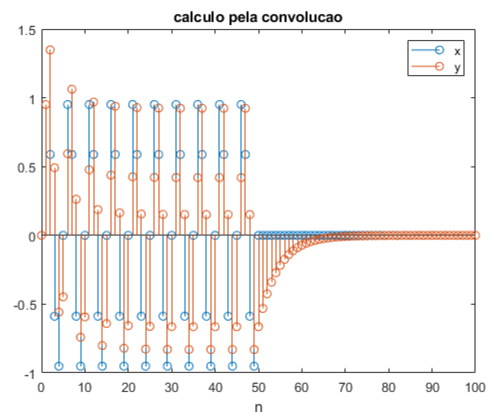


Figura 14: *Gráfico gerado - f = 1/5*

Após a análise gráfica da saída do sistema, nota-se a influência da frequência do sinal de forma que, quanto menor ela for, maior a amplitude. Já o valor de : quando negativo, ele varia o módulo da amplitude da resposta ao impulso quando n > 50 , de modo que o sinal converge para saída nula; quando maior que 1, faz com que o valor da saída final assuma uma envoltória exponencial até que n = 50, depois disso, o sinal oscila com diferentes amplitudes.

VI. Tutorial 5 - Letra f

```
clear; close all; clc;

N = 50;
alfa = 0.8;
f = 1/10;
n = 0:N;
x = sin(2*pi*f*n);  % sinal de entrada

Num = 1;
Den = [1 -alfa];

h = alfa.^n;        % resposta impulsiva
y = filter(Num, Den, x);
```

```
14
15 stem(n,x);
16 hold on;
17 stem(n,y);
18 legend('x', 'y');
19 xlabel('n');
20 title('Calculo pela equacao a diferencas finitas');
```

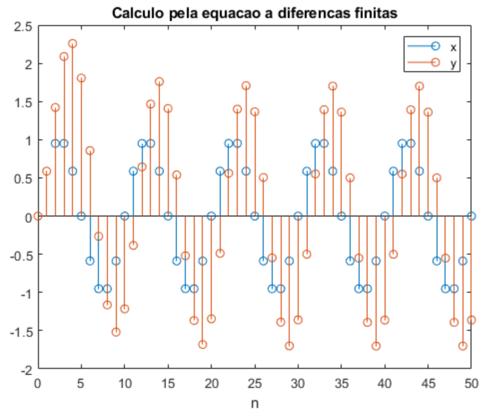


Figura 15: *Gráfico gerado*

Neste script, o sistema é definido nas linhas 12 e 13, ao se filtrar o sinal de entrada x[n] usando uma função de transferência racional, definida pelo numerador Num e pelo denominador Den (ambos definidos nas linhas 9 e 10).

VII. Tutorial 5 - Letra g

```
clear; close all; clc;
T = 1;       % intervalo de amostragem
N = 50;
w0 = pi/4    % frequencia rejeicao
n = 0:N;

wi = 0.3*w0;     % frequencia da entrada
x = sin(wi*n);


% especifica os polos e zeros do sistema
ro = 0.8;
K = 1;
z = [1*exp(j*w0), 1*exp(-j*w0)];     % zeros de H(z)
p = ro*z;                            % polos de H(z)

figure(1);
subplot(2,2,1);
H = zpk(z,p,K, T);  % cria funcao de transferencia
pzplot(H); axis equal % pzplot usa objetos sys gerados em zpk
```

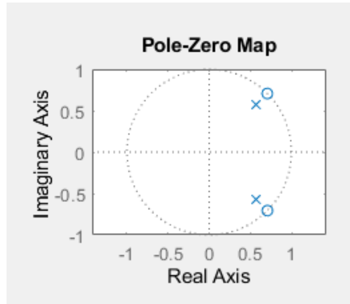


Figura 16: *Gráfico gerado*

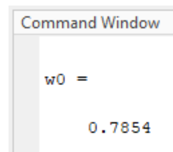
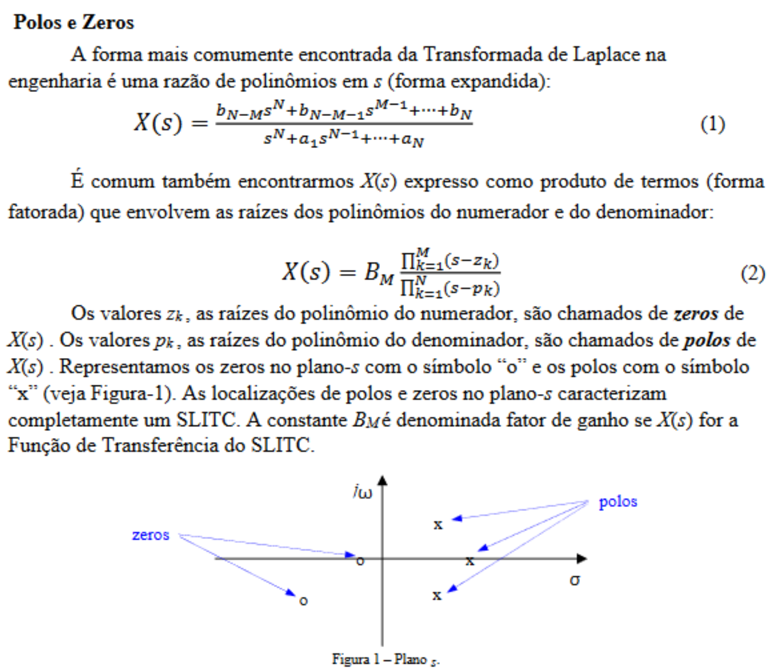


Figura 17: *Command Window*



Polos e Zeros

A forma mais comumente encontrada da Transformada de Laplace na engenharia é uma razão de polinômios em s (forma expandida):

$$X(s) = \frac{b_{N-M}s^{N} + b_{N-M-1}s^{M-1} + \cdots + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_N} \qquad (1)$$

É comum também encontrarmos $X(s)$ expresso como produto de termos (forma fatorada) que envolvem as raízes dos polinômios do numerador e do denominador:

$$X(s) = B_M \frac{\prod_{k=1}^{M}(s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - p_k)} \qquad (2)$$

Os valores z_k, as raízes do polinômio do numerador, são chamados de ***zeros*** de $X(s)$. Os valores p_k, as raízes do polinômio do denominador, são chamados de ***polos*** de $X(s)$. Representamos os zeros no plano-s com o símbolo "o" e os polos com o símbolo "x" (veja Figura-1). As localizações de polos e zeros no plano-s caracterizam completamente um SLITC. A constante B_M é denominada fator de ganho se $X(s)$ for a Função de Transferência do SLITC.

Figura 1 – Plano s.

Figura 18: *Fundamentação Teórica*

VIII. Tutorial 5 - Letra h

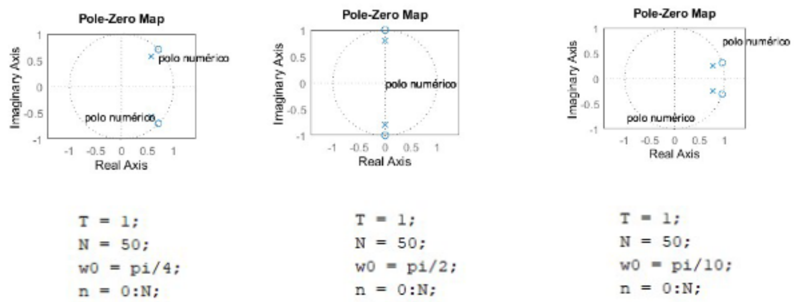


Figura 19: *Gráficos gerados*

IX. Tutorial 5 - Letra i

```
clear; close all; clc;
T = 1;      % intervalo de amostragem
N = 50;
w0 = pi/4   % frequencia rejeicao
n = 0:N;

wi = 0.3*w0;    % frequencia da entrada
x = sin(wi*n);


% especifica os polos e zeros do sistema
ro = 0.8;
K = 1;
z = [1*exp(j*w0), 1*exp(-j*w0)];    % zeros de H(z)
p = ro*z;                           % polos de H(z)

figure(1);
subplot(2,2,1);
H = zpk(z,p,K, T);  % cria funcao de transferencia
pzplot(H); axis equal % pzplot usa objetos sys gerados em zpk

subplot(2,2,2);
Num = poly(z);
Den = poly(p);
y = filter(Num, Den, x);
plot(n, x, n, y); legend('x[n]', 'y[n]');
title(['ro = ', num2str(ro), ' , wi/w0 = ', num2str(wi/w0)]);
```

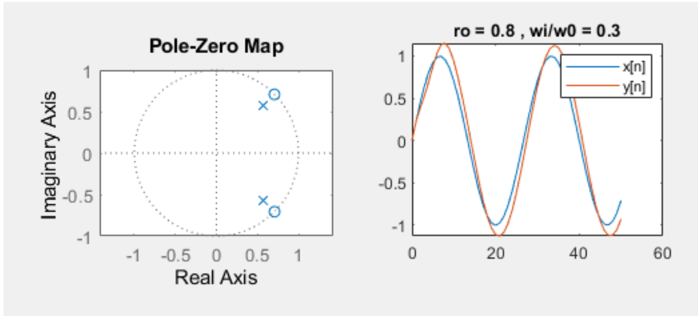


Figura 20: *Gráfico gerado*

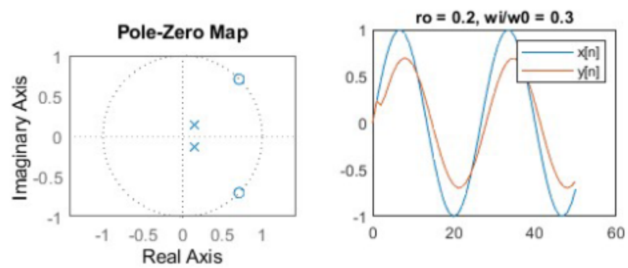


Figura 21: *Gráfico gerado*

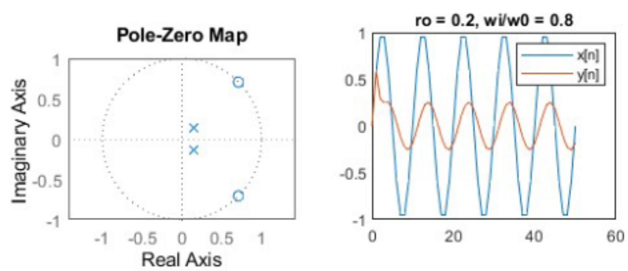


Figura 22: *Gráfico gerado*

Observa-se que quanto menos seletivo o filtro (ou seja, para maiores valores de ro), maior a atenuação do sinal. Assim, assume-se que um filtro ideal deve ter sua seletividade definida de forma a não corromper informações do dado analisado. Além disso, quanto maior a faixa da frequência rejeitada, menor o período de oscilação.

X. Tutorial 5 - Letra j

```
clear; close all; clc;
T = 1;       % intervalo de amostragem
N = 50;
w0 = pi/4    % frequencia rejeicao
n = 0:N;

wi = 0.3*w0;     % frequencia da entrada
x = sin(wi*n);
```

```
% especifica os polos e zeros do sistema
ro = 0.8;
K = 1;
z = [1*exp(j*w0), 1*exp(-j*w0)];     % zeros de H(z)
p = ro*z;                            % polos de H(z)

figure(1);
subplot(2,2,1);
H = zpk(z,p,K, T);  % cria funcao de transferencia
pzplot(H); axis equal % pzplot usa objetos sys gerados em zpk

subplot(2,2,2);
Num = poly(z);
Den = poly(p);
y = filter(Num, Den, x);
plot(n, x, n, y); legend('x[n]', 'y[n]');
title(['ro = ', num2str(ro), ' , wi/w0 = ', num2str(wi/w0)]);

subplot(2,2,3);
w = 0:0.1:pi;
Hw = freqz(Num, Den, w);
plot(w, 20*log10(abs(Hw)));
xlabel('\omega [rad/s]');
ylabel('Modulo [dB]');
grid;
```

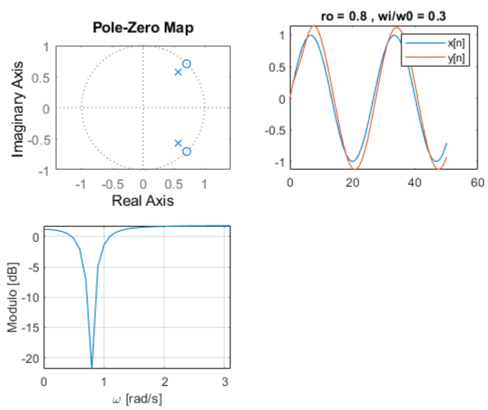


Figura 23: *Gráfico gerado*

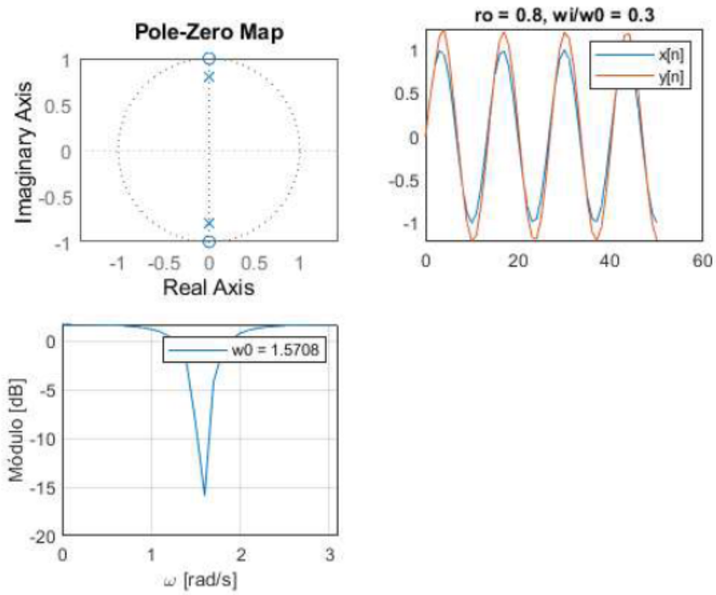


Figura 24: *Gráfico gerado*

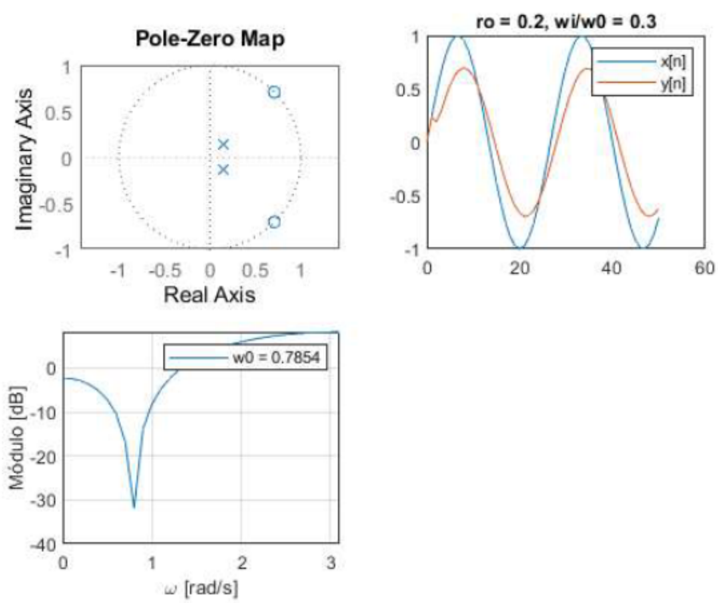


Figura 25: *Gráfico gerado*

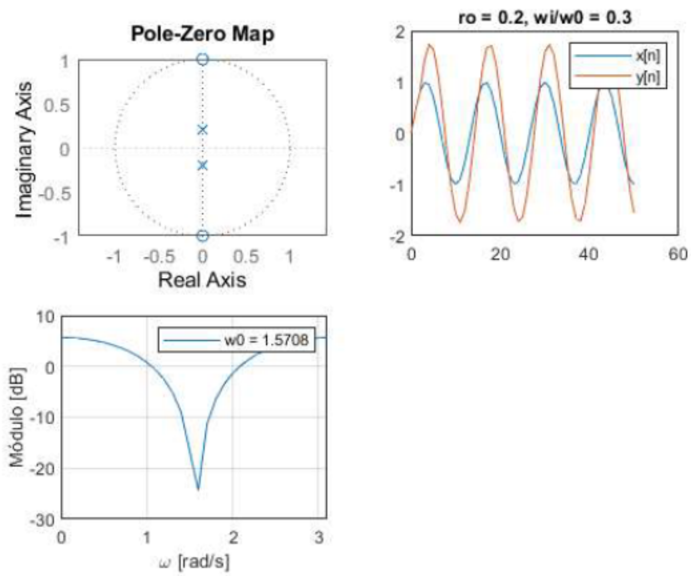


Figura 26: *Gráfico gerado*

Pode-se observar que quanto maior a frequência de rejeição w0, maior a frequência do sinal de saída – já que as frequências atenuadas estão em faixas também mais altas.

XI. Tutorial 5 - Letra k

```
clear; clc; close all;

fs = 8000;      % T = 1/fs
f0 = 1500;      % frequencia do pico, Hz
BW = 300;       % largura de faixa do pico, Hz
Q = f0/BW;      % fator de merito

sigma = -pi*f0/Q;       % amortecimentos (plano s)
r = exp(sigma/fs);      % raios dos polos (plano z)
teta = 2*pi*f0/fs;      % angulos (frez), (plano z)

figure(1);

% TEMPO DISCRETO (d)
zd = [0 0];     % 2 zeros na origem para causalidade
pd = [r*exp(j*teta), r*exp(-j*teta)];

numd = poly(zd);
dend = poly(pd);

subplot(1,2,1);
[Hw, w] = freqz(numd, dend, 500, fs); % 500 pontos do espectro
ModH = abs(Hw);                       % modulo
plot(w, 20*log10(ModH/max(ModH)));    % modulo normalizado

title('Sistema de tempo discreto');
ylabel('Magnitude (dB)'); xlabel('frequencia (Hz)');
```

```

subplot(1,2,2);
H = zpk(zd,pd,1,1/fs);
pzplot(H); axis equal;
title('plano z'); xlabel('re'); ylabel('im');
```

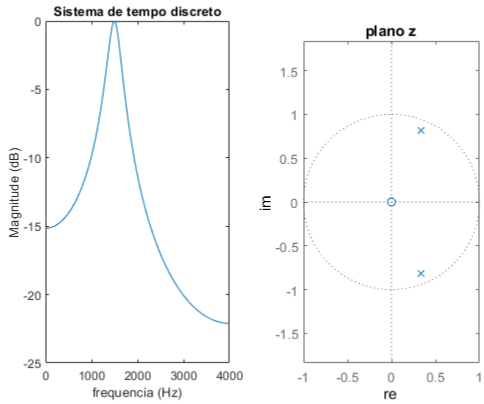


Figura 27: *Gráfico gerado*

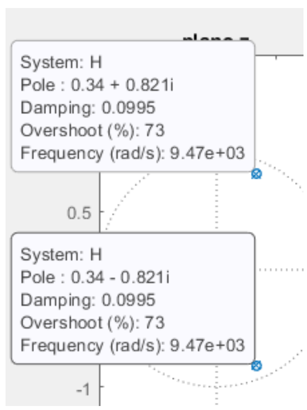


Figura 28: *Coordenadas*

XII. Tutorial 5 - Letra l

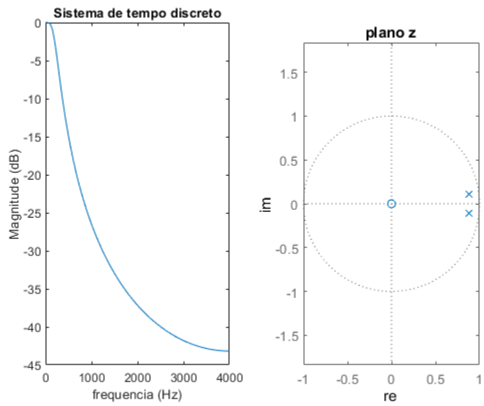


Figura 29: *Gráfico gerado*

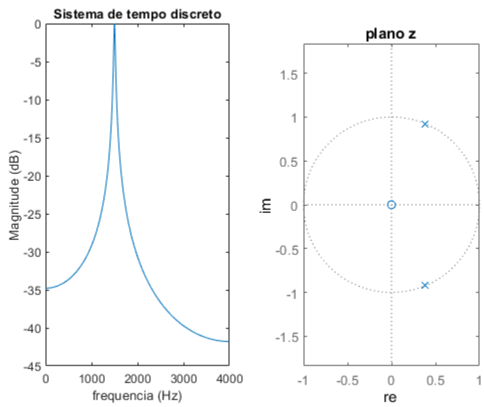


Figura 30: *Gráfico gerado*

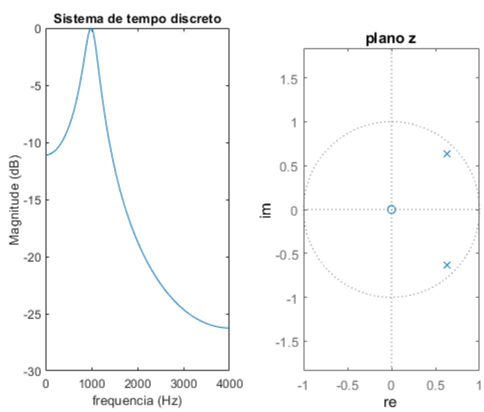


Figura 31: *Gráfico gerado*

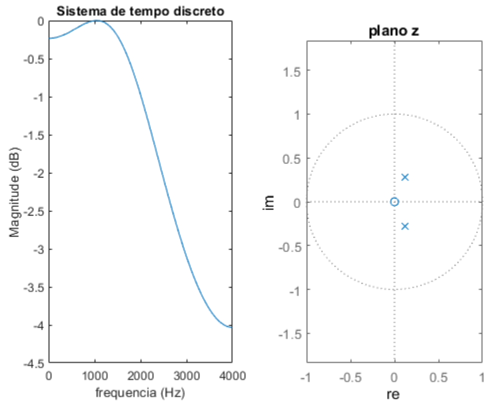


Figura 32: *Gráfico gerado*

O gráfico do plano z confirma que o sistema é estável, uma vez que z se encontra dentro da coroa de raio unitário. Assim, nota-se também que a magnitude atinge o pico para o próprio valor de f0.