Aula 4

Ana Gonçalves
Universidade Federal de Minas Gerais

I. Tutorial 4 - Letra a

Tem-se a forma padronizada da função de transferência como:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1}$$

Os comportamentos oscilatórios (subamortecido) ou não (sobreamortecido ou criticamente amortecido) podem ser estudados no domínio do tempo variando-se ζ.
O script é a resposta impulsiva através da transformada inversa de Laplace da função de transferência.

```
1 clear
2 clc
3 close all
4
5 syms s t zeta wn
6 H = (wn^2)/(s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2);
7 h = ilaplace(H,t);
8 pretty(h);
```

A saída gerada na linha 9 foi essa abaixo.

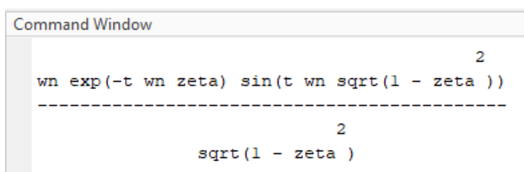

Figura 1: *Command Windows*

Pode ser escrita como

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-t\omega_n\zeta} sin(t\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2}$$

Caso ζ « 1, a expressão simplificada ficaria

$$h(t) = \omega_n e^{-t\omega_n\zeta} sin(t\omega_n) \tag{3}$$

II. Tutorial 4 - Letra b

$0 < \zeta < 1$: Sistema sub-amortecido ⇒ Resposta transiente oscilatória.
$\zeta = 1$: Sistema criticamente amortecido ⇒ Resposta transiente não oscilatória.
$\zeta > 1$: Sistema sobre-amortecido ⇒ Resposta transiente não oscilatória.

```
clear
clc
```

```
close all

syms s t zeta wn
H = (wn^2)/(s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2);
h = ilaplace(H,t);
pretty(h);

figure(1);
hold on;
t1 = 0:0.1:20;

h1  = subs(h, {t, wn, zeta}, {t1 1 0.1}); % wn = 1, zeta = 0.1
plot(t1, h1, 'color', [0.800 0.800 0.200],'DisplayName', '\zeta = 0.1');
hold on;
h1  = subs(h, {t, wn, zeta}, {t1 1 0.8}); % wn = 1, zeta = 0.8
plot(t1, h1, 'color', [0.900 0.125 0.400],'DisplayName', '\zeta = 0.8');
h1  = subs(h, {t, wn, zeta}, {t1 1 1.1}); % wn = 1, zeta = 1.1
plot(t1, h1, 'color', [0.100 0.600 0.600],'DisplayName', '\zeta = 1.1');
xlabel('\omega [rad/s]');
hold off;
```

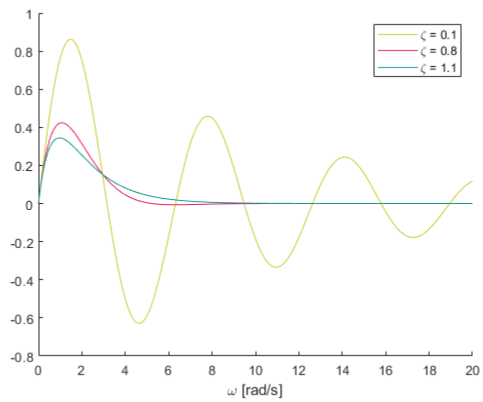

Figura 2: *Gráfico*

III. Tutorial 4 - Letra c

Sistemas sub amortecidos	$\mathcal{L}^{-1}[C(s)] = c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$
Criticamente amortecidos	$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \quad \text{for } t \geq 0$
Super amotecidos	$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right),$ $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$ $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n.$

Figura 3: *Equações*

Por norma, o tempo de subida corresponde ao tempo necessário para que a resposta passe de 0% a 100% do seu valor final.
Sabendo que a Frequência Natural Amortecida é dada por :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{4}$$

O tempo de subida é:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} tan^{-1}(-\frac{\omega_d}{\zeta \omega_n}) \tag{5}$$

A amplitude sobre sinal máximo (overshoot) Valor de pico da curva da resposta medido a partir do valor final de regime estacionário da resposta. Geralmente é definido em termos percentuais :

$$e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{6}$$

```
clear
clc
close all
syms s t zeta wn

% dom[U+FFFD]o de Laplace
H = ((wn^2)/(s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2))/s;

% resposta ao degrau no dom[U+FFFD]o do tempo
st = ilaplace(H,t);

figure(1)
hold on;
t1 = 0:0.1:20;

h1 = subs(st, {t, wn, zeta}, {t1 1 0.1});
plot(t1, h1);
h1 = subs(st, {t, wn, zeta}, {t1 1 0.8});
plot(t1, h1);
h1 = subs(st, {t, wn, zeta}, {t1 1 1.1});
plot(t1, h1);
xlabel('\omega [rad/s]');
legend('\zeta = 0.1', '\zeta = 0.8', '\zeta = 1.1');
hold off;
```

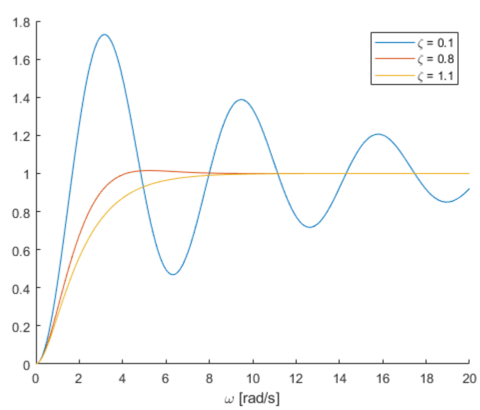

Figura 4: *Gráfico*

IV. Tutorial 4 - Letra d

```
clear
clc
close all

wn = 1;
zeta = 0.7;
Num = [wn];
Den = [1 2*zeta*wn wn^2];
H = tf(Num, Den); % cria funcao de transferencia

t = 0:0.1:10;
figure(1)
subplot(2,2,1);
st = step(H,t); % step(H) gera um grafico default
plot(t, st); % alternativa para detalhar a figura
grid; grid minor; % grades do grafico
title(['zeta = ', num2str(zeta)]); % usa vetor de strings
xlabel('tempo [s]'); ylabel('Resposta ao degrau [ua]');

subplot(2,2,2);
impulse(H); % mais opcoes graficas com impulseplot()

subplot(2,2,3);
pzmap(H); % mais opcoes graficas com pzplot()
p = roots(Den); % calcula polos e imprime na linha de comando
```

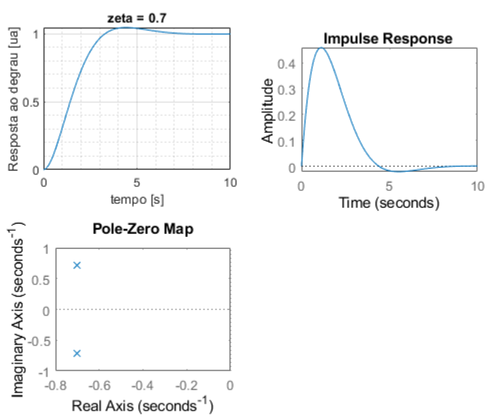

Figura 5: *Gráfico*

V. Tutorial 4 - Letra e

```
clear
clc
close all

wn = 1;
zeta = 0.7;
Num = [wn];
Den = [1 2*zeta*wn wn^2];
```

```
H = tf(Num, Den); % cria funcao de transferencia

t = 0:0.1:10;
figure(1)
subplot(2,2,1);
st = step(H,t); % step(H) gera um grafico default
plot(t, st); % alternativa para detalhar a figura
grid; grid minor; % grades do grafico
title(['zeta = ', num2str(zeta)]); % usa vetor de strings
xlabel('tempo [s]'); ylabel('Resposta ao degrau [ua]');

subplot(2,2,2);
impulse(H); % mais opcoes graficas com impulseplot()

subplot(2,2,3);
pzmap(H); % mais opcoes graficas com pzplot()
p = roots(Den); % calcula polos e imprime na linha de comando

subplot(2,2,4);
p_real = real(p);
hold on; grid;
scatter(p, -p_real, '+');
scatter(p, p_real, '+');
str = strcat('\zeta = ', num2str(zeta)); % usa concatenacao
text(-1.5, 0.3, str); % imprime str nas coordenadas -1.5 e 0.3
```

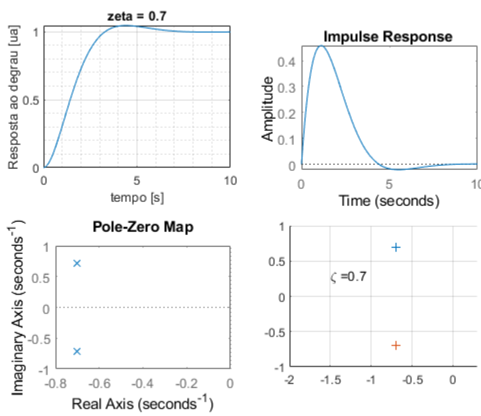

Figura 6: *Subamortecido*

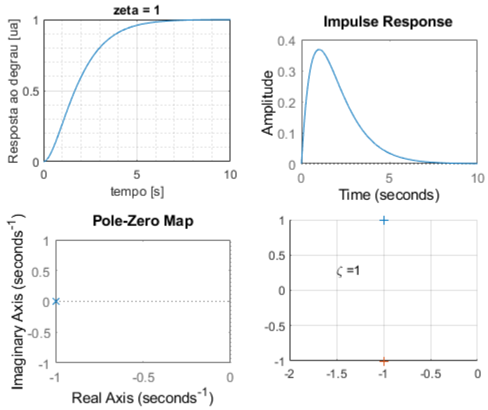

Figura 7: *Criticamente amortecido*

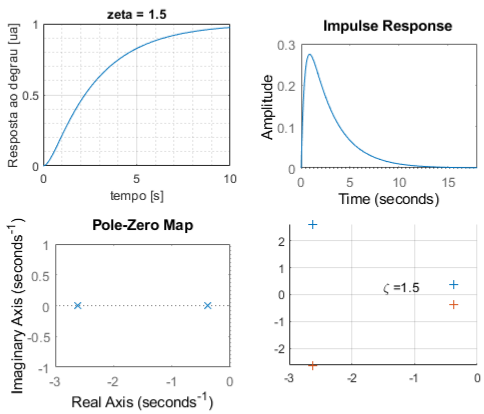

Figura 8: *Sobreamortecido*

VI. Tutorial 4 - Letra f

```
clear; close all; clc

wn = 2; % rad/s
zeta = 0.1; % executar com zeta = 0.01 tambem

Num = wn^2;
Den = [1 2*zeta*wn wn^2];
H = tf(Num,Den);

w = logspace(0, 1, 1000); % 500 pontos entre 10^0 e 10^1
bode(H, w); % Hw: 1 x 1 x length(w)
grid;
title('Sistema de 2a ordem'); % sobrepoe ao titulo default
str = ['\omega_n = ', num2str(wn), ' Hz', ' \zeta = ', num2str(zeta)];
gtext(str);
```

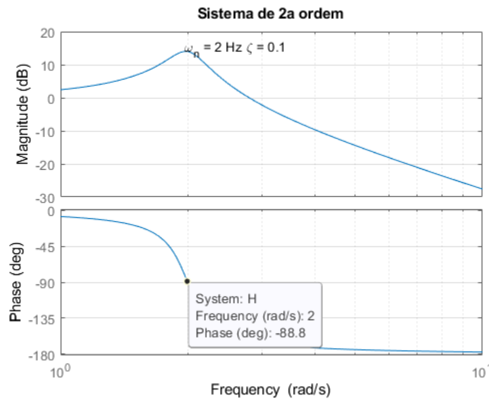

Figura 9: *Gráfico*

A magnitude (dB) é 14 dB/s para a defasagem (rad/s) de 2 rad/s.

VII. Tutorial 4 - Letra g

O fator de amortecimento foi diminuido de 0.1 para 0.01. O valor do fator de amortecimento determina a magnitude desse pico ressonante. Para valores pequenos geram-se picos grandes.

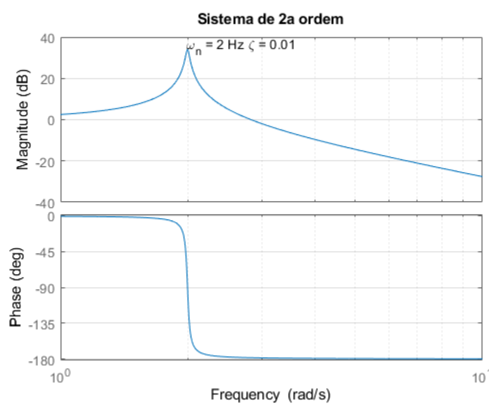

Figura 10: *Gráfico*

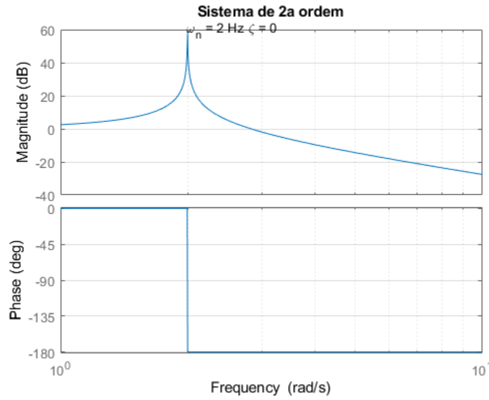

Figura 11: *Gráfico*

VIII. Tutorial 4 - Letra h

Quando $\omega \longrightarrow \infty$ tem-se $|H(j\omega)| \longrightarrow 0$. De modo contrário $\omega \longrightarrow 0$ tem-se $|H(j\omega)| \longrightarrow 1$.

IX. Tutorial 4 - Letra i

Os picos são picos de ressonância.

```
clear
clc
close all
[re, im] = meshgrid(-1:0.02:1); % pontos da grade no plano s
s = re + j*im; % vetor (complexo) com os pontos
zeta = 0.1; % fator de amortecimento
wn = .5; % frequencia natural
% Valor absoluto de H(s)
ModH = abs(wn^2 ./(s.^2 + 2*zeta*wn.*s + wn^2));

mesh(re, im, ModH); % plota superficie
xlabel('re{s} = sigma'); ylabel('imag{s} = j\omega');
title('Magnitude de H(s)');
```

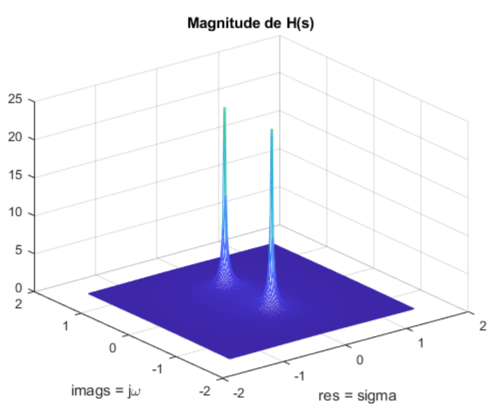

Figura 12: *Gráfico*

X. Tutorial 4 - Letra j

```
clear
clc
close all
[re, im] = meshgrid(-1:0.02:1); % pontos da grade no plano s
s = re + j*im; % vetor (complexo) com os pontos
zeta = 0.1; % fator de amortecimento
wn = .5; % frequencia natural
% Valor absoluto de H(s)
ModH = abs(wn^2 ./(s.^2 + 2*zeta*wn.*s + wn^2));

mesh(re, im, ModH); % plota superficie
xlabel('re{s} = sigma'); ylabel('imag{s} = j\omega');
title('Magnitude de H(s)');

Den = [1 2*zeta*wn wn^2];;
p = roots(Den);
```

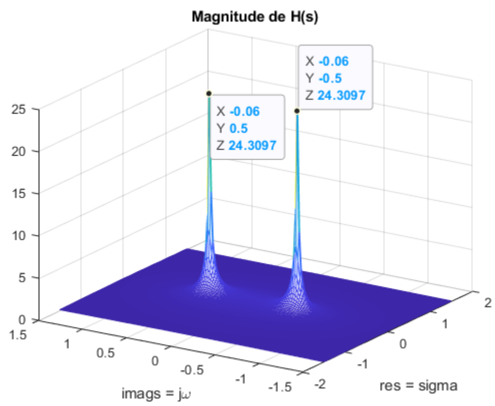

Figura 13: *Gráfico*

XI. Tutorial 4 - Letra k

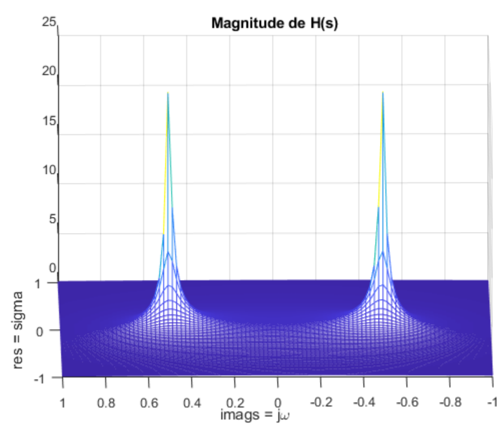

Figura 14: *Gráfico*

XII. Bibliografia

Resposta ao Degrau no Matlab (Sistemas de Controle)
APONTAMENTOS DE MATLAB CONTROL SYSTEM Toolbox
Diagramas de Bode