UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et génie informatique

éléments de statique et dynamique

Rapport APP1

Présenté à
l'équipe professorale de la session S4

Produit par
Axel Bosco, Philippe Garneau, Philippe Spino

7 mai 2017 - Sherbrooke

Contents

1 Introduction

Dans le cadre de l'implémentation d'un système de commande du bras mécanique de l'entreprise CRM, il faut analyser le mouvement d'un point A sur le plan 2D de celui-ci. Le point A, situé à l'extrémité des bras du robot, bouge selon le bras BA attaché au moteur MB et le bras BA bouge selon le bras OB avec le moteur MO. Notre mandat est de déterminer les forces et les couples nécessaires pour maintenir le robot en équilibre ou de le bougé selon des directives spécifiques. Pour la résolution de la problématique, l'équipe a divisé l'ensemble en plusieurs étapes. La première étape fût de regarder la cinématique du système de manière générale, ensuite dans des cas avec des restrictions sur les mouvements possibles du point A dans le plan 2D. En deuxième partie, l'analyse est centrée sur la statique et la dynamique du système.

2 Cinématique

Dans l'analyse de la cinématique, il y avait trois cas à analyser. Il faut déterminer la relation du mouvement du Point A en reliant les mouvements angulaires des bras OB et BA au mouvement linéaire du point A dans tous les cas. Précisément, il faut déterminer les vecteurs de positions, de vitesses et d'accélération linéaire du point A en fonction des longueurs des bras, soit L1 et L2, des angles ϕ et θ et de leur vitesse et accélération angulaires respectives. Les calcules présenté dans la section suivant explique les démarches mathématiques utilisé pour la résolution des cas.

2.1 équations générales

équation générale: vecteur position

$$\overrightarrow{OA} = l_1 \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

équation générale: vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V_{OA}} = l_1 \begin{bmatrix} -sin(\theta)\theta' \\ cos(\theta)\theta' \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -sin(\phi)\phi' \\ cos(\phi)\phi' \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

equation generale: vecteur acceleration

$$\overrightarrow{\alpha_{OA}} = l_1 \begin{bmatrix} -cos(\theta)(\theta')^2 - sin(\theta)\theta'' \\ -sin(\theta)(\theta')^2 + cos(\theta)\theta'' \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -cos(\phi)(\phi')^2 - sin(\phi)\phi'' \\ -sin(\phi)(\phi')^2 + cos(\phi)\phi'' \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.2 Mouvement horizontal

2.2.1 Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est negatif

Trouver $sin(\phi)$:

$$l_1 = l_2 \tag{4}$$

$$\overrightarrow{Y_A} = l_1 sin(\theta) + l_1 sin(\phi) \tag{5}$$

$$0 = l_1 sin(\theta) + l_1 sin(\phi) \tag{6}$$

$$sin(\phi) = -sin(\theta) \tag{7}$$

Trouver $cos(\phi)$ a partir de $sin(\phi)$:

$$cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1 \tag{8}$$

$$cos(\phi) = \sqrt{1 - sin^2(\theta)} \tag{9}$$

2.2.2 3 equations cinematiques

Position:

$$l_1 = l_2 \tag{10}$$

$$\overrightarrow{X_A} = l_1 cos(\theta) + l_1 \sqrt{1 - sin^2(\theta)} \tag{11}$$

$$\overrightarrow{X_A} = l_1 cos(\theta) + l_1 \sqrt{cos^2(\theta)} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{X_A} = 2l_1 cos(\theta) \tag{13}$$

Vitesse:

$$\overrightarrow{V_{Ax}} = \frac{d(2l_1 cos(\theta))}{dt} \tag{14}$$

$$\overrightarrow{V_{Ax}} = -2l_1 sin(\theta)\theta' \tag{15}$$

$$\theta' = \omega_{OB} \tag{16}$$

$$\overrightarrow{V_{Ax}} = -2l_1 sin(\theta)\omega_{OB} \tag{17}$$

Acceleration:

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = \frac{d(-2l_1 sin(\theta)\theta')}{dt} \tag{18}$$

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = -2l_1 cos(\theta)(\theta')^2 - 2l_1 sin(\theta)\theta'' \tag{19}$$

$$\theta' = \omega_{OB} \tag{20}$$

$$\theta'' = \alpha_{OB} \tag{21}$$

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = -2l_1 cos(\theta)(\omega_{OB})^2 - 2l_1 sin(\theta)\alpha_{OB} \tag{22}$$

2.3 Movement vertical

2.3.1 Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est negatif

Trouver $cos(\phi)$:

$$l_1 = l_2 \tag{23}$$

$$\overrightarrow{X_A} = l_1 cos(\theta) + l_1 cos(\phi) \tag{24}$$

$$l_1 = l_1 cos(\theta) + l_1 cos(\phi) \tag{25}$$

$$cos(\phi) = 1 - cos(\theta) \tag{26}$$

Trouver $sin(\phi)$ a partir de $cos(\phi)$:

$$cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1 \tag{27}$$

$$sin^2(\phi) = 1 - cos^2(\phi) \tag{28}$$

$$sin^2(\phi) = -cos^2(\theta) + 2cos(\theta) \tag{29}$$

$$\pm sin(\phi) = \sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)} \tag{30}$$

Nous considerons que ϕ est negatif, donc:

$$sin(\phi) = -\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)} \tag{31}$$

2.3.2 2 equations cinematiques

Position:

$$l_1 = l_2 \tag{32}$$

$$\overrightarrow{Y_A} = l_1 sin(\theta) - l_1 \sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)} \tag{33}$$

Vitesse:

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = \frac{d(l_1 sin(\theta) - l_1 \sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)})}{dt} \tag{34}$$

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = l_1 cos(\theta)\theta' - \frac{l_1(-cos^2(\theta) + 2cos(\theta))'}{2\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)}} \tag{35}$$

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = l_1 cos(\theta)\theta' - \frac{l_1 sin(\theta)(cos(\theta) - 1)\theta'}{\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)}} \tag{36}$$

$$\theta' = \omega_{OB} \tag{37}$$

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = l_1 cos(\theta)\omega_{OB} - \frac{l_1 sin(\theta)(cos(\theta)-1)\omega_{OB}}{\sqrt{-cos^2(\theta)+2cos(\theta)}} \tag{38}$$

3 Statique

Pour l'analyse du système dans le domaine du statique, on considère le cas ou le robot porte un objet O_A au point A. Pour simplifier l'analyse, les tiges, représenté par les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{BA}$, sont approximés par des tiges minces et uniformes, les moteurs M_O, M_B et O_A sont approximés par des sphères de dimensions négligeables par rapport a OB et BA. On considère aussi que la force FB et le couple CB sont exercés sur l'extrémité B de la tige BA. FB est appliquée par OB alors que CB est appliqué par MB.

3.1 Équation du DCL

Dans le domaine statique, on fait l'étude du système a l'équilibre. C'est a dire lorsque:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \tag{39}$$

et

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0 \tag{40}$$