

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Faculté de génie  
Département de génie électrique et génie informatique

## **Principes de dynamique et méthodes numériques**

Rapport APP2

Présenté à  
l'équipe professorale de la session S4

Produit par  
Éric Beaudoin, Alexandre Gagnon, Philippe Garneau

23 mai 2017 - Sherbrooke

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Design de la trajectoire et du débit d'eau</b>	<b>2</b>
2.1	Hauteur de $y_f$ et coefficients du polynôme d'interpolation de la trajectoire . . . . .	2
2.2	Vitesse de sortie du participant au point E sans friction . . . . .	2
2.3	Ordre et coefficients du polynôme d'approximation de $\mu_f$ . . . . .	2
2.4	Coefficient de friction dynamique . . . . .	3
2.5	Ouverture de la valve en % pour $\mu_f = 0.63$ . . . . .	3
2.6	Vitesse du participant le long de la trajectoire . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Ballon-mousse et la minuterie</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Coussin-trampoline</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>bassin</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>5</b>

# 1 Introduction

Dans le cadre de la conception d'une glissade à obstacles de style Wipe-Out, il faut répondre au devis émit par le WOQ. Les différents objectifs de conception que la société WOQ nous demandent sont : La conception de la trajectoire, déterminer l'ouverture de la valve, le calcul de la durée de la minuterie, la conception du coussin-trampoline et la conception du bassin d'eau.

## 2 Design de la trajectoire et du débit d'eau

### 2.1 Hauteur de $y_f$ et coefficients du polynôme d'interpolation de la trajectoire

Afin de trouver la valeur de  $y_f$ , plusieurs étapes ont été nécessaires. En premier lieu, nous avons trouvé tous les polynômes d'interpolation de la trajectoire avec des valeurs de  $y_f$  allant de 10m à 15m en incréments de 0.1m. Ensuite, nous avons fait la dérivée de chaque polynôme et avons vérifié la valeur de celle-ci à la fin de la glissade, donc à  $x=25m$ . Nous avons sauvegardé toutes les valeurs de  $y_f$  ayant un résultat de dérivée à  $x = 25m$  entre -0.01 et 0.01 et après avoir fait la moyenne de ces résultats, nous avons trouvé une valeur de  $y_f = 12.27m$ . Le polynôme d'interpolation final de la trajectoire est :

$$y = 30 - 4.6001x + 0.6310x^2 - 0.0329x^3 + 0.0006x^4 \quad (1)$$

### 2.2 Vitesse de sortie du participant au point E sans friction

Afin de trouver la vitesse de sortie du participant au point E, il faut utiliser la loi de conservation de l'énergie mécanique. Nous savons qu'il n'y a pas de force non-conservatives qui agissent sur notre système dans ce cas, donc l'équation est :

$$\Delta E_p + \Delta E_c = 0 \quad (2)$$

$$mg\Delta h + \frac{1}{2}m\Delta v^2 = 0 \quad (3)$$

$$784.8(12.27 - 30) + 40(v - 0)^2 = 0 \quad (4)$$

$$v = 18.65m/s = 67.14km/h \quad (5)$$

En observant ce résultat, il est évident qu'une force de friction sera nécessaire afin de ralentir le participant pour ne pas dépasser les contraintes définies dans le devis.

### 2.3 Ordre et coefficients du polynôme d'approximation de $\mu_f$

Afin de trouver une bonne approximation de la relation entre le coefficient de friction et le pourcentage d'ouverture de la valve, nous avons utilisé la projection orthogonale. Pour chaque valeur de  $M$  allant de  $N - 3$  à 1 où  $N = 11$ , nous avons généré une matrice de bonne grandeur pour ensuite trouver le polynôme d'approximation complet et finalement trouvé la valeur du  $RMS$ . Après avoir tracé les 8 courbes et analysé les valeurs de  $RMS$ , il peut être observé que les polynômes pour

$M = 4, 5, 6, 7$  ont un  $RMS$  très similaire. Par contre, les courbes pour  $M = 4, 6, 7$  démontrent un comportement où le coefficient de friction augmente lorsque le pourcentage d'ouverture de la valve augmente, donc ces polynômes sont ignorés. La courbe restante est celle où  $M = 5$  et nous donne un polynôme d'ordre 4 qui est :

$$\mu_f = 0.8691608391 - 0.0090679875x + 0.0000287878x^2 + 0.0000005633x^3 - 0.0000000035x^4 \quad (6)$$

La valeur du  $RMS$  pour ce polynôme est 0.0176219.

## 2.4 Coefficient de friction dynamique

Pour pouvoir déterminer le coefficient de friction dynamique ( $\mu_f$ ) voulu, il faut utiliser le théorème de la conservation de l'énergie mécanique(2). Dans notre cas, le devis indique que le coefficient choisit devrait faire en sorte que la vitesse finale des participants à la fin de la glissade soit de 22,5 km/h. On a donc l'équation :

$$mg\Delta h + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{x}{\cos\theta}\mu_f mg\cos\theta \quad (7)$$

En remplaçant les valeurs de notre situation soit  $h_{initial} = 30m$ ,  $h_{final} = 12,27m$ ,  $x = 25m$  et  $v = 6,25m/s$  on trouve la valeur de  $\mu_f$  :

$$\mu_f = 0,63 \quad (8)$$

## 2.5 Ouverture de la valve en % pour $\mu_f = 0.63$

Connaissant le coefficient de friction désiré, il faut simplement utiliser la fonction `roots()` avec le polynôme d'approximation de  $M = 5$  pour trouver la valeur de l'ouverture de la valve en %. La fonction `roots()` nous donne quatre (4) résultats, mais on observe qu'un seul résultat nous donne une valeur inférieure à 100, donc on ignore les autres. Le pourcentage d'ouverture de la valve pour  $\mu_f = 0.63$  est :

$$ouverture = 30.88\% \quad (9)$$

## 2.6 Vitesse du participant le long de la trajectoire

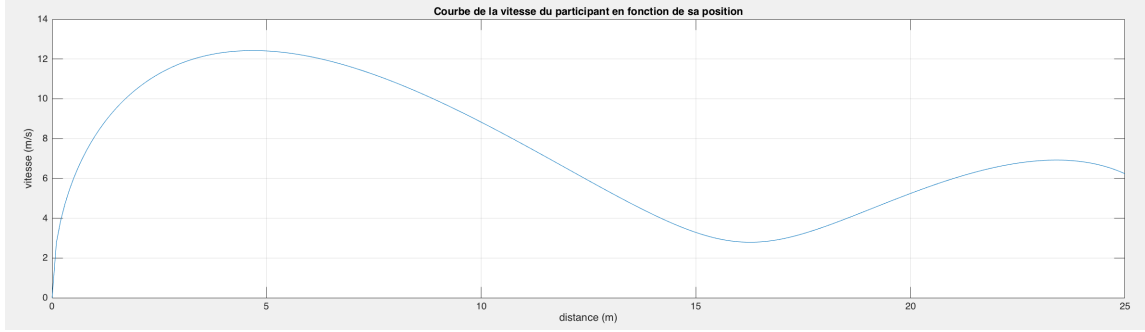
Pour trouver le graphique de la vitesse du participant le long de la trajectoire, il faut utiliser la loi de conservation de l'énergie mécanique. Nous pouvons prendre l'équation suivante :

$$\Delta E_p + \Delta E_c = -\mu_f mgx \quad (10)$$

Pour résoudre cette équation, il faut trouver une relation entre la hauteur du participant et sa position en x. Cette relation est exprimée par le polynôme d'interpolation trouvé précédemment. L'équation pour trouver la vitesse par rapport à la position du participant est :

$$v = \sqrt{2(-xg\mu_f - g(-4.6001x + 0.6310x^2 - 0.0329x^3 + 0.0006x^4))} \quad (11)$$

Cette équation donne le graphique suivant :



### 3 Ballon-mousse et la minuterie

Pour la situation G1, ou le coefficient de restitution = 0 en utilisant les formules de conservation de l'énergie

$$m_a V_a^n + m_b V_b^n = m_a V_a'^n + m_b V_b'^n \quad \text{ainsi que} \quad e = \frac{V_B'^n - V_A'^n}{V_A^n - V_B^n} \quad (12)$$

sachant que  $V_A^n = 22,5$  km/h et que  $V_B^n = 3,6$  km/h on trouve rapidement avec matlab que  $V_A'^n = 20,12$  km/h et que  $V_B'^n = 20,2$  km/h

Pour la situation G2, ou le coefficient de restitution = 0.8, avec les meme formules, on obtiens  $V_A'^n = 18,23$  km/h et que  $V_B'^n = 2,65$  km/h

sachant ces deux mesures, nous pouvons trouver le temps que prennent le participant pour franchir la distance de 3m. Pour le cas G1, avec incertitude de 0.02, on obtiens un r/sultat de 0,59 sec et pour G2, 0,54 sec

### 4 Coussin-trampoline

EN se basant sur la formule de l'accélération gravitationnelle et de la formule des ressorts, on trouve facilement le  $\Delta x$  en resolvant lequation quadratique que donne notre developpement

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \quad (13)$$

$$88 * 9,81 * (5 + \Delta x) = \frac{1}{2} * 6000 * \Delta x^2 \quad (14)$$

$$0 = 3000\Delta x^2 - 863.28\Delta x - 4316.4 \quad \text{nous donnant un } \Delta x = 1.35m \quad (15)$$

### 5 bassin

on début avec l'équation donner dans l'énoncé

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F = mg - K_f mg - bv^2 \quad (16)$$

comme dictée par la 2e loi de Newton :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{dv}{dz} \quad (17)$$

en faisant la substitution pr/c/dente, en regroupant les terme et en divisant les deux cote par v on obtiens :

$$m \frac{dv}{dz} = \frac{mg(1 - K_f)}{v} - bv \quad (18)$$

On pose donc l'accélération a zero pour avoir le systèeme a l'équilibre nous donnant l'équation 57

$$0 = mg(1 - K_f) - bv_e \quad (19)$$

$$v_e = \sqrt{\frac{mg(1 - K_f)}{b}} \quad (20)$$

par la suite on doit linéariser notre équation 55 pour pouvoir facilement isoler notre z. On commence par linéariser notre seul terme non lineaire etant

$$\frac{mg(1 - K_f)}{v} = \frac{mg}{v_e} (1 - K_f) + \left[ \frac{-1}{v_e^2} mg(1 - K_f) \right] (v - v_e) \quad (21)$$

en remplaçant le tout dans lequation de base 55

$$mv \frac{dv}{dz} = mg - \left[ \frac{mg}{v_e} (1 - K_f) + \left[ \frac{-1}{v_e^2} mg(1 - K_f) \right] (v - v_e) \right] - bv \quad (22)$$

comme la on sait que

$$\Delta v = v - v_e \quad \text{donc} \quad v = \Delta v + v_e \quad (23)$$

et que lon sosutrait les terme de l'equation a lequilibre on obtiens l'equation lineaire ( en isolant les v et le z de chaque coté ) :

$$m \frac{d\Delta v}{\Delta v} = \left[ \frac{1}{m} \left[ \frac{-1}{v_e^2} mg(1 - K_f) \right] - b \right] dz \quad (24)$$

par la suite, on intègre chaque côté de l'équation. Comme le coté gauche est bornée de 0,1ve jusqu'a vi - ve, cela nous donne 4,9644. Comme le côté droit ne contient qu'une variable étant le dz qui deviendras  $\Delta z$  Le reste du calcul effectuer sur matlab nous donne un z de 4,23m.

## 6 Conclusion

Pour conclure, ce projet est un projet peu réalisable, puisque le comité des initiations n'a pas les sous pour une telle glissade et il pourrait y avoir des blessures lorsque les participants tombe d'environ 10m pour ensuite tomber dans un étendu d'eau. Le risque de "flat" et de noyades et plutôt élevé. Par contre, toutes les demandes de la société WOQ ont été complété avec précision et le design technique de la glissade à obstacle pourrait commencer dès maintenant.