

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et génie informatique

Principes de dynamique et méthodes numériques

Rapport APP2

Présenté à
l'équipe professorale de la session S4

Produit par
Éric Beaudoin, Alexandre Gagnon, Philippe Garneau

23 mai 2017 - Sherbrooke

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Design de la trajectoire et du débit d'eau | 2 |
| 2.1 | Hauteur de y_f et coefficients du polynôme d'interpolation de la trajectoire | 2 |
| 3 | Cinématique | 2 |
| 3.1 | Équations générales | 2 |
| 3.2 | Mouvement horizontal | 4 |
| 3.2.1 | Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est négatif | 4 |
| 3.2.2 | Équations cinématiques | 4 |
| 3.3 | Mouvement vertical | 5 |
| 3.3.1 | Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est négatif | 5 |
| 3.3.2 | Équations cinématiques | 6 |
| 4 | Statique et Dynamique | 6 |
| 4.1 | Statique | 7 |
| 4.2 | Courbes obtenues de Statique et de Dynamique | 8 |
| 4.2.1 | Analyse des courbes de Statique et Dynamique | 9 |
| 5 | Conclusion | 9 |

1 Introduction

THIS NEEDS TO BE CHANGEDDDDD Dans le cadre de l'implémentation d'un système de commande du bras mécanique de l'entreprise CRM, il faut analyser le mouvement d'un point A sur le plan 2D de celui-ci. Le point A, situé à l'extrémité des bras du robot, bouge selon le bras BA attaché au moteur MB et le bras BA bouge selon le bras OB avec le moteur MO. Notre mandat est de déterminer les forces et les couples nécessaires pour maintenir le robot en équilibre ou de le bouger selon des directives spécifiques. Pour la résolution de la problématique, l'équipe a divisée l'ensemble en plusieurs étapes. La première étape fût de regarder la cinématique du système de manière générale, ensuite dans des cas avec des restrictions sur les mouvements possibles du point A dans le plan 2D. En deuxième partie, l'analyse est centrée sur la statique et la dynamique du système.

2 Design de la trajectoire et du débit d'eau

2.1 Hauteur de y_f et coefficients du polynôme d'interpolation de la trajectoire

Afin de trouver la valeur de y_f , plusieurs étapes ont été nécessaires. En premier lieu, nous avons trouvé tous les polynômes d'interpolation de la trajectoire avec des valeurs de y_f allant de 10m à 15m en incréments de 0.1m.

3 Cinématique

Dans l'analyse de la cinématique, il y avait trois cas à analyser. Il faut déterminer la relation du mouvement du Point A en reliant les mouvements angulaires des bras OB et BA au mouvement linéaire du point A dans tous les cas. Précisément, il faut déterminer les vecteurs de positions, de vitesses et d'accélération linéaire du point A en fonction des longueurs des bras, soit L_1 et L_2 , des angles ϕ et θ et de leur vitesse et accélération angulaires respectives. Les calculs présentés dans la section suivante explique les démarches mathématiques utilisées pour la résolution des cas.

3.1 Équations générales

Équation générale : vecteur position

$$\overrightarrow{OA} = l_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Équation générale : vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V_{OA}} = l_1 \begin{bmatrix} -\sin(\theta)\theta' \\ \cos(\theta)\theta' \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -\sin(\phi)\phi' \\ \cos(\phi)\phi' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Équation générale : vecteur accélération

$$\overrightarrow{\alpha_{OA}} = l_1 \begin{bmatrix} -\cos(\theta)(\theta')^2 - \sin(\theta)\theta'' \\ -\sin(\theta)(\theta')^2 + \cos(\theta)\theta'' \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -\cos(\phi)(\phi')^2 - \sin(\phi)\phi'' \\ -\sin(\phi)(\phi')^2 + \cos(\phi)\phi'' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

3.2 Mouvement horizontal

3.2.1 Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est negatif

Trouver $\sin(\phi)$:

$$l_1 = l_2 \quad (4)$$

$$\vec{Y}_A = l_1 \sin(\theta) + l_1 \sin(\phi) \quad (5)$$

$$0 = l_1 \sin(\theta) + l_1 \sin(\phi) \quad (6)$$

$$\sin(\phi) = -\sin(\theta) \quad (7)$$

Trouver $\cos(\phi)$ à partir de $\sin(\phi)$:

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \quad (8)$$

$$\cos(\phi) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \quad (9)$$

3.2.2 Équations cinématiques

Position :

$$l_1 = l_2 \quad (10)$$

$$\vec{X}_A = l_1 \cos(\theta) + l_1 \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \quad (11)$$

$$\vec{X}_A = l_1 \cos(\theta) + l_1 \sqrt{\cos^2(\theta)} \quad (12)$$

$$\vec{X}_A = 2l_1 \cos(\theta) \quad (13)$$

Vitesse :

$$\vec{V}_{Ax} = \frac{d(2l_1 \cos(\theta))}{dt} \quad (14)$$

$$\vec{V}_{Ax} = -2l_1 \sin(\theta) \theta' \quad (15)$$

$$\theta' = \omega_{OB} \quad (16)$$

$$\vec{V}_{Ax} = -2l_1 \sin(\theta) \omega_{OB} \quad (17)$$

Accélération :

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = \frac{d(-2l_1 \sin(\theta) \theta')}{dt} \quad (18)$$

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = -2l_1 \cos(\theta) (\theta')^2 - 2l_1 \sin(\theta) \theta'' \quad (19)$$

$$\theta' = \omega_{OB} \quad (20)$$

$$\theta'' = \alpha_{OB} \quad (21)$$

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = -2l_1 \cos(\theta) (\omega_{OB})^2 - 2l_1 \sin(\theta) \alpha_{OB} \quad (22)$$

3.3 Mouvement vertical

3.3.1 Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est négatif

Trouver $\cos(\phi)$:

$$l_1 = l_2 \quad (23)$$

$$\overrightarrow{X_A} = l_1 \cos(\theta) + l_1 \cos(\phi) \quad (24)$$

$$l_1 = l_1 \cos(\theta) + l_1 \cos(\phi) \quad (25)$$

$$\cos(\phi) = 1 - \cos(\theta) \quad (26)$$

Trouver $\sin(\phi)$ à partir de $\cos(\phi)$:

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \quad (27)$$

$$\sin^2(\phi) = 1 - \cos^2(\phi) \quad (28)$$

$$\sin^2(\phi) = -\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) \quad (29)$$

$$\pm \sin(\phi) = \sqrt{-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)} \quad (30)$$

Nous considérons que ϕ est négatif, donc :

$$\sin(\phi) = -\sqrt{-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)} \quad (31)$$

3.3.2 Équations cinématiques

Position :

$$l_1 = l_2 \quad (32)$$

$$\vec{Y}_A = l_1 \sin(\theta) - l_1 \sqrt{-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)} \quad (33)$$

Vitesse :

$$\vec{V}_{Ay} = \frac{d(l_1 \sin(\theta) - l_1 \sqrt{-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)})}{dt} \quad (34)$$

$$\vec{V}_{Ay} = l_1 \cos(\theta) \theta' - \frac{l_1 (-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta))'}{2\sqrt{-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)}} \quad (35)$$

$$\vec{V}_{Ay} = l_1 \cos(\theta) \theta' - \frac{l_1 \sin(\theta) (\cos(\theta) - 1) \theta'}{\sqrt{-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)}} \quad (36)$$

$$\theta' = \omega_{OB} \quad (37)$$

$$\vec{V}_{Ay} = l_1 \cos(\theta) \omega_{OB} - \frac{l_1 \sin(\theta) (\cos(\theta) - 1) \omega_{OB}}{\sqrt{-\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)}} \quad (38)$$

4 Statique et Dynamique

Pour l'analyse du système dans le domaine du statique, on considère le cas où le robot porte un objet O_A au point A. Pour simplifier l'analyse, les tiges, représentées par les vecteurs \vec{OB} et \vec{BA} , sont approximées par des tiges minces et uniformes, les moteurs M_O , M_B et O_A sont approximés par des sphères de dimensions négligeables par rapport à OB et BA. On considère aussi que la force FB et le couple CB sont exercés sur l'extrémité B de la tige BA. FB est appliquée par OB alors que CB est appliqué par MB.

4.1 Statique

Dans le domaine statique, on fait l'étude du système à l'équilibre. C'est à dire lorsque :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \quad (39)$$

et quand :

En appliquant les forces dans le Diagramme des Corps Libres, l'équation suivante est obtenue :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = -m_{BA} \cdot \vec{g} - m_A \cdot \vec{g} + \overrightarrow{F_B} \quad (40)$$

$$\sum F_x = -m_{BA} \cdot g_x - m_A \cdot g_x + F_{B_x} = 0 \quad (41)$$

$$\sum F_y = -m_{BA} \cdot g_y - m_A \cdot g_y + F_{B_y} = 0 \quad (42)$$

Dans l'équation 41, il n'est pas nécessaire de calculer la valeur de F_{B_x} car celle-ci vaut 0. Cela veut dire qu'il ne reste que F_{B_y} comme force.

$$F_{B_y} = m_A \cdot g + m_{BA} \cdot g \quad (43)$$

Il ne reste maintenant qu'à trouver la somme des moments de forces $\sum \overrightarrow{M_B}$.

$$\sum \overrightarrow{M_B} = -lm_A \cos(\phi) - \frac{l}{2} m_{BA} g \cos(\phi) + C_B = 0 \quad (44)$$

ce qui nous donne le couple C_B suivant :

$$C_B = lm_A \cos(\phi) + \frac{l}{2} m_{BA} g \cos(\phi) \quad (45)$$

En appliquant les forces dans le Diagramme Cinétique, l'équation suivante est obtenue :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m_{BA} \cdot \gamma_{G_{BA}} + m_A \cdot \gamma_{G_A} + \overrightarrow{F_B} \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} F_{B_x} \\ F_{B_y} \\ 0 \end{bmatrix} = m_{BA} \begin{bmatrix} -\omega_{BA}^2 \frac{l}{2} \\ \alpha_{BA} \frac{l}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + m_A \begin{bmatrix} -\omega_{BA}^2 l \\ \alpha_{BA} l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Ensuite, une projection est faite :

$$F_{B_x} = \frac{-m_{BA} \omega_{BA} l}{2} - m_A \omega_{BA} l \quad (48)$$

$$F_{B_y} = m_{BA} \alpha_{BA} + m_A \alpha_{BA} l + m_{BA} g + m_A g \quad (49)$$

En ce qui concerne la somme des moments d'inertie,

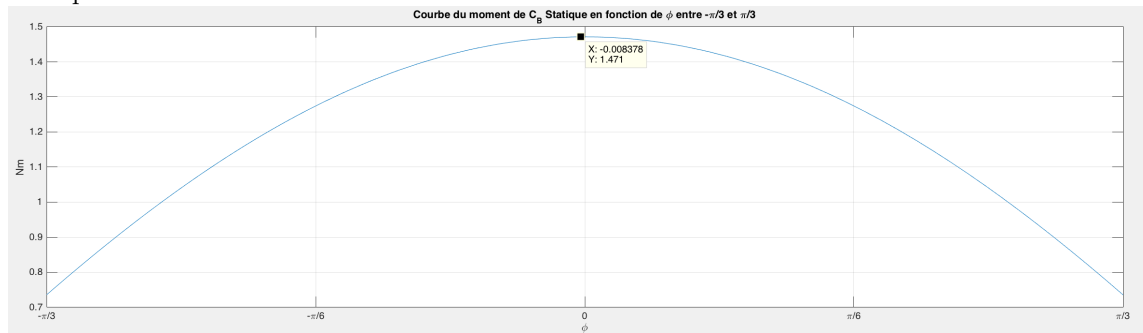
$$\sum \overrightarrow{M_A} = I_A \alpha_A + I_{BA} \alpha_{BA} \quad (50)$$

$$I_A \alpha_A + I_{BA} \alpha_{BA} = C_B - M_B - M_A \quad (51)$$

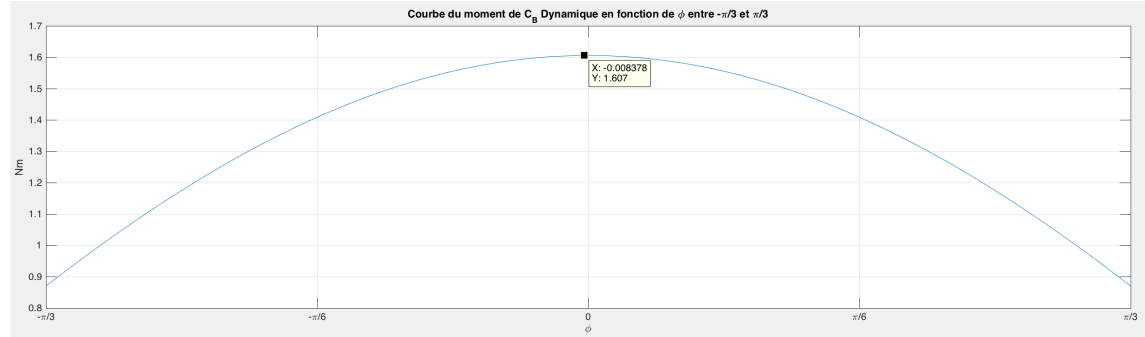
$$C_B = (ml^2 + \frac{ml^2}{3}) \alpha_{BA} + m_{BA} g \frac{l}{2} \cos(\phi) + m_A g l \cos(\phi) \quad (52)$$

4.2 Courbes obtenues de Statique et de Dynamique

Statique :



Dynamique :



4.2.1 Analyse des courbes de Statique et Dynamique

À première vue, on remarque que la courbe dynamique est plus élevée que la courbe statique. Cette observation est attendue, car afin de faire bouger un objet, il faut qu'il soit en équilibre (statique) et qu'on ajoute une force additionnelle. Il peut aussi être observé que la courbe dynamique semble représenter une simple translation positive sur l'axe des y de la courbe statique. Ce phénomène pourrait être expliqué par le fait qu'en statique, la somme des forces est égale à 0, mais qu'en dynamique, la somme des forces est non nulle. Cette différence entre la somme des forces en statique et dynamique semble représenter la valeur numérique de la translation de la courbe statique vers la courbe dynamique.

5 Conclusion

Pour conclure, l'analyse des éléments physiques du robot, a permis de trouver une relation du point A dans le cas général, seulement sur le mouvement horizontal et seulement sur le mouvement vertical. De plus, à l'aide de cette relation, les courbes du cas horizontal et vertical ont permis de tracer les configurations initiales et finales du robot. L'analyse de l'équilibre du système a permis de trouver les forces lorsque robot est immobile et lorsqu'il est en mouvement. De ce, la force \vec{F}_B a été trouvée et cette force a permis de trouver le couple M_B du système à l'équilibre et lorsqu'il y a une force constante α appliquée au bras BA.