UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et génie informatique

Principes de dynamique et méthodes numériques

Rapport APP2

Présenté à
l'équipe professorale de la session S4

Produit par
Éric Beaudoin, Alexandre Gagnon, Philippe Garneau

23 mai 2017 - Sherbrooke

Table des matières

1 Introduction

THIS NEEDS TO BE CHANGEDDDD Dans le cadre de l'implémentation d'un système de commande du bras mécanique de l'entreprise CRM, il faut analyser le mouvement d'un point A sur le plan 2D de celui-ci. Le point A, situé à l'extrémité des bras du robot, bouge selon le bras BA attaché au moteur MB et le bras BA bouge selon le bras OB avec le moteur MO. Notre mandat est de déterminer les forces et les couples nécessaires pour maintenir le robot en équilibre ou de le bouger selon des directives spécifiques. Pour la résolution de la problématique, l'équipe a divisée l'ensemble en plusieurs étapes. La première étape fût de regarder la cinématique du système de manière générale, ensuite dans des cas avec des restrictions sur les mouvements possibles du point A dans le plan 2D. En deuxième partie, l'analyse est centrée sur la statique et la dynamique du système.

2 Design de la trajectoire et du débit d'eau

2.1 Hauteur de y_f et coefficients du polynôme d'interpolation de la trajectoire

Afin de trouver la valeur de y_f, plusieurs étapes ont été nécessaires. En premier lieu, nous avons trouvé tous les polynômes d'interpolation de la trajectoire avec des valeurs de y_f allant de 10m à 15m en incréments de 0.1m.

3 Cinématique

Dans l'analyse de la cinématique, il y avait trois cas à analyser. Il faut déterminer la relation du mouvement du Point A en reliant les mouvements angulaires des bras OB et BA au mouvement linéaire du point A dans tous les cas. Précisément, il faut déterminer les vecteurs de positions, de vitesses et d'accélération linéaire du point A en fonction des longueurs des bras, soit L1 et L2, des angles ϕ et θ et de leur vitesse et accélération angulaires respectives. Les calculs présentés dans la section suivante explique les démarches mathématiques utilisées pour la résolution des cas.

3.1 Équations générales

Équation générale : vecteur position

$$\overrightarrow{OA} = l_1 \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Équation générale : vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V_{OA}} = l_1 \begin{bmatrix} -sin(\theta)\theta' \\ cos(\theta)\theta' \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -sin(\phi)\phi' \\ cos(\phi)\phi' \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Équation générale : vecteur accélération

$$\overrightarrow{\alpha_{OA}} = l_1 \begin{bmatrix} -cos(\theta)(\theta')^2 - sin(\theta)\theta'' \\ -sin(\theta)(\theta')^2 + cos(\theta)\theta'' \\ 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -cos(\phi)(\phi')^2 - sin(\phi)\phi'' \\ -sin(\phi)(\phi')^2 + cos(\phi)\phi'' \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

3.2 Mouvement horizontal

3.2.1 Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est negatif

Trouver $sin(\phi)$:

$$l_1 = l_2 \tag{4}$$

$$\overrightarrow{Y_A} = l_1 sin(\theta) + l_1 sin(\phi) \tag{5}$$

$$0 = l_1 sin(\theta) + l_1 sin(\phi) \tag{6}$$

$$sin(\phi) = -sin(\theta) \tag{7}$$

Trouver $cos(\phi)$ à partir de $sin(\phi)$:

$$cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1 \tag{8}$$

$$cos(\phi) = \sqrt{1 - sin^2(\theta)} \tag{9}$$

3.2.2 Équations cinématiques

Position :

$$l_1 = l_2 \tag{10}$$

$$\overrightarrow{X_A} = l_1 cos(\theta) + l_1 \sqrt{1 - sin^2(\theta)} \tag{11}$$

$$\overrightarrow{X_A} = l_1 cos(\theta) + l_1 \sqrt{cos^2(\theta)} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{X_A} = 2 l_1 cos(\theta) \tag{13}$$

Vitesse :

$$\overrightarrow{V_{Ax}} = \frac{d(2 l_1 cos(\theta))}{dt} \tag{14}$$

$$\overrightarrow{V_{Ax}} = -2 l_1 sin(\theta) \theta' \tag{15}$$

$$\theta' = \omega_{OB} \tag{16}$$

$$\overrightarrow{V_{Ax}} = -2 l_1 sin(\theta) \omega_{OB} \tag{17}$$

Accélération :

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = \frac{d(-2l_1 sin(\theta)\theta')}{dt} \tag{18}$$

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = -2l_1 cos(\theta)(\theta')^2 - 2l_1 sin(\theta)\theta'' \tag{19}$$

$$\theta' = \omega_{OB} \tag{20}$$

$$\theta'' = \alpha_{OB} \tag{21}$$

$$\overrightarrow{\gamma_{Ax}} = -2l_1 cos(\theta)(\omega_{OB})^2 - 2l_1 sin(\theta)\alpha_{OB} \tag{22}$$

3.3 Mouvement vertical

3.3.1 Relation entre θ et ϕ lorsque ϕ est négatif

Trouver $cos(\phi)$:

$$l_1 = l_2 \tag{23}$$

$$\overrightarrow{X_A} = l_1 cos(\theta) + l_1 cos(\phi) \tag{24}$$

$$l_1 = l_1 cos(\theta) + l_1 cos(\phi) \tag{25}$$

$$cos(\phi) = 1 - cos(\theta) \tag{26}$$

Trouver $sin(\phi)$ à partir de $cos(\phi)$:

$$cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1 \tag{27}$$

$$sin^2(\phi) = 1 - cos^2(\phi) \tag{28}$$

$$sin^2(\phi) = -cos^2(\theta) + 2cos(\theta) \tag{29}$$

$$\pm sin(\phi) = \sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)} \tag{30}$$

Nous considerons que ϕ est négatif, donc :

$$sin(\phi) = -\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)} \tag{31}$$

3.3.2 Équations cinématiques

Position :

$$l_1 = l_2 \tag{32}$$

$$\overrightarrow{Y_A} = l_1 sin(\theta) - l_1\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)} \tag{33}$$

Vitesse :

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = \frac{d(l_1 sin(\theta) - l_1\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)})}{dt} \tag{34}$$

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = l_1 cos(\theta)\theta' - \frac{l_1(-cos^2(\theta) + 2cos(\theta))'}{2\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)}} \tag{35}$$

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = l_1 cos(\theta)\theta' - \frac{l_1 sin(\theta)(cos(\theta) - 1)\theta'}{\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)}} \tag{36}$$

$$\theta' = \omega_{OB} \tag{37}$$

$$\overrightarrow{V_{Ay}} = l_1 cos(\theta)\omega_{OB} - \frac{l_1 sin(\theta)(cos(\theta) - 1)\omega_{OB}}{\sqrt{-cos^2(\theta) + 2cos(\theta)}} \tag{38}$$

4 Statique et Dynamique

Pour l'analyse du système dans le domaine du statique, on considère le cas ou le robot porte un objet O_A au point A. Pour simplifier l'analyse, les tiges, représenté par les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{BA}$, sont approximés par des tiges minces et uniformes, les moteurs M_O, M_B et O_A sont approximés par des sphères de dimensions négligeables par rapport a OB et BA. On considère aussi que la force FB et le couple CB sont exercés sur l'extrémité B de la tige BA. FB est appliquée par OB alors que CB est appliqué par MB.

4.1 Statique

Dans le domaine statique, on fait l'étude du système a l'équilibre. C'est a dire lorsque :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \tag{39}$$

et quand :

En appliquant les forces dans le Diagramme des Corps Libres, l'équation suivante est obtenue :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = -m_{BA}.\overrightarrow{g} - m_A.\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_B} \tag{40}$$

$$\sum F_x = -m_{BA}.g_x - m_A.g_x + F_{B_x} = 0 \tag{41}$$

$$\sum F_y = -m_{BA}.g_y - m_A.g_y + F_{B_y} = 0 \tag{42}$$

Dans l'équation 41, il n'est pas nécessaire de calculer la valeur de F_{B_x} car celle-ci vaut 0. Cela veut dire qu'il ne reste que F_{B_y} comme force.

$$F_{B_y} = m_A.g + m_{BA}.g \tag{43}$$

Il ne reste maintenant qu'à trouver la somme des moments de forces $\sum \overrightarrow{M_B}$.

$$\sum \overrightarrow{M_B} = -lm_A cos(\phi) - \frac{l}{2} m_{BA} g cos(\phi) + C_B = 0 \tag{44}$$

ce qui nous donne le couple C_B suivant :

$$C_B = lm_A cos(\phi) + \frac{l}{2} m_{BA} g cos(\phi) \tag{45}$$

En appliquant les forces dans le Diagramme Cinétique, l'équation suivante est obtenue :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m_{BA}.\gamma_{G_{BA}} + m_A.\gamma_{G_A} + \overrightarrow{F_B} \tag{46}$$

$$\begin{bmatrix} F_{B_x} \\ F_{B_y} \\ 0 \end{bmatrix} = m_{BA} \begin{bmatrix} -\omega_{BA}^2 \frac{l}{2} \\ \alpha_{BA} \frac{l}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + m_A \begin{bmatrix} -\omega_{BA}^2 l \\ \alpha_{BA} l \\ 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Ensuite, un projection est faite :

$$F_{B_x} = \frac{-m_{BA}\omega_{BA} l}{2} - m_A \omega_{BA} l \tag{48}$$

$$F_{B_y} = m_{BA}\alpha_{BA} + m_A \alpha_{BA} l + m_{BA} g + m_A g \tag{49}$$

En ce qui concerne la somme des moments d'inertie,

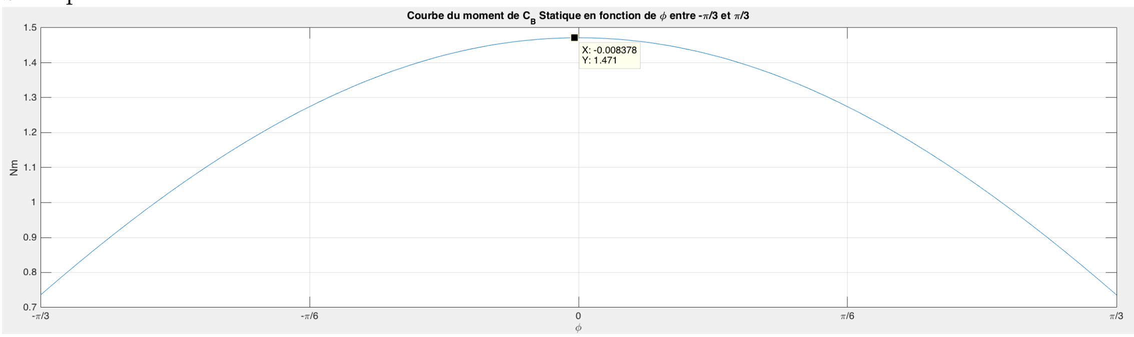
$$\sum \overrightarrow{M_A} = I_A \alpha_A + I_{BA}\alpha_{BA} \tag{50}$$

$$I_A \alpha_A + I_{BA}\alpha_{BA} = C_B - M_B - M_A \tag{51}$$

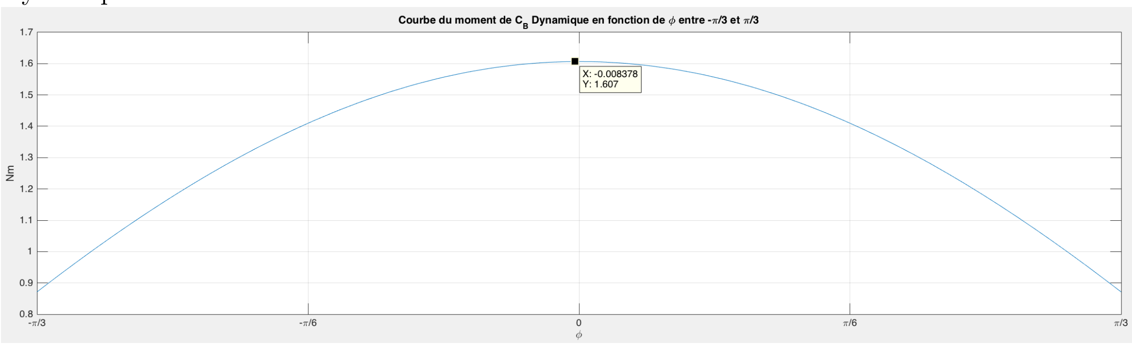
$$C_B = (ml^2 + \frac{ml^2}{3})\alpha BA + m_{BA} g \frac{l}{2} cos(\phi) + m_A g l cos(\phi) \tag{52}$$

4.2 Courbes obtenues de Statique et de Dynamique

Statique :



Dynamique :



4.2.1 Analyse des courbes de Statique et Dynamique

À première vue, on remarque que la courbe dynamique est plus élevée que la courbe statique. Cette observation est attendue, car afin de faire bouger un objet, il faut qu'il soit en équilibre (statique) et qu'on ajoute une force additionnelle. Il peut aussi être observé que la courbe dynamique semble représenter une simple translation positive sur l'axe des y de la courbe statique. Ce phénomène pourrait être expliqué par le fait qu'en statique, la somme des forces est égale à 0, mais qu'en dynamique, la somme des forces est non nulle. Cette différence entre la somme des forces en statique et dynamique semble représenter la valeur numérique de la translation de la courbe statique vers le courbe dynamique.

5 Conclusion

Pour conclure, l'analyse des éléments physiques du robot, a permis de trouver une relation du point A dans le cas général, seulement sur le mouvement horizontal et seulement sur le mouvement vertical. De plus, à l'aide de cette relation, les courbes du cas horizontal et vertical ont permis de tracer les configurations initiales et finales du robot. L'analyse de l'analyse de l'équilibre du système a permis de trouver les forces lorsque robot est immobile et lorsqu'il est en mouvement. De ce, la force $\overrightarrow{F_B}$ a été trouvés et cette force a permis de trouver le couple M_B du système a l'équilibre et lorsqu'il y a une force constant α appliquer au bras BA. aaaa

5.0.1 bassin

on début avec l'équation donner dans l'énoncé

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F = mg - K_f mg - bv^2 \tag{53}$$

comme dictée par la 2e loi de Newton :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz} \tag{54}$$

en faisant la substitution pr/c/dente, en regroupant les terme et en divisant les deux cote par v on obtiens :

$$m\frac{dv}{dz} = \frac{mg(1-K_f)}{v} - bv \tag{55}$$

On pose donc l'accélération a zero pour avoir le systèeme a l'équilibre nous donnant l'équation 57

$$0 = mg(1 - K_f) - bv_e) \tag{56}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{mg(1 - K_f)}{b}} \tag{57}$$

par la suite on doit linéariser notre équation 55 pour pouvoir facilement isoler notre z. On commence par linéarisser notre seul terme non lineaire etant

$$\frac{mg(1 - K_f)}{v} = \frac{mg}{v_e}(1 - K_f) + \left[\frac{-1}{V_e^2} mg(1 - K_f) \right](v - v_e) \tag{58}$$

en remplacant le tout dans lequation de base 55

$$mv\frac{dv}{dz} = mg - \left[\frac{mg}{v_e}(1 - K_f) + \left[\frac{-1}{V_e^2} mg(1 - K_f) \right](v - v_e) \right] - bv \tag{59}$$

comme la on sait que

$$\Delta v = v - v_e \quad \text{donc} \quad v = \Delta v + v_e \tag{60}$$

et que lon sosutrait les terme de l'equation a lequilibre on obtiens l'equation lineaire (en isolant les v et le z de chaque coté) :

$$m\frac{d\Delta v}{\Delta v} = \left[\frac{1}{m}\left[\frac{-1}{V_e^2} mg(1 - K_f) \right] - b \right] d_z \tag{61}$$

par la suite, on intègre chaque côté de l'équation. Comme le coté gauche est bornée de 0,1ve jusqu'a vi - ve, cela nous donne 4,9644. Comme le côté droit ne contient qu'une variable étant le dz qui deviendras Δ z Le reste du calcul effectuer sur matlab nous donne un z de 4,23m.

5.1 minuterie

Pour la situation G1, ou le coefficient de restitution = 0 en utilisant les formules de conservation de l'energie

$$m_a V_a^n + m_b V_b^n = m_a V_a^{'n} + m_b V_b^{'n} \quad ainsi \quad que \quad e = \frac{V_B^{'n} - V_A^{'n}}{V_A^n - V_B^n} \tag{62}$$

sachant que V_A^n = 22,5 km/h et que V_B^n = 3,6 km/h on trouve rapidement avec matlab que$V_A^{'n}$ = 20,12 km/h et que $V_B^{'n}$ = 20,2 km/h

Pour la situation G2, ou le coefficient de restitution = 0.8, avec les meme formules, on obtiens $V_A^{'n}$ = 18,23 km/h et que $V_B^{'n}$ = 2,65 km/h

sachant ces deux mesures, nous pouvons trouver le temps que prennent le participant pour franchir la distance de 3m. Pour le cas G1, avec incertitude de 0.02, on obtiens un r/sultat de 0,59 sec et pour G2, 0,54 sec

5.2 coussin trampoline

EN se basant sur la formule de l¡acceleration gravitationelle et de la formule des ressorts, on trouve facilement le Δx en resolvant lequation quadratique que donne notre developpement

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \quad (63)$$

$$88 * 9,81 * (5 + \Delta x) = \frac{1}{2} * 6000 * \Delta x^2 \quad (64)$$

$$0 = 3000\Delta x^2 - 863.28\Delta x - 4316.4 \quad nous \quad donnant \quad un \quad \Delta x = \quad 1.35m \quad (65)$$