

Experiência 4

Prof. Marconi Kolm Madrid

EA722 - 2017/2

Danilo Pereira Titato - RA 122541

Giovani Granzotto Olini - RA 146253

Pedro Gabriel Calixto Mendonça - RA 118363

Exercício 1

A função de transferência é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)}$$

Para o cálculo de erro:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot E(s) \\ \frac{G_c(s) G_p(s) E(s)}{R(s)} &= \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)} \\ E(s) &= \frac{R(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)} \end{aligned}$$

Logo, o erro de estado estacionário do sistema em malha fechada é dado por:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)}, C.Q.D.$$

Exercício 2

Temos que, no controlador PI&D, com $k_i = 0$:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s} \cdot k_{hw} \cdot \left[\left(k_p + \frac{k_i}{s} \right) (R(s) - X(s)) - k_d s X(s) \right] \\ X(s) \left[1 + \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s} \cdot k_{hw} \cdot (k_p + k_d s) \right] &= R(s) \cdot \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s} \cdot k_{hw} \cdot k_p \\ X(s) [m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}] &= R(s) \cdot k_p \cdot k_{hw} \\ \frac{X(s)}{R(s)} &= \frac{k_p k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - X(s) \\ &= R(s) \left[1 - \frac{k_p k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}} \right] \\ &= R(s) \left[\frac{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}} \right] \end{aligned}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \left[\frac{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}} \right], C.Q.D. \quad (1)$$

Já para o controlador PD:

$$\begin{aligned}\frac{X(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s} \cdot k_{hw} \cdot (k_p + k_d s)}{1 + \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s} \cdot k_{hw} \cdot (k_p + k_d s)} \\ &= \frac{k_{hw} \cdot (k_p + k_d s)}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}(s) &= R(s) - X(s) \\ &= R(s) \cdot \left[1 - \frac{k_{hw} \cdot (k_p + k_d s)}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}} \right] \\ &= R(s) \cdot \left[\frac{m_1 s^2 + c_1 s}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}} \right]\end{aligned}$$

$$\tilde{e}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \tilde{E}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \left[\frac{m_1 s^2 + c_1 s}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}} \right], C.Q.D.$$

Já se o controlador PI&D tivesse somente um bloco na forma k_i/s , e na malha interna fosse $k_p + k_d s$, isto é, o ganho proporcional estaria presente na malha interna e não na malha direta, o erro de regime para a entrada degrau unitário pode ser calculado substituindo k_p por k_i/s e $k_d s$ por $k_p + k_d s$ na equação 1:

$$\begin{aligned}e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \left[\frac{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw} + k_{hw} k_i/s} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{k_p k_{hw}}{k_p k_{hw} + k_{hw} \cdot k_i/s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_p k_{hw} s}{k_p k_{hw} s + k_{hw} k_i} = 0\end{aligned}$$

Igualmente, a função de transferência desse sistema pode ser obtida pelo mesmo método de substituição de variáveis:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw} \cdot k_i/s}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw} + k_{hw} \cdot k_i/s} = \frac{k_i k_{hw}}{m_1 s^3 + (c_1 + k_d k_{hw}) s^2 + k_p k_{hw} s + k_i k_{hw}}$$

Usando o mesmo método para obter a função de transferência do sistema PI&D, substituindo k_i/s por $k_i/s + k_p$ e $k_p + k_d s$ por $k_d s$, tem-se:

$$G_{PI\&D}(s) = \frac{k_p k_{hw} + k_{hw} \cdot k_i/s}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw} + k_{hw} \cdot k_i/s} = \frac{k_p k_{hw} s + k_i k_{hw}}{m_1 s^3 + (c_1 + k_d k_{hw}) s^2 + k_p k_{hw} s + k_i k_{hw}}$$

Para obter a função de transferência do sistema PID, usa-se a função de transferência do sistema PD, substituindo $k_p + k_d s$ por $k_i/s + k_p + k_d s$:

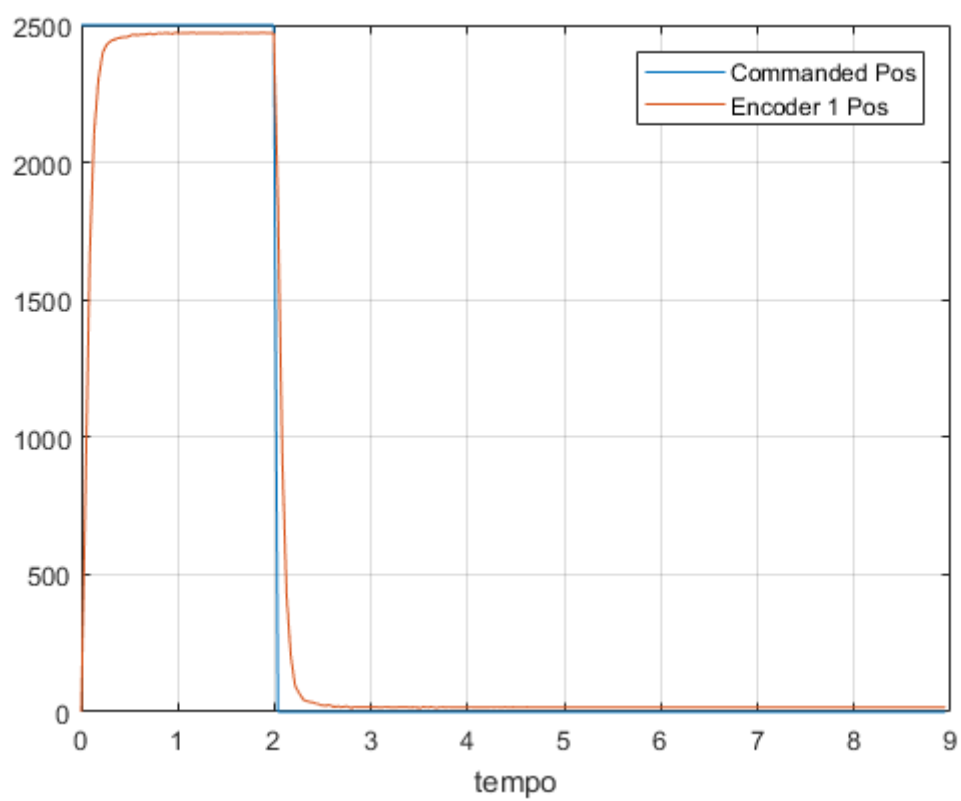
$$G_{PID}(s) = \frac{k_{hw} \cdot (k_i/s + k_p + k_d s)}{m_1 s^2 + (c_1 + k_d k_{hw}) s + k_p k_{hw} + k_{hw} \cdot k_i/s} = \frac{k_d k_{hw} s^2 + k_p k_{hw} s + k_i k_{hw}}{m_1 s^3 + (c_1 + k_d k_{hw}) s^2 + k_p k_{hw} s + k_i k_{hw}}$$

Temos, então, que:

- Os 3 sistemas apresentam os mesmos 3 pólos,
- o sistema com k_p deslocado da malha direta para a malha interna não possui zero,
- o sistema PI&D possui um zero e
- o sistema PID possui dois zeros.

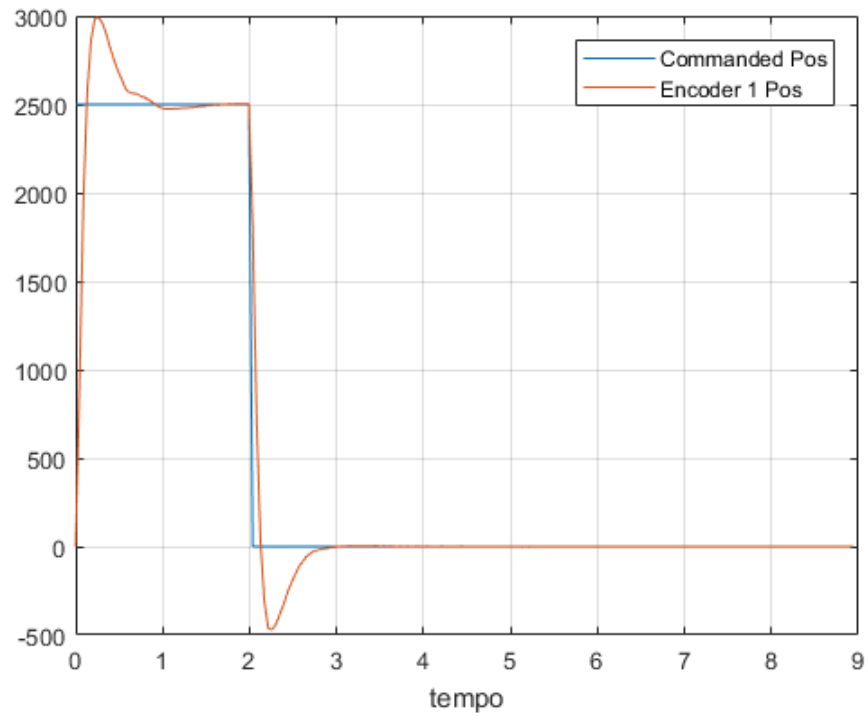
Procedimento experimental - parte 1

2.

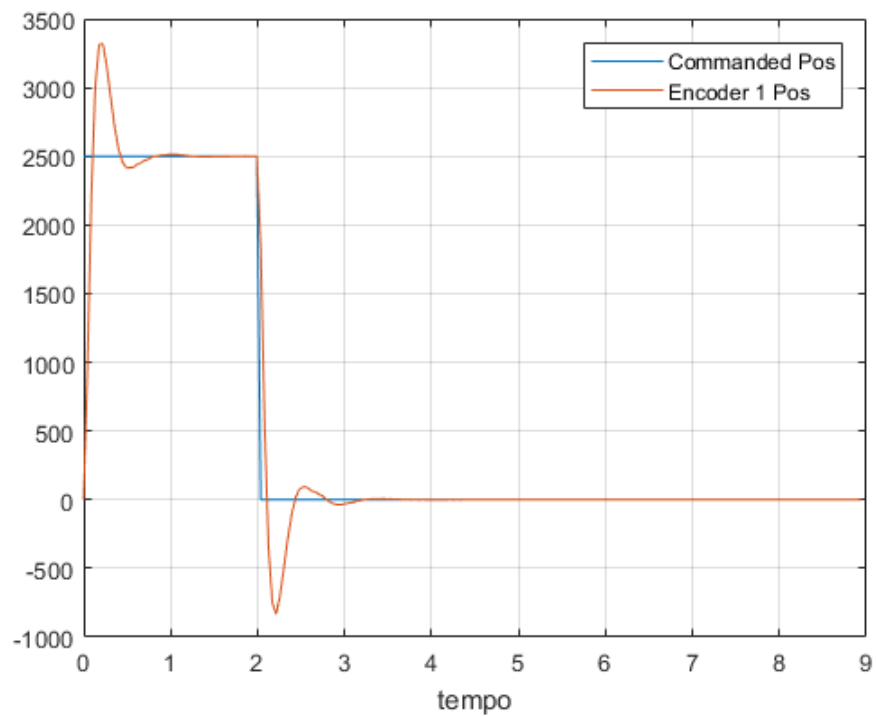


3.

$$k_i k_{hw} = 7500 \implies k_i = \frac{7500}{14732} = 0.5091$$



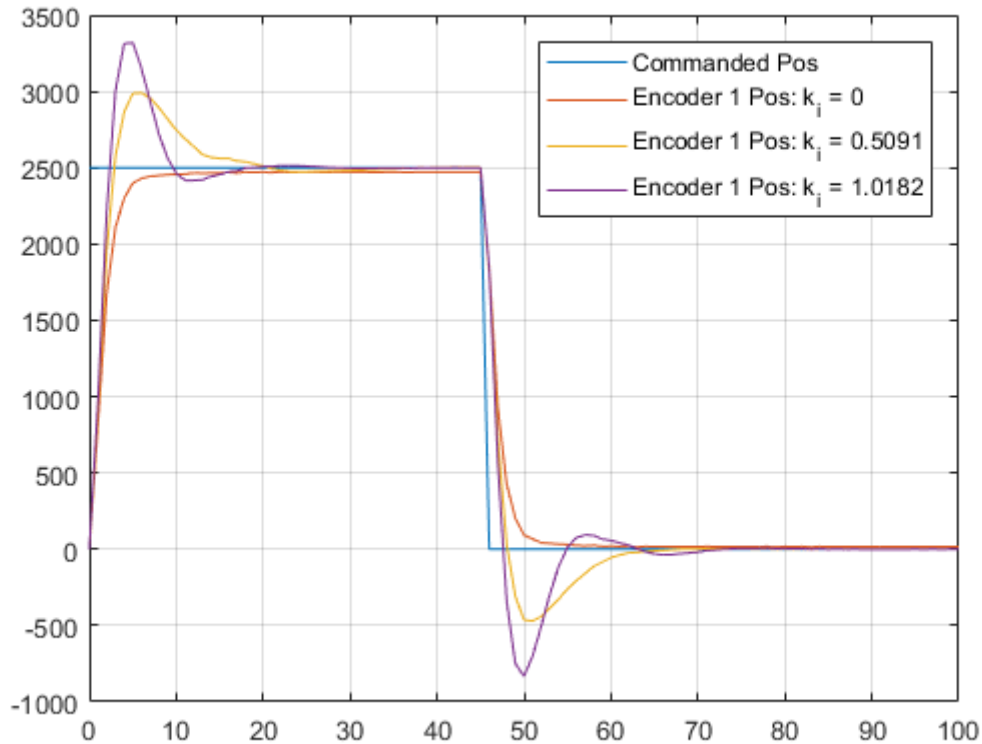
4.



Como parte da força de compensação é determinada pela integral do erro; enquanto o erro não for negativo ou zero, o termo integral aumentará de modo cumulativo. Assim, se segurarmos o carro

deslocado da origem, haverá erro e a força de compensação irá aumentar ao longo do tempo. Se soltarmos o carro após o segurarmos em uma posição deslocada, o carro irá acelerar em direção à posição comandada, mas irá passar do ponto de equilíbrio e oscilar em torno dele.

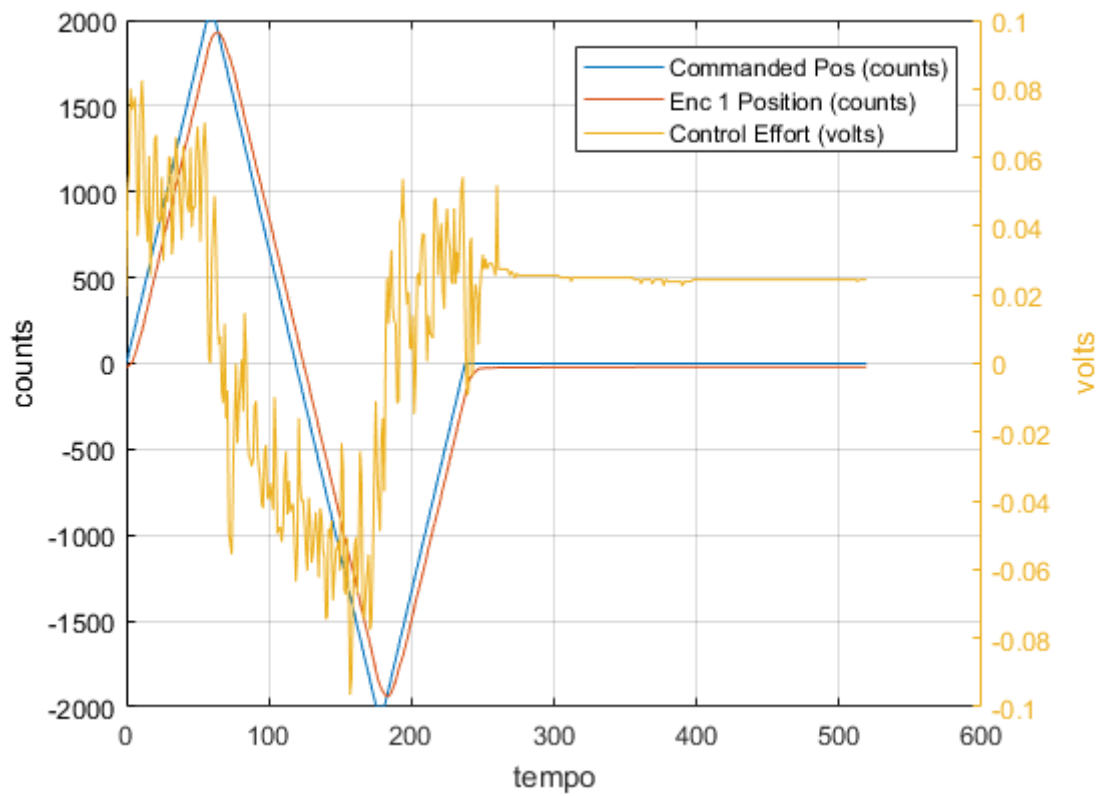
5.



Como podemos ver, a ação integral elimina o erro de regime, dado que a força de compensação aumenta enquanto houver erro. No entanto, é visível também que com um maior ganho integral, temos um aumento visível no máximo *overshoot*. Isso pode ser explicado pelo aumento da força de compensação aplicada pelo termo integrador, para que haja o controle ao redor do ponto de equilíbrio. Já que é dependente do termo integrativo, essa força acumula independentemente da taxa de variação do erro, enquanto houver erro. Com o aumento do k_i , há o aumento dessa força e o sistema apresenta um *overshoot* mais acentuado.

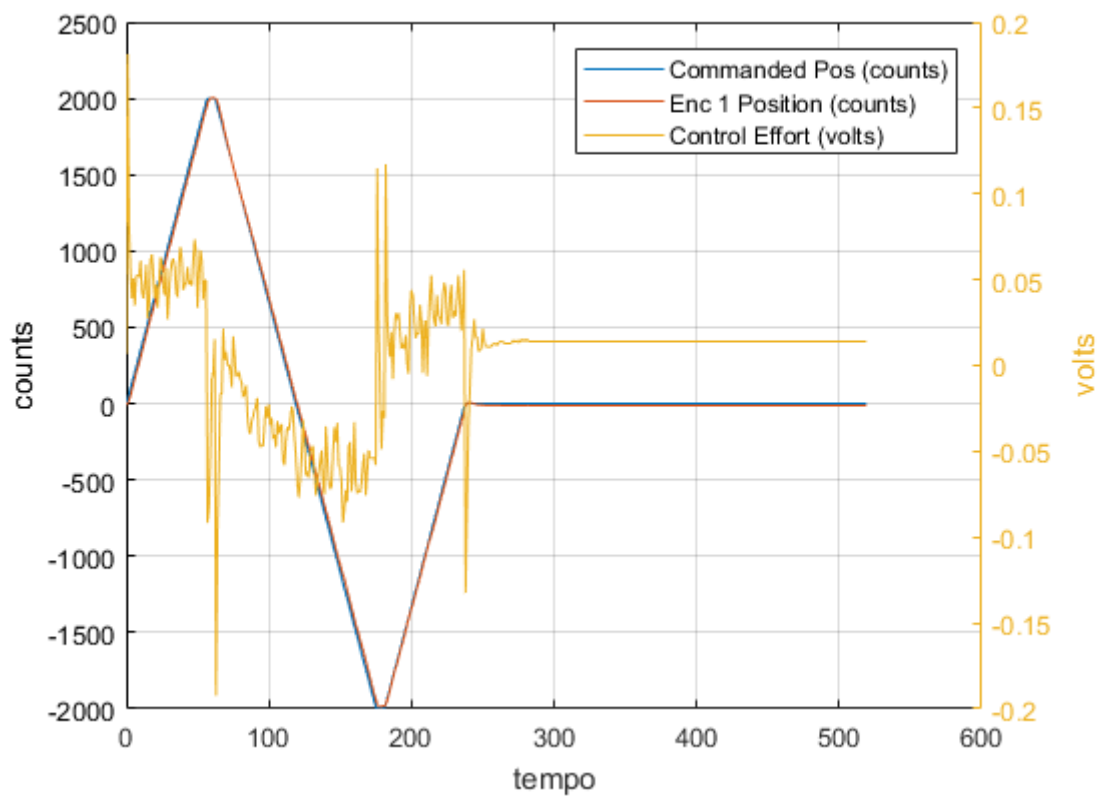
Procedimento experimental - parte 2

8. PI&D, $k_i = 0$ (P&D):

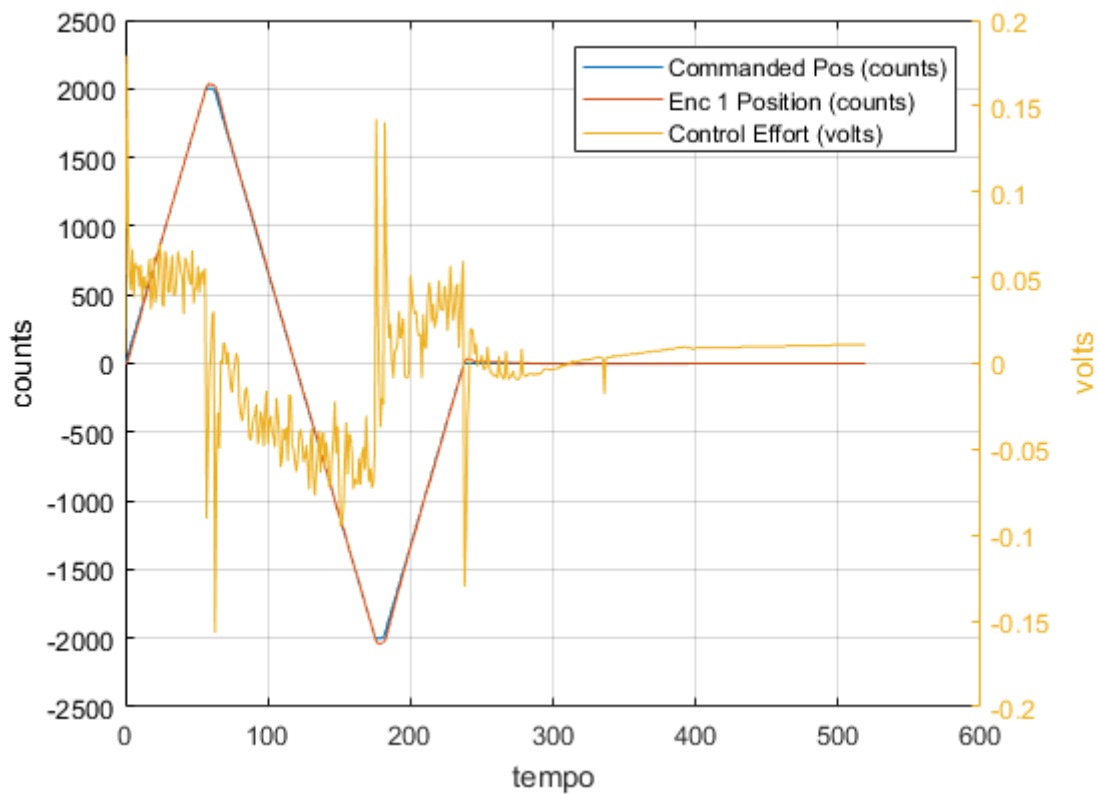


9.

PD:



PID:



10. Para a entrada rampa, ao se usar k_d no caminho direto (PID), tem-se um erro de regime aproximadamente nulo. Ao se usar k_d na realimentação (PI&D), tem-se um erro de regime constante. Isso justifica o que pode ser observado nos gráficos experimentais, onde há um erro constante no sistema PI&D, e há erro próximo de nulo nos sistemas PD/PID.

Existe *overshoot* no PID, como esperado, pois a presença do termo integrativo adiciona *overshoot* ao sistema.

Existe um *control effort* bem mais acentuado no caso do P&D do que nos outros sistemas, pois existe um erro constante no P&D. Para o PD, onde o erro é próximo de nulo, o *control effort* é menor ainda, de acordo com a escala; já para o PID, o *control effort* em regime se aproxima de zero, dado seu erro mais próximo ainda de zero.

Procedimento experimental - parte 3

12.

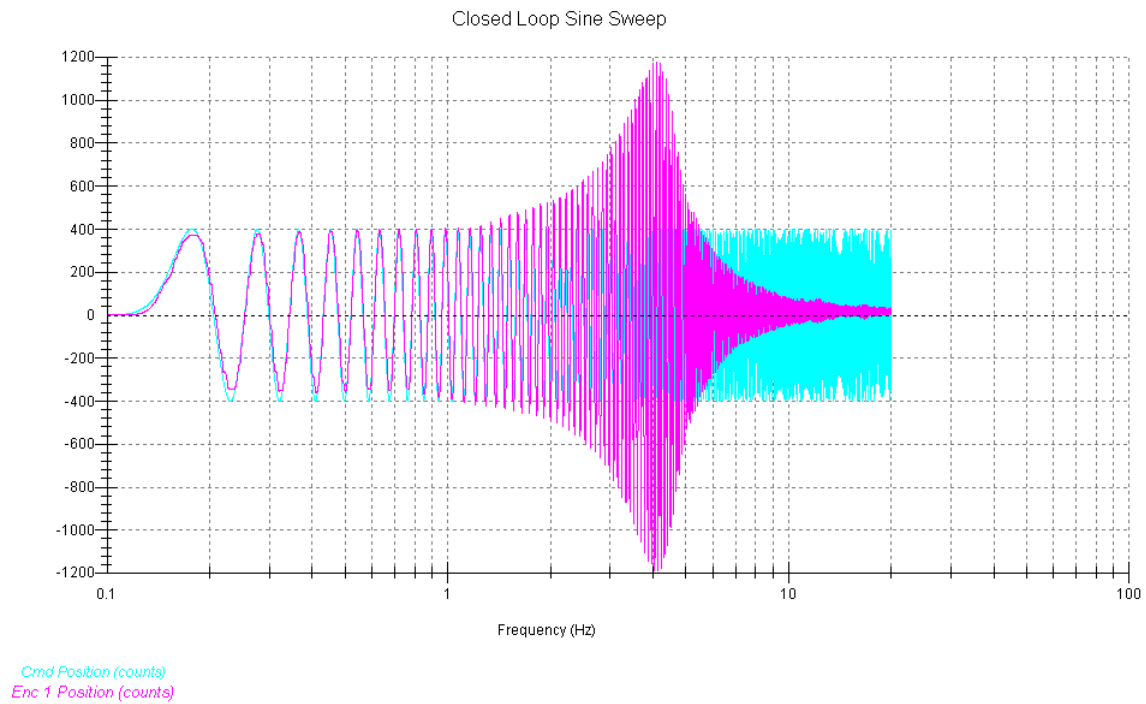


Figura 1: Controlador P&D

13.

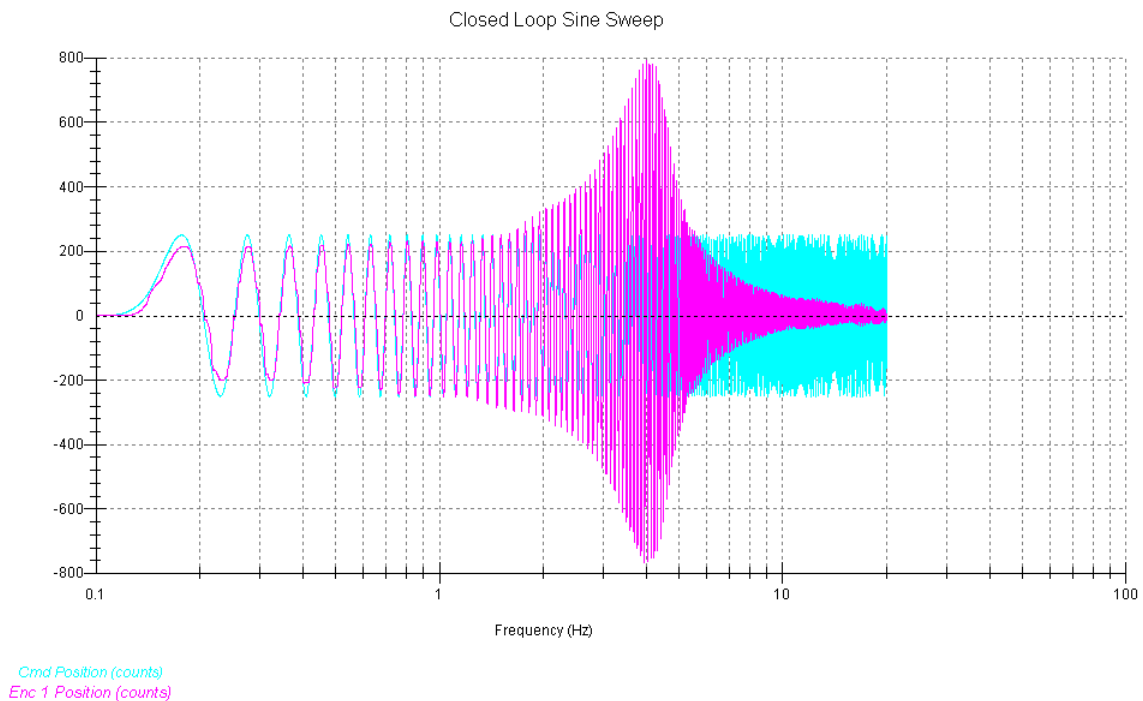


Figura 2: Controlador PD

14.

As frequências experimentais de ressonância são de aproximadamente 4 Hz, tanto para PD quanto P&D.

Realizando o cálculo da frequência de ressonância teórica:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_{hw}k_p}{m_1}} = \sqrt{\frac{14732 \cdot 0.1191}{2.778}} \approx 25.1316 \text{ (rad/s)}$$

$$\xi := \frac{c_1 + k_{hw}k_d}{2m_1\omega_n} = \frac{2.94 + 14732 \cdot 0.0017}{2 \cdot 2.778 \cdot 25.1316} \approx 0.2004$$

$$\omega_r := \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx 24.1010 \text{ (rad/s)} = 3.9998 \text{ Hz}$$

Esse valor teórico de 3.9998 Hz serve tanto para P&D quanto PD, pois as fórmulas usadas permanecem as mesmas.

Foi obtido um valor satisfatório da frequência experimental de ressonância.

As curvas teóricas, com suas respectivas curvas assintóticas, são exibidas abaixo:

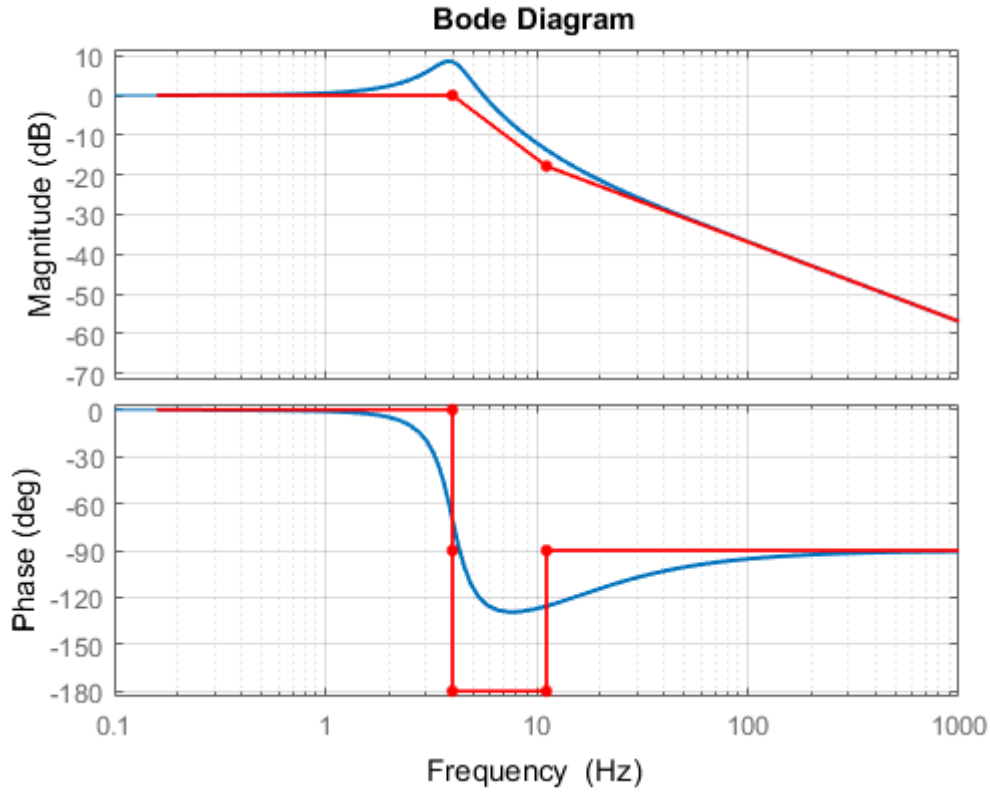


Figura 3: Diagramas teóricos de Bode para P&D

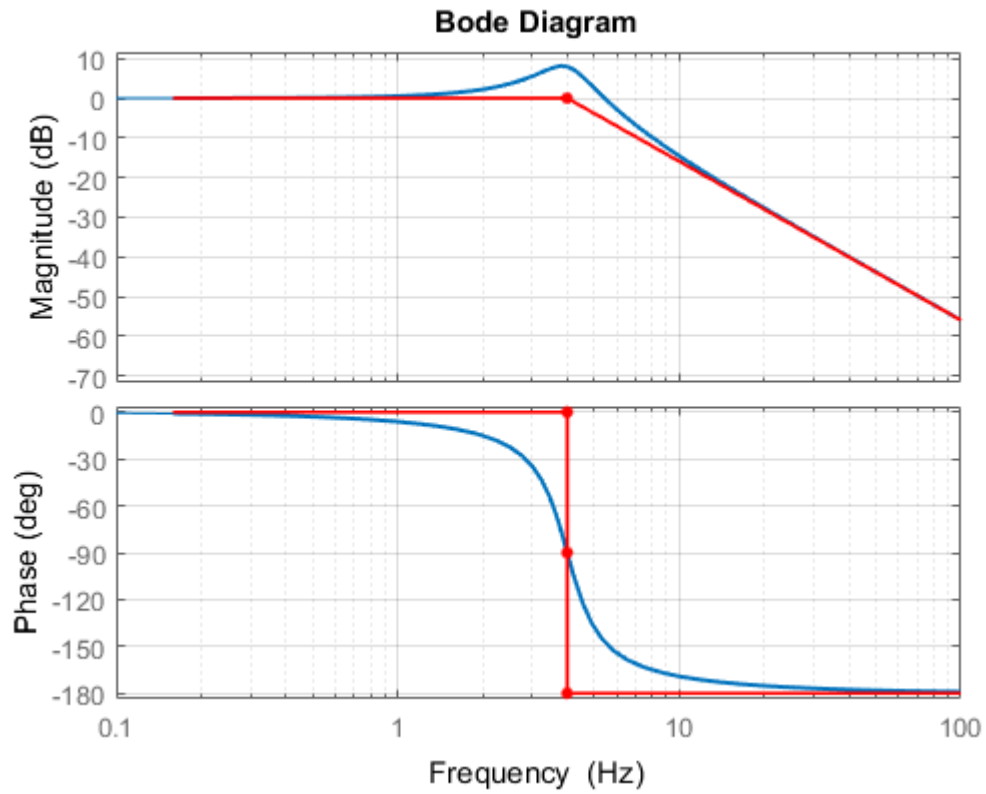


Figura 4: Diagramas teóricos de Bode para PD

As curvas obtidas experimentalmente foram:

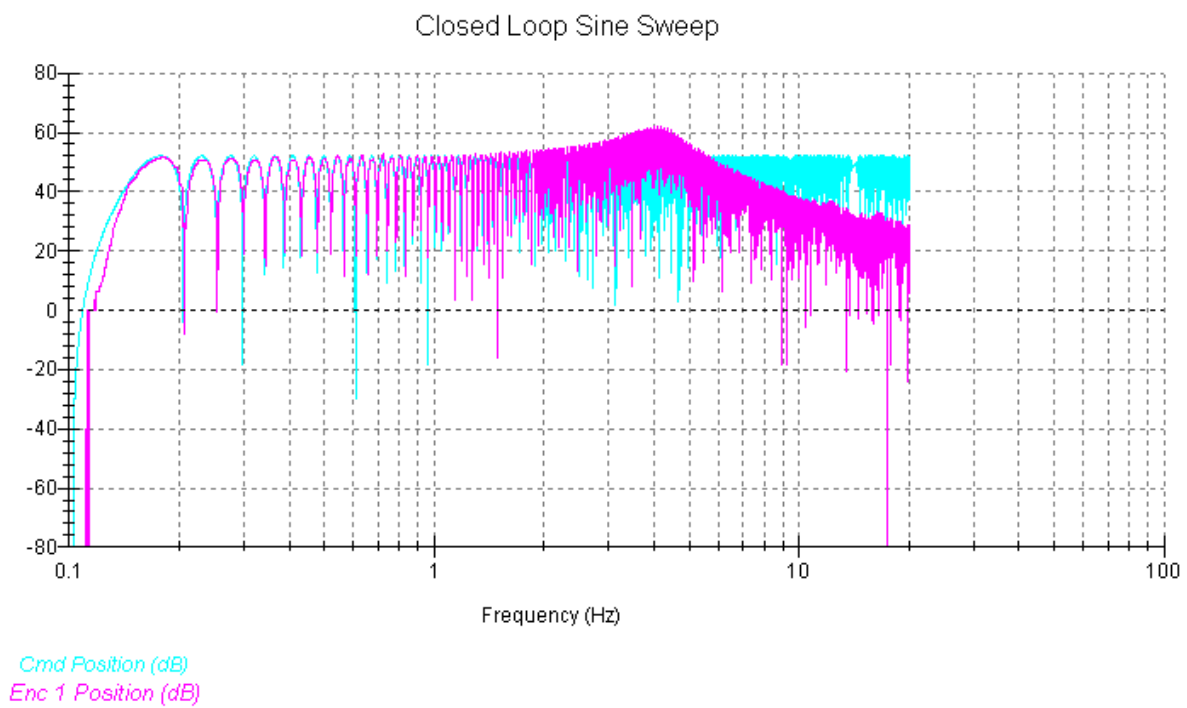


Figura 5: Gráfico experimental para P&D

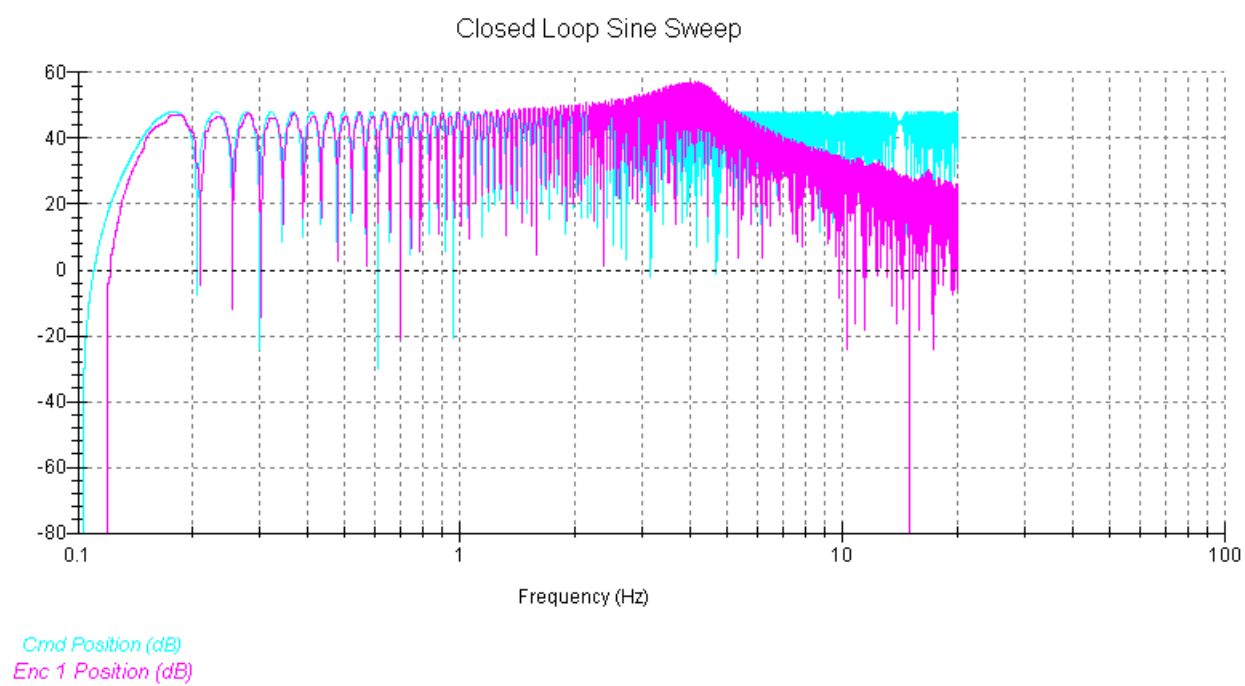


Figura 6: Gráfico experimental para PD

Os gráficos obtidos experimentalmente condizem com os gráficos teóricos realizados.