Experiência 3
Prof. Marconi Kolm Madrid
EA722 - 2017/2

Danilo Pereira Titato - RA 122541
Giovani Granzotto Oliani - RA 146253
Pedro Gabriel Calixto Mendonça - RA 118363

Exercício 1

$$Y(s) = \frac{c_0}{s(s+c_1)} \cdot (k_p + k_d s) \cdot (R(s) - Y(s))$$
$$Y(s) \cdot \left[1 + \frac{c_0(k_p + k_d s)}{s(s+c_1)}\right] = R(s) \cdot \left[\frac{c_0(k_p + k_d s)}{s(s+c_1)}\right]$$
$$Y(s) \cdot \left[\frac{s^2 + (c_1 + k_d c_0)s + k_p c_0}{s(s+c_1)}\right] = R(s) \cdot \left[\frac{c_0(k_p + k_d s)}{s(s+c_1)}\right]$$
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_d c_0 s + k_p c_0}{s^2 + (c_1 + k_d c_0)s + k_p c_0}$$

Exercício 2

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sR(s) \frac{k_d c_0 s + k_p c_0}{s^2 + (c_1 + k_d c_0)s + k_p c_0} =$$
$$\lim_{s\to 0} sR(s) \frac{k_p c_0}{k_p c_0} = \lim_{s\to 0} sR(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} = 1$$

Exercício 3

$$Y(s) = G_p(s) \cdot \{k_p [R(s) - Y(s)] - k_d s Y(s)\}$$
$$Y(s) \cdot [1 + G_p(s) \cdot (k_p + k_d s)] = k_p \cdot G_p(s) \cdot R(s)$$
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_p \cdot G_p(s)}{1 + (k_p + k_d s) \cdot G_p(s)} = \frac{k_p \cdot \frac{c_0}{s(s+c_1)}}{1 + (k_p + k_d s) \cdot \frac{c_0}{s(s+c_1)}} =$$
$$= \frac{k_p c_0}{s^2 + c_1 s + (k_p + k_d s) \cdot c_0} = \frac{k_p c_0}{s^2 + (c_1 + k_d c_0)s + k_p c_0}$$

Exercício 4
Usando a fórmula do exercício 3:

$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{k_p \cdot G_p(s)}{1 + (k_p + k_d s) \cdot G_p(s)} = \frac{k_p \cdot k_{hw} \cdot \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s}}{1 + (k_p + k_d s) \cdot k_{hw} \cdot \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s}} =$$
$$= \frac{k_{hw} \cdot k_p}{m_1 s^2 + c_1 s + (k_p + k_d s) \cdot k_{hw}} = \frac{k_{hw} \cdot k_p}{m_1 s^2 + (c_1 + k_{hw} k_d)s + k_{hw} k_p} =$$
$$\frac{k_{hw} k_p / m_1}{s^2 + ((c_1 + k_{hw} k_d)/m_1)s + k_{hw} k_p / m_1}.$$

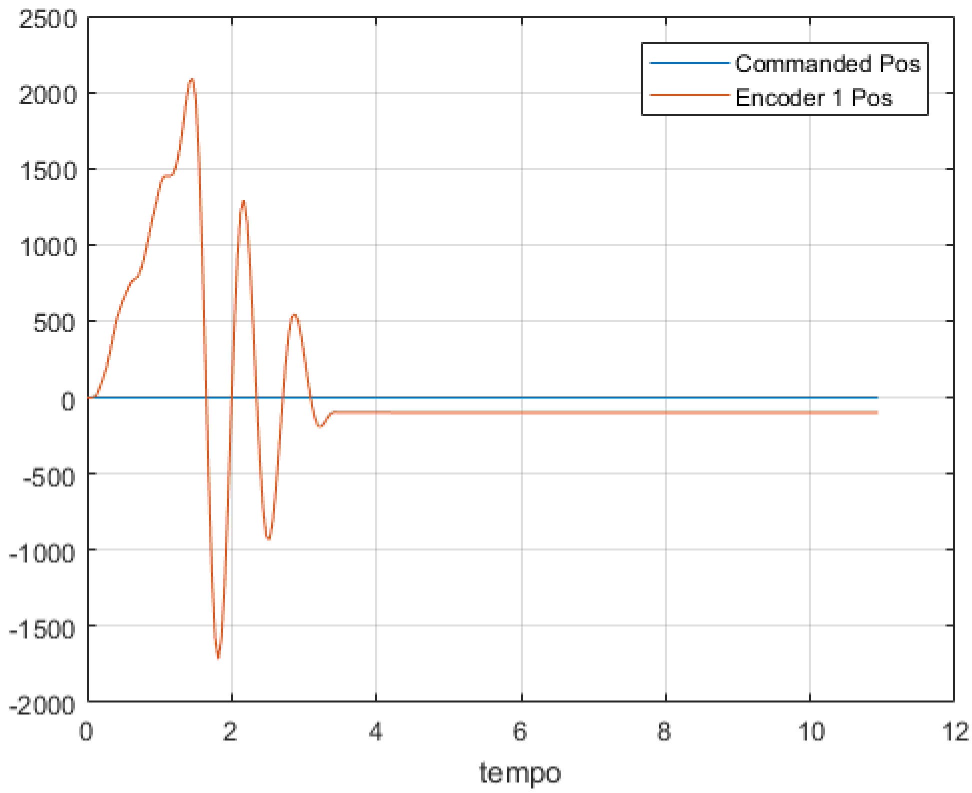
Procedimento experimental - parte 1
2.

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_{hw}k_p}{m_1}} \ \text{(rad/s)}$$

Para $\omega_n = \sqrt{2}$ Hz:

$$\sqrt{2}\ \text{Hz} = \sqrt{\frac{k_{hw}k_p}{m_1}} \ \text{(rad/s)}$$
$$\sqrt{2} \cdot 2\pi \ \text{(rad/s)} = \sqrt{\frac{k_{hw}k_p}{m_1}} \ \text{(rad/s)}$$
$$\frac{k_{hw}k_p}{m_1} = 2 \cdot \left(2\pi^2\right)$$
$$k_p = 2 \cdot \left(2\pi^2\right) \cdot \frac{m_1}{k_{hw}}$$
$$k_p = 0.0149$$

6. Foi montado um sistema com valores necessários para obter um comportamento de um oscilador de frequência $\sqrt{2}$ Hz. O gráfico obtido do seu **Commanded Position** foi:



Usando dois vales da curva, nos instantes de tempo de 1.1815 e 2.523, com diferença de 1 vez o período, temos que a frequência foi de:

$$\frac{1}{2.523 - 1.1815} \approx 1.4124\ \text{Hz} \approx \sqrt{2}\ \text{Hz}$$

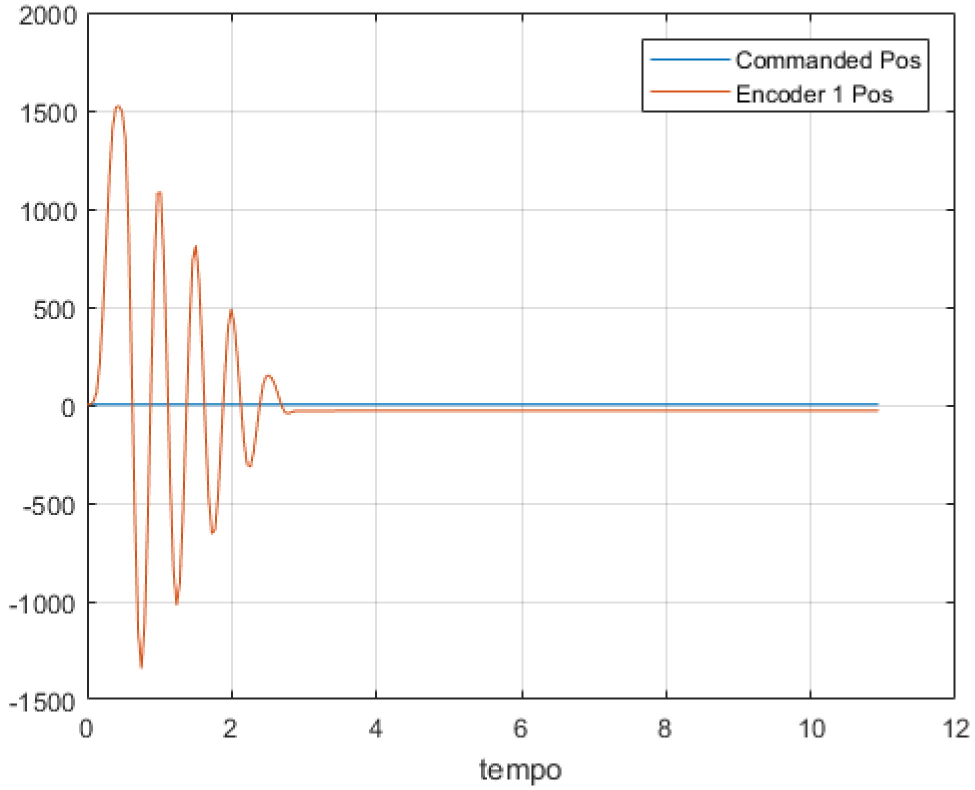
O sistema teve, então, uma frequência de oscilação excelentemente próxima à esperada.

Para um ganho proporcional duas vezes maior:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_{hw}k_p}{m_1}}$$
$$\omega_n' := \sqrt{\frac{k_{hw}k_p'}{m_1}}, k_p' = 2k_p \implies$$
$$\omega_n' = \sqrt{\frac{k_{hw}\cdot 2k_p}{m_1}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k_{hw}k_p}{m_1}} = \sqrt{2}\cdot\omega_n$$

Quando o ganho proporcional é dobrado, a sua frequência, então, aumenta num fator de $\sqrt{2}$. Para um sistema originalmente com $\sqrt{2}$ Hz, sua nova frequência deverá ser de $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ Hz.

Foi montado novamente o sistema, agora com k_p dobrado. A sua resposta foi:



Usando dois vales da curva, nos instantes de tempo de 0.753 e 2.258, com diferença de 3 vezes o período, temos que a frequência foi de:

$$\frac{1}{(2.258 - 0.753)/3} \approx 1.9934 \text{ Hz} \approx 2 \text{ Hz}$$

O sistema teve, então, uma frequência de oscilação suficientemente próxima à esperada.

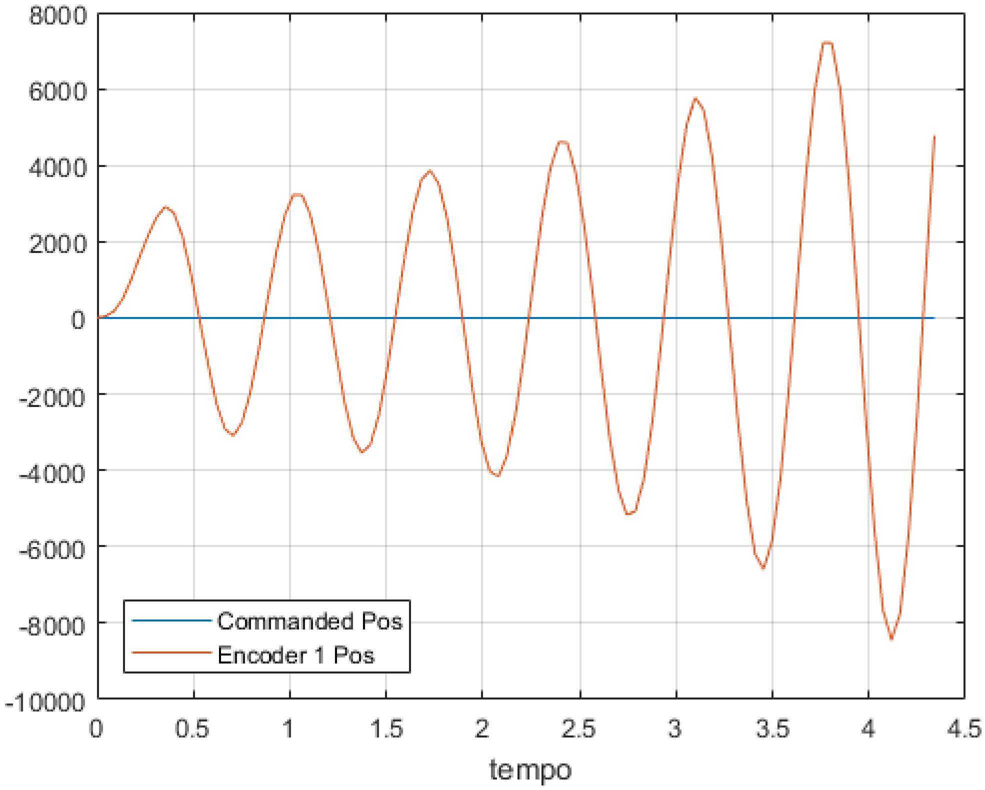
Para se obter um oscilador harmônico perfeito, deve-se ter o fator de amortecimento $\xi = 0$. Idealmente é capaz de se tê-lo. Porém, em aplicações reais, é difícil obter-se o valor 0 para ξ. Pode-se sempre chegar muito próximo a zero, mas ainda assim, o sistema não oscila perfeitamente, ele estabiliza no regime ou explode.

7.

$$\xi := \frac{c_1 + k_{hw}k_d}{2\sqrt{m_1 k_p k_{hw}}}$$

$$\xi = 0 \implies c_1 + k_{hw}k_d = 0 \implies k_d = \frac{-c_1}{k_{hw}}$$
$$k_d = -0.00019957 = -1.9957 \text{ E-04}$$

A resposta para o sistema com o k_p acima usado foi:



Como visto, o sistema explodiu. Ele não foi suficientemente controlado e vai ao infinito. Dificilmente um sistema de controle terá o ganho k_d negativo, pois ele passa a realimentar positivamente o sistema, proporcionalmente à velocidade. Logo, sua velocidade aumentará sem fim, como observado no experimento.

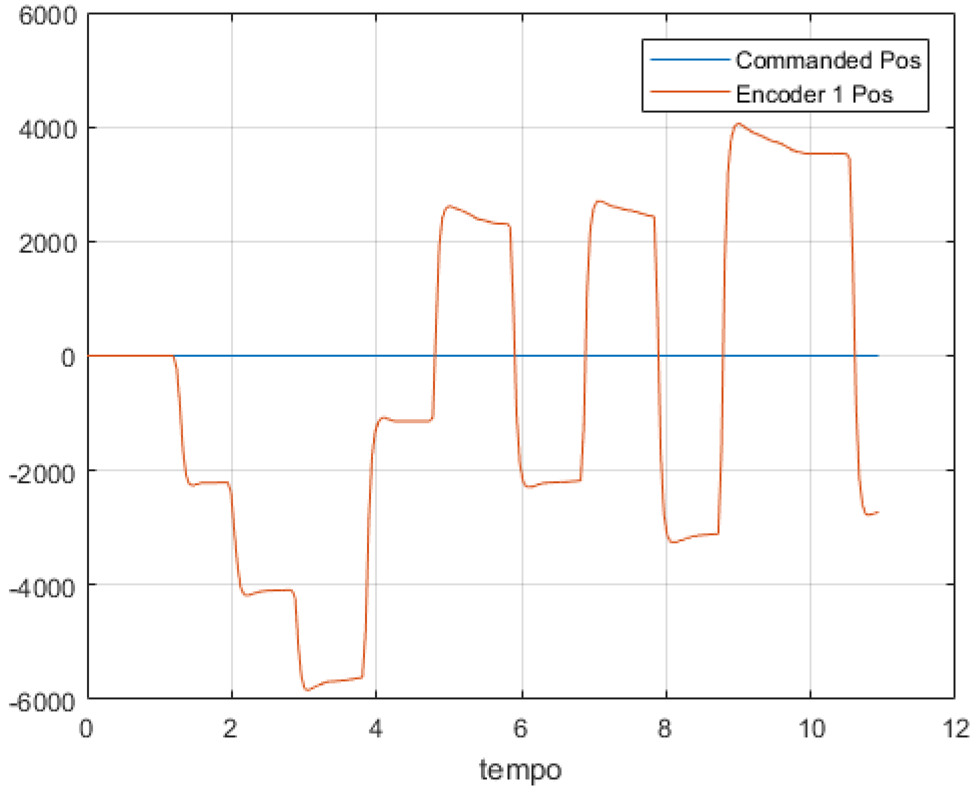
8.

$$k_d k_{hw} = 50 \text{ N.m/s} \implies k_d = \frac{50 \text{ N.m/s}}{14732 \text{ N/m}} \approx 0.0034 \text{ N.m}^2\text{/s}$$

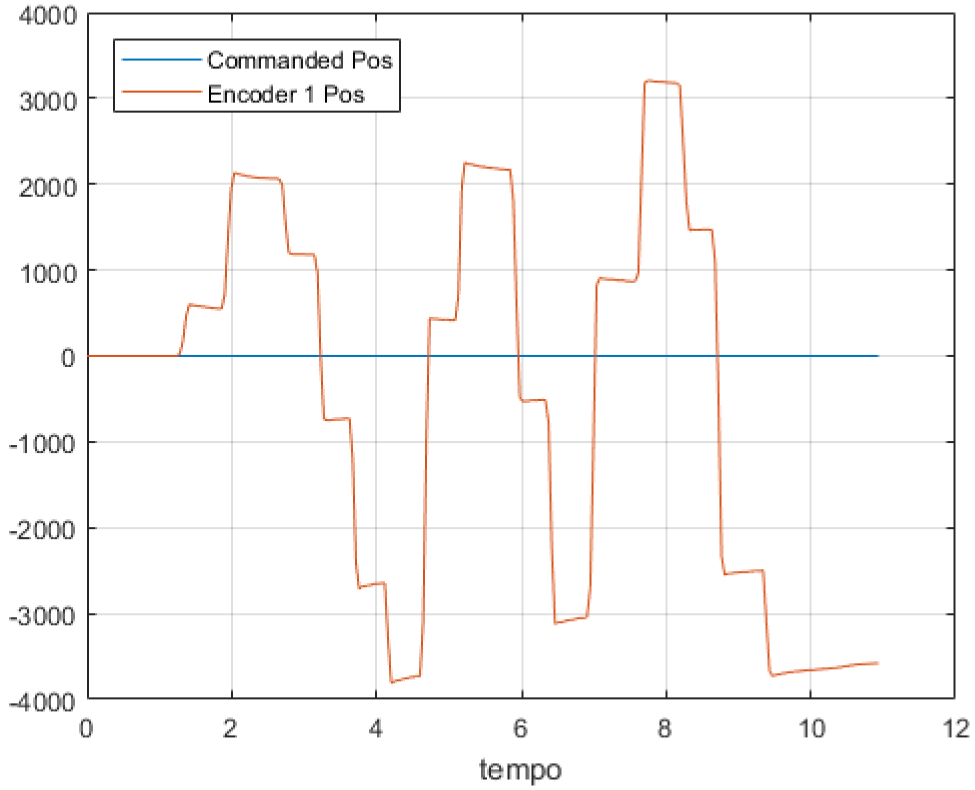
9. Dado que o k_p é zero, não existe mais amortecimento relacionado à posição do bloco. Desse modo, o bloco não tenta mais retornar à posição inicial.

Porém, apesar de não tentar retornar ao início, nota-se um aumento do amortecimento, sendo esse um amortecimento viscoso. Ele se dá devido ao aumento do k_d. O k_d está diretamente relacionado ao amortecimento proporcional à velocidade do bloco. Desse modo, para um mesmo impulso feito pelos participantes do experimento, o bloco para muito mais rapidamente, devido a um maior amortecimento para a mesma velocidade de quando num k_d menor, atingindo velocidades menores ainda e parando antes.

Pode-se ver esse evento na resposta do sistema, onde foram dados empurrões pelos participantes do experimento:



10. O novo valor usado para k_d foi de 0.0170. Como esperado, pela explicação do item anterior, foi notado um amortecimento maior ainda. Pode-se ver esse evento na resposta do sistema:



Procedimento experimental - parte 2

11.

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_{hw}k_p}{m_1}} \implies \omega_n^2 = \frac{k_{hw}k_p}{m_1} \implies$$

$$k_p = \frac{m_1}{k_{hw}} \cdot \omega_n^2 \tag{1}$$

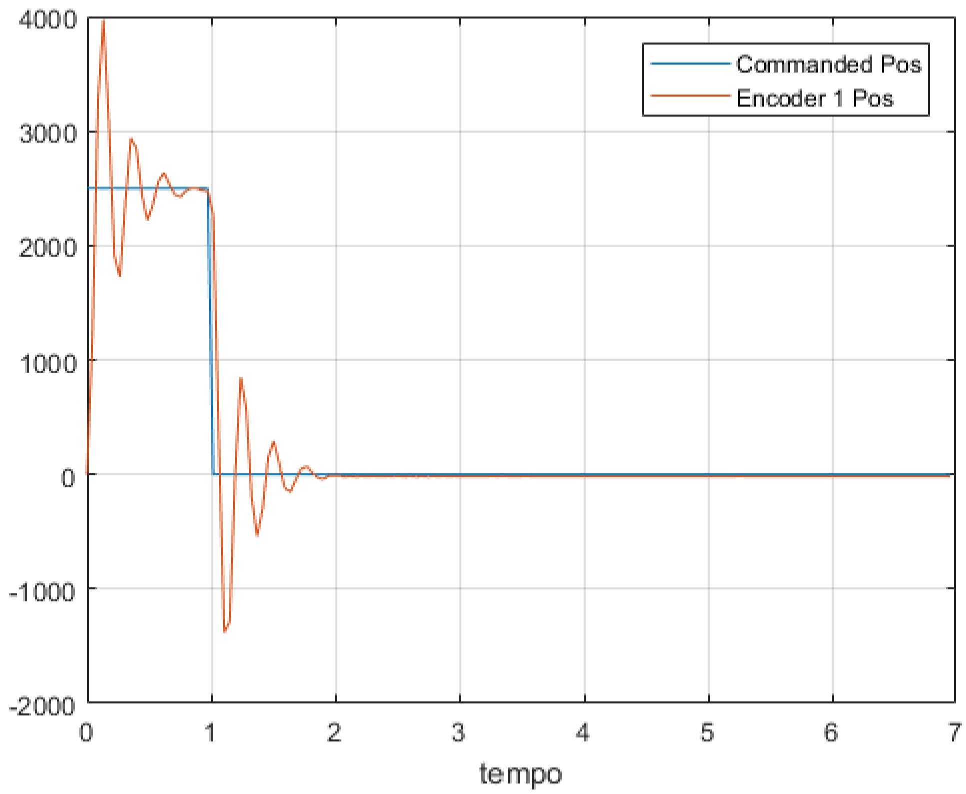
$$\xi := \frac{c_1 + k_{hw}k_d}{2m_1\omega_n} \implies 2\xi m_1\omega_n = c_1 + k_{hw}k_d \implies$$

$$k_d = \frac{2m_1\omega_n\xi - c_1}{k_{hw}} \tag{2}$$

Usando as fórmula acima, para uma frequência natural de $\omega_n = 8\pi$ rad/s, temos:

- $\xi = 0.2$ (subamortecido) $\implies k_p = 0.1191, k_d = 0.0017$
- $\xi = 1.0$ (criticamente amortecido) $\implies k_p = 0.1191, k_d = 0.0093$
- $\xi = 2.0$ (sobreamortecido) $\implies k_p = 0.1191, k_d = 0.0188$

13.



14.

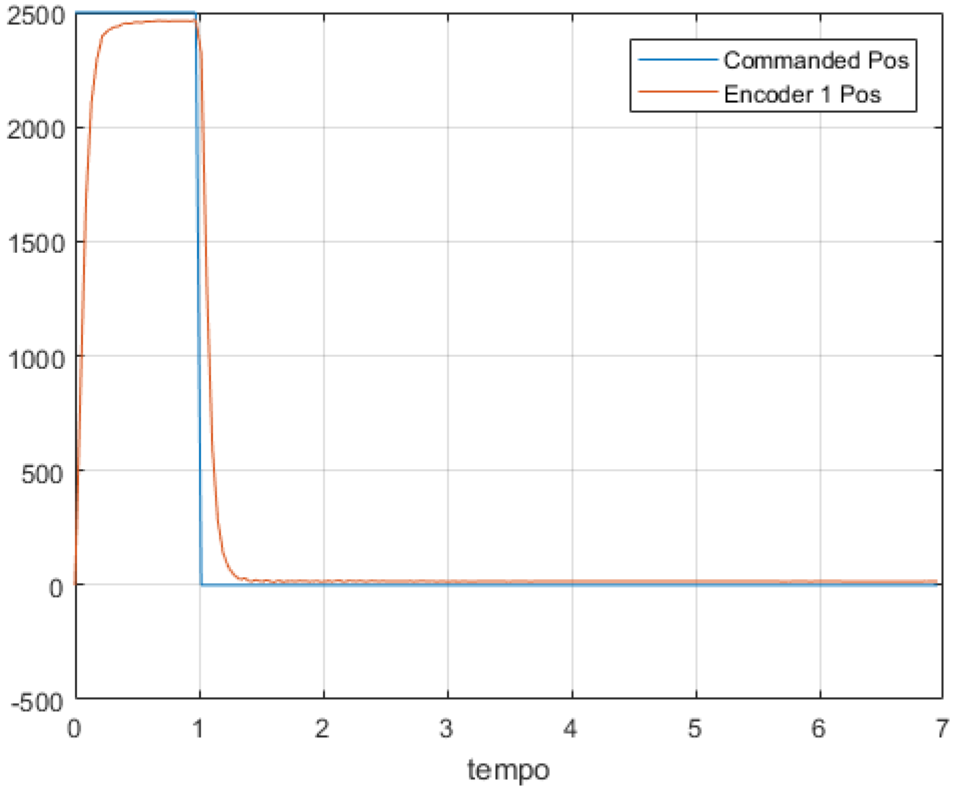


Figura 1: Sistema com controlador criticamente amortecido

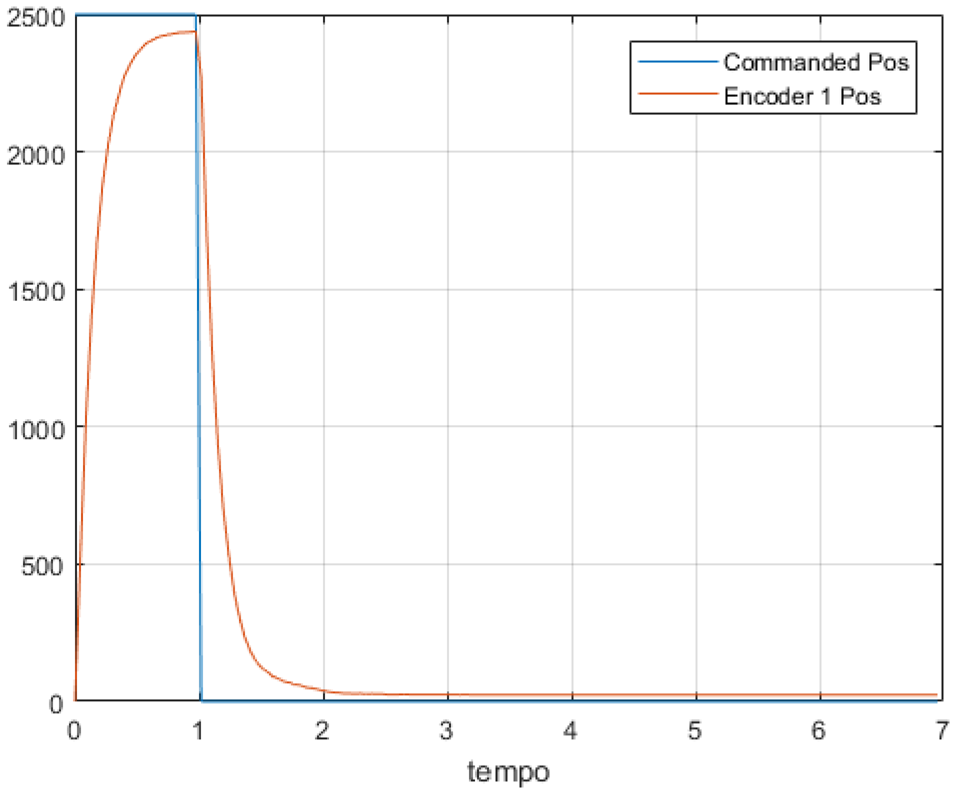


Figura 2: Sistema com controlador sobreamortecido

15.

$$M_p := e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100 \text{ (em \%)}$$

Queremos um *overshoot* entre 10% e 20%:

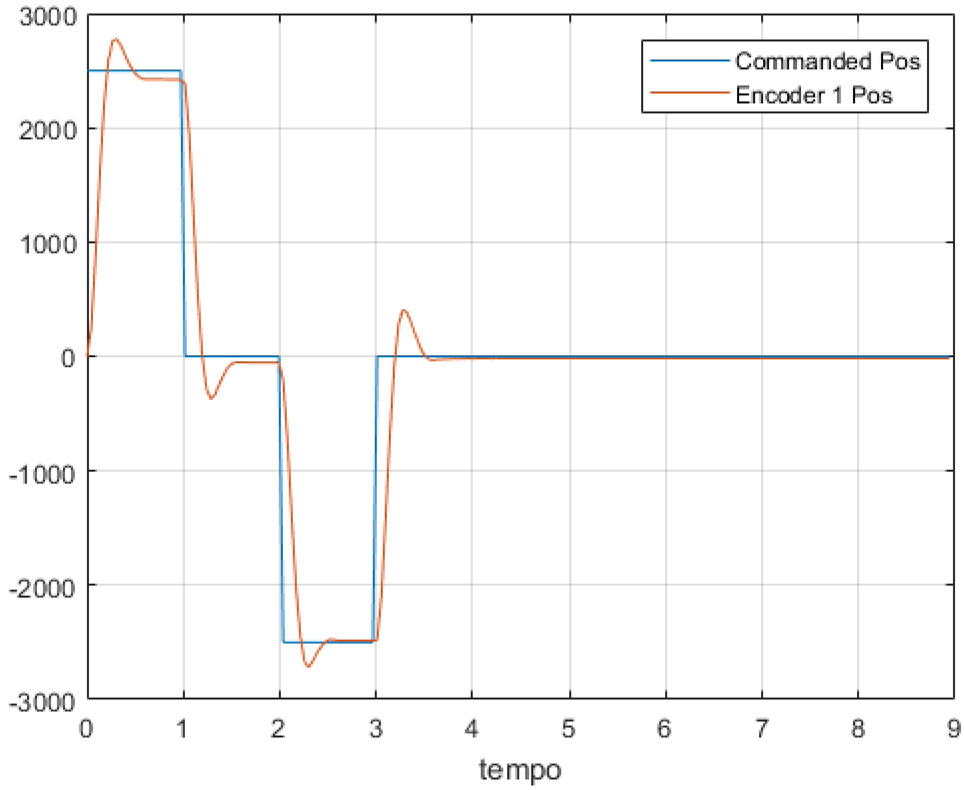
$$M_p < 20\% \implies e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0.2 \implies \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} < log\left(0.2\right) \implies -\xi\pi < \sqrt{1-\xi^2} \cdot log\left(0.2\right) \implies$$
$$\xi^2\pi^2 < \left(1-\xi^2\right) \cdot log^2\left(0.2\right) \implies \xi^2\left[\pi^2 + log^2\left(0.2\right)\right] < log^2\left(0.2\right) \implies$$
$$\xi < \frac{log\left(0.2\right)}{\sqrt{\pi^2 + log^2\left(0.2\right)}} \implies \xi < -0.4559$$
$$\xi > -\frac{log\left(0.2\right)}{\sqrt{\pi^2 + log^2\left(0.2\right)}} \implies \xi > 0.4559$$

$$M_p > 10\% \implies$$
$$\xi > \frac{log\left(0.1\right)}{\sqrt{\pi^2 + log^2\left(0.1\right)}} \implies \xi > -0.5912$$
$$\xi < -\frac{log\left(0.1\right)}{\sqrt{\pi^2 + log^2\left(0.1\right)}} \implies \xi < 0.5912$$

A faixa de ξ é $-0.5912 < \xi < -0.4559$ e $0.4559 < \xi < 0.5912$. O ξ escolhido foi de 0.5 (tem que ser positivo para haver amortecimento). Para calcular o ω_n:

$$t_s := \frac{3}{\xi\omega_n} \text{ (critério de 5\%)}$$
$$\omega_n = \frac{3}{\xi\ t_s} = \frac{3}{0.5 \cdot 0.5} = 12$$

Usando as equações 1 e 2, obtemos $k_p \approx 0.0272$ e $k_d \approx 0.0021$. O sistema foi implementado com esses parâmetros e a resposta obtida foi:



Para o primeiro pico, o valor de regime foi de 2424 passos e o pico foi de 2727 passos. O *overshoot* foi, então, de $\frac{2727-2424}{2424} = 12.5\%$. Como esperado, o *overshoot* se deu entre 10% e 20%.

Para o instante de tempo de $0.443s$, temos uma contagem de 2551 passos, logo um erro de $\frac{2551-2424}{2424} = 5.24\%$. Para o instante de tempo de $0.487s$, temos uma contagem de 2490 passos, logo um erro de $\frac{2490-2424}{2424} = 2.72\%$. Portanto, o tempo de estabelecimento, para o critério de 5%, está entre $0.443s$ e $0.487s$, próximo ao esperado de $0.5s$.