

Experiência 1

Prof. Marconi Kolm Madrid

EA722 - 2017/2

Danilo Pereira Titato - RA 122541

Giovani Granzotto Olini - RA 146253

Pedro Gabriel Calixto Mendonça - RA 118363

1. Problema do servo

$$\begin{aligned} G'_{ps} &:= \frac{X_1(s)}{F_a(s)} \\ X_1(s) &= \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} \cdot k_{hw} \cdot (F_a(s) - k_v s \cdot X_1(s)) \\ X_1(s) \cdot \left(1 + \frac{k_{hw} \cdot k_v \cdot s}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1}\right) &= F_a(s) \cdot \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} \\ X_1(s) \cdot [m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1] &= F_a(s) \cdot k_{hw} \\ G'_{ps} = \frac{X_1(s)}{F_a(s)} &= \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1}, C.Q.D. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Problema da regulação

$$\begin{aligned} G'_{pr} &:= \frac{X_1(s)}{F_p(s)} \\ X_1(s) &= \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} \cdot (F_p(s) - k_{hw} \cdot k_v s \cdot X_1(s)) \\ X_1(s) \cdot \left(1 + \frac{k_{hw} \cdot k_v \cdot s}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1}\right) &= F_p(s) \cdot \frac{1}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} \\ X_1(s) \cdot [m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1] &= F_p(s) \\ G'_{pr} = \frac{X_1(s)}{F_p(s)} &= \frac{1}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1}, C.Q.D. \end{aligned}$$

Substituindo k_1 por k_1^* , como deve ser feito para a simulação de perturbação:

$$G'_{pr^*} = \frac{1}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1^*} = \frac{1}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + (k_1 + \Delta k_1)}.$$

3. (a) Os valores de ganho de baixa frequência calculados para o G'_{ps} são:

$$G'_{ps}(0) = \frac{14372}{2.778 \cdot s^2 + 76.6 \cdot s + 338.6} \approx 43.5086$$

$$G'_{ps^*}(0) = \frac{14372}{2.778 \cdot s^2 + 76.6 \cdot s + 700} \approx 21.0457$$

O *script* desenvolvido em Matlab para gerar a função de transferência e obter os valores de ganho de baixa frequência foi:

```

1 % parametros iniciais
2 s = tf('s');
3
4 mc1 = 0.778;
5 mw1 = 4*0.500;
6 m1 = mc1 + mw1;
7
8 c1 = 2.94;
9 kv = 0.005;
10 khw = 14732;
11
12 k1 = 338.6;
13 deltak1 = 361.4;
14
15 % Gps eh a funcao de transferencia da "planta compensada" para o problema servo
16 % GpsDelta eh Gps*, a funcao de transferencia para o valor perturbado
17 Gps = khw / (m1*s^2 + (c1+khw*kv)*s + k1);
18 GpsDelta = khw / (m1*s^2 + (c1+khw*kv)*s + (k1 + deltak1));
19
20 display(tf(Gps));
21 display(tf(GpsDelta));
22
23 % ganhos de baixa frequencia
24 Gps0 = dcgain(Gps);
25 Gps0Delta = dcgain(GpsDelta);
26
27 display(Gps0);
28 display(Gps0Delta);

```

Os resultados obtidos no Matlab são:

```

1 ans =
2      14732
3      -----
4      2.778 s^2 + 76.6 s + 338.6
5
6 Continuous-time transfer function.
7
8 ans =
9      14732
10     -----
11     2.778 s^2 + 76.6 s + 700
12
13 Continuous-time transfer function.
14
15 Gps0 =
16     43.5086
17
18 Gps0Delta =
19     21.0457

```

Como pode-se ver, os resultados são exatamente iguais aos calculados.

(b) Os valores de ganho de baixa frequência calculados para o G'_{pr} são:

$$G'_{pr}(0) = \frac{1}{2.778 \cdot s^2 + 76.6 \cdot s + 338.6} \approx 0.00295334$$

$$G'_{pr^*}(0) = \frac{1}{2.778 \cdot s^2 + 76.6 \cdot s + 700} \approx 0.00142857$$

O *script* desenvolvido em Matlab para obter os valores de ganho de baixa frequência, considerando os já implementados parâmetros iniciais, foi:

```
1 % funcoes de transferencia
2 Gpr = 1 / (m1*s^2 + (c1+khw*kv)*s + k1);
3 GprDelta = 1 / (m1*s^2 + (c1+khw*kv)*s + (k1 + deltak1));
4
5 display(tf(Gpr));
6 display(tf(GprDelta));
7
8 % ganhos de baixa frequencia
9 Gpr0 = dcgain(Gpr);
10 Gpr0Delta = dcgain(GprDelta);
11
12 display(Gpr0);
13 display(Gpr0Delta);
```

Os resultados obtidos no Matlab são:

```
1 ans =
2
3      1
4      -----
5      2.778 s^2 + 76.6 s + 338.6
6
7 Continuous-time transfer function.
8
9 ans =
10
11      1
12      -----
13      2.778 s^2 + 76.6 s + 700
14
15 Continuous-time transfer function.
16
17 Gpr0 =
18      0.0030
19
20 Gpr0Delta =
21      0.0014
```

Como pode-se ver, os resultados são exatamente iguais aos calculados.

(c)

```
1 display(Gps0Delta - Gps0);
2 display(Gpr0Delta - Gpr0);
```

```
1
2      -22.4629
3      -0.0015
```

(d)

```
% parametros iniciais
2 Gpf = 1;
  kp = 0.12;
4
% funcoes de transferencia
6 Ga = Gpf * Gps;
  GaDelta = Gpf * GpsDelta;
8
Gf = Gpf * feedback(Gps * kp, 1);
10 GfDelta = Gpf * feedback(GpsDelta * kp, 1);

12 display(tf(Ga));
  display(tf(GaDelta));
14 display(tf(Gf));
  display(tf(GfDelta));
```

```
1 ans =
    14732
    -----
    2.778 s^2 + 76.6 s + 338.6
3
5 Continuous-time transfer function.
7
9 ans =
    14732
    -----
    2.778 s^2 + 76.6 s + 700
11
13 Continuous-time transfer function.
15
17 ans =
    1768
    -----
    2.778 s^2 + 76.6 s + 2106
19
21 Continuous-time transfer function.
23
25 ans =
    1768
    -----
    2.778 s^2 + 76.6 s + 2468
27
29 Continuous-time transfer function.
```

(e)

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{X_{1r}(s)} \implies X_1(s) = G(s) \cdot X_{1r}(s)$$

$$\begin{aligned} e_r &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (X_{1r}(s) - X_1(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (X_{1r}(s) - G(s) \cdot X_{1r}(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X_{1r}(s) \cdot (1 - G(s)) \end{aligned}$$

Dado que a entrada x_{1r} é o degrau unitário; X_{1r} , que é a sua transformada, é igual a $1/s$. Logo:

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot (1 - G(s))$$

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} 1 - G(s) \quad (2)$$

O *script* para obter os valores de erro de regime dos sistemas em malha aberta e em malha fechada foi, então:

```

1 % calculo dos erros de regime
eRegA = dcgain(1 - Ga);
3 eRegADelta = dcgain(1 - GaDelta);

5 eRegF = dcgain(1 - Gf);
eRegFDelta = dcgain(1 - Gfdelta);
7
display(eRegA);
9 display(eRegF);
display(eRegADelta);
11 display(eRegFDelta);

```

```

1 eRegA =
    -42.5086
3
eRegF =
    0.1607
5
eRegADelta =
    -20.0457
7
eRegFDelta =
    0.2836
9
11

```

Como podemos ver, para k_1 e k_1^* , os valores de erro de regime são bem menores em malha fechada do que em malha aberta, respectivamente. Isso se dá por conta da regulação obtida pela realimentação do sinal de saída x_1 .

(f) O *script* desenvolvido em Matlab para gerar as respostas ao degrau dos sistemas (considerando k_1 e k_{1r} em malha aberta e em malha fechada foi:

```

1 % respostas ao degrau
[stepGa, tA] = step(Ga, 1.2);
3 [stepGaDelta, tADelta] = step(GaDelta, 1.2);
[stepGf, tF] = step(Gf, 1.2);
5 [stepGfDelta, tFDelta] = step(GfDelta, 1.2);

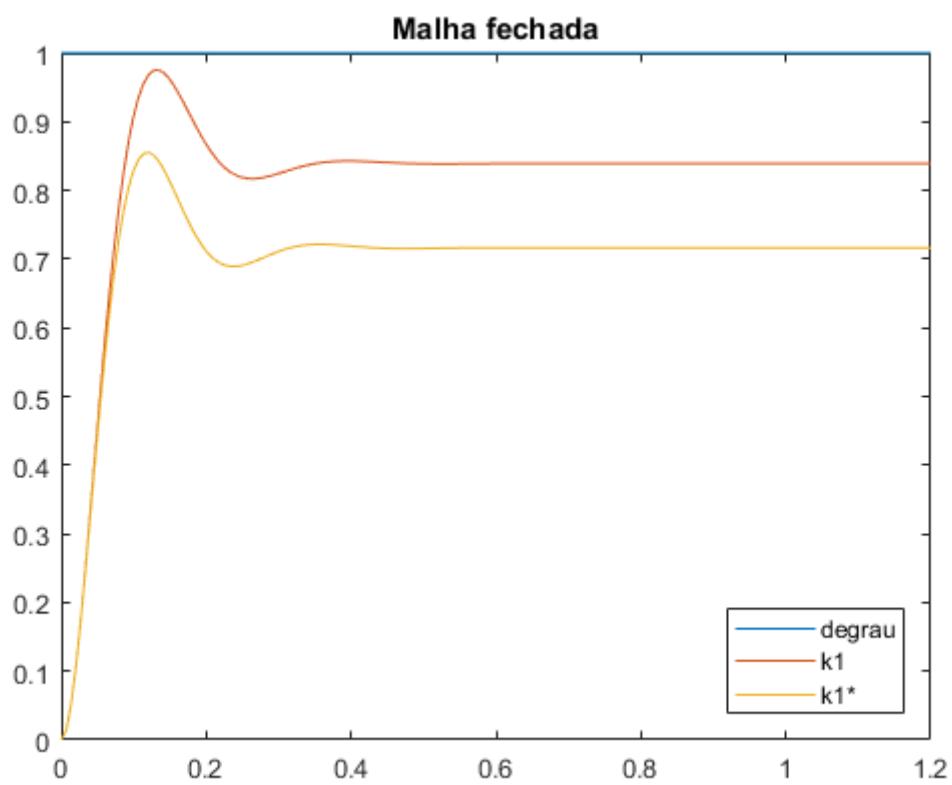
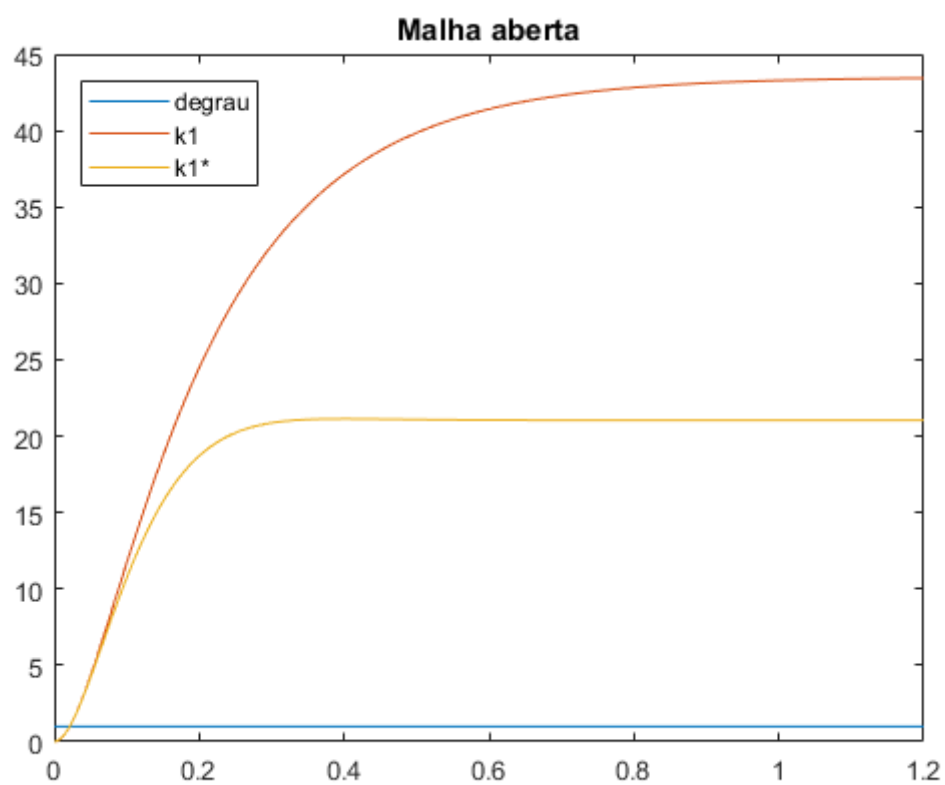
7 % funcoes degrau para malha aberta e fechada
degrauA = ones(length(stepGa), 1);
9 degrauF = ones(length(stepGf), 1);

11 % graficando malha aberta para k1 e k1*
figure, plot(tA, degrauA, tA, stepGa, tADelta, stepGaDelta);
13 title('Malha aberta');
legend('degrau', 'k1', 'k1*', 'Location', 'northwest');
15

% graficando malha fechada para k1 e k1*
17 figure, plot(tF, degrauF, tF, stepGf, tFDelta, stepGfDelta);
title('Malha fechada');
19 legend('degrau', 'k1', 'k1*', 'Location', 'southeast');

```

Os gráficos gerados são:



4. A função de transferência $G_a(s)$ para a malha aberta, no problema do servo, é:

$$\begin{aligned} G_a(s) &:= \frac{X_1}{X_{1r}} \\ X_1 &= G'_{p_s} \cdot G_{pfa} \cdot X_{1r} \\ G_a(s) &= G_{pfa} \cdot G'_{p_s} \end{aligned} \quad (3)$$

Para que o erro de regime de malha aberta seja mínimo (nulo), usando a equações 1, 2 e 3:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} 1 - G_a(s) &= 0 \implies \\ \lim_{s \rightarrow 0} 1 - G_{pfa}(s) \cdot G'_{p_s}(s) &= 1 - k_{pfa} \cdot G'_{p_s}(0) = 0 \implies \\ k_{pfa} &= \frac{1}{G'_{p_s}(0)} \\ k_{pfa} &= \frac{1}{43.5086} \approx 0.0230 \end{aligned}$$

O novo valor de k_{pfa} foi implementado no *script* desenvolvido no item 3:

```
1 % calculo do novo kpf para erro de regime nulo
kpfA = 1 / Gps0;
3 Ga = kpfA * Gps;

5 % calculo do novo erro de regime
Ea = (1 - GaZeroErr);
7 eRegA = dcgain(EaZeroErr);
9 display(eRegA);
```

```
1 eRegA =
    0
```

5. A função de transferência $G_f(s)$ para a malha fechada, no problema do servo, é:

$$\begin{aligned} G_f(s) &:= \frac{X_1}{X_{1r}} \\ X_1 &= G'_{p_s}(s) \cdot k_p \cdot (G_{pff}(s) \cdot X_{1r} - X_1) \\ X_1 \cdot (1 + k_p G'_{p_s}(s)) &= X_{1r} \cdot (k_p G'_{p_s}(s) G_{pff}(s)) \\ G_f(s) &= \frac{X_1}{X_{1r}} = \frac{k_p \cdot G_{pff}(s) \cdot G'_{p_s}(s)}{1 + k_p \cdot G'_{p_s}(s)} \\ G_f(s) &= \frac{k_p \cdot k_{pff} \cdot G'_{p_s}(s)}{1 + k_p \cdot G'_{p_s}(s)} \end{aligned} \quad (4)$$

Para que o erro de regime de malha fechada seja mínimo (nulo), usando a equações 1, 2 e 4:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} 1 - G_f(s) &= 0 \implies \\ \lim_{s \rightarrow 0} 1 - \frac{k_p \cdot k_{pff} \cdot G'_{p_s}(s)}{1 + k_p \cdot G'_{p_s}(s)} &= 1 - \frac{k_p \cdot k_{pff} \cdot G'_{p_s}(0)}{1 + k_p \cdot G'_{p_s}(0)} = 0 \implies \\ k_p \cdot k_{pff} \cdot G'_{p_s}(0) &= 1 + k_p \cdot G'_{p_s}(0) \implies k_{pff} = \frac{1 + k_p \cdot G'_{p_s}(0)}{k_p \cdot G'_{p_s}(0)} \\ k_{pff} &= \frac{1 + 43.5086 \cdot k_p}{43.5086 \cdot k_p} \end{aligned}$$

O novo valor de k_{pff} foi implementado no *script* desenvolvido no item 3:

```

1 % calculo do novo kpf em funcao de kp, para erro de regime nulo
2 kpfF = (1 + kp * Gps0) / (kp * Gps0);
3 Gf = kpfF * feedback(Gps * kp, 1);
4
5 % calculo do novo erro de regime
6 Ef = (1 - Gf);
7 eRegF = dcgain(Ef);
8
9 display(eRegF);

```

```

1 eRegF =
    2.1588e-16

```

O novo erro de regime é desprezível para a ordem de grandeza usada, se aproximando de zero.

6. Segundo as equações 3 e 4:

$$G_a(s) = G_{pfa} \cdot G'_{ps}$$

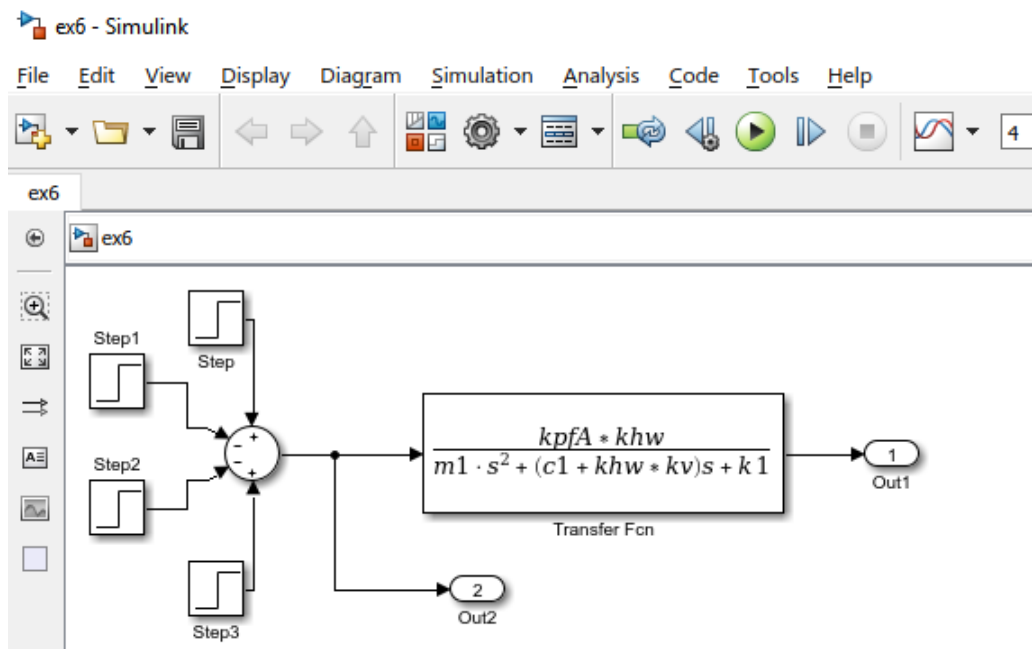
$$G_a(s) = k_{pfa} \cdot \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1} = \frac{k_{pfa} \cdot k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1}$$

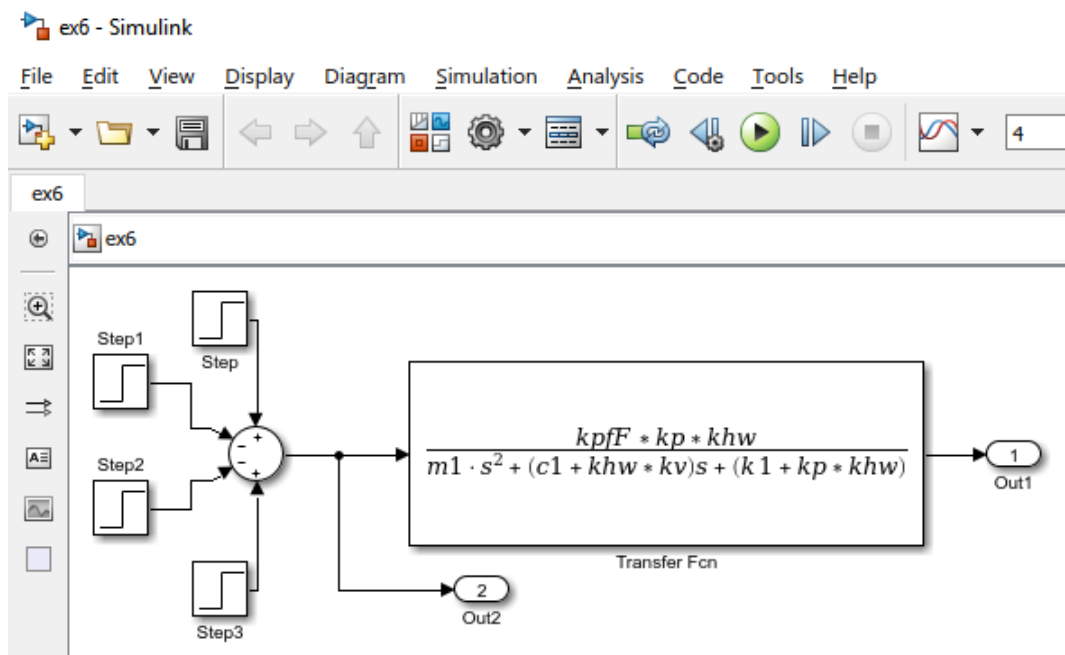
$$G_f(s) = \frac{k_p \cdot k_{pff} \cdot G'_{ps}(s)}{1 + k_p \cdot G'_{ps}(s)}$$

$$G_f(s) = \frac{k_p \cdot k_{pff} \cdot \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1}}{1 + k_p \cdot \frac{k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + k_1}}$$

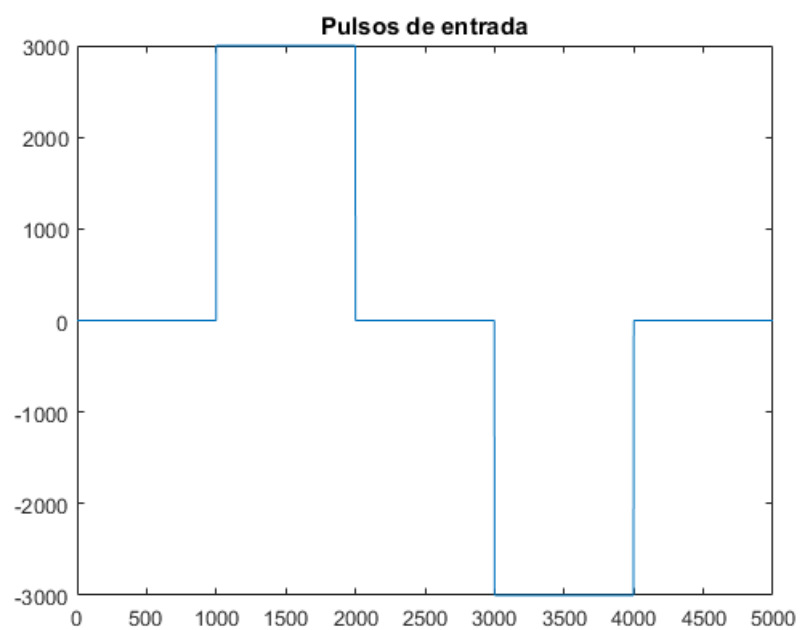
$$G_f(s) = \frac{k_{pff} \cdot k_p \cdot k_{hw}}{m_1 s^2 + (c_1 k_{hw} k_v) s + (k_1 + k_p \cdot k_{hw})}$$

Logo, os modelos de função de transferência para malha aberta e fechada são:





7.



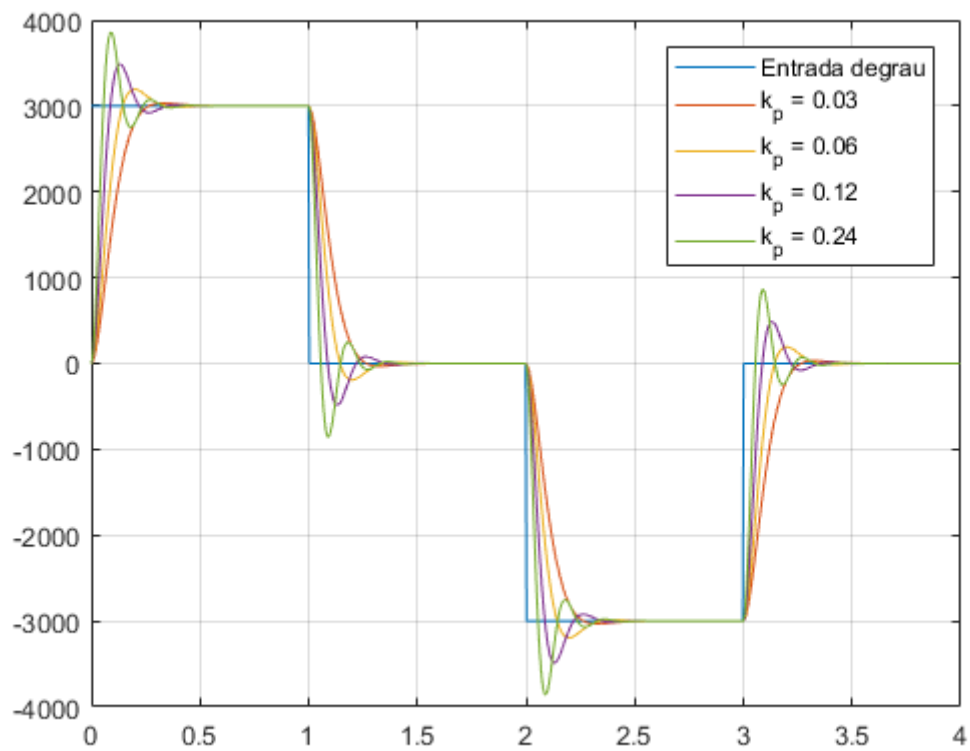
9.



10.

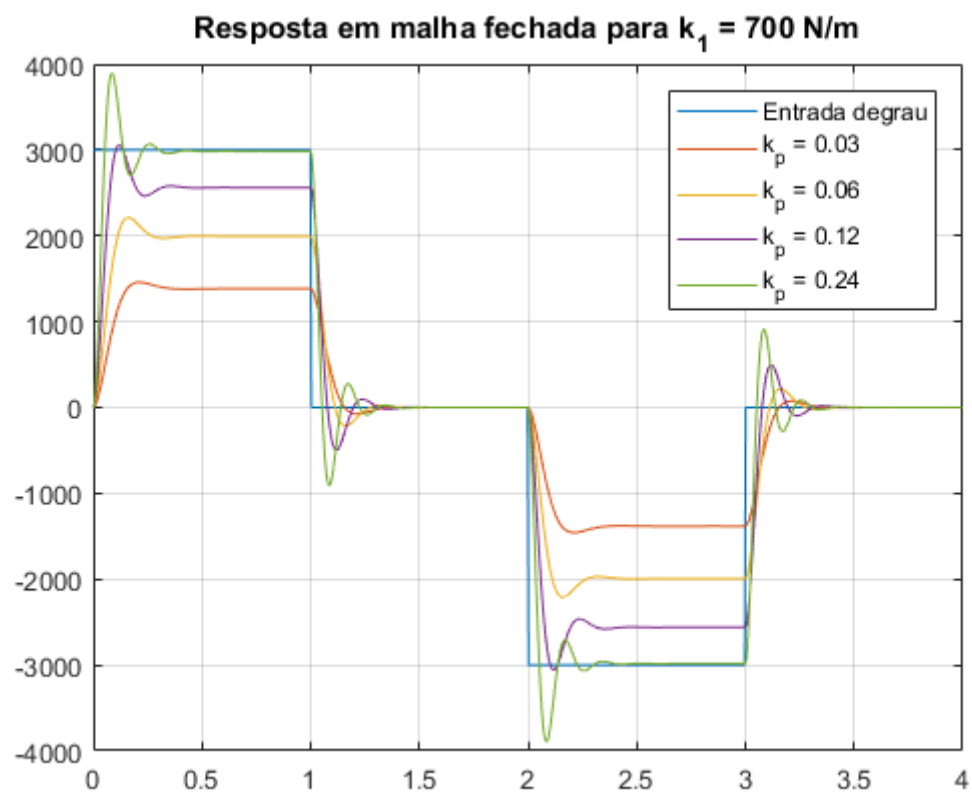
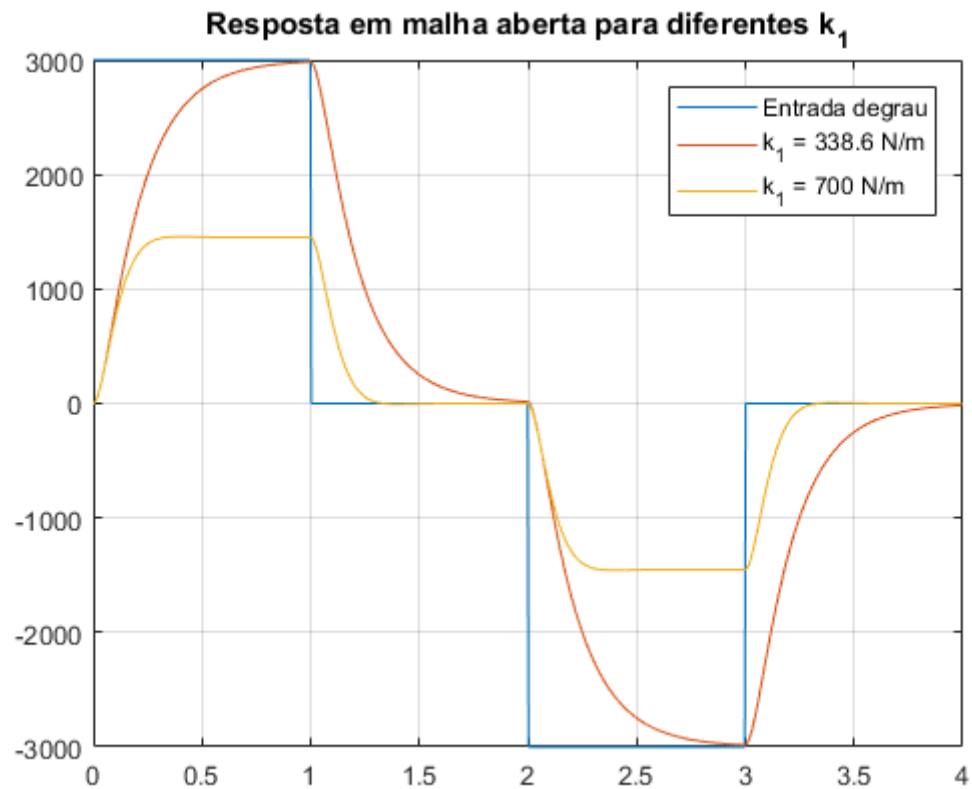


11.



À medida que aumenta-se o k_p , há um *overshoot* maior e um tempo de subida menor. A estabilização se dá nos mesmos instantes para os diferentes valores de k_p .

12. (a) Os gráficos obtidos através do aumento de k_1 para 700N/m são:





Na resposta em malha aberta, pode-se perceber que o aumento da constante de mola do sistema tanto causou uma resposta mais amortecida como um tempo de estabilização menor. Sem realimentação para controlar, o aumento da constante de mola causa uma força maior na resistência do movimento do bloco, refletido no gráfico como esperado pela teoria. Houve, também, um aumento no erro de regime, já que o ganho de pré-filtro k_{pf} não está ajustado para anular o erro de regime da mola de maior dureza, e sim da mola de dureza média.

A resposta em malha fechada possui as mesmas diferenças da resposta em malha aberta: resposta mais amortecida e tempo de estabilização menor. Houve também um *overshoot* maior do que a resposta em malha fechada com constante de mola menor.

(b) Quanto maior o valor de k_p , maior o *overshoot* e mais o sistema oscila, demorando mais para estabilizar também. Juntamente com isso, observa-se o aumento do valor de regime à medida que aumenta-se o k_p .

(c) O erro de regime no caso do sistema em malha aberta é esperado de acontecer quando o k_{pf} não está regulado para anulá-lo, como foi o caso para $k_1 = 700 \text{ N/m}$.

Já no caso do sistema de malha fechada, acontece o erro de regime, porém ele é possível de ser diminuído de acordo com o ganho k_p usado no controlador proporcional. Quando maior o k_p , maior o valor de regime, desse modo sendo possível regular o erro. No caso de $k_p = 0.24$, observa-se uma minimização dele.

Em suma, os erros são presentes quando o k_{pf} não está regulado para a anulação do mesmo, porém o sistema em malha fechada consegue minimizá-lo graças à sua realimentação e controle através da regulação do ganho do controlador proporcional.