

---

# Изследване на формата на осевосиметрични капки

---

Курсов проект по  
Приложения на математиката за моделиране на  
реални процеси

Изготвили:

Биляна Йорданова Йорданова, фн.81676

Петко Василев Георгиев, фн.81647

Софийски университет "Св. Климент Охридски"

Факултет по Математика и Информатика

Юли 2020

## Съдържание

<b>1</b>	<b>Въведение</b>	<b>2</b>
1.1	Какво е повърхностно напрежение . . . . .	2
1.2	Повърхностното напрежение във всекидневието . . . . .	2
1.3	Видове капки . . . . .	2
1.4	Задачата . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Подход за определяне на формата на осевосиметрична капка</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Извличане на експериментален профил от снимка</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Математически модел</b>	<b>4</b>
4.1	Уравнение на Юнг-Лаплас . . . . .	4
4.2	Извеждане на математическия модел . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Решаване на математическия модел</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Намиране на грешка между теоретичен и експериментален профил</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Намиране на най-близък теоретичен профил</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Имплементация на приложението</b>	<b>9</b>
<b>9</b>	<b>Заклучение</b>	<b>11</b>

## Абстракт

За проекта ни разработихме програма, която да пресмята два параметъра, с които може да бъде намерено приближение на повърхностното напрежение на течности, използвайки снимки на капки от въпросните течности. Извличаме информация за профила на капката чрез алгоритъм за разпознаване на ръба ѝ. Получаваме теоретичен профил за капката, като решаваме математическия модел, състоящ се от система от три обикновени диференциални уравнения с подходящи начални условия. Чрез метода на Рунге-Кута решаваме задачата при фиксирани параметри. А за да намерим търсените параметри, използваме метода на най-бързото спускане.

## 1 Въведение

### 1.1 Какво е повърхностно напрежение

Повърхностното напрежение е свойството на течни повърхности да се държат сякаш повърхността им е покрита с еластична мембрана. Свойството се дължи на това, че молекулите на повърхността се привличат. Поради сравнително голямото привличане на водните молекули, водата има по-високо повърхностно напрежение от повечето течности. Затова например малки насекоми или предмети могат да плават на повърхността на водата, въпреки че имат по-голяма плътност от нея. Специфичната форма на водните капки се получава благодарение на повърхностното напрежение.

### 1.2 Повърхностното напрежение във всекидневието

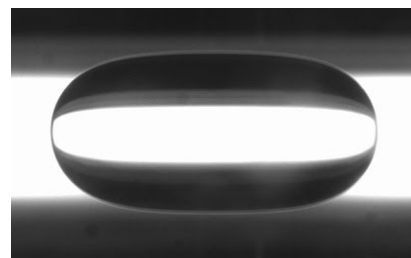
Има много примери за проявата на повърхностното напрежение във всекидневието. Например всякакви сапуни, препарати, дезинфектанти имат ниско повърхностно напрежение, за да проникнат по-добре в повърхностите, които почистват. А причината, поради която използваме гореща вода вместо студена, е същата - горещата вода има по-ниско повърхностно напрежение [2].

### 1.3 Видове капки

За нашите цели ще разглеждаме два вида капки. Едната от тях е висяща капка (Фиг. 1) (pendant drop). Тя представлява капка, която виси от тръба, но не пада поради силите, породени от повърхностното напрежение. Вторият вид капка е въртяща капка (Фиг. 2), която може да се получи в лабораторна среда, като течност в тръба се завърти с много висока скорост. Ще предполагаме, че и двата вида капки са осевосиметрични.



Фигура 1: Висяща капка



Фигура 2: Въртяща капка

## 1.4 Задачата

Задачата на проекта ни е да анализираме осевосиметрична капка на база профила ѝ. Понеже капката е осевосиметрична, е достатъчно да се наблюдава само една част от нейната повърхност. Цел на анализа е да се определят параметри, с помощта на които да може да се пресметне повърхностното напрежение на течността, от която се състои капката.

## 2 Подход за определяне на формата на осевосиметрична капка

Методът ни на решаване на задачата има следните стъпки:

- i Извличане на експериментален профил на капка от входен файл или снимка;
- ii Генериране на теоретични профили;
- iii Пресмятане на грешката между теоретичен и експериментален профил;
- iv Определяне на теоретичния профил, който е най-близък до експерименталния профил (т.е. с най-малка грешка).

## 3 Извличане на експериментален профил от снимка

Приемаме, че програмата ни е получила изображение на осевосиметрична капка, която виси от вертикална тръба. Заради симетричността ѝ е достатъчно да използваме само част от контура ѝ (т.е. червеното очертание на Фиг. 3), за да построим експерименталния ѝ профил т.е. как изглежда формата ѝ в експериментални условия.



Фигура 3: Профил на капката

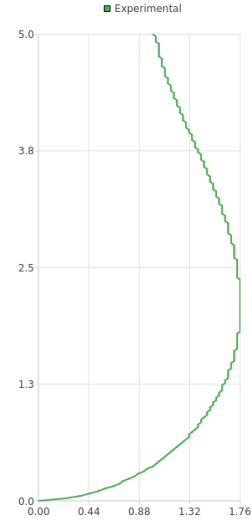
Обработваме изображението със следния алгоритъм:

- i Изображението се замазва (чрез т.нар. Box blur).
- ii Цветовете на изображението се превръщат в сива гама.
- iii Намират се най-светлия и най-тъмния пиксел, чрез които се пресмята средния цвят на изображението.
- iv Изображението се обхожда ред по ред. Редът се обхожда докато се стигне до пиксел, който е по-тъмен от средния за изображението. Когато се стигне до такъв пиксел координатите му се добавят в масив от координати на точки и алгоритъмът продължава с обхождането следващия ред (тъй като е достатъчна една точка от ред).
- v Координатите се транслират, така че върхът да е в началото на координатната система и се скалират така, че най-горната точка да е на разстояние 1 от ординатата.

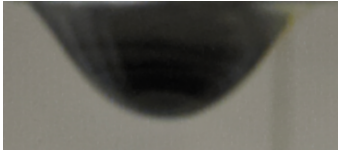
Резултати от предложения по-горе алгоритъм за висящите капки на Фиг. 4 и Фиг. 6 са показани съответно на Фиг. 5 и Фиг. 7.



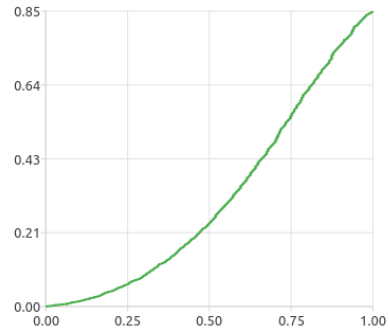
Фигура 4: Първоначална снимка



Фигура 5: Профил на капката



Фигура 6: Първоначална снимка



Фигура 7: Профил на капката

## 4 Математически модел

Теоретичният профил на капката представлява как тя би трябвало да изглежда спрямо дадени параметри. За да намерим теоретичен профил на капка, трябва да решим математическия модел. Той се извежда с помощта на уравнението на Юнг-Лаплас и геометричните свойства на капката.

### 4.1 Уравнение на Юнг-Лаплас

Уравнението на Юнг-Лаплас е нелинейно частно диференциално уравнение, което описва зависимостта между напрежението в дадена капка, кривината ѝ, и нейното повърхностно напрежение.

Уравнението изглежда така:

$$\Delta\rho = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

като  $\Delta\rho$  е разликата между наляганията в капката и извън нея,  $R_1$  и  $R_2$  са главните кривини на капката, а  $\sigma$  е повърхностното напрежение на течността на капката.

## 4.2 Извеждане на математическия модел

От [1] имаме следната система диференциални уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos \varphi \\ \frac{dz}{ds} &= \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{\Delta p}{\sigma} - \frac{\sin \varphi}{x},\end{aligned}$$

където първите две уравнения идват от геометрични съображения за формата на капката, а третото е уравнението на Юнг-Лаплас. С  $x$  и  $z$  са означени координатите на всяка точка от профила на капката в Декартова координатна система с център върха на капката,  $\varphi$  е ъгъла между допирателната през дадена точка от профила и абсцисната ос, а  $s$  е дължината на дъга от профила на капката, измерена от върха на координатната система.

Понеже  $\Delta p = \Delta p_0 + \Delta \rho g z$ , където  $\Delta p_0$  е налягането на върха на капката, можем да заместим в уравнението на Юнг-Лаплас и като означим кривината на върха на капката с  $R_0$  получаваме:  $p_0 = \frac{2\sigma}{R_0}$

След заместване в предната система получаваме:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos \varphi \\ \frac{dz}{ds} &= \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{2}{R_0} + \frac{\Delta \rho g z}{\sigma} - \frac{\sin \varphi}{x}\end{aligned}$$

Въвеждаме означенията  $b := \frac{1}{R_0}$  и  $c := \frac{\Delta \rho g}{\sigma}$  и получаваме следната система диференциални уравнения, зависеща от коефициентите  $b$  и  $c$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos \varphi \\ \frac{dz}{ds} &= \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} &= 2b + cz - \frac{\sin \varphi}{x}\end{aligned} \tag{1}$$

Понеже системата не е дефинирана във върха на капката, за начални условия използваме  $x(0) = 0$ ,  $z(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ . При третото уравнение имаме проблем, когато  $s = 0$ , но по дефиниция имаме, че при  $s = 0$  (т.е. във върха на капката),  $\frac{d\varphi}{ds} = b$ .

За въртяща капка получаваме подобна система:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos \varphi \\ \frac{dz}{ds} &= \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{ds} &= 2b + dx^2 - \frac{\sin \varphi}{x}\end{aligned} \tag{2}$$

където  $b := \frac{1}{R_0}$  и  $d := \frac{\omega}{2\sigma}$ . При решаването на модела за въртяща капка, използваме същите начални стойности като при висяща капка.

От тук нататък ще се занимаваме само с висящи капки, като разглеждаме системата (1), заедно с началните условия.

## 5 Решаване на математическия модел

Ако разполагаме със стойности на параметрите  $b$  и  $c$ , то решението на системата от диференциални уравнения (1) и (2) (с посочените по-горе начални условия), ще бъде теоретичния профил на капка с тези параметри. За целта използваме метода на Рунге-Кута от четвърти ред [3]. Това е итеративен метод за приближено решаване на задачата на Коши.

Нека например разгледаме:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= f(x, u), \quad x \in (0, X] \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

Въвеждаме равномерна мрежа  $x_i = \{ih, i = 0, 1..N, h = X/N\}$ . Нека да означим с  $y_n \approx u(x_n)$ . Тогава методът на Рунге-Кута от четвърти ред изглежда така:

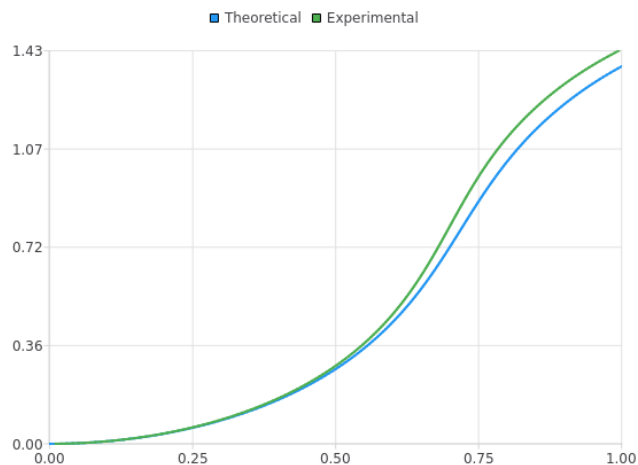
$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6\end{aligned}$$

Като приложим този метод за висящи капки, получаваме:

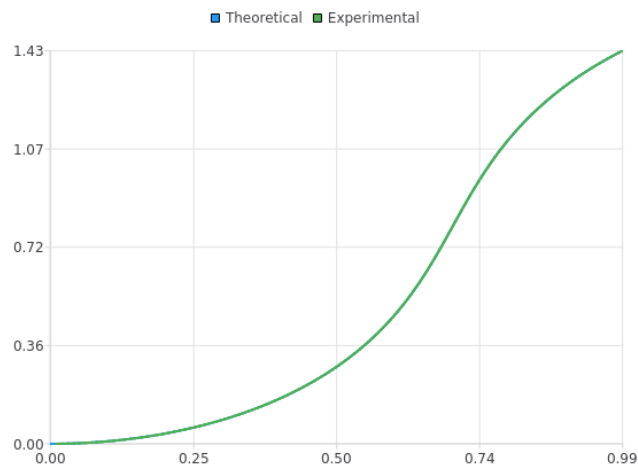
$$\begin{aligned}(x_0, z_0, \varphi_0) &= (0, 0, 0) \\ f(x, z, \varphi) &= \begin{cases} (\cos \varphi, \sin \varphi, 2b + cz - \sin(\varphi)/n), & \text{ако } s \neq 0, \\ (\cos \varphi, \sin \varphi, b), & \text{ако } s = 0 \end{cases} \\ (k_{1,n}, l_{1,n}, m_{1,n}) &= hf(x_n, z_n, \varphi_n) \\ (k_{2,n}, l_{2,n}, m_{2,n}) &= hf\left(x_n + \frac{k_{1,n}}{2}, z_n + \frac{l_{1,n}}{2}, \varphi_n + \frac{m_{1,n}}{2}\right) \\ (k_{3,n}, l_{3,n}, m_{3,n}) &= hf\left(x_n + \frac{k_{2,n}}{2}, z_n + \frac{l_{2,n}}{2}, \varphi_n + \frac{m_{2,n}}{2}\right) \\ (k_{4,n}, l_{4,n}, m_{4,n}) &= hf(x_n + k_{3,n}, z_n + l_{3,n}, \varphi_n + m_{3,n}) \\ \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \\ \varphi_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \\ \varphi_n \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \left( \begin{bmatrix} k_{1,n} \\ l_{1,n} \\ m_{1,n} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_{2,n} \\ l_{2,n} \\ m_{2,n} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} k_{3,n} \\ l_{3,n} \\ m_{3,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{4,n} \\ l_{4,n} \\ m_{4,n} \end{bmatrix} \right)\end{aligned}$$

Решаваме задачата, докато  $x_n \leq 1$ .

Резултати от метода се показани на Фиг. 8 и Фиг. 9, където в син цвят е начертан получен чрез метода профил, а със зелено - експериментално получен профил с вече известни параметри. Наблюдава се, че дори и при относително голяма стъпка ( $h = 0.1$ ) полученият профил е много близък до експерименталния, стига да му бъдат подадени достатъчно точни стойности за  $b$  и  $c$ .



Фигура 8: Генериране на теоретичен профил  
Експериментални:  $b = 1.843658$ ,  $c = -2.9$   
Входни:  $b = 1.8$ ,  $c = -2.9$  при  $h = 0.1$



Фигура 9: Генериране на теоретичен профил  
Експериментални:  $b = 1.843658$ ,  $c = -2.9$   
Входни:  $b = 1.843658$ ,  $c = -2.9$  при  $h = 0.1$

## 6 Намиране на грешка между теоретичен и експериментален профил

При дадени теоретичен и експериментален профили на капки ще ни бъде необходимо да намерим разликата между тези два профила, т.е. грешката на теоретичния профил спрямо експерименталния. Търсеният алгоритъм е необходимо да отговаря на следните изисквания:

- Да може да бъде приложим върху два случайни профила, тоест да работи, когато:
  - единият профил е по-голям от другия, например ако  $x/y$  координатите на единия профил са в интервала  $[0,1]$ , но тези на другия профил са в интервала  $[0, 5]$ ;
  - профилите не могат да бъдат представени като функции на една променлива, тоест профилите могат да имат две или повече точки с еднакви стойности на  $x$  и/или  $y$  координатите.
- Да има кратко време за изпълнение.

За намиране на грешката е приложен следният алгоритъм:

- 1 За всяка точка от двата профила се намира разстоянието от нея до върха на профила. Това разстояние се изчислява като сума от разстоянията между всеки две съседни точки, намиращи се между въпросната точка и върха на профила:

```

profile = масив от точките на даден профил;
profile[1].value = 0;
for i ∈ {2, 3, ..., length(profile)} do
    x = profile[i].x - profile[i - 1].x;
    y = profile[i].y - profile[i - 1].y;
    dist =  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ;
    profile[i].value = profile[i - 1].value + dist;
end

```



- 2 Стойностите на точките в двата профила се "нормализират", тоест всички стойности се разделят на максималната стойност в профила. След това стойностите на всички точки от профила ще бъдат в интервала  $[0,1]$ ;

```

m = max(profile.value);
for point ∈ profile do
    | point.value = point.value/m;
end

```

- 3 За всяка точка  $p_1$  от експерименталния профил се намира точката  $p_2$  от теоретичния профил, чиято стойност е възможно най-близка до тази на точката  $p_1$ . Изчислява се разстоянието между тези две точки;

- 4 За стойност на грешката между двата профила се взема сумата от квадратите на намерените в точка 3 разстояния.

```

error = 0;
t = 1;
for p1 ∈ experimental do
    while
        | t < length(theoretical) or |theoretical[t].value − p1.value| > |theoretical[t + 1].value − p1.value| do
            | t = t + 1;
        end
        | p2 = theoretical[t];
        | x = p1.x − p2.x;
        | y = p1.y − p2.y;
        | error = error + (x2 + y2);
    end

```

Представеният алгоритъм е осъществен със сложност  $O(N + M)$ , където  $N$  и  $M$  са съответно броя на точките в първия и втория профил.

## 7 Намиране на най-близък теоретичен профил

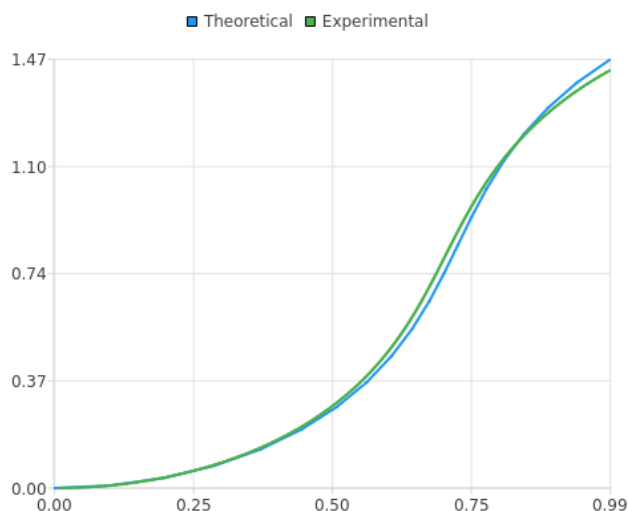
За да намерим теоретичен профил, който е възможно най-близък до експерименталния профил, използваме методът на най-бързото спускане така че при зададени начални стойности на  $b$  и  $c$ , да се намери стойност на  $c$ , при която грешката е минимална. За да се проверяват различни стойности на  $b$  и да се избегне погрешното намиране на локален вместо глобален минимум, използваме таблица от различни начални стойности на  $b$  и  $c$ . Текущата итерация на програмата използва следните начални стойности:

$$B = \{0.1 + \frac{2.9i}{100} | i = 0, 1, 2, \dots, 100\}$$

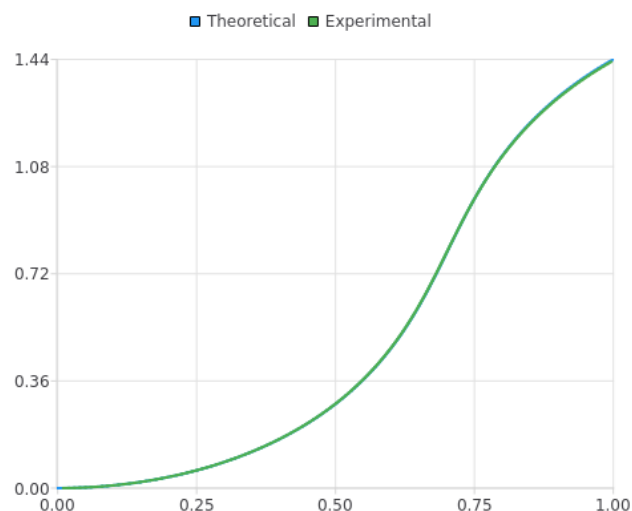
$$C = \{-6 + \frac{6i}{15} | i = 0, 1, 2, \dots, 15\}$$

$$(b, c) \in B \times C$$

На Фиг.10 и Фиг.11 са показани намерените най-близки теоретични профили за висяща капка с известни експериментални данни, като графиката в зелено е експерименталният профил, а тази в синьо - теоретичният. И двата резултата са получени след изпълняване на алгоритъма за минимизиране на грешката. Разликата между Фиг. 10 и Фиг. 11 е стъпката, с която е изпълнен споменатият алгоритъм (съответно 0.1 и 0.01). Колкото по-малка е стъпката  $h$ , толкова по-точен теоретичен профил получаваме (може да се види, че на Фиг. 11 двете графики почти съвпадат).

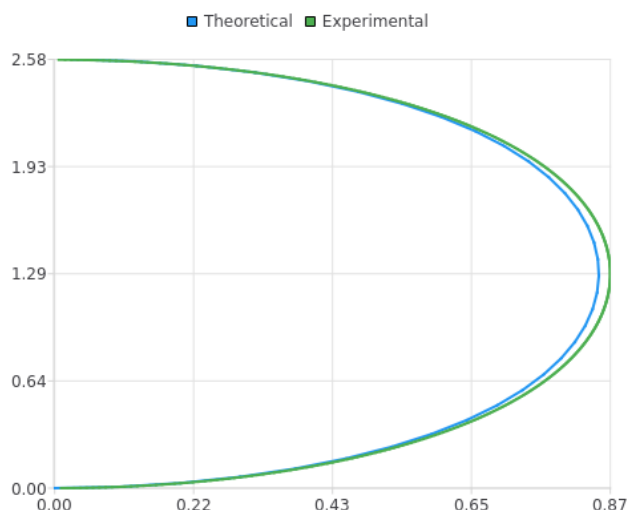


Фигура 10: Минимизиране на грешката (висяща)  
 Експериментални:  $b = 1.843658$ ,  $c = -2.9$   
 Изходни:  $b = 1.782$ ,  $c = -2.66419635$  при  $h = 0.1$

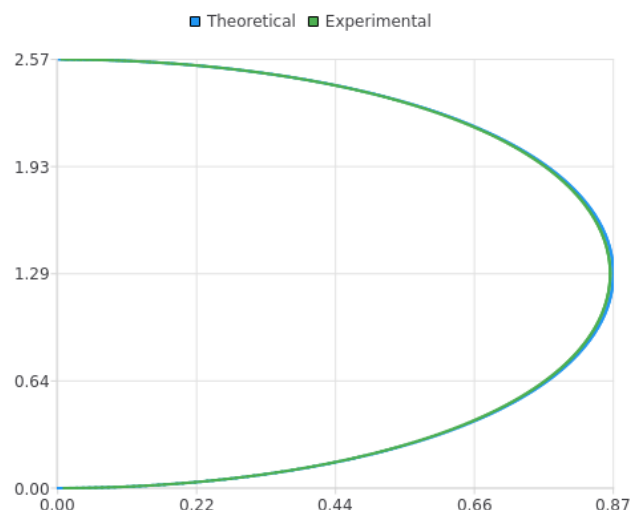


Фигура 11: Минимизиране на грешката (висяща)  
 Експериментални:  $b = 1.843658$ ,  $c = -2.9$   
 Изходни:  $b = 1.84$ ,  $c = -2.88179338$  при  $h = 0.01$

На Фиг. 12 и Фиг. 13 са показани получените теоретични профили за съответните въртящи капки, входните данни за които са ни известни. Зелената графика е експерименталният профил, а синята - теоретичният. Разликата между двете фигури е отново стъпката  $h$  и се наблюдава, че с по-малка стъпка, получаваме по-точен теоретичен профил



Фигура 12: Минимизиране на грешката (въртяща)  
 Експериментални:  $b = 1.504438$ ,  $c = -1.873$   
 Изходни:  $b = 1.55$ ,  $c = -2.07054505$  при  $h = 0.1$



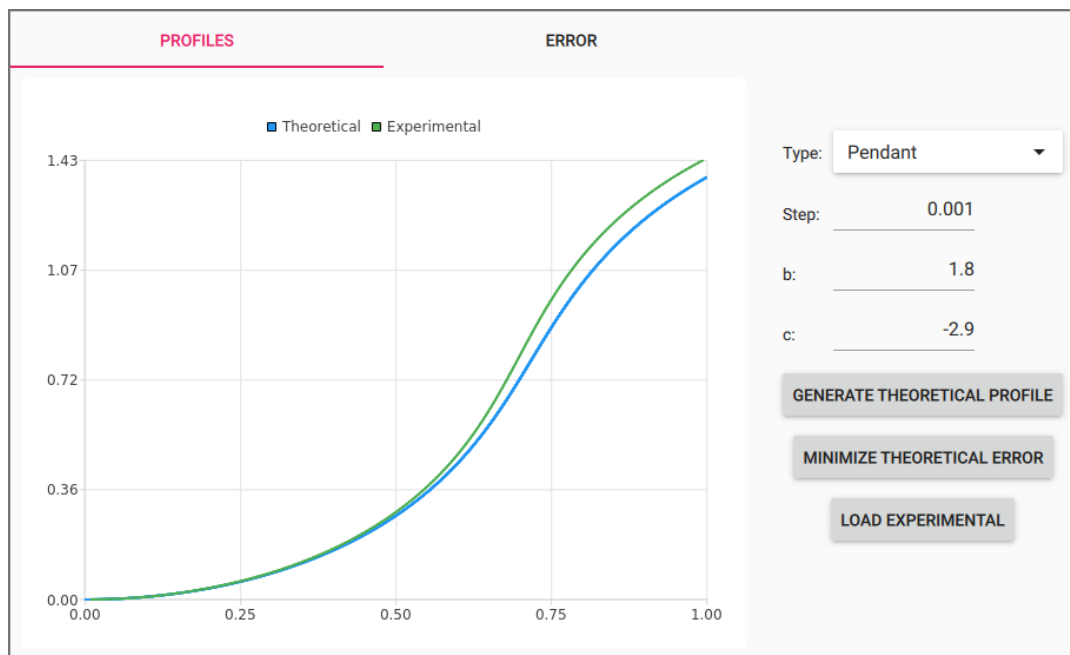
Фигура 13: Минимизиране на грешката (въртяща)  
 Експериментални:  $b = 1.504438$ ,  $c = -1.873$   
 Изходни:  $b = 1.492$ ,  $c = -1.82101084$  при  $h = 0.01$

## 8 Имплементация на приложението

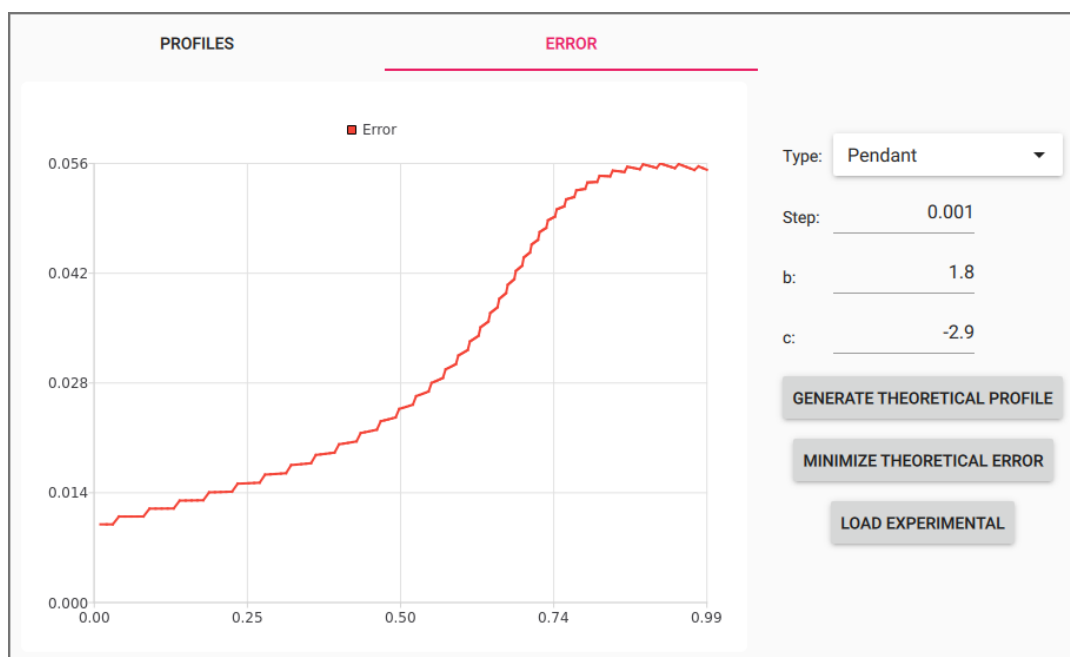
Приложението е разработено с езика C++ и библиотеката Qt. За неговия интерфейс използваме Qt библиотеката "Qt Quick Controls 2", която му позволява да бъде използван на много различни платформи, включително Windows, Linux и Android. За изчертаване на графиките използваме "Qt Charts". Използвани са версии Qt5.14 и C++17. Приложението позволява зареждане на експериментален профил от текстови файл,

изображение, запазено на устройството и също така предоставя опцията да се направи снимка на капка от самото приложение. При натискане на бутона "Minimize theoretical error" паралелно се изпълнява метода на най-бързото спускане с множество различни начални точки и резултатът от това изпълнение се показва на екрана. Кодът на приложението може да бъде намерен на [https://github.com/pgeorgiev98/drop\\_shape\\_analysis](https://github.com/pgeorgiev98/drop_shape_analysis)

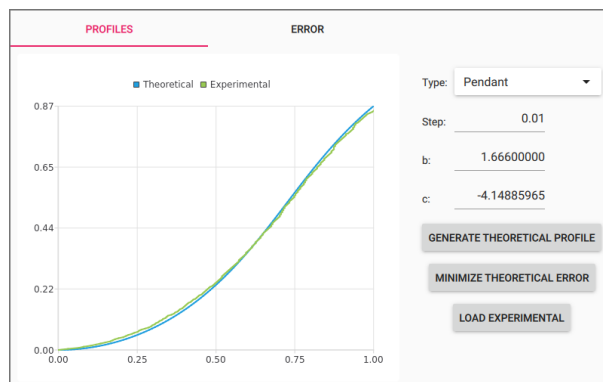
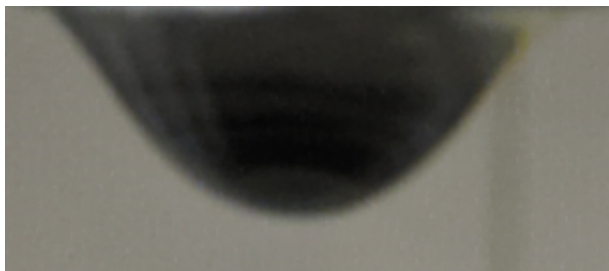
На Фиг. 14 и Фиг. 15 са показани изгледи от интерфейса на приложението, съответно теоретичен и експериментален профил за висяща капка със стъпка  $h = 0.01$  на Фиг. 14 и графика на грешката между тях на Фиг. 15. Фигури 16, 17 и 18 показват резултати на програмата за различни висящи капки.



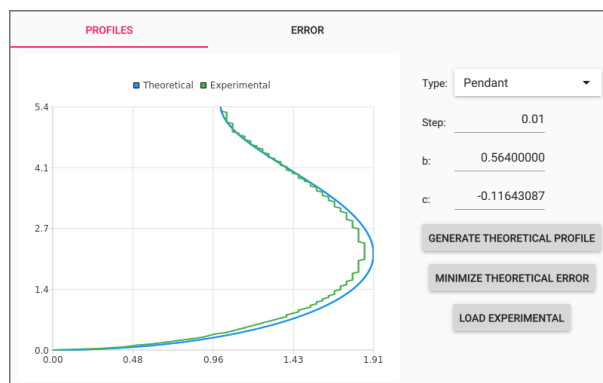
Фигура 14: Изглед от приложението



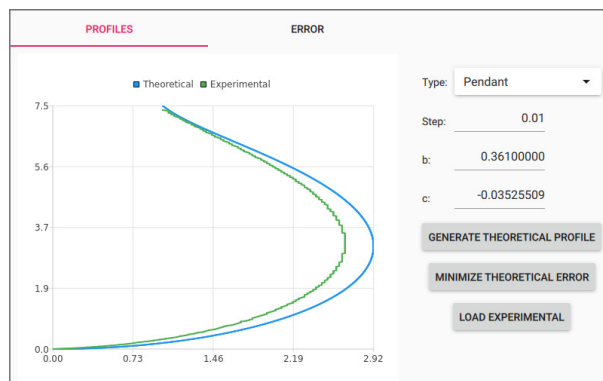
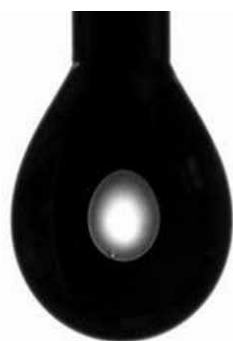
Фигура 15: Изглед от приложението



Фигура 16: Резултати от приложението при снимка на висяща капка



Фигура 17: Резултати от приложението при снимка на висяща капка



Фигура 18: Резултати от приложението при снимка на висяща капка

## 9 Заключение

Занимавахме се с това да намерим приближена стойност на повърхностното напрежение на течност, като намираме коефициенти, от които зависи формата на капка от течността.

Методът на Рунге-Кута предоставя достатъчно точно решение на математическия модел за малък брой итерации. Предложеният алгоритъм за намиране на грешката предоставя задоволителни резултати за линейно време. Това ни позволява да изпълняваме метода на най-бързото спускане за голям брой начални параметри с малка стъпка при решаването на модела. Всичко това прави възможно бързото намиране на теоретичен профил, близък до даден експериментален.

## Литература

- [1] Galina Lyutskanova, Kiril Mihaylov, Vasil Kolev. *Axisymmetric Drop Shape Analysis*. Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 2015.
- [2] R. Nave, *Surface Tension*  
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/surten.html>
- [3] <https://math.stackexchange.com/q/721076>