1 Se celebra un casting televisivo en dos sedes, Madrid y Sevilla. En Madrid se seleccionan 20 chicos y 30 chicas, que reunimos en una sala. Allí se mezclan al azar y se colocan en fila india. Lo mismo hacemos en Sevilla, donde se han seleccionado 30 chicos y 50 chicas.

Lanzamos una moneda (equilibrada): si sale cara, llamamos a Sevilla y escogemos al candidato que ocupe la primera posición de la lista. Si sale cruz, hacemos lo mismo, pero en Madrid.

(a) *(0'5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato elegido sea un chico?

(b) *(0'5 puntos)* Juan González es uno de los seleccionados en Sevilla ¿Cuál es la probabilidad de que sea el candidato finalmente elegido?

(c) *(0'5 puntos)* Se ha efectuado el proceso de elección del candidato final, que resulta ser una chica. ¿Con qué probabilidad será madrileña?

(d) *(1 punto)* Ahora cambiamos el procedimiento: reunimos a todos los seleccionados en un hotel de Barcelona, los mezclamos y colocamos en fila india; y elegimos al candidato que ocupe la primera posición. La probabilidad de que Juan González haya sido el elegido ¿coincide con la del apartado (b)? Y la probabilidad de que el candidato sea chico ¿coincide con la del apartado (a)? Medita sobre el asunto

Solución: Llamamos

$$\begin{aligned} M &= \{\text{Se elige alguien de Madrid}\} \\ S &= \{\text{Se elige alguien de Sevilla}\} \\ C_o &= \{\text{Se elige un chico}\} \\ C_a &= \{\text{Se elige una chica}\} \\ J &= \{\text{Es elegido Juan González}\} \end{aligned}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(M) = 1/2 \\ &\mathrm{P}(S) = 1/2 \\ &\mathrm{P}(C_o \mid M) = 2/5 \\ &\mathrm{P}(C_o \mid S) = 3/8 \\ &\mathrm{P}(C_a \mid M) = 3/5 \\ &\mathrm{P}(C_a \mid S) = 5/8 \end{aligned}$$

(a) $\mathrm{P}(C_o) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_o \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(C_o \mid S) = 1/2 \cdot 2/5 + 1/2 \cdot 3/8 = 31/80 = 0'3875$

(b) $\mathrm{P}(J) = \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(J \mid M) + \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(J \mid S) = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1/80 = 1/160 = 0'00625$

(c)

$$\mathrm{P}(M \mid C_a) = \frac{\mathrm{P}(M \cap C_a)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(C_a \mid M)}{\mathrm{P}(C_a)} = \frac{1/2 \cdot 3/5}{1 - 0'3875} = 0'4898$$

(d) Al estar todos los candidatos juntos, las probabilidades cambian; en efecto

(1) $\mathrm{P}(C_o) = 50/130 = 0'3846$

(2) $\mathrm{P}(J) = 1/130 = 0'007692$

El experimento es distinto, el espacio muestral otro y, en consecuencia, distintas las probabilidades.

2 Sea X una variable aleatoria discreta que denota el número de averías que un operario resuelve en una jornada de trabajo, con función de cuantía dada por

$$f(x) = \frac{k}{x+1}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3\}$$

(a) *(0'75 puntos)* Calcular $\mathrm{P}(X > 1)$ y $\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3)$.

(b) *(0'75 puntos)* Calcula el número medio de averías que soluciona al día.

(c) *(1 punto)* Si su sueldo es de 60 euros por jornada laboral y si le pagan un plus de 20 euros por cada avería solucionada que exceda de una al día ¿cuál es el sueldo diario medio?

Solución: Tenemos que hallar el valor de k; se obtiene sumando las probabilidades e igualando a 1

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 \quad \to \quad \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1$$
$$\frac{25k}{12} = 1 \quad \to \quad k = \frac{12}{25}.$$

La función de cuantía es, por tanto

X	0	1	2	3
$f(x)$	12/25	6/25	4/25	3/25

(a)

$$\mathrm{P}(X > 1) = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} = \frac{7}{25}$$
$$\mathrm{P}(X > 0 \mid X < 3) = \frac{\mathrm{P}(0 < X < 3)}{\mathrm{P}(X < 3)} = \frac{6/25 + 4/25}{22/25} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

(b)

$$\mathrm{E}\,(X) = 0 \cdot \frac{12}{25} + 1 \cdot \frac{6}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} + 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{23}{25}.$$

(c) La variable sueldo S tiene los valores

$$S = \begin{cases} 60 & \text{si } X \in \{0,1\} \\ 80 & \text{si } X = 2 \\ 100 & \text{si } X = 3 \end{cases}$$

En consecuencia su cuantía es

S	60	80	100
f_S	$18/25$	$4/25$	$3/25$

Luego $\mathrm{E}\,(S) = 60 \cdot \frac{18}{25} + 80 \cdot \frac{4}{25} + 100 \cdot \frac{3}{25} = 68.$

3 Se tiene la siguiente función de cuantía de una v.a. (X, Y)

Y					
3	0	$3/8$	$3/8$	0	
1	$1/8$	0	0	$1/8$	
	0	1	2	3	X

Hallad

(a) *(1 punto)* La covarianza $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$

(b) *(1 punto)* $\mathrm{E}\,(X \mid Y = 1)$

(c) *(0'5 puntos)* ¿Son independientes? Razónese la respuesta

Solución:

(a) Se debe calcular $\mathrm{E}\,(X)\,, \mathrm{E}\,(Y)$ y $\mathrm{E}\,(XY)$. Las distribuciones marginales son

X	0	1	2	3
f_1	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Y	1	3
f_2	$2/8$	$6/8$

Calculando..

- $\mathrm{E}\,(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$
- $\mathrm{E}\,(Y) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{2}$
- $\mathrm{E}\,(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{4}$

Por tanto $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \dfrac{15}{4} - \dfrac{3}{2}\dfrac{5}{2} = 0$

(b) La distribución condicional es

$(X \vert Y=1)$	0	3
$g_1(x \vert 1)$	1/2	1/2

de donde $\mathrm{E}\,(X \mid Y=1) = \dfrac{3}{2}$

(c) Como no coinciden las cuantías $f_1(x)$ y $g_1(x|1)$, NO son independientes. Otra prueba: $f(0,1) = \dfrac{1}{8}$ mientras que $f_1(0) \cdot f_2(1) = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{32}$

4 *(2'5 puntos)* Un plaguicida se consigue con la mezcla de dos sustancias con concentraciones de insecticida que siguen las siguientes concentraciones normales

$$X_1 \sim N(200, 25), \qquad X_2 \sim N(20, 5)$$

La mezcla se hace utilizando el doble de X_2 que de X_1. Teniendo en cuenta que al fumigar con el plaguicida se produce una pérdida de parte de insecticida producida por diversas causas, cuya distribución X_3 es normal de media 50 y desviación 10, la concentración final de insecticida X queda de la siguiente manera

$$X = X_1 + 2X_2 - \frac{3}{2}X_3$$

¿Cuál es la probabilidad de que la concentración final de insecticida esté entre 150 y 175?

Solución: La distribución normal resultante es la combinación de las tres distribuciones normales: $X = X_1 + 2X_2 - \dfrac{3}{2}X_3$, por lo que lo único que hay que hacer es calcular los parámetros de la distribución resultante y la probabilidad pedida $P(150 \leq X \leq 175)$.

Primero se calcula la esperanza: $\mathrm{E}\,(X) = \mathrm{E}\,(X_1) + 2 \cdot \mathrm{E}\,(X_2) - \dfrac{3}{2} \cdot \mathrm{E}\,(X_3)$. Del enunciado sabemos que $\mathrm{E}\,(X_1) = 200$, $\mathrm{E}\,(X_2) = 20$ y $\mathrm{E}\,(X_3) = 50$, por lo que:

$$\mathrm{E}\,(X) = 200 + 2 \cdot 20 - \frac{3}{2} \cdot 50 = 200 + 40 - 75 = 165.$$

La varianza de la distribución resultante se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(X) &= \mathrm{Var}\,(X_1) + 2^2 \cdot \mathrm{Var}\,(X_2) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\,(X_3) \\ &= 25^2 + 2^2 \cdot 5^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 10^2 \\ &= 625 + 100 + 225 = 950. \end{aligned}$$

Como necesitamos la desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{950} \simeq 30.82$. Así pues,

$$X \sim N(165, 30.82).$$

Normalizando:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(150 \leq X \leq 175\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{30.82} \leq Z \leq \frac{175-165}{30.82}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-0.49 \leq Z \leq 0.33\right) \\
&= \Phi(0.33) - \Phi(-0.49) \\
&= 0.6293 + 0.6879 - 1 = 0.3172.
\end{aligned}$$