III Konkurs Internetowego Kółka Olimpiady Matematycznej Juniorów

(6-8 marca 2020 r.)

1. Dana jest liczba całkowita będąca iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. Wykaż, że możemy dopisać na jej koniec dwie cyfry, tak, by otrzymana liczba była kwadratem liczby całkowitej.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 60°$. Punkt M jest punktem przecięcia symetralnej boku AC z prostą AB. Punkt N jest przecięciem symetralnej boku AB z prostą AC. Wykazać, że $MN = BC$.

3. Nieujemne liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki: $x \leq y \leq z$ oraz $xy + yz + zx = 1$. Wykazać, że $xz \leq \frac{1}{2}$.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = BC$. Punkty K, L leżą na bokach AB i BC, tak, że $AK+CL = KL$. Punkt M jest środkiem odcinka KL. Prosta przechodząca przez M, równoległa do boku BC, przecina bok AC w punkcie N. Udowodnić, że $\sphericalangle KNL = 90°$.

5. Dany jest 50-kąt foremny. Narysowano 25 jego przekątnych, przy czym żadne dwie z nich nie mają wspólnego końca. Udowodnić, że pewna przekątna ma po swoich obu stronach parzystą liczbę wierzchołków danego 50-kąta.

Informacje dla uczestnika

1. Na rozwiązywanie zadań i zapisanie rozwiązań należy poświęcić co najwyżej trzy godziny zegarowe.
2. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie, bez korzystania z pomocy osób trzecich, komputera (w tym forów internetowych) oraz innych urządzeń elektronicznych i pomocy naukowych (w tym książek oraz zeszytów).
3. Rozwiązania zadań należy przesłać na adres

`zadania.ikomj@gmail.com`

najpóźniej do dnia **8 marca 2020 r. (niedziela), godz. 23:59**.