MINGGU KE IV

TURUNAN PARSIAL DAN TURUNAN BERARAH

By
Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si

Turunan Parsial

Definisi: Misalkan f(x,y) adalah fungsi dua peubah x dan y.

1. Turunan parsial pertama dari f terhadap x
   (y dianggap konstan) didefinisikan sebagai berikut

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

2. Turunan parsial pertama dari f terhadap y
   (x dianggap konstan) didefinisikan sebagai berikut

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Contoh:

Tentukan f_x dan f_y

1. $f(x,y) = x^3 y + 4xy^2$

   Jawab

   $f_x(x,y) = 3\ x^2\ y + 4\ y^2$

   $f_y(x,y) = x^3 + 8\ xy$

2. $f(x,y) = y\cos(x^2 + y^2)$

   Jawab

   $f_x(x,y) = -2xy\ \cos(x^2 + y^2)$

   $f_y(x,y) = \cos(x^2+y^2) - 2y^2 \sin(x^2+y^2)$

3. $f(x,y) = \int_x^y \ln\sin t\ dt$

   Jawab

   $f_x(x,y) = -\ \ln(\sin x)$

   $f_y(x,y) = \ln(\sin y)$

Latihan

Tentukan f_x dan f_y

1. $f(x,y) = x^3 \cos(x+y) + y \sin 2xy$
2. $f(x,y) = \int_x^y e^{\cos t}\, dt$
3. $f(x,y) = x^3 \cos(x+y) + y \sin(2xy)$

Tentukan f_x, f_y dan f_z

1. $f(x,y,z) = xy + y^2 z + 3xz$
2. $f(x,y,z) = x \cos(y-z) + 2xy$

Turunan Parsial Kedua

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

Contoh

Tentukan f_{xx}, f_{yy} ,f_{xy}, f_{yx}

1. $f(x,y)= x\,y^3 + y^3x^2$

   Jawab

   $f_x(x,y) = y^3 + 2xy^3$

   $f_y(x,y) = 3xy^2 + 3x^2y^2$

   $f_{xx}(x,y) = 2y^3$

   $f_{xy}(x,y) = 3y^2 + 6xy^2$

   $f_{yy}(x,y) = 6xy + 6x^2y$

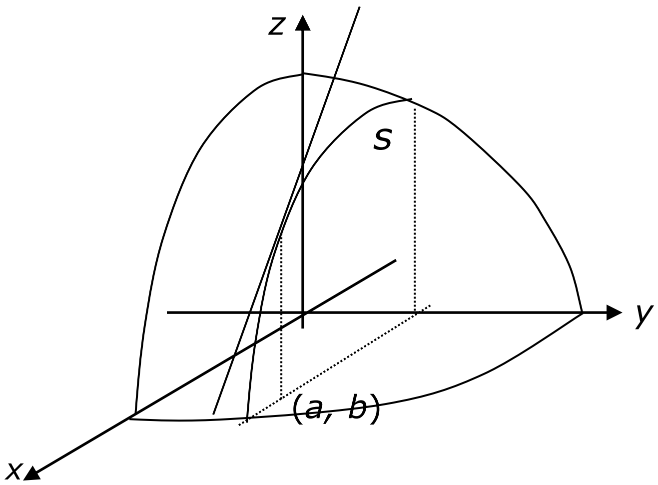
   $f_{yx}(x,y) = 3y^2 + 6xy^2$

Latihan

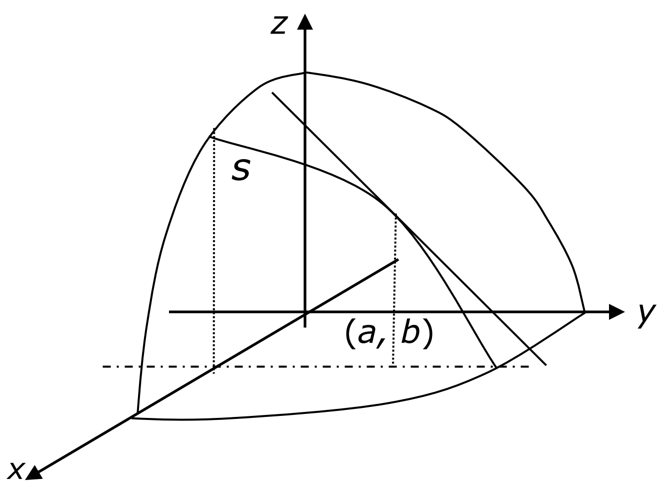
Tentukan f_{xx}, f_{yy} ,f_{xy}, f_{yx}

1. $f(x,y) = x \cos(xy) + xy\, e^{x+y}$
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + 2\, xy + y^3)$
3. $f(x,y) = \tan^{-1}(y^2/x)$
4. $f(x,y) = \ln(x^2+2xy+y^2)$
5. $f(x,y) = (2x-y)/(xy)$

Arti Geometri Turunan Parsial



Perpotongan bidang y = b dengan fungsi permukaan f(x,y) berupa sebuah kurva (lengkungan *s*) pada permukaan tersebut.
Turunan parsial fungsi f(x,y) terhadap x di titik (a,b) merupakan
gradien garis singgung terhadap kurva *s* pada titik (a, b, f(a,b)) dalam arah sejajar sumbu *x*.



Perpotongan bidang x = a dengan fungsi permukaan f(x,y) berupa sebuah kurva (lengkungan *s*) pada permukaan tersebut.

Turunan parsial fungsi f(x,y) terhadap y di titik (a,b) merupakan **gradien garis singgung terhadap kurva *s* pada titik (a, b, f(a,b)) dalam arah sejajar sumbu *y*.**

Vektor Gradien

Misalkan fungsi z = f(x,y) terdefinisi di $D \subset R^2$

- Definisi : Vektor gradien dari fungsi z = f(x,y) di (x,y) $\in D$, didefinisikan sebagai

$$\vec{\nabla} f(x,y) = f_x(x,y)\hat{i} + f_y(x,y)\hat{j}$$

$\hat{i}, \hat{j}$ adalah vektor satuan di arah sumbu x,y positif

Notasi lain: grad f(x,y), del f(x,y), $\Delta f(x,y)$

- Definisi

Vektor gradien dari fungsi f(x,y,z) adalah

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\hat{i} + f_y(x,y,z)\hat{j} + f_z(x,y,z)\hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ adalah vektor satuan di arah sumbu x,y,z positif

Contoh

Tentukan $\vec{\nabla} f(x,y)$ dan $\vec{\nabla} f(-1,-1)$ dari $f(x,y) = x e^{xy}$

Jawab

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \quad \Rightarrow \quad f_x(-1,-1) = e + e = 2e$$

$$f_y(x,y) = x^2 e^{xy} \quad \Rightarrow \quad f_y(-1,-1) = e$$

Sehingga diperoleh:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(e^{xy} + xye^{xy}\right)\hat{i} + x^2 e^{xy}\,\hat{j}$$

$$\vec{\nabla} f(-1,-1) = 2e\,\hat{i} + e\,\hat{j}$$

Turunan Berarah:

Definisi : Jika $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial dan $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ vektor satuan sebarang, maka turunan berarah f di titik $(x_0 y_0)$ dalam arah $\vec{u}$ adalah :

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(x_0 y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x_0 y_0) &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \\ &= \| \vec{\nabla} f \| . \| \vec{u} \| \cos\theta \\ &= \vec{\nabla} f(x_0, y_0) . \vec{u} \end{aligned}$$

θ sudut antara $\vec{\nabla} f \ dan \ \vec{u}$

Turunan berarah akan maksimum jika $\cos\theta = 1 \rightarrow \ \theta = 0$

artinya, $\vec{\nabla} f$ sejajar dengan $\vec{u}$

Turunan berarah akan minimum jika $\cos\theta = 0 \rightarrow \ \theta = \pi$

artinya, $\vec{\nabla} f$ berlawanan arah dengan $\vec{u}$

Contoh

1. Tentukan turunan berarah dari f(x,y) = $4x^3y$ pada titik P(2,1) dalam arah vektor $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

Jawab:

$$D_{\vec{u}} f(2,1) = f_x(2,1)u_1 + f_y(2,1)u_2$$

Vektor **u** diperoleh dengan menormalkan vektor **a**

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{4\hat{i} + 3\hat{j}}{5} = \frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$$

$f_x(x,y) = 12\,x^2\,y \;\Rightarrow\; f_x(2,1) = 12.2^2.1 = 48$

$f_y(x,y) = 4\,x^3 \;\Rightarrow\; f_x(2,1) = 4.2^3 = 32$

Sehingga $D_{\vec{u}} f(2,1) = f_x(2,1)u_1 + f_y(2,1)u_2$

=48 . (4/5) + 32 . (3/5)

= 288/5

2. Tentukan turunan berarah dari f(x,y,z) = *xy* sinz pada titik P(1,2, π/2) dalam arah vektor $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

Jawab:

$$D_{\vec{u}} f(1,2,\frac{\pi}{2}) = f_x(1,2,\frac{\pi}{2})u_1 + f_y(1,2,\frac{\pi}{2})u_2 + f_z(1,2,\frac{\pi}{2})u_3$$

Vektor **u** diperoleh dengan menormalkan vektor **a**

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

f_x(x,y,z)= *y* sinz ⇨ f_x(1,2,π/2)= 2 sin(π/2) =2

f_y(x,y,z)= *x* sinz ⇨ f_x(1,2, π/2)= 1.sin(π/2) =1

f_z(x,y,z)= *xy* cosz ⇨ f_z(1,2, π/2)= 1.2 cos(π/2) =0

Sehingga

$$D_{\vec{u}} f(1,2,\frac{\pi}{2}) = f_x(1,2,\frac{\pi}{2})u_1 + f_y(1,2,\frac{\pi}{2})u_2 + f_z(1,2,\frac{\pi}{2})u_3$$

=2 . (1/3) + 1 . (2/3) + 0 . (2/3)

= 4/3

Contoh

3. Tentukan suatu vektor $\vec{u}$ dalam arah mana fungsi

$f(x,y) = x^3 - y^5$ bertambah paling cepat di P(2,-1)

dan berapa laju perubahan dalam arah ini.

Jawab:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

$$= \vec{\nabla} f(x_0, y_0).\vec{u}$$

$$= \| \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \| . \| \vec{u} \| \cos\theta$$

Agar f bertambah paling cepat → $\theta = 0 \rightarrow \vec{\nabla} f \; dan \; \vec{u}$ searah.

$$f_x = 3x^2 \quad \rightarrow \quad f_x(2,-1) = 12$$

$$f_y = -5y^4 \quad \rightarrow \quad f_y(2,-1) = -5$$

Karena $\vec{u}$ searah $\vec{\nabla} f$ maka vektor satuannya

$$\vec{u} = \frac{12}{13}\hat{i} - \frac{5}{13}\hat{j}$$

Lajunya = $\| \vec{\nabla} f \| = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = 13$

Latihan

I. Tentukan $\vec{\nabla} f$ dari

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x+y}$

2. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

3. $f(x,y) = \sin^3\left(x^2 y\right)$

4. $f(x,y) = xy\ln(x+y)$

5. $f(x,y,z) = x^2 y e^{x-z}$

6. $f(x,y,z) = x e^{-2y} \sec z$

II. Tentukan $\vec{\nabla} f$ di titik yang diberikan

1. $f(x,y) = x^2 y - xy^2$ di P (– 2,3)

2. $f(x,y) = \ln(x^3 - xy^2 + 4y^3)$ di P (– 3, 3)

3. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ di P (2, –1)

Latihan

1. Tentukan turunan berarah fungsi f pada titik P yang diberikan dalam vektor **a**

   a. $f(x,y) = y^2 \ln x$, P(1, 4), $\mathbf{a} = -3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$

   b. $f(x,y) = xe^y - ye^x$, P(0, 0), $\mathbf{a} = 5\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$

   c. $f(x,y) = e^{-xy}$, P(1, −1), $\mathbf{a} = -\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$

   d. $f(x,y) = x/(x+y)$, di P(1, 1) dalam arah ke titik Q(-1,-1)

   e. $f(x,y,z) = xy+z^2$, di P(1,1,1) dalam arah ke titik Q(5,-3,3)

2. Tentukan suatu vektor satuan **u** dalam arah mana f bertambah (dan berkurang)paling cepat di titik P dan berapa laju perubahan dalam arah ini

   a. $f(x,y) = e^y \sin x$, P(5π/6,0)

   b. $f(x,y) = 4x^3y^2$, P(−1,1)

   c. $f(x,y) = 1-x^2-y^2$, P(−1,2)