Aplikasi Turunan Parsial

Dosen: Dr. Muh. Nur, S.Si., M.Si

Maksimum dan Minimum Fungsi Dua Peubah

- Definisi

  Misalkan $(x_o,y_o) \in D_f$, maka

  - $f(x_o,y_o)$ adalah *nilai maksimum global* dari f pada D_f, jika $f(x_o,y_o) \geq f(x,y), \forall (x,y) \in D_f$
  - $f(x_o,y_o)$ adalah *nilai minimum global* dari f pada D_f, jika $f(x_o,y_o) \leq f(x,y), \forall (x,y) \in D_f$
  - $f(x_o,y_o)$ adalah *nilai ekstrim global* dari f pada D_f, jika ia merupakan nilai maksimum global atau nilai minimum global.

  Definisi yang sama berlaku dengan kata *global* diganti dengan *lokal*, pada (i) dan (ii), kita hanya memerlukan bahwa pertidaksamaan berlaku pada $N \cap S$, dengan N suatu daerah di sekitar (x_o, y_o).

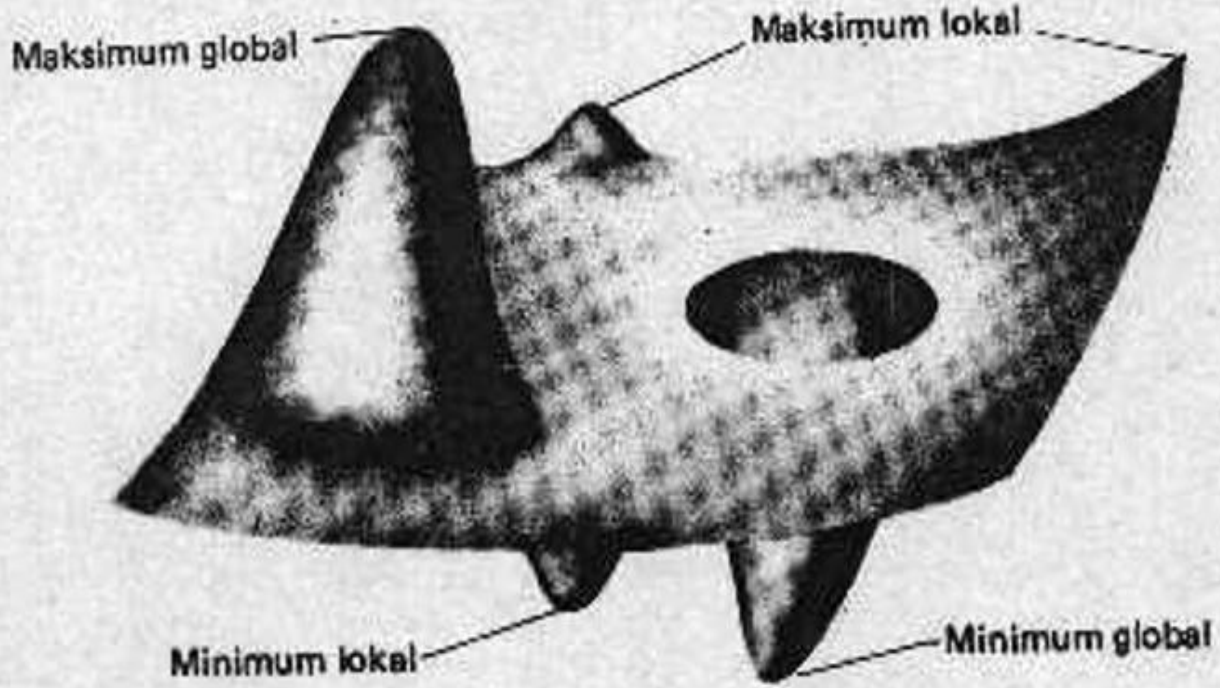

Maksimum global
Maksimum lokal
Minimum lokal
Minimum global

FIGURE 1

Di mana nilai ekstrim muncul?

- Titik di mana kemungkinan terjadinya nilai ekstrim disebut titik kritis

- Titik Kritis ada 3 (tiga), yaitu
  1. Titik-titik batas D_f
  2. Titik Stasioner

$$(x_0, y_0) \ni \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow f_x(x_0, y_0) = 0 \, dan \; f_y(x_0, y_0) = 0$$

  3. Titik Singular

$$(\; \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \text{ tidak ada})$$

Uji Nilai Ekstrim

- Untuk menguji apakah di titik kritis terjadi nilai ekstrim, kita gunakan uji turunan parsial kedua, yaitu:

  Misalkan f(x,y) mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu di sekitar (x_o,y_o), $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$

  dan $D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) . f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0) \right)^2$

  maka

1. Jika D >0 dan $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$,maka $f(x_0,y_0)$ nilai maksimum lokal.
2. Jika D>0, dan $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$,maka $f(x_0,y_0)$ nilai minimum lokal .
3. Jika D<0, maka $f(x_0,y_0)$ bukan nilai ekstrim atau (0,0) titik pelana
4. Jika D=0, tidak dapat ditarik kesimpulan.

Contoh

1. Tentukan titik kritis dan nilai ekstrim beserta jenisnya, dari

$$f(x,y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$$

Jawab:

$f_x(x,y) = 8x^3 - 2x$ $\quad f_y(x,y) = 6y$

$f_{xx}(x,y) = 24x^2 - 2$ $\quad f_{yy}(x,y) = 6$

$f_{xy}(x,y) = 0$

Titik kritisnya (dalam hal ini titik stasioner) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$f_x(x,y) = 0$ dan $f_y(x,y)=0$, yaitu

$8x^3 - 2x=0 \Rightarrow 2x\,(4x^2 - 1)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x =\pm \tfrac{1}{2}$

$6y = 0 \Rightarrow y = 0$

Jadi titik-titik stasioner adalah (0, 0), (½, 0) dan (-½,0)

Contoh (lanjutan)

Mengenai jenis nilai ekstrim, bisa dilihat pada tabel berikut:

Titik stasioner	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D	Keterangan
(0,0)	– 2	6	0	−12	f(0,0) bukan nilai ekstrim atau (0,0) titik pelana
(½, 0)	4	6	0	24	f(1/2,0) = -1/8 nilai minimum lokal
(-½, 0)	4	6	0	24	f(-1/2,0) =-1/8 nilai minimum lokal

Contoh

2. Tentukan nilai ekstrim global dan jenisnya, dari

$f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ pada $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Jawab:

$f_x(x,y) = 2x$ $\quad$ $f_y(x,y) = -2y$

$f_{xx}(x,y) = 2$ $\quad$ $f_{yy}(x,y) = -2$

$f_{xy}(x,y) = 0$

Titik stasionernya diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $f_x(x,y) = 0$ dan $f_y(x,y)=0$, yaitu didapat (0,0)

Jadi titik-titik stasionernya (0, 0)(→ *terletak di dalam S*),

Dan f(0,0)=1.

Untuk titik-titik batasnya, misalkan x=cos t dan y=sint (karena S adalah lingkaran satuan), sehingga didapat

$$f(t) = \cos^2 t - \sin^2 t + 1$$

Contoh (lanjutan)

Untuk mendapatkan nilai maksimun dan minimun f pada S, turunkan f, yaitu:

$f'(t) = -2\cos t \sin t - 2 \sin t \cos t = 0 \Rightarrow -4 \cos t \sin t = 0$

$\sin 2t = 0 \Rightarrow 2t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \Rightarrow t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

Untuk $t = 0 \Rightarrow x = 1, y = 0 \Rightarrow f(1, 0) = 2$

Untuk $t = \pi/2 \Rightarrow x = 0, y = 1 \Rightarrow f(0, 1) = 0$

Untuk $t = \pi \Rightarrow x = -1, y = 0 \Rightarrow f(-1, 0) = 2$

Untuk $t = 3\pi/2 \Rightarrow x = 0, y = -1 \Rightarrow f(0, -1) = 0$

Jadi nilai maksimum global = 2 pada titik (1,0) dan (-1,0),
Sedangkan nilai minimun global=0 pada titik (0,1) dan (0,-1)

Latihan

1. Tentukan nilai ekstrim dan jenisnya, dari

   a. $f(x,y) = x^3+y^3-6xy$

   b. $f(x,y) = xy^2 - 6x^2 - 6y^2$

   c. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 1$

   d. $f(x,y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$

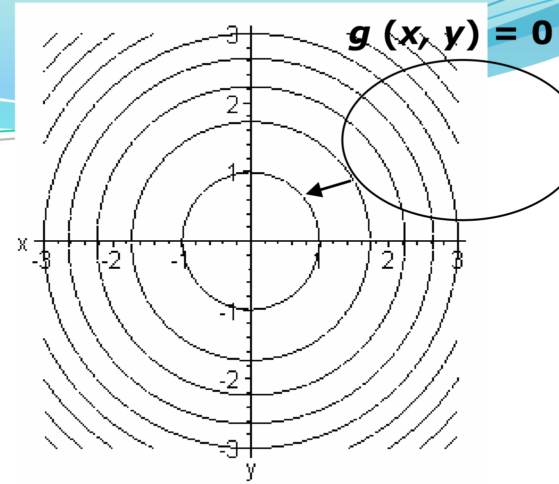
   e. $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

   f. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-4y)}$

2. Tentukan nilai ekstrim global dan jenisnya, dari

   $f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7$ pada $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Metode Lagrange



- Untuk mencari nilai ektrim terkendala
  Misalkan $z = f(x,y)$ dengan kendala
  $g(x,y) = 0$. Akan dicari nilai ekstrim f terhadap kendala g.

  Untuk memaksimumkan f thd kendala $g(x,y) = 0$ → sama dengan mencari perpotongan kurva ketinggian $f(x, y)=k$ dengan fungsi kendala $g(x, y) = 0$ sehingga diperoleh $k \geq f(x, y)$ untuk setiap $x, y \in D_f$ sepanjang $g(x, y) = 0$

  Karena kurva ketinggian dan kurva kendala saling menyinggung → garis tegak lurusnya sama.
  Karena kurva ketinggian $\perp \vec{\nabla} f$ dan kurva kendala $\perp \vec{\nabla} g$
  maka $\vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y)$

Metode Lagrange

Untuk memaksimumkan/meminimumkan $f(x_0,y_0)$ terhadap kendala $g(x_0,y_0)=0$, selesaikan

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0) \quad dan \; g(x_0, y_0) = 0$$

dengan (x_0,y_0) titik kritis, λ pengali langrange

Contoh

Gunakan metode lagrange untuk mencari nilai-nilai maksimun dan minimun dari

1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ pada lingkaran $x^2+y^2=1$

Jawab:

Titik-titik kritis didapat dengan memecahkan persamaan lagrange berikut

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y) \text{ dan } g(x,y) = 0$$

yaitu:

$$2x\vec{i} - 2y\vec{j} = \lambda(2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

$$2x = \lambda\, 2x \;.......(1)$$

$$-2y = \lambda\, 2y \;.......(2)$$

$$x^2+y^2 = 1 \;.......(3)$$

Dari persamaan (3), nilai x dan y tidak mungkin sama-sama nol, sehingga

Untuk $x \neq 0$, dari (1) di dapat $\lambda = 1$, kemudian dari (2) di dapat $y = 0$, dan dari (3) di dapat $x^2=1 \rightarrow x = \pm 1$

Untuk $y \neq 0$, dari (2) di dapat $\lambda = -1$, kemudian dari (1) di dapat $x = 0$, dan dari (3) di dapat $y^2=1 \rightarrow y = \pm 1$

Titik-titik kritis yaitu (1,0), (-1,0), (0,1) dan (0,-1)

Untuk (1,0) $\Rightarrow$ $f(1, 0) = 2$, untuk (-1,0) $\Rightarrow$ $f(-1, 0) = 2$

Untuk (0,1) $\Rightarrow$ $f(0, 1) = 0$, untuk (0,-1) $\Rightarrow$ $f(0,-1) = 0$

Jadi nilai maksimum global = 2 pada titik (1,0) dan (-1,0),

Sedangkan nilai minimun global=0 pada titik (0,1) dan (0,-1)

Latihan

Gunakan metode lagrange untuk mencari nilai-nilai maksimun dan minimun dari

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ pada kendala $g(x,y)= xy - 3 = 0$
2. $f(x,y) = xy$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$
3. $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ pada kendala $x^2+y^2 = 1$
4. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ pada kendala $x + 3y - 2z = 12$