Matematika Diskrit

DEWIANI
dewiani@unhas.ac.id
dewianidj@gmail.com

Teknik Informatika Semester Akhir 2020/2021

Kombinatorial

Sumber : http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/ Matdis/2013-2014/matdis13-14.htm •

Pendahuluan

- Sebuah kata-sandi (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan kata-sandi yang dapat dibuat?

```
abcdef
aaaade
a123fr
…
erhtgahn
yutresik
…
```

????

Definisi

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

Kaidah Dasar Menghitung

- Kaidah perkalian (*rule of product*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

- Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

- **Contoh 1.** Ketua angkatan IF 2020 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria IF2020 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

  Penyelesaian: 65 + 15 = 80 cara.

- **Contoh 2.** Dua orang perwakilan IF2020 mendatangai Bapak Dosen untuk protes nilai ujian. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tesrebut?

  Penyelesaian: $65 \times 15 = 975$ cara.

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

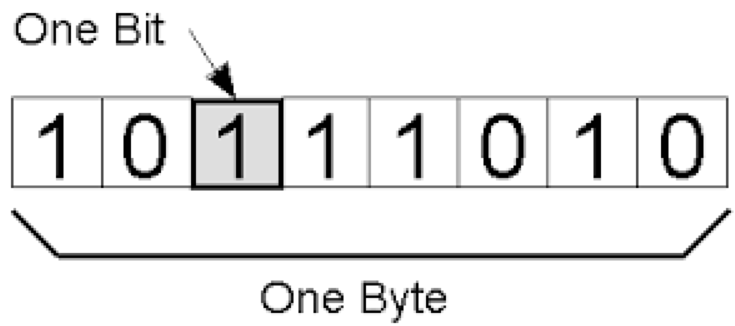
Misalkan ada n percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \text{ hasil}$$



- **Contoh 3.** Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

(a) panjang *string* 5 bit

(b)panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

Penyelesaian:

(a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah

(b) $2^8 = 256$ buah

- **Contoh 4.** Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang
  (a) semua angkanya berbeda
  (b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (1, 3, 5, 7, 9)
posisi ribuan: 8 kemungkinan angka
posisi ratusan: 8 kemungkinan angka
posisi puluhan: 7 kemungkinan angka
Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

(b)posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)
posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(9)(10)(10) = 4500

- **Contoh 5.** Kata-sandi (*password*) sistem komputer panjangnya 6 sampai 8 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak kata-sandi yang dapat dibuat?

Penyelesaian:

Jumlah karakter password = 26 (A-Z) + 10 (0-9) = 36 karakter.

Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 6 karakter:

$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$

Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 7 karakter:

$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$

umlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 8 karakter:

$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$

Jumlah seluruh kata-sandi (kaidah penjumlahan) adalah

$2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 =$
$2.901.650.833.888$ buah.

Latihan:

1. (a) Berapa banyak bilangan genap 2-angka?

   (b) Berapa banyak bilangan ganjil 2-angka dengan setiap angka berbeda?

2. Dari 100.000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilangan yang mengandung tepat 1 buah angka 3, 1 buah angka 4, dan 1 buah angka 5?

3. Tersedia 6 huruf: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Berapa jumlah pengurutan 3 huruf jika:
   (a) tidak ada huruf yang diulang;
   (b) boleh ada huruf yang berulang;
   (c) tidak boleh ada huruf yang diulang, tetapi huruf *e* harus ada;
   (d) boleh ada huruf yang berulang, huruf *e* harus ada

4. Tentukan banyak cara pengaturan agar 3 orang mahasiswa Jurusan Teknik Informatika (IF), 4 orang mahasiswa Teknik Kimia (TK), 4 orang mahasiswa Teknik Geologi (GL), dan 2 orang mahasiswa Farmasi (FA) dapat duduk dalam satu baris sehingga mereka dari departemen yang sama duduk berdampingan?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'?

Penyelesaian:

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11',

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

maka

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

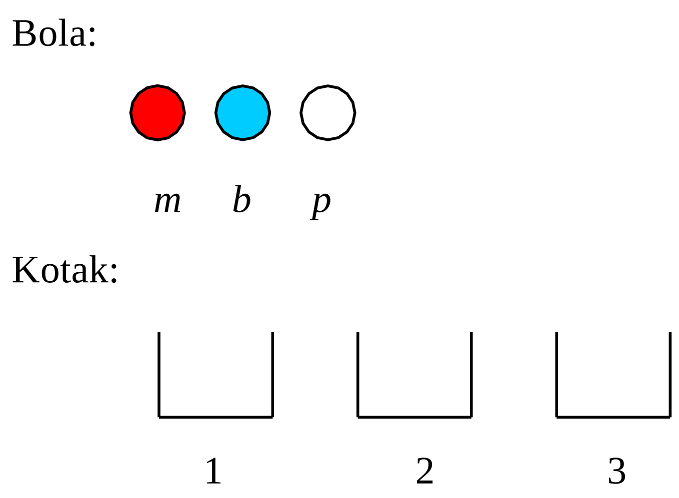
$$\left|A\right| = 2^6 = 64, \quad \left|B\right| = 2^6 = 64, \quad \left|A \cap B\right| = 2^4 = 16.$$

maka

$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|$$

$$= 2^6 + 2^6 - 16 \quad = 64 + 64 - 16 = 112.$$

Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Kotak 1	Kotak 2	Kotak 3	Urutan
m	*b*	*p*	*mbp*
	p	*b*	*mpb*
b	*m*	*p*	*bmp*
	p	*m*	*bpm*
p	*m*	*b*	*pmb*
	b	*m*	*pbm*

Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

- **Definisi**: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah n, maka
  - urutan pertama dipilih dari n objek,
  - urutan kedua dipilih dari $n - 1$ objek,
  - urutan ketiga dipilih dari $n - 2$ objek,
  - …
  - urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n - 1)\,(n - 2) \ldots (2)(1) = n!$$

- **Contoh 6.** Berapa banyak "kata" yang terbentuk dari kata "HAPUS"?

  Penyelesaian:

  Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

  Cara 1: $(5)(4)(3)(2)(1) = 120$ buah kata

- **Contoh 7.** Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

  Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

Permutasi *r* dari *n* elemen

- Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Bola:

m *b* *p* *h* *k* *j*

Kotak:

|___| |___| |___|

1 2 3

Penyelesaian:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola → (ada n pilihan) ;
kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 1) bola → (ada n – 1 pilihan);
kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 2) bola → (ada n – 2) pilihan;
...
kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n – (r – 1) bola → (ada $n - r + 1$ pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 8. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:
(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 120 buah
Dengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 120

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.
Dengan kiadah perkalian: (5)(5)(5) = 5^3 = 125.

Contoh 9. Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?
Penyelesaian: $P(26, 4) \times P(10,3)$ = 258.336.000

Latihan:

1. Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?

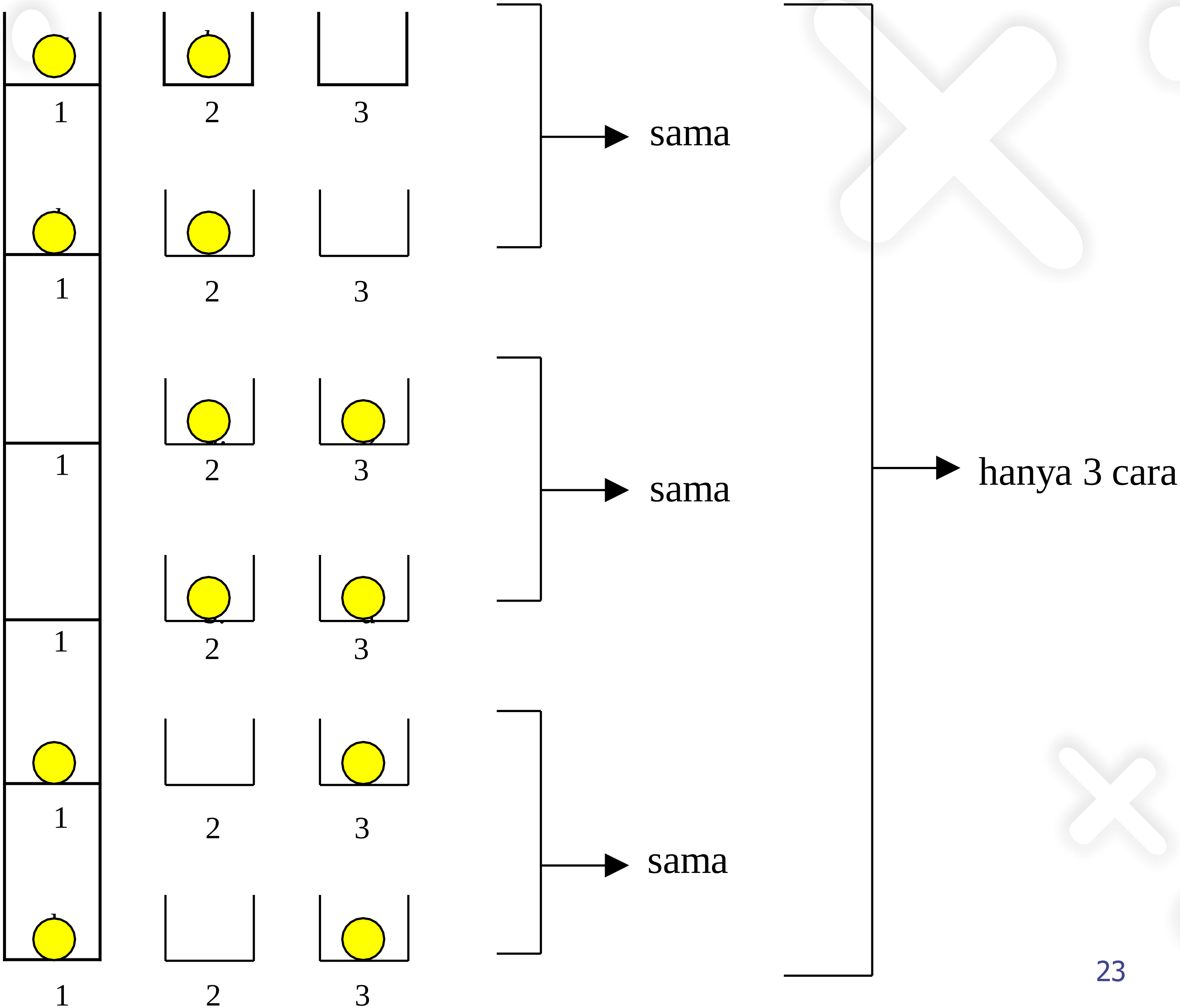
Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$


1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
sama
sama
sama
hanya 3 cara

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

- Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n,r) \text{ atau } \binom{n}{r}$$

- $C(n, r)$ sering dibaca "n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek.

- **Definisi 3.** Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.