Induksi Matematik

Sumber : http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2013-2014/matdis13-14.htm •

- Metode pembuktian untuk proposisi yang berkaitan dengan bilangan bulat adalah **induksi matematik**.

- Contoh:

  1. Buktikan bahwa jumlah n bilangan bilangan bulat positif pertama adalah $n(n + 1)/2$.

  2. Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh lainnya:

1. Setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

2. Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

3. Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen.

4. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$.

5. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n

- Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Prinsip Induksi Sederhana.

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

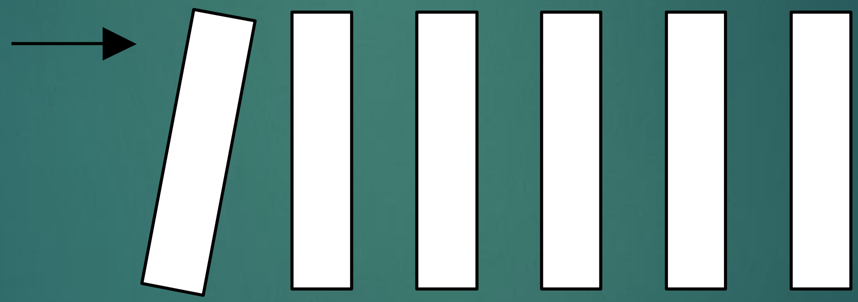
- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1. $p(1)$ benar, dan
  2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

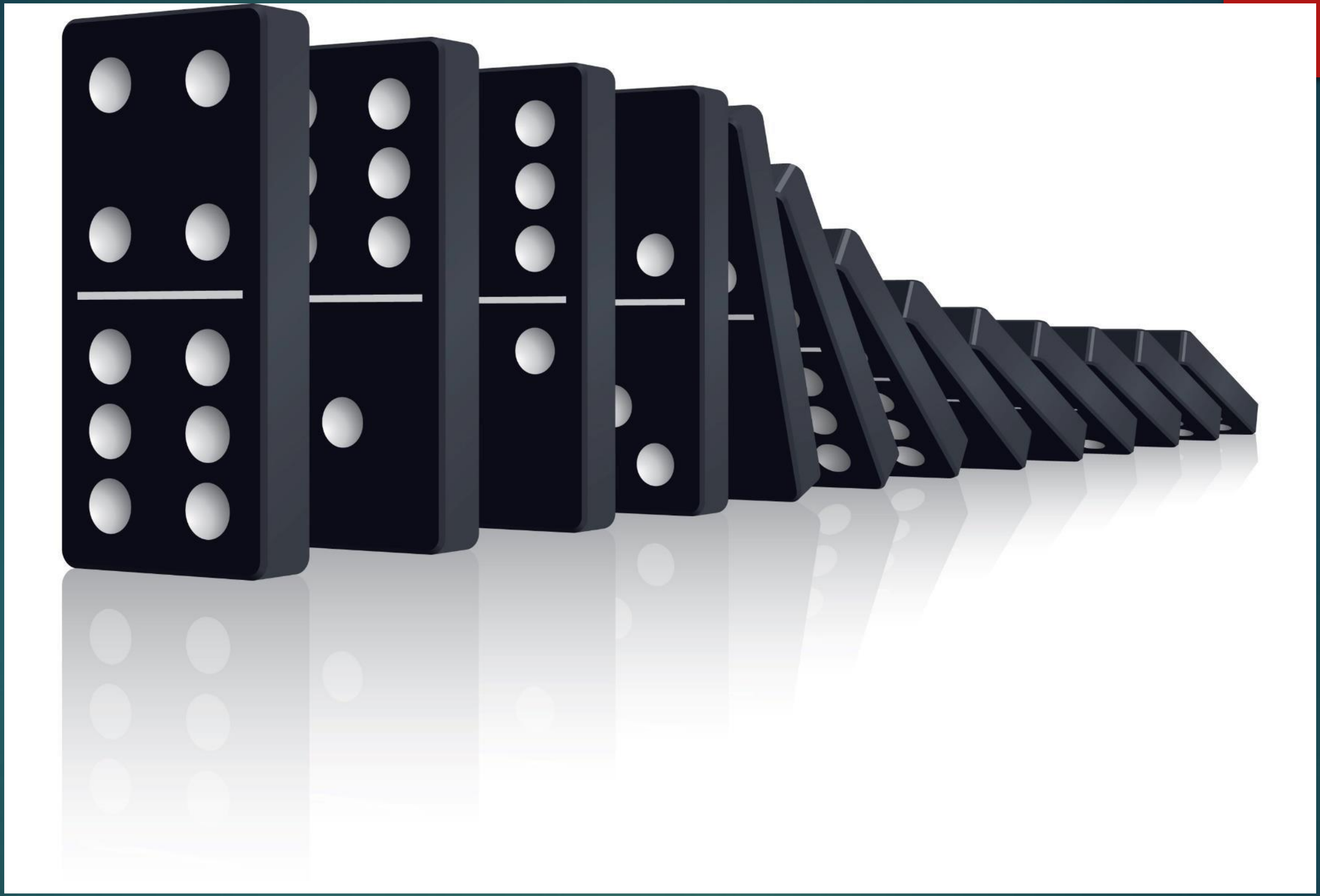
- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.

- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.

- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

- Induksi matematik berlaku seperti efek domino.





Sumber:
http://www.chuckgallagher.com/small-choices-matter-the-domino-effect-in-choices/

Contoh 1: Buktikan bahwa jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n(n + 1)/2$.

Penyelesaian: Andaikan bahwa $p(n)$ menyatakan proposisi bahwa jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n (n + 1) /2$, yaitu $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n (n + 1) /2$. Kita harus membuktikan kebenaran proposisi ini dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

Basis induksi: $p(1)$ benar, karena untuk $n = 1$ kita peroleh

$$1 = 1\ (1 + 1)\ /\ 2$$
$$= 1\ (2)\ /\ 2$$
$$= 2/2$$
$$= 1$$

Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = (n + 1)[(n + 1) + 1]/2$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1) \\
&= [n\,(n + 1)/2\,] + (n + 1) \\
&= [\,(n^2 + n)/2\,] + (n + 1) \\
&= [\,(n^2 + n)/2\,] + [\,(2n + 2)/2] \\
&= (n^2 + 3n + 2)/2 \\
&= (n + 1)\,(n + 2)/2 \\
&= (n + 1)\,[\,(n + 1) + 1]/2
\end{aligned}
$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n + 1)/2$. □

Contoh 2. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) Langkah induksi: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$]. Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + \\ &\quad (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,

Contoh 3. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

$$= 2^1 - 1$$
$$= 2 - 1$$
$$= 1$$

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (hipotesis induksi)} \\
&= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\
&= (2 \,.\, 2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ □

Contoh 4. Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:

(i)Basis induksi: Untuk $n = 1$, maka $1^3 + 2(1) = 3$ adalah kelipatan 3. jadi p(1) benar.

(ii)Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 (hipotesis induksi).

Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu $(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ adalah kelipatan 3

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$(n + 1)^3 + 2(n + 1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2)$$
$$= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$$
$$= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$$

- $(n^3 + 2n)$ adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi)
- $3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3
- maka $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3
- sehingga $(n^3 + 2n)+3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Latihan 1

- Untuk tiap $n \geq 3$, jumlah sudut dalam sebuah poligon dengan n sisi adalah $180(n - 2)^\circ$. Buktikan pernyataan ini dengan induksi matematik.

Jawaban Latihan

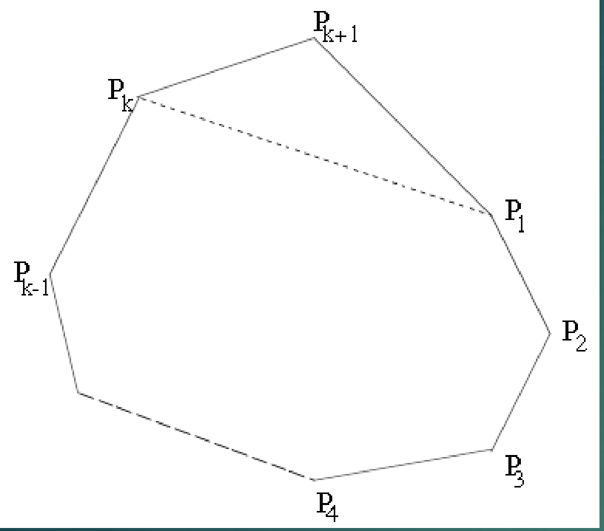
- **Basis**

  Untuk nilai $n = 3$, poligon akan berbentuk segitiga dengan jumlah sudut 180°. Jumlah sisi sebanyak 3 sehingga $180(3 - 2) = 180^\circ$. Jadi untuk $n = 3$ proposisi benar

- **Induksi**

  Asumsikan bahwa jumlah sudut dalam poligon dengan n sisi yaitu $180(n - 2)^\circ$ adalah benar (hipotesis induksi).

  Kita ingin menunjukkan bahwa jumlah sudut poligon yang memiliki n+1 sisi yaitu $180(n - 1)^\circ$



Pada gambar diatas dapat ditunjukkan terdapat dua bagian yaitu segitiga $P_1P_nP_{n+1}$) dan poligon dengan n sisi

Jumlah sudut dalam poligon n sisi menurut asumsi yaitu $180(n - 2)^\circ$ dan jumlah sudut di dalam untuk segitiga yaitu 180°.

Jadi jumlah sudut dalam dari poligon dengan n + 1 sisi yaitu $180(n - 2)^\circ + 180^\circ = 180(n - 1)^\circ$.

- Karena basis dan langkah induksi benar, maka proposisi di atas terbukti benar.

Contoh 5. Buktikan pernyataan “Untuk membayar biaya pos sebesar n rupiah ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 rupiah” benar.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk membayar biaya pos Rp8 dapat digunakan satu buah perangko Rp3 sen dan satu buah perangko Rp5 saja. Ini jelas benar.

(ii) Langkah induksi. Andaikan $p(n)$ benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) rupiah dapat digunakan perangko Rp3 dan Rp5 (hipotesis induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar $n + 1$ rupiah juga dapat menggunakan perangko Rp3 dan perangko Rp5. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa:

(a) Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n rupiah dengan sedikitnya satu perangko Rp5. Dengan mengganti satu buah perangko senilai Rp5 dengan dua buah perangko Rp3, maka akan diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$ rupiah.

(b) Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko Rp5 yang digunakan, biaya pos senilai n rupiah menggunakan perangko Rp3 semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko Rp3. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 rupiah dengan dua buah perangko Rp5, akan dihasilkan nilai perangko $n + 1$ rupiah. □

Latihan 2

1. Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp20.000 dan Rp50.000.

   Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

2. Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai Rp4 dan Rp5? Buktikan jawabanmu dengan prinsip induksi matematik.