3. HIMPUNAN

3.1 Pendahuluan

- Dalam kehidupan nyata, banyak sekali masalah yang terkait dengan data (objek) yang dikumpulkan berdasarkan kriteria tertentu.
- Kumpulan data (objek) inilah yang selanjutnya didefinisikan sebagai himpunan.
- Pada bab awal ini akan dibahas tentang definisi dan keanggotaan suatu himpunan, operasi himpunan dari beberapa jenis himpunan.

3.2 Himpunan (*set*)

- Himpunan (*set*) merupakan sekumpulan objek-objek yang berbeda yang dapat didefinisikan dengan jelas.
- Objek di dalam himpunan dinamakan unsur, elemen atau anggota himpunan.
- Keanggotaan suatu himpunan dinyatakan oleh notasi ’∈’.

3.2 Himpunan (*set*)

Contoh 1 :

- $A = \{x, y, z\}$
- $x \in A$: x merupakan anggota himpunan A.
- $w \notin A$: w bukan merupakan anggota himpunan A.

3.3 Cara Penyajian Himpunan

- Enumerasi
- Simbol-simbol Baku
- Notasi Pembentuk Himpunan
- Diagram Venn

3.3.1 Enumerasi

- Mengenumerasi artinya menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal.
- Biasanya suatu himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lainnya.
- Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

3.3.1 Enumerasi

Contoh 2

a) Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
b) Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$.
c) Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100\}$
d) Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

3.3.1 Enumerasi

- Meskipun himpunan biasa digunakan untuk mengelompokkan objek yang mempunyai sifat mirip, tetapi dari definisi himpunan diketahui bahwa sah-sah saja elemen-elemen di dalam himpunan tidak mempunyai hubungan satu sama lain, asalkan *berbeda*.

Contoh 3

- C= {hewan, a, Amir, 10, komputer} adalah himpunan yang terdiri dari lima elemen, yaitu hewan, a, Amir, 10, komputer.

3.3.1 Enumerasi

Contoh 4

- R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }
- C = {a, {a}, {{a}} }

Contoh tersebut memperlihatkan bahwa suatu himpunan bisa terdapat anggota himpunan lain.

- K = {}

- Contoh tersebut adalah himpunan kosong, karena K hanya berisi satu elemen yaitu { }.
- Himpunan kosong dapat dilambangkan dengan Ø

3.3.1 Enumerasi

- Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

3.3.1 Enumerasi

Contoh 5

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$

$K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$

$5 \notin A$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

3.3.1 Enumerasi

Contoh 6

Bila $P1 = \{a, b\}$, $P2 = \{ \{a, b\} \}$, $P3 = \{\{\{a, b\}\}\}$

maka

$a \in P1$

$a \notin P2$

$P1 \in P2$

$P1 \notin P3$

$P2 \in P3$

3.3.2 Simbol-simbol Baku

- Terdapat sejumlah simbol baku yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan yang sering digunakan, antara lain

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ...}

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ...}

Z = himpunan bilangan bulat ={...,-2, -1, 0, 1, 2,...}

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

3.3.2 Simbol-simbol Baku

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.
- Himpunan *U* harus diberikan secara eksplisit atau diarahkan berdasarkan pembicaraan
- **Contoh 7**:

misalnya U = {bil. Genap kurang dari 6}

berarti U= {2, 4}

3.3.3 Notasi Pembentuk Himpunan

- Dengan cara penyajian ini, himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi oleh anggotanya.

  Notasi: { *x* | syarat yang harus dipenuhi oleh *x* }

- Aturan dalam penulisan syarat keanggotaan:

a) Bagian di kiri tanda '|' melambangkan elemen himpunan

b) Tanda '|' dibaca *dimana* atau *sedemikian sehingga*

c) Bagian di kanan tanda '|' menunjukkan syarat keanggotaan himpunan

d) Setiap tanda ',' di dalam syarat keanggotaan dibaca sebagai *dan*

3.3.3 Notasi Pembentuk Himpunan

Contoh 8

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

$A = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5$\}$

atau

$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit$\}$

3.3.4 Diagram Venn

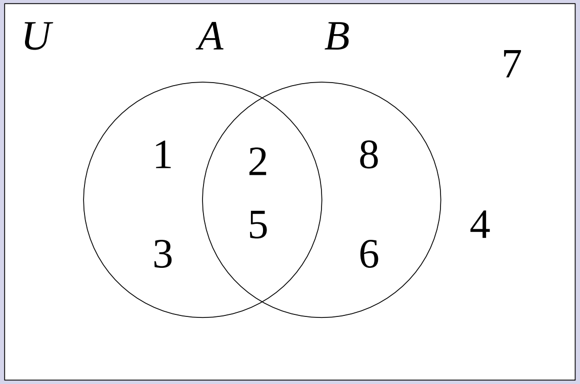
- Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis.
- Himpunan semesta (*U*) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut.

3.3.4 Diagram Venn

Contoh 9

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



3.4 Simbol Himpunan

- Simbol $\in$ digunakan untuk keanggotaan suatu elemen, dan untuk menyatakan *bukan anggota* digunakan $\notin$.
- Jika C = {a, b, {a}, {b, c}, c, d, {e, 9}} Maka
- *a* $\in$ C, b $\in$C, e $\notin$C, f $\notin$C, {a} $\in$ C,

{e, 9} $\in$ C, {c} $\notin$C, {d} $\notin$C, {b} $\notin$C, {b, c}$\in$ C

3.5 Kardinalitas

- Jumlah elemen di dalam *A* disebut **kardinal** dari himpunan *A*. Misalkan *A* merupakan himpunan yang elemen-elemennya berhingga banyaknya. Jumlah elemen *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.
- Notasi: $n(A)$ atau |A| , notasi |A| untuk menyatakan kardinalitas himpunan.
- Himpunan yang tidak berhingga banyak anggotanya mempunyai kardinalitas tidak berhingga pula.
- Sebagai contoh, himpunan bilangan riil mempunyai jumlah anggota tidak berhingga, maka $|\mathbf{R}| = \infty$.

3.5 Kardinalitas

Contoh 9

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 },

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, *a*, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

3.6 Himpunan Kosong

- Himpunan yang tidak memiliki satupun elemen atau himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong *(null set)*.
- Notasi: Ø atau { }

Contoh 10

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

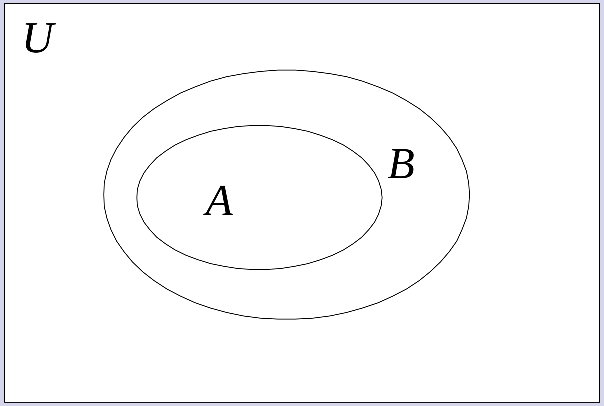
(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A)=0$

3.6 Himpunan Kosong

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

3.7 Himpunan Bagian

- Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen *B*. Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A*.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn



3.7 Himpunan Bagian

Contoh 11

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$,

maka $B \subseteq A$.

3.7 Himpunan Bagian

TEOREMA .

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

3.8 Himpunan yang Ekivalen

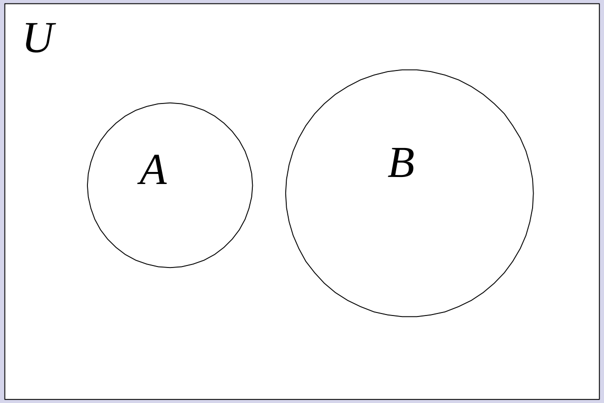
- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 12

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

3.9 Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A // B$
- Diagram Venn:



Contoh 13

- Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan

  $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A // B$.

3.10 Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

3.10 Himpunan Kuasa

Contoh 14

Jika $A = \{ 1, 2 \}$,

maka $P(A) = \{\emptyset , \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

Contoh 15

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

3.10 Himpunan Kuasa

Contoh 16

Jika A = {a, b, 5}, maka himpunan kuasa dari A adalah ……?

Jawab :

P(A) =

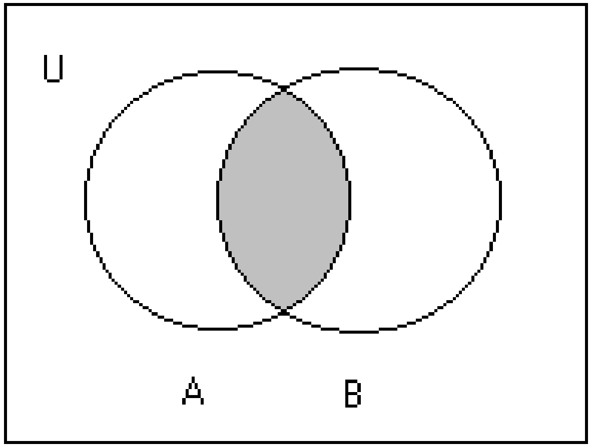
$$\left\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{5\}, \{a, b\}, \{a, 5\}, \{b, 5\}, \{a, b, 5\}\right\}$$

3.11 Operasi Terhadap Himpunan

a. Irisan (*intersection*)
b. Gabungan (*union*)
c. Komplemen (*complement*)
d. Selisih (*difference*)
e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)
f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

3.11.1 Irisan (*intersection*)

- Irisan (intersection) dari himpunan A dan B adalah himpunan yg setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B.
- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



3.11.1 Irisan (*intersection*)

Contoh 17

(i)Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,

maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka

$A \cap B = \varnothing$.

Artinya: $A // B$

3.11.1 Irisan (*intersection*)

Contoh 18

Maka :

- $A = \{ 2, 3, 5, 7, 9\}$
- $B = \{ 0, 1, 2, 4, 5, 6, \}$
- $C = \{ 10, 11, 14, 15\}$
- $D = \{ \text{Anto}, 14, L\}$
- $E = \{1, 2, 4 \}$

$A \cap B = \{2, 5\}$

$E \cap B = \{ 1,2\ 4\}$

$A \cap C = \{ \}$

$A \cap E = \{2\}$

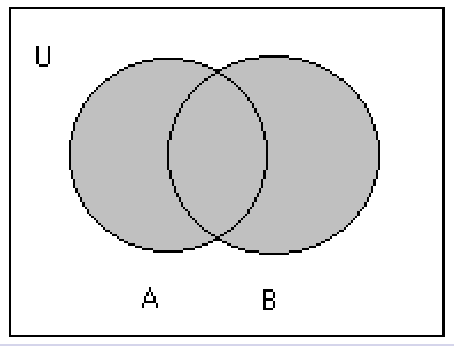
$D \cap C = \{14\}$

$A \cap D = \{ \}$

3.11.2 Gabungan (*union*)

- Gabungan(union) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B.

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



3.11.2 Gabungan (*union*)

Contoh 19

a**.** Jika A = { 2, 5, 8 } dan B = { 7, 5, 22 }, maka

$A \cup B$ = { 2, 5, 7, 8, 22 }

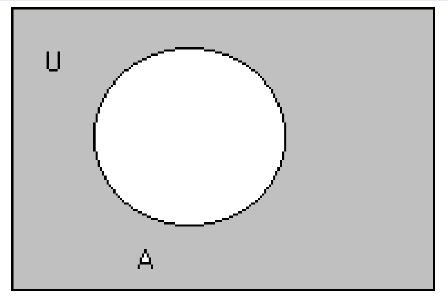
b. $A \cup \varnothing = A$

c. A = { 2, 3, 5, 7, 9} dan D = { Anto, 14, L}

maka A U D = {2, 3, 5, 7, 9, Anto, 14, L}

3.11.3 Komplemen (*complement*)

- Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen U yang bukan elemen A.



- Notasi : $= \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$

3.11.3 Komplemen (*complement*)

Contoh 20

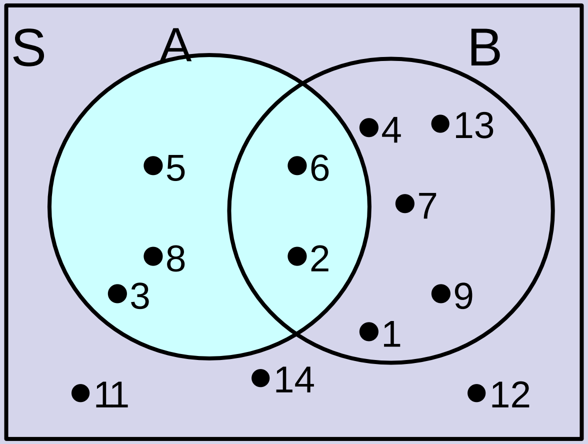
Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

jika A = {1, 3, 7, 9}, maka $\overline{A}$ = {2, 4, 6, 8}

3.11.3 Komplemen (*complement*)

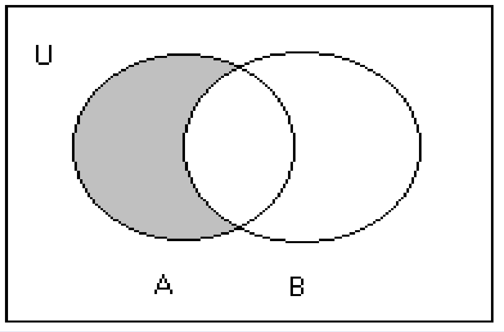
Contoh 21:

- A = { 2, 3, 5, 6, 8) ; B = {1, 2, 4, 6, 7, 9, 13}
- S = { x | x bilangan asli $\leq$ 14}
- Maka :
- A^c = { 1,4,7, 9,10,11,12,13,14}
- B^c = {3,5, 8,11,12,14}



3.11.4 Selisih (*difference*)

- Selisih dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen A dan bukan elemen B. Selisih antara A dan B dapat juga dikatakan sebagai komplemen himpunan B relatif terhadap himpunan A.



- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$

3.11.4 Selisih (*difference*)

Contoh 22

(i) Jika A = { 1, 2, 3, ..., 10 } dan
B = { 2, 4, 6, 8, 10 },
maka $A – B$ = { 1, 3, 5, 7, 9 } dan
$B – A = \varnothing$

(ii) {1, 3, 5} – {1, 2, 3} = {5}, dan

(iii) {1, 2, 3} – {1, 3, 5} = {2}

3.11.4 Selisih (*difference*)

Contoh 23

- A = {2,3,4,6,7,9}; B = {1,2,3,5,6,8,9,10} ;
- C = {3,5,9}
- Maka :

A – B = {4,7} B – C = ?

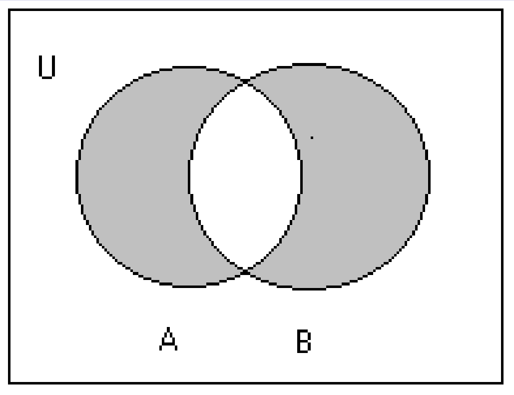
B – A = {1,5,8,10} C – A = ?

3.11.5 Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah sesuatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B, tetapi tidak pada keduanya.
- Notasi:

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$



3.11.5 Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Contoh 24

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$,

maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 25

- A = {1,2,3,5,6,8,9,10} ; B = {2,7,8,11} ;
- C = {1,3,5,7,9,11} ; D = {0,1,2,5,6,7,9,12}

3.11.5 Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Maka :

- $A \oplus B = \{1,2,3,5,6,7,8,9,10,11\}$
- $= \{1,3,5,6,7,9,10,11\}$
- $B \oplus C = \{1,2,3,5,7,8,9,11\} = \{1,2,3,5,8,9\}$
- $A \oplus C = ?$
- $A \oplus D = ?$

3.11.5 Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

TEOREMA: Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)