FUNGSI

MATEMATIKA DISKRIT

FUNGSI
DEFINISI / PENGERTIAN

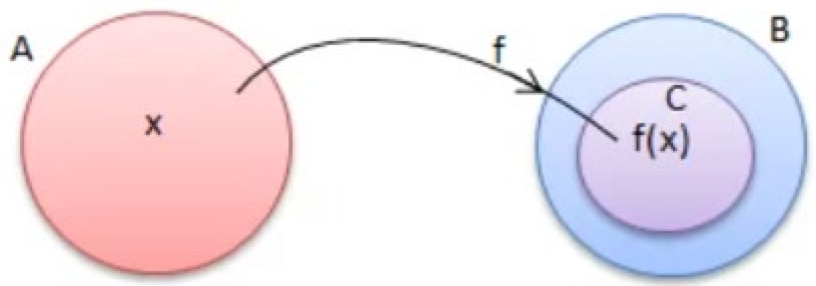
- Suatu fungsi (f) dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota Himpunan A secara tunggal dengan anggota pada Himpunan B.
- Fungsi merupakan relasi dua himpunan A dan B yang memasangkan setiap snggota pada himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.
- Misalkan A dan B himpunan. Relasi ***f*** dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.

FUNGSI
DEFINISI / PENGERTIAN

- Jika *f* adalah fungsi dari A ke B, kita menuliskan

$$\boldsymbol{f : A \to B}$$

yang artinya *f* memetakan A ke B.



Himpunan A disebut domain (daerah asal)
Himpunan B disebut kodomain (daerah kawan)
Himpunananggota B yang pasangan (himpunan C) disebut range (hasil) fungsi f

FUNGSI

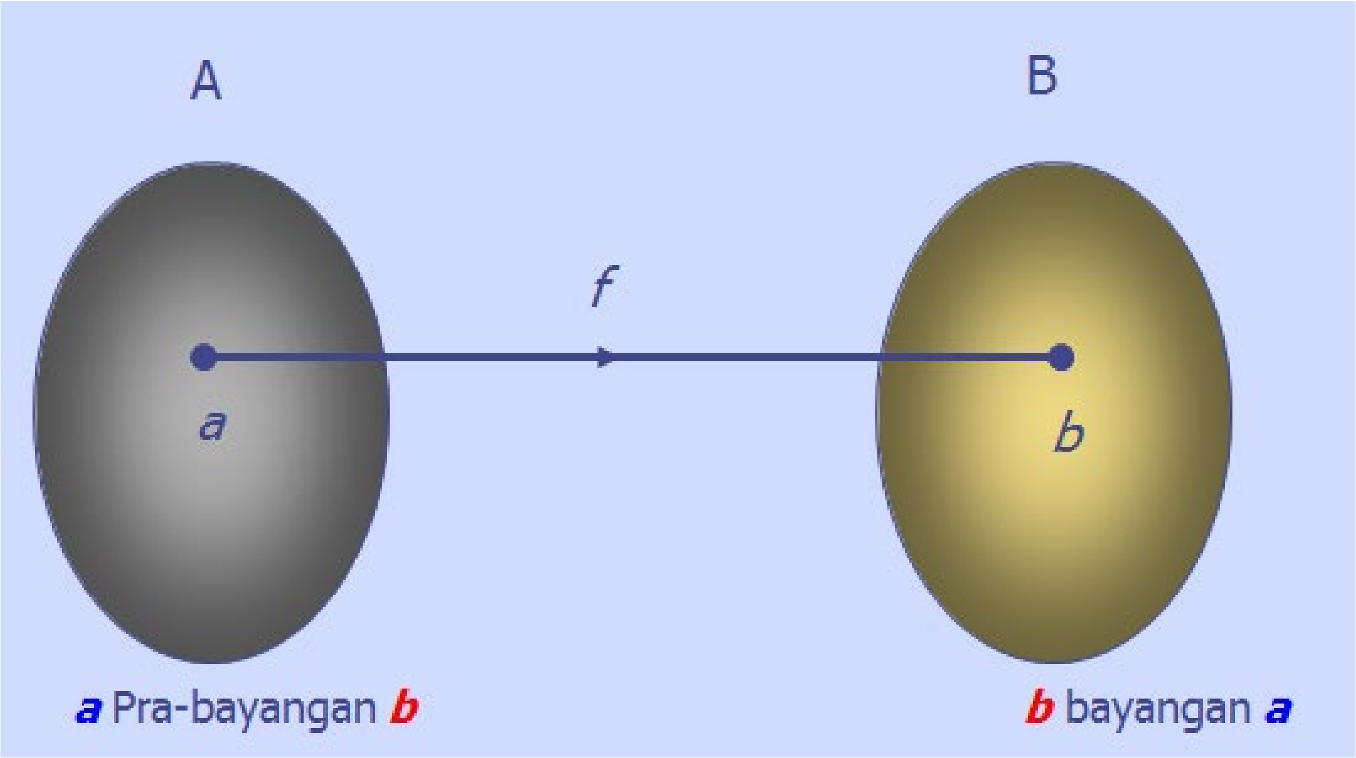
- Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi.
- f(a)=b jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.
- Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah hasil (codomain) dari f.

- Jika f(a)=b , maka **b** dinamakan bayangan (image) dari **a**

  dan **a** dinamakan pra-bayangan (pre-image) dari b

  Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut jelajah (range)

FUNGSI



FUNGSI

- Contoh 1 :

  Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$
  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$
  adalah fungsi dari A ke B.

FUNGSI

- Contoh 2 :

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$

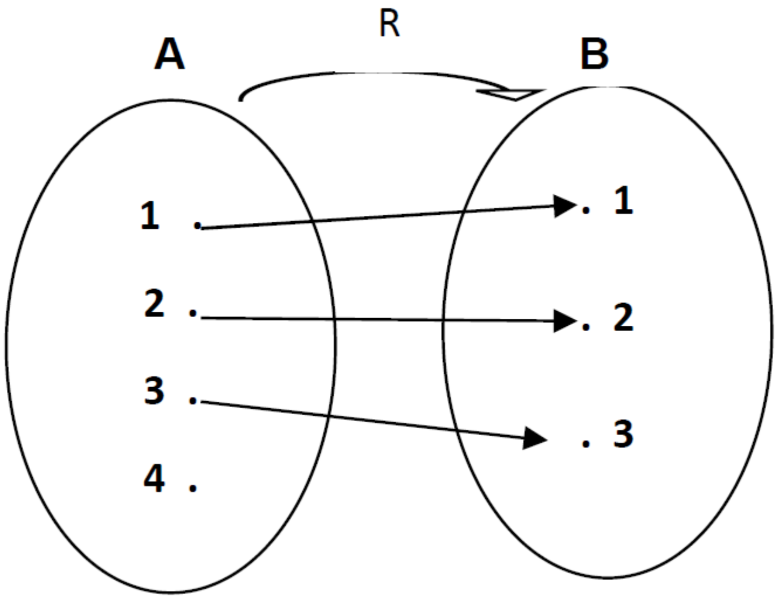
FUNGSI

- Contoh 3 :
- Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$
  dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$
  apakah merupakan fungsi ?

- Contoh 4 :
- Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$?

FUNGSI

- Contoh 5 :
- Perhatikan relasi R yang disajikan dalam bentuk diagram panah berikut. Selidiki apakah relasi R merupakan fungsi



REPRESENTASI FUNGSI

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

- Himpunan pasangan terurut.

  Seperti pada relasi.
- Formula pengisian nilai (*assignment*).

  Contoh: $f(x) = 2x + 10$ dan $f(x) = x^2$
- Kata-kata

  Contoh: “f adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner”.

REPRESENTASI FUNGSI

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

- Kode program (*source code*)

Contoh: Fungsi menghitung |*x*|

```
function abs(x:integer):integer;
    begin
      if x < 0 then
        abs:=-x
      else
        abs:=x;
   end;
```

JENIS - JENIS FUNGSI

- Fungsi berdasarkan sifat-sifatnya dibedakan menjadi 3 yaitu

1) Fungsi surjektif/ pada/ onto;
2) Fungsi Injektif/satu-satu/into;
3) Bijektif/korespondensi satu-satu.

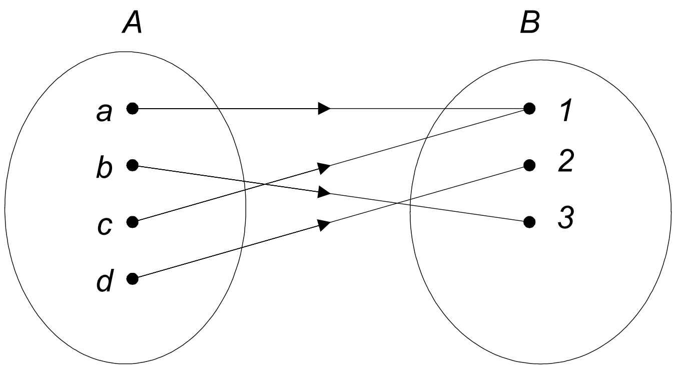
JENIS - JENIS FUNGSI
FUNGSI SURJEKTIF/ PADA/ ONTO

Misalkan f fungsi dari himpunan A ke himpunan B ($f: A \to B$). Fungsi ini disebut fungsi surjektif jika dan hanya jika setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$

Untuk melihat apakah fungsi tersebut surjektif atau tidak maka fokus perhatian kita pada Kodomain. Pastikan bahwa setiap anggota domain mempunyai pasangan

JENIS – JENIS FUNGSI
FUNGSI SURJEKTIF/ PADA/ ONTO

- Fungsi f dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.
- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan *B*



JENIS – JENIS FUNGSI

FUNGSI SURJEKTIF/ PADA/ ONTO

- Contoh 6

- a. Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, apakah merupakan fungsi pada? Jelaskan

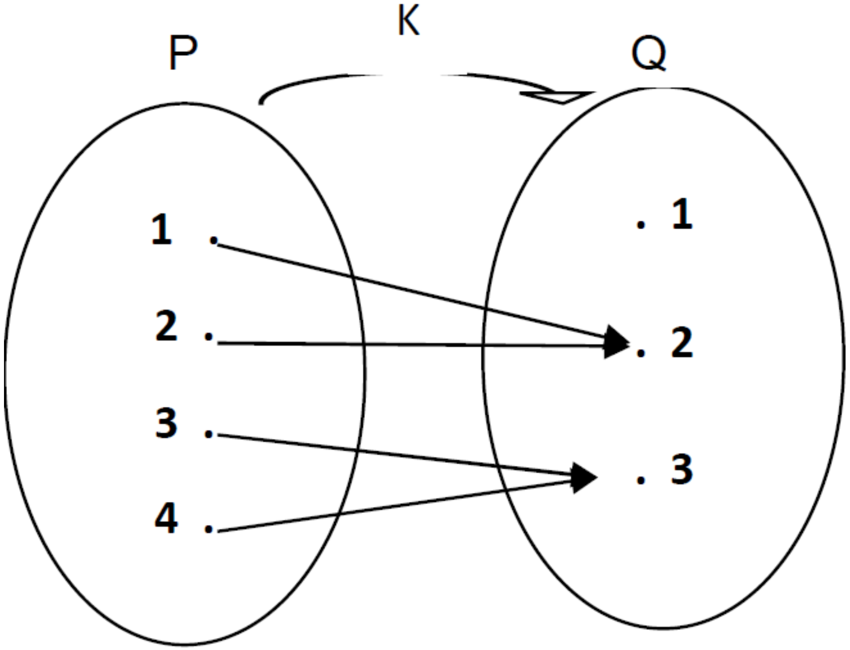
- b. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ *a*pakah merupakan fungsi pada? Jelaskan

JENIS – JENIS FUNGSI

FUNGSI SURJEKTIF/ PADA/ ONTO

Contoh 7

- Perhatikan relasi K yang disajikan dalam bentuk diagram panah berikut. Selidiki apakah relasi K merupakan fungsi surjektif?



JENIS - JENIS FUNGSI

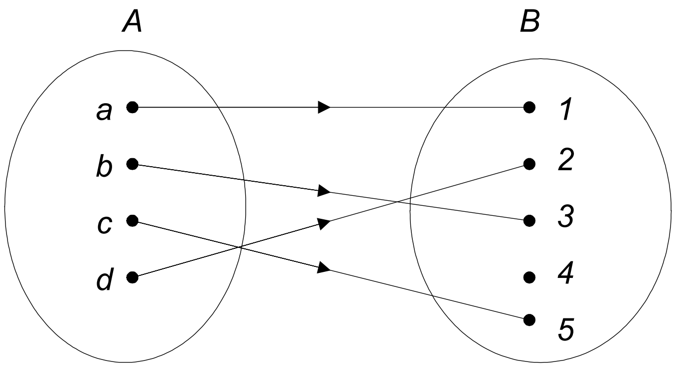
FUNGSI INJEKTIF/ SATU-SATU

- Fungsi $f: A \longrightarrow B$ disebut fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B.
- Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa $f : A \longrightarrow B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq b$ berakibat $f(a) \neq f(b)$ Pernyataan ini ekuivalen, jika $f(a) = f(b)$ maka akibatnya $a = b$
- Fungsi f dikatakan **satu ke satu** atau **injektif** jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama pada himpunan B.

JENIS – JENIS FUNGSI

FUNGSI INJEKTIF/ SATU-SATU

Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



JENIS – JENIS FUNGSI
FUNGSI INJEKTIF/ SATU-SATU

- Contoh 8

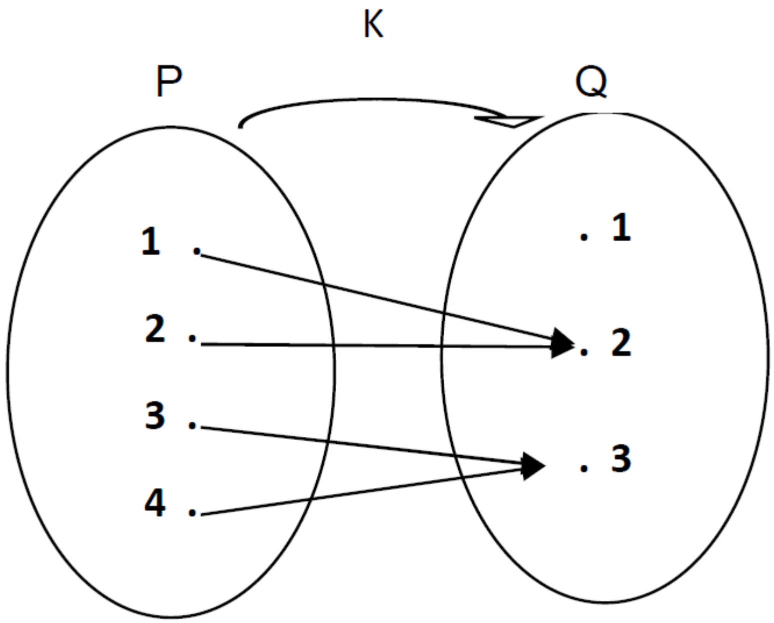
a. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ apakah merupakan fungsi satu-ke-satu?

b. Apakah relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

JENIS – JENIS FUNGSI

FUNGSI INJEKTIF/ SATU-SATU

- Contoh 9
- Perhatikan relasi K yang disajikan dalam bentuk diagram panah berikut. Selidiki apakah relasi K merupakan fungsi injektif?

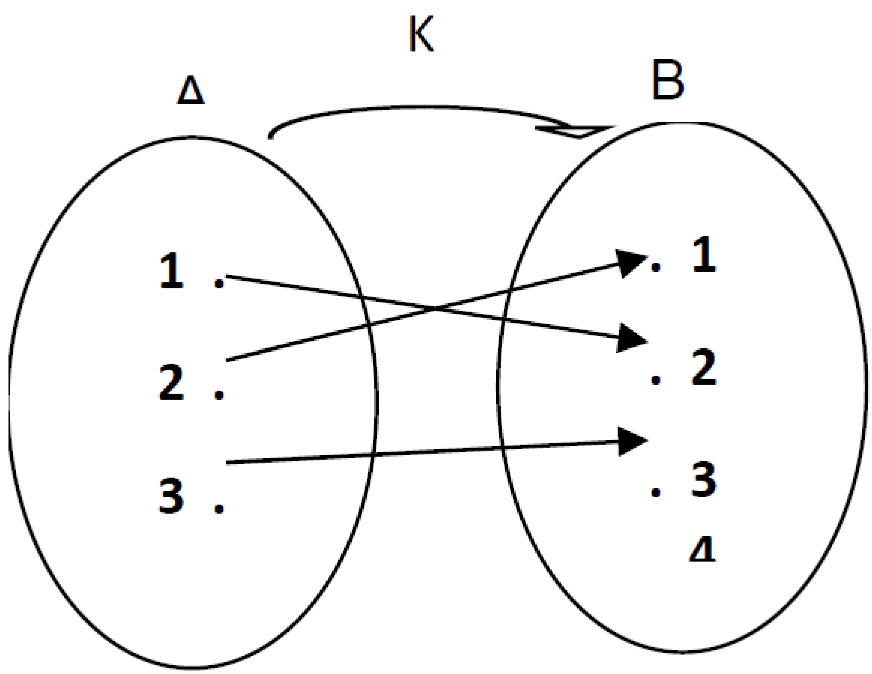


JENIS – JENIS FUNGSI
FUNGSI BIJEKSI

- Fungsi *f* dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu (one to one) dan juga fungsi pada (onto)
- Fungsi f dikatakan sebagai fungsi bijektif jika fungsi tersebut adalah fungsi surjektif dan juga fungsi injektif

JENIS – JENIS FUNGSI
FUNGSI BIJEKSI

- Contoh 10
- Perhatikan relasi K yang disajikan dalam bentuk diagram panah berikut. Selidiki apakah relasi K merupakan fungsi bijektif?



JENIS – JENIS FUNGSI

- Contoh 11

- Misalkan f : **Z** $\rightarrow$ **Z**.

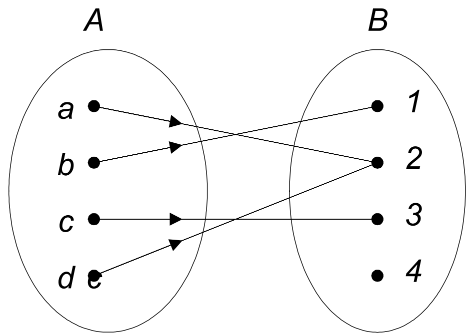
  Tentukan apakah $f(x) = x^2+1$ dan $f(x) = x - 1$

a. merupakan fungsi satu-ke-satu?
b. merupakan fungsi pada ?

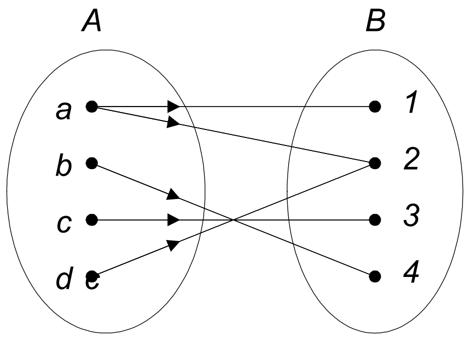
JENIS – JENIS FUNGSI

Contoh 12

- Bukan fungsi satu ke satu maupun pada

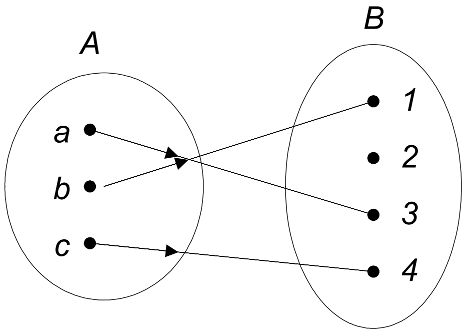


- Bukan fungsi

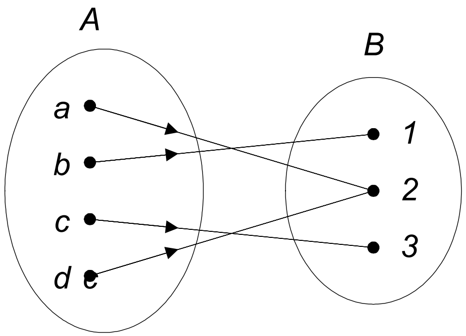


JENIS – JENIS FUNGSI

- Fungsi satu ke satu bukan pada



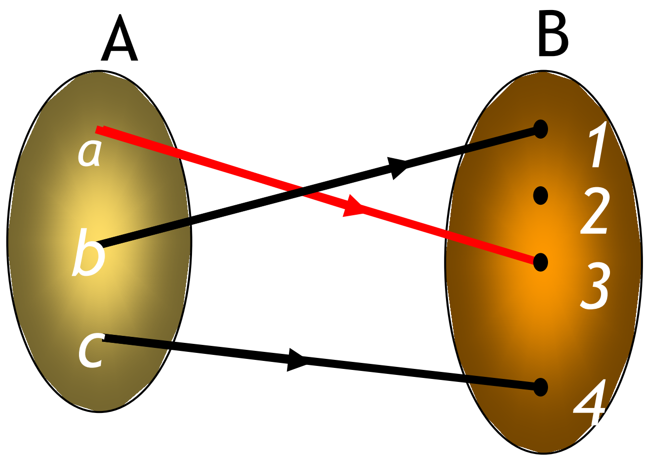
- Fungsi pada bukan satu ke satu



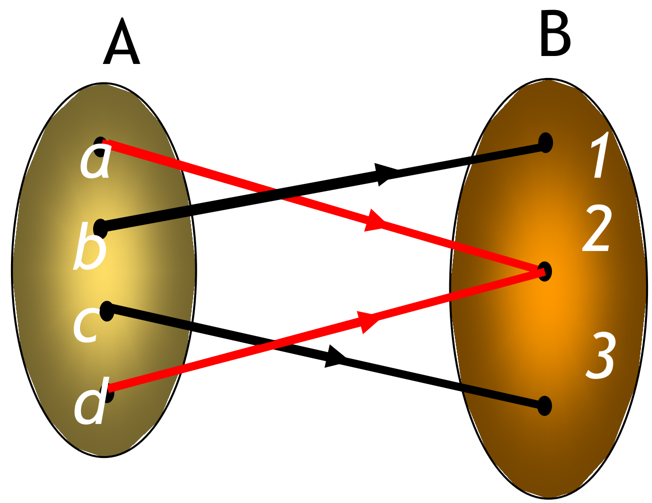
JENIS-JENIS FUNGSI

- *Fungsi f dikatakan* ***pada*** *(onto) atau* ***surjektif*** *jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Dengan kata lain seluruh unsur B merupakan jelajah dari f* . Fungsi *f* disebut fungsi **pada** himpunan B.
- *Fungsi f dikatakan* ***berkoresponden satu ke satu*** *atau* ***bijeksi*** *jika ia fungsi* ***satu ke satu*** *dan juga fungsi* ***pada*** .
- Untuk lebih jelasnya dapat dilihat gambar berikut :

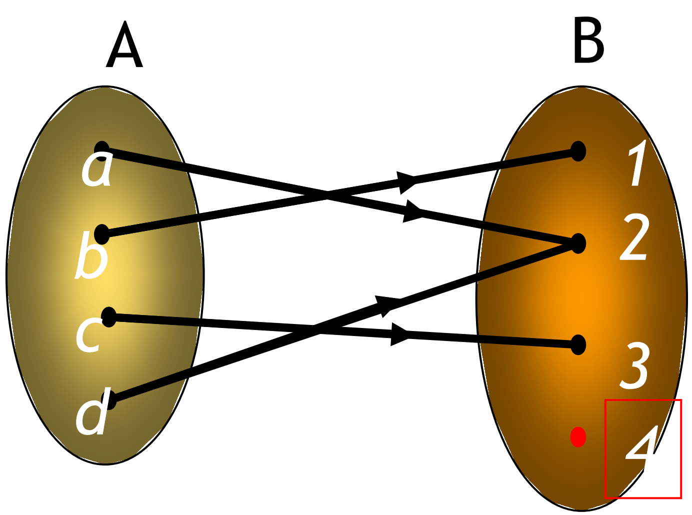
Fungsi satu ke satu,
bukan pada



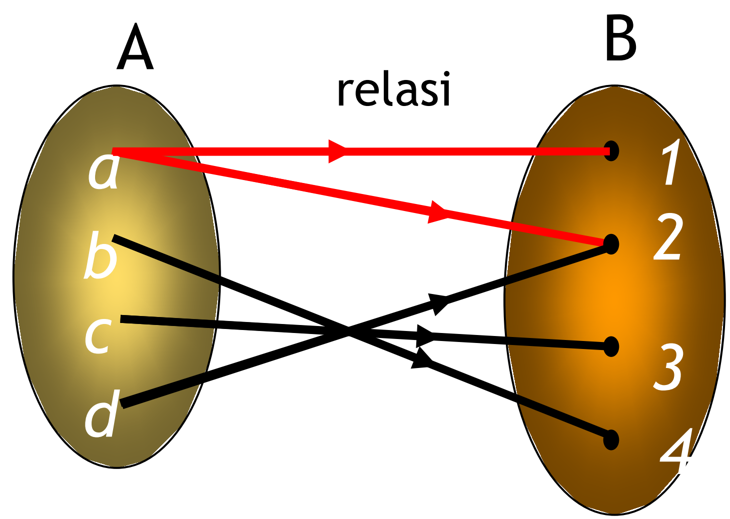
Fungsi pada,
bukan satu ke satu



Bukan fungsi satu ke satu,
maupun pada



Bukan fungsi

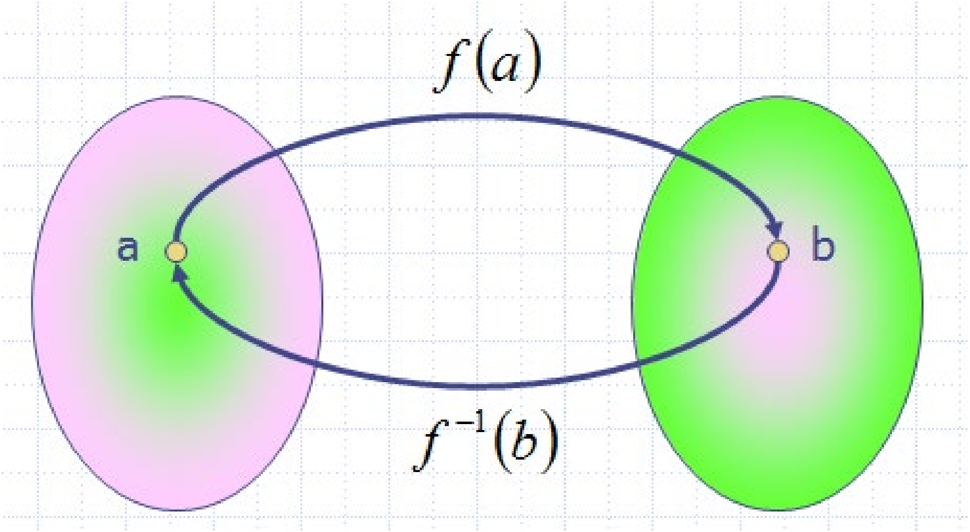


FUNGSI INVERSI

Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan balikan atau inversi (*invers*) dari fungsi f.

Fungsi inversi dari f dilambangkan dengan f^{-1}

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat gambar berikut



FUNGSI INVERS

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.
- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

FUNGSI INVERS

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

FUNGSI INVERSI

Contoh 13

Relasi $f = \{(1,u),(2,v),(3,w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu.

Inversi fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u,1),(v,2),(w,3)\}$.
Jadi f adalah fungsi *invertible* (dapat dibalikkan).

FUNGSI INVERSI

Contoh 14

- Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

  $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$
- Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

FUNGSI INVERSI

- **Contoh 15**
- Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

Jawab:

- Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

- Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(x) = y + 1$.

FUNGSI INVERSI

- **Contoh 16**
- Tentukan balikan fungsi

$$f(x) = x^2 + 1.$$

<u>Jawab</u>

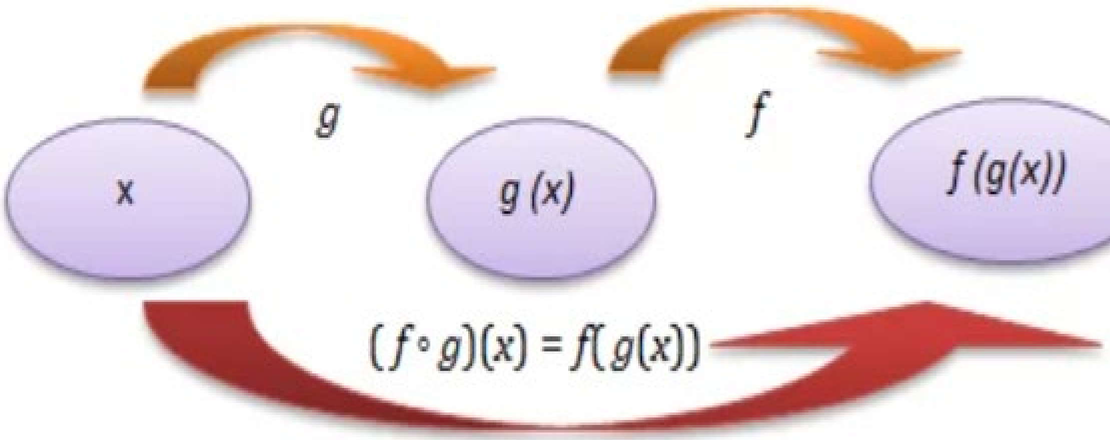
- Dari Contoh sebelumnya kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*.

FUNGSI KOMPOSISI

- Fungsi komposisi adalah sebuah operasi pada 2 fungsi atau lebih untuk menghasilkan sebuah fungsi yang baru.
- Fungsi komposisi menggunakan notasi ‘o’. Contohnya jika fungsi f(x) dan g(x), maka (f o g) (x) dibaca fungsi f bundaran g yang dikerjakan dengan cara memasukkan fungsi g ke dalam fungsi f.
- Definisi : g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$ didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

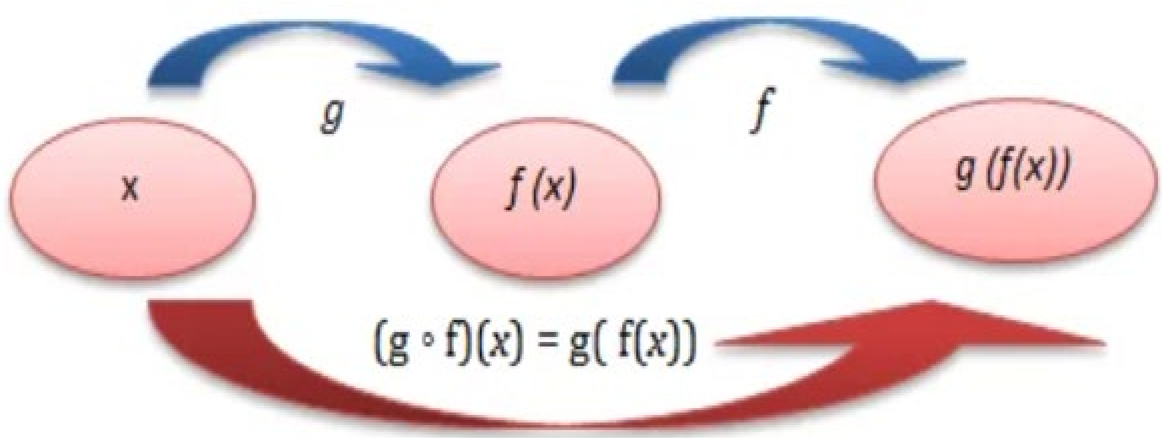
FUNGSI KOMPOSISI

- Fungsi komposisi dapat ditulis sbb :
- (f o g) (x)= f(g(x)) ➔ komposisi g (fungsi f bundaran g atau fungsi komposisi g dikerjakan lebih dahulu daripada f)



FUNGSI KOMPOSISI

- Fungsi komposisi dapat ditulis sbb :
- (g o f) (x)= g(f(x)) ➔ komposisi f (fungsi g bundaran f atau fungsi komposisi f dikerjakan lebih dahulu daripada g)



FUNGSI KOMPOSISI

SIFAT FUNGSI KOMPOSISI

Sifat Fungsi Komposisi ;

1. Tidak berlaku sifat komutatif $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
2. Berlaku sifat asosiatif $\{f \circ (g \circ h)\}(x) = \{(f \circ g) \circ h)\}(x)$
3. Terdapat unsur identitas (I)(x), (f o I)(x)=(I o f)(x) = f(x)

FUNGSI KOMPOSISI

Contoh 17

Diketahui $f(x) = 2x-1$, $g(x) = x^2 +2$

1. Tentukanlah $(g \text{ o } f)(x)$
2. Tentukanlah $(f \text{ o } g)(x)$
3. Apakah berlaku sifat komutatatif ?

BEBERAPA FUNGSI KHUSUS

Beberapa fungsi yang dipakai dalam ilmu komputer:

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*
2. Fungsi *modulo*
3. Fungsi Faktorial
4. Fungsi Eksponensial dan Logaritmik

FUNGSI *FLOOR* DAN *CEILING*

Fungsi floor dari x : $\lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

Fungsi ceiling dari x : $\lceil x \rceil$

$\lceil x \rceil$ menyatakan nilai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Contoh 18

$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ $\quad$ $\lceil 3.5 \rceil = 4$

$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$ $\quad$ $\lceil 0.5 \rceil = 1$

$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$ $\quad$ $\lceil 4.8 \rceil = 5$

$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$ $\quad$ $\lceil -0.5 \rceil = 0$

FUNGSI MODULO

Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator **mod**, yang dalam hal ini:

a mod m memberikan sisa pembagian bulat bila a dibagi dengan m

a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a=mq+r$, dengan $0 \leq r < m$

Contoh 19

25 mod 7 = 4

15 mod 4 = 3

0 mod 5 = 0

-25 mod 7=3

FUNGSI MODULO

Contoh 20

Diketahui J=(0,1,2) dan definisi fungsi dari J ke J dari f dan g adalah :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad mod\, 3$$

$$g(x) = (x+2)^2 \qquad \mathrm{mod}\, 3$$

Apakah $f = g$?

FUNGSI FAKTORIAL

Untuk sembarang bilangan bulat tidak-negatif *n*, faktorial dari *n* dilambangkan dengan *n*!, didefinisikan sebagai:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1 \text{ x } 2 \text{ x} \ldots \text{x } (n-1) \text{ x } n, & n > 0 \end{cases}$$

Contoh 21

0! =1

1! = 1

4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24

5! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Fungsi eksponensial berbentuk

$$a^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \underbrace{a \text{ x a x } \ldots \text{ x } a,}_{n} & n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$a^{-n} = 1/a^n$

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

Contoh 22

43 = 4.4.4 = 64

$^4\log 64 = 3$