BAB III
ATURAN RANTAI, TURUNAN FUNGSI IMPLISIT, DAN TURUNAN TOTAL

3.1. ATURAN RANTAI TURUNAN FUNGSI PEUBAH BANYAK

Seperti pada fungsi satu peubah, aturan rantai dapat digunakan untuk mencari turunan fungsi komposisi. Demikian pula halnya pada fungsi peubah banyak. Untuk mengetahui bagaimana aturan rantai ini bekerja untuk turunan fungsi peubah banyak, akan diawali dengan fungsi dua peubah yang selanjutnya dapat digeneralisasi sendiri oleh pembaca untuk tiga peubah dan seterusnya.

Teorema 3.1

Misalkan u adalah fungsi dua peubah, $u = u(x, y)$ yang dapat diturunkan. Misalkan pula $x = f(r, s)$ dan $y = g(r, s)$ dan turunan-turunannya $\partial x/\partial r$, $\partial x/\partial s$, $\partial y/\partial r$, dan $\partial y/\partial s$ semuanya ada, maka $u = U(r, s)$ dan turunan parsial u terhadap r dan s, adalah

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}\,. \qquad \square$$

Contoh 3.1

Misalkan $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ dan $x = r\,e^s$ dan $y = r\,e^{-s}$. Tentukanlah turunan u terhadap r $(r > 0)$ dan turunan u terhadap s.

Cara 1, ubahlah persamaan fungsi $u = u(x, y)$ menjadi bentuk $u = U(r, s)$ dengan mensubstitusi x dan y.

$$u = \ln\sqrt{r^2(e^{2s} + e^{-2s})} = \ln\left(r\,\sqrt{e^{2s} + e^{-2s}}\right)$$

maka turunan u terhadap r adalah

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r},$$

turunan u terhadap s adalah

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{e^{2\,s} - e^{-2\,s}}{e^{2\,s} + e^{-2\,s}}\,.$$

Cara 2, Perhatikan bahwa ketiga fungsi dua peubah mempunyai turunan parsial masing-masing, yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = e^s\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = r\,e^s$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = e^{-s}\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = -r\,e^{-s}$$

Maka turunan u terhadap r dengan menggunakan teorema 3.1, adalah

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{x}{x^2+y^2}\ e^s + \frac{y}{x^2+y^2}\ e^{-s} = \frac{1}{r},$$

demikian pula dengan turunan u terhadap s, diberikan oleh

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{x}{x^2+y^2}\ r\,e^s + \frac{y}{x^2+y^2}\ (-r\,e^{-s}) = \frac{e^{2s}-e^{-2s}}{e^{2s}+e^{-2s}}\ .$$

Teorema 3.2

Misalkan u adalah fungsi yang terturunkan dari n peubah, $x_1, x_2, \cdots, x_n$dan untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, x_i adalah fungsi dari m peubah, $y_1, y_2, \cdots, y_m$. Jika semua turunan parsial $\partial x_i/\partial y_j$ ada untuk $i = 1,2,\cdots,n$ dan $j = 1,2,\cdots,m$, maka u adalah fungsi peubah banyak dari $y_1, y_2, \cdots, y_m$ dan berlaku

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\ ;$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\ .$$

□

Contoh 3.2

Jika $u = z\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ dengan $x = 3r^2 + 2s$, $y = 4r - 2s$, dan $z = 2r^2 - 3s^2$. Tentukan nilai $\partial u/\partial r$ dan $\partial u/\partial s$ di $(r,s) = (1,2)$.

Dengan menggunakan teorema 3.2, diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \left(\frac{-yz\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}\right) 6r + \left(\frac{z\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right) 4 + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ 4r$$

Jadi nilai turunan $\partial u/\partial r$ di $(1,2)$ adalah $\frac{\partial u}{\partial r}(1,2) = -\frac{40}{7}$.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{-yz\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}\right) 2 + \left(\frac{z\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right) 2 + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ (-6s)$$

Jadi nilai turunan $\partial u/\partial s$ di $(1,2)$ adalah $\frac{\partial u}{\partial s}(1,2) = -\frac{20}{7}$.

Apabila u merupakan fungsi yang terturunkan dari dua peubah x dan y, sedangkan masing-masing peubah x dan y merupakan fungsi satu peubah dan mempunyai turunan terhadap t, maka u merupakan fungsi satu peubah dan turunannya terhadap t dinyatakan oleh

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Contoh 3.3

Misalkan $u = x^2 + 2xy + y^2$ dan $x = t\cos t$, $y = t\sin t$. Tentukanlah du/dt.

Perhatikan bahwa turunan-turunan parsial u adalah $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 2y$. Sedangkan turunan x dan y terhadap t adalah $\frac{dx}{dt} = \cos t - t\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t + t\cos t$.

Maka

$$\frac{du}{dt} = (2x + 2y)(\cos t - t\sin t) + (2x + 2y)(\sin t + t\cos t)$$

$= (2t\cos t + 2t\sin t)(\cos t - t\sin t) + (2t\cos t + 2t\sin t)(\sin t + t\cos t)$

$= 2t\ (\cos^2 t + \sin t\cos t - t\sin t\cos t - t\sin^2 t +)$

$+2t(t\cos^2 t + \sin t\cos t + t\sin t\cos t + \sin^2 t)$

$= 2t(1 + \sin 2t + t\cos 2t).$

Dapat juga ditentukan terlebih dahulu fungsi $u = U(t)$ kemudian dicari turunannya terhadap t, sebagaimana kita lakukan pada cara 1 di contoh 3.1.

$$u = u(x, y) = x^2 + 2xy + y^2,$$

karena $x = t\cos t$ dan $y = t\sin t$, maka

$$u = U(t) = t^2\cos^2 t + 2t^2\cos t\sin t + t^2\sin^2 t = t^2 + t^2\sin 2t$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dt} = 2t + 2t\sin 2t + 2t^2\cos 2t.$$

Contoh 3.4

Gunakan hukum gas ideal, $T = P\,V\,/k$ dengan $k = 10$ untuk mencari laju perubahan temperatur pada saat volume gas $V = 120\ cm^3$, tekanan gas $P = 8\ N/cm^2$, jika pada saat yang sama ketika volume gas naik dengan kelajuan $2\ cm^3/\text{menit}$, tekanan gas menurun dengan laju $0{,}1\ N/\text{menit}$.

Misalkan t adalah jangka waktu yang dibutuhkan pada saat volume gas mulai naik. Maka laju perubahan temperatur (dT/dt) diperoleh

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{V}{k}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{k}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{120}{10}\ (-0{,}1) + \frac{8}{10}\ (2) = 0{,}4.$$

Jadi temperature naik dengan laju dT/dt adalah $0{,}4\ \text{derajat/menit}$.

3.2. TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

Pada Matematika dasar I, untuk menentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari bentuk implisit $F(x,y)=0$, karena ruas kiri dari bentuk ini semuanya merupakan fungsi dari x dan biasanya berbentuk fungsi komposisi, maka dengan aturan rantai kita bisa memperoleh $\frac{dy}{dx}$. Cara yang serupa dapat diterapkan pada fungsi dengan banyak peubah.

Misalnya diketahui suatu persamaan dalam bentuk:

$$F(x,y,z)=0$$

dengan menganggap z sebagai fungsi dari peubah x dan y, katakanlah $z=f(x,y)$ maka bentuk persamaan di atas menjadi:

$$F(x,y,f(x,y))=0.$$

Dalam bentuk demikian, turunan parsialnya $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ (yang biasa kita tulis dengan lambang $\frac{dy}{dx}$) misalnya kita bisa tentukan dengan lebih dahulu menentukan $\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y,f(x,y)),$ sehingga kita peroleh :

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y),f(x,y))=0.$$

Dengan menguraikan bentuk persamaan ketiga ini, turunan parsial yang dicari, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cong\frac{\partial z}{\partial x}$ dapat ditentukan. Berikut adalah suatu contoh sederhana, bagaimana menentukan turunan parsial dari suatu fungsi peubah banyak yang dinyatakan dalam bentuk implisit.

Contoh 3.5

Diberikan $x^2+y^2-z^2+1=0$.

Diskusikan bagaimana caranya menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Dengan menganggap z sebagai fungsi dari peubah z dan y, katakanlah $z = f(x,y)$, maka turunan parsialnya, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ yang dapat kita tulis dengan lambang $\frac{\partial z}{\partial x}$. Dapat kita tentukan dangan lebih dahulu menentukan turunan parsial

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - z^2 + 1) = \frac{\partial}{\partial x}(0);$$

Pada ruas kiri, suku pertama, x^2 turunan parsialnya adalah $2x$. Suku kedua, y^2 dan suku keempat, 1, turunan parsialnya adalah nol. Bagaimana dengan turunan parsial suku yang ketiga?

Dengan menggunakan aturan rantai terhadap fungsi $u = -z^2$ dimana $z = f(x,y)$, diperoleh hasil bahwa $\frac{\partial u}{\partial x} = -2z\frac{\partial z}{\partial x}$ selanjutnya karena , $\frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$ dan $\frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$ maka bentuk persamaannya diperoleh yaitu

$$2x - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Dari bentuk yang terakhir ini ,kita peroleh hasil

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$$

Perhatikan bentuk fungsi komposisi $u = -z^2$ yaitu $u = g(x) = g(z) = g(f(x,y))$.

Barangkali timbul pertanyaan mengenai contoh 3.5 di atas, apakah hasil tersebut konsisten dengan cara mengubah bentuk implisit

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

Menjadi bentuk dua persamaan fungsi, yaitu :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \qquad \text{dan} \qquad z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

Kemudian ditemukan turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ langsung dari kedua persamaan fungsi tesebut. Selanjutnya mungkin muncul pertanyaan yang kedua, nilai z yang manakah yang harus disubtitusikan pada hasil $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$. Dengan mudah kita melihat, bahwa apabila kita menemukan turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ langsung dari fungsi yang pertama ,yaitu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Hasil ini persis sama dengan hasil sebelumnya apabila kita substitusikan persamaan fungsi yang pertama. Demikian pula apabila kita menentukan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Hasil ini juga sama dengan hasil $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$, jika z disubstitusikan persamaan dari fungsi yang kedua.

Dengan cara yang analog ,kita bisa mencari turunan parsial $\frac{\partial w}{\partial x}$ dari persamaan fungsi implisit $F(x, y, z, w) = 0;$ dst.

Jika z suatu fungsi dari x dan y yang didefinisikan dalam bentuk fungsi implisit $F(x, y, z) = F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$, maka turunan terhadap x diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Jika kita selesaikan untuk $\partial z/\partial x$, maka diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}.$$

Hal yang sama jika turunan terhadap y, maka diperoleh hubungan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

Contoh 3.6

Misalkan $F(x, y, z) = x^3 e^{y+z} - y\sin(x - z) = 0$ adalah fungsi implisit dengan z adalah fungsi terhadap x dan y. Tentukan $\partial z/\partial x$.

Dengan menggunakan hubungan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}.$$

Diketahui bahwa $\partial F/\partial x$ adalah $3x^2 e^{y+z} - y\cos(x - z)$ dan $\partial F/\partial z$ adalah $x^3 e^{y+z} + y\cos(x - z)$. Maka

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 e^{y+z} - y\cos(x - z)}{x^3 e^{y+z} + y\cos(x - z)}.$$

3.3. TURUNAN TOTAL

Definisi 3.1

Jika f adalah fungsi dari dua peubah x dan y , maka yang disebut dengan increment (perubahan nilai) f di titik (x_0, y_0), yang diberi lambang $\Delta f(x_0, y_0)$; dinyatakan melalui persamaan

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad \square$$

Contoh 3.7

Diberikan fungsi f yang didefinisikan melalui persamaan $f(x, y) = 3x - xy^2$.

Carilah Increment dari f di titik (x_0, y_0)!

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0{}^2)$$

$$= 3\,\Delta x - {y_0}^2 \Delta x - 2\,x_0 y_0 \Delta y - 2\,y_0 \Delta x \Delta y - x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2$$

Contoh 3.8

Misalkan $z = xy^2 + x^3 + x^2y^2 + y$, tentukan besar perubahan nilai z dari titik (1,1) ke (3,5).

Sesuai definisi 3.1, maka perubahan nilai z adalah

$$\Delta z = z(3,5) - z(1,1) = 332 - 4 = 328.$$

Definisi 3.2

Misalkan f adalah fungsi dari dua peubah x dan y, f mempunyai turunan parsial dan misalkan dx dan dy adalah perubahan nilai dari x dan y yang sangat kecil. Turunan total dari f, dinyatakan sebagai $df = f_x\, dx + f_y dy$ □

Pentingnya dz adalah dari kenyataan bahwa jika $dx = \Delta x$ dan $dy = \Delta y$, masing-masing menyatakan perubahan kecil dalam x dan y, maka dz akan berupa suatu hampiran yang baik terhadap Δz yang merupakan perubahan padanannya dalam z.

Contoh 3.9

Misalkan fungsi z seperti yang tertulis pada contoh 3.8. Tentukan perubahan nilai z dari titik (1,1) ke (1.02,0.99), dengan ketelitian dua decimal.

Dari definisi 3.1 diperoleh $\Delta z = z(1.02,0.99) - z(1,1) = 4.1118 - 4 = 0.11.$

Dengan menggunakan definisi 3.2, kita akan menggunakan turunan total dz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 3x^2 + 2xy^2 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2x^2y + 2y$$

$$dx = 1.02 - 1 = 0.02 \qquad dy = 0.99 - 1 = -0.01$$

Maka

$$dz(1,1) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)dz + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)dy$$

$$dz = 6 \times 0.02 + 6 \times (-0.01) = 0.06.$$

Contoh 3.10

Misalkan $z = f(x, y) = 2x^3 + xy - y^3$, hitung Δz dan dz jika sebuah partikel bergerak di bidang dari titik $(2,1)$ ke (2.03, 0.98).

$$\Delta z = f(2.03, 0.98) - f(2,1) = 17.779062 - 17 = 0.779062.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y \quad \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 25, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

maka $dz = 25 \times 0.03 + 1 \times (-0.02) = 0.73.$

Contoh 3.11

Suatu bejana antik yang terbuat dari logam berbentuk silinder tegak mempunyai tutupan yang tingginya 6 cm dengan alasnya berupa lingkaran dengan jari-jari lingkaran dalamnya 2 cm dan ketebalan logam adalah 0.1 cm. Jika nilai logam dari bejana itu ditentukan oleh volumenya dan dinilai Rp 100000/cm^3. Carilah nilai pendekatan untuk nilai logam bejana tersebut?

Persamaan volume silinder adalah $V = \pi r^2 h$. Volume logam bejana adalah selisih volume silinder tegak yang jari-jarinya $r_l = 2.1\ cm$ dan tingginya $h_l = 6.2\ cm$ dengan silinder tegak yang jari-jarinya $r_d = 2\ cm$ dan tingginya $h_d = 6\ cm$.

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\ dr + \frac{\partial V}{\partial h}\ dh$$

$$dV = 2\pi rh\ dr + \pi r^2 dh$$

Jadi dengan ukuran-ukuran yang telah disebutkan di atas, diperoleh nilai pendekatan volume logam adalah

$$dV = 24\,\pi\ \ 0.1 + 4\,\pi\ \ 0.2 = 3.2\,\pi \approx 10.0531\ cm^3.$$

Maka Nilai bejana adalah Rp 1005310.

Definisi 3.3

Misalkan fungsi $w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ adalah fungsi peubah banyak dan mempunyai turunan-turunan parsial di sebuah titik $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, maka turunan total dari w dinyatakan

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\, dx_n. \qquad \square$$

Contoh 3.12

Sebuah kotak kayu dipesan ke pengrajin kayu dengan ukuran panjang 10 cm, lebar 12 cm, dan tinggi 15 cm. Setelah dibuat diketahui telah terjadi kesalahan pengukuran sampai 0.002 cm. Tentukan persentase nilai pendekatan kesalahan pengukuran terbesar dari volume kotak?

Misalkan kesalahan pengukuran itu terjadi adalah masing-masing ukuran panjang (p), lebar (l), dan tinggi (t) menjadi bertambah masing-masing $dp = dl = dt =$ 0.002 cm, maka kesalahan pengukuran volume adalah

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial p}\, dp + \frac{\partial V}{\partial l}\, dl + \frac{\partial V}{\partial t}\, dt \\ &= (l\, t + p\, t + p\, l)dp \\ &= (12 \times 15 + 10 \times 15 + 10 \times 12) \times 0.002 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

Jadi persentase kesalahan $\frac{0.9}{1800} = 0.05\%$.

LATIHAN

1. Tentukan $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $F(u, v) = 2u^3 + uv - 3v^2;\ u = x^2 + y;\ v = 5xy - y^2$
   b. $F(x, y) = u\, e^v - v\, e^u;\ u = xy;\ v = x^2 - y^2$
   c. $F(x, y) = (2u + v)/(v - 2u);\ u = 2x - 3y;\ v = x + 2y$

d. $F(u,v) = \ln(u+v) - \ln(u-v)$; $u = y\,e^x$; $v = y/x$

e. $F(u,v) = u^2v^3$; $u = x + y$; $v = 2y$

2. Tentukan $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ dari fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x,y) = 3x^2 - 5y^2$; $x = r\sin 2\theta$; $y = r\cos\theta$

b. $f(x,y) = 4x^2 + 7y^2$; $x = \sin(r-\theta)$; $y = \cos(\theta - r)$

3. Bila $F(x,y) = x^3y$; $x^5 + y = t$; $x^2 + y^2 = t^2$ tentukanlah $\dfrac{\partial F}{\partial t}$

4. Tentukan nilai dF/dt di titik $t = \pi/2$, jika $F(x,y) = e^{xy^2}$; $x = t\cos t$; $y = 1/t$.

5. Jika $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, tunjukkan bahwa $x\,f_x + y\,f_y = f$.

6. Jika $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, tunjukkan bahwa $x\,z_x + y\,z_y = 1$

7. Misalkan $z = z(x,y)$, tentukan $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ dari fungsi implisit berikut

a. $y\,e^x + 15x - 17z = 0$

b. $z\sin x + z\cos y + xyz = 0$

c. $x^2\cos yz - y^2\sin xz = 2$

8. Tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ dari fungsi implisit berikut

a. $ye^{-x} + 5x - 17 = 0$

b. $x.\sin y + y\cos x = 0$

c. $x^2\cos y - y^2\sin x = 0$

9. Bila $F(r,\theta) = \sin(2r\theta) + \cos(r\theta)$. Tentukanlah

10. Gravitasi dari sebuah benda dinyatakan dengan rumus $g_b = A/(A - w)$, dengan A menyatakan berat benda di udara dan w menyatakan berat benda di dalam air. Hasil pengukuran memberikan $A = 20$ dengan kemungkinan kesalahan terbesar adalah 0.01. Hasil pengukuran di air, memberikan $w = 12$ dengan kesalahan pengukuran 0.12. Carilah pendekatan dari kesalahan terbesar yang mungkin terjadi dalam perhitungan gravitasi benda.

11. Misalkan $z = f(x, y) = 2x^3 + xy - y^3$, hitung Δz dan dz jika sebuah partikel bergerak di bidang dari titik $(2,1)$ ke (2.0013, 0.997).
12. Misalkan $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y^2}$, hitung Δz dan dz jika sebuah partikel bergerak di bidang dari titik $(2,1)$ ke (2.0013, 0.997).