

Prinsip Induksi Kuat

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihai bilangan bulat. Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.
- Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
 1. $p(n_0)$ benar, dan
 2. jika $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Contoh 6. Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

Basis induksi. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai $n + 1$:

- (a) Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
- (b) Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1) / a = b \quad \text{atau} \quad (n + 1) = ab$$

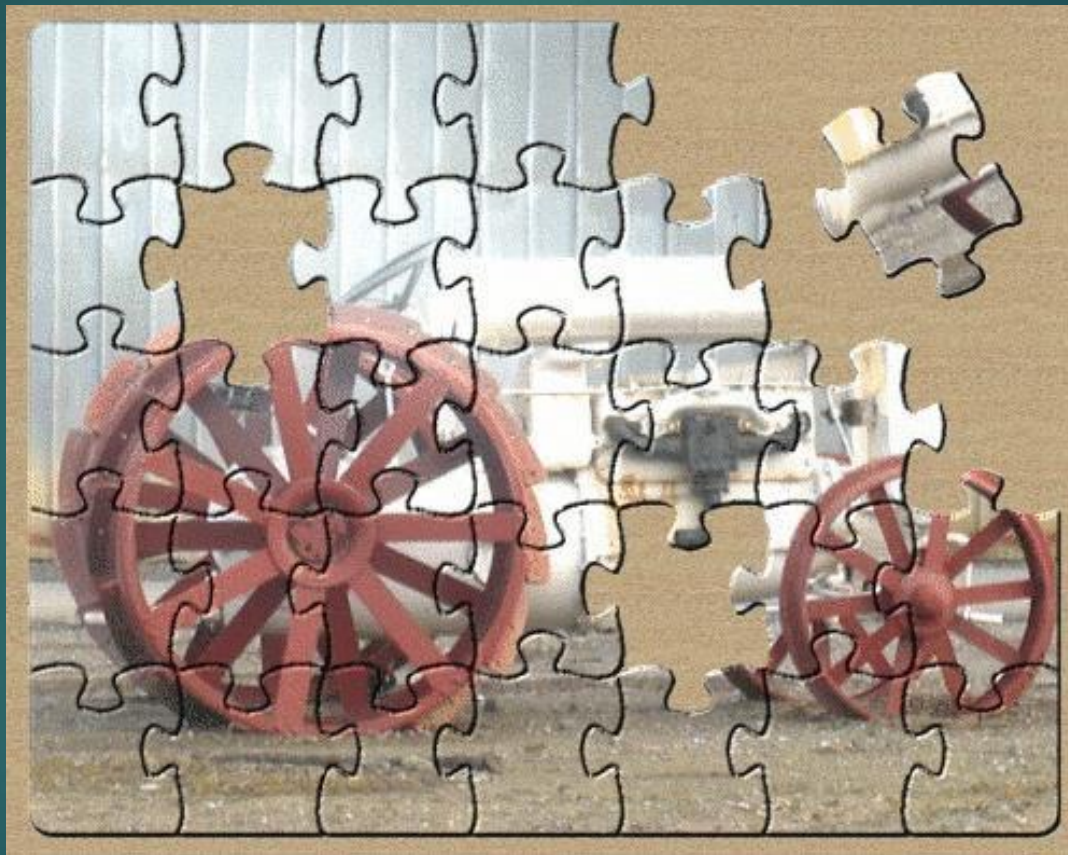
yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

- **Contoh 7.** [LIU85] Teka-teki susun potongan gambar (*jigsaw puzzle*) terdiri dari sejumlah potongan (bagian) gambar (lihat Gambar). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar. Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar.



Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.



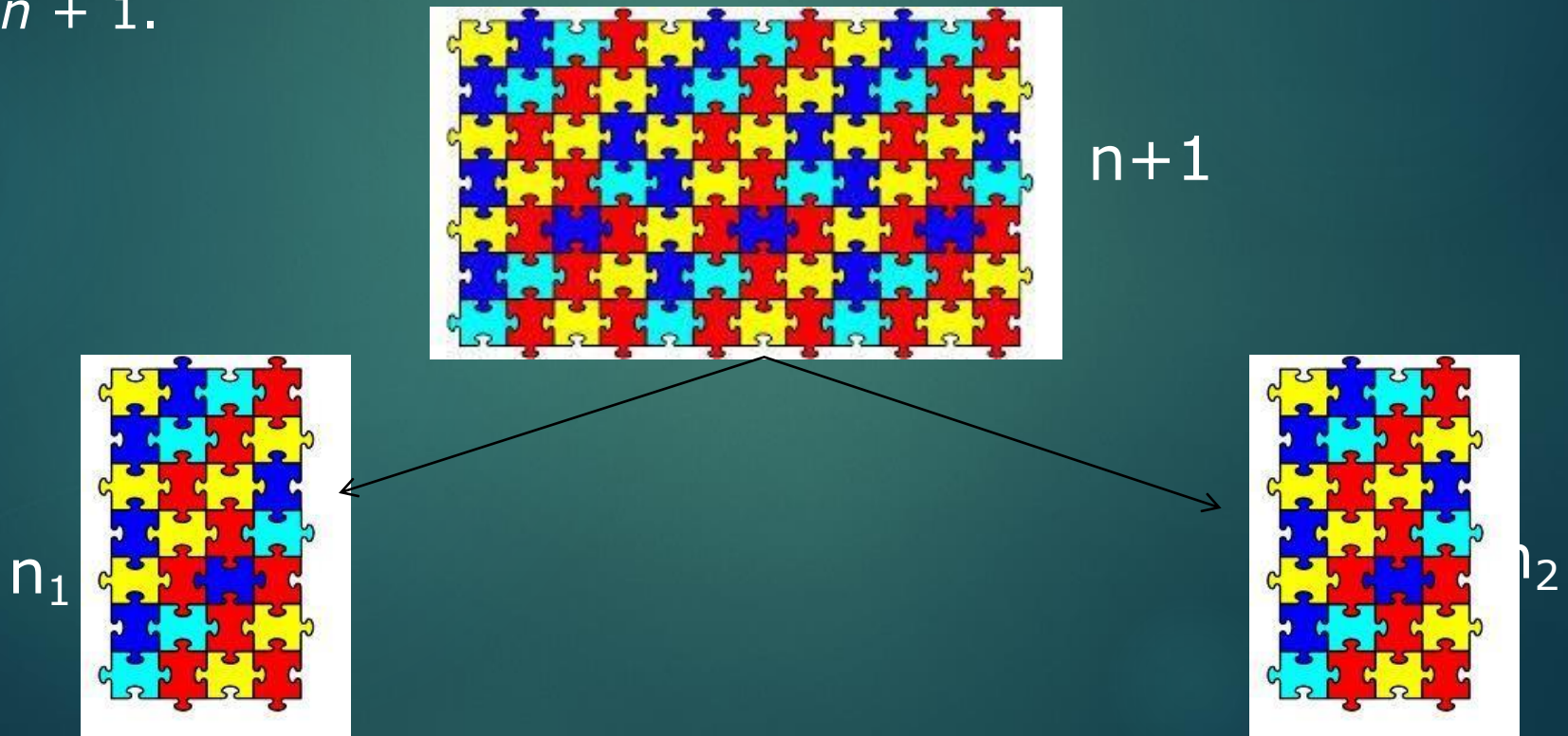
Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.



(ii) *Langkah induksi*. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan ($n = 1, 2, 3, \dots, k$) diperlukan sejumlah $n - 1$ langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk $n + 1$ potongan diperlukan n langkah.

Bagilah $n + 1$ potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$.



Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan $n_1 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang satu dan $n_2 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 \text{ langkah terakhir} = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

Latihan 3


1. Jika A_1, A_2, \dots, A_n masing-masing adalah himpunan, buktikan dengan induksi matematik hukum De Morgan rampatan berikut:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$$

2. Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.


3. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$.

4. Perhatikan bahwa $[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n]$ adalah tautologi bilamana p_1, p_2, \dots, p_n adalah proposisi.

- 
5. Misalkan ada sejumlah n ganjil orang ($n > 1$) yang berkumpul di sebuah lapangan, di sini mereka masing-masing memegang sebuah kue *pie* yang siap dilemparkan ke orang lain yang paling dekat dengannya. Jarak antar orang berbeda (tidak ada jarak antar pasangan yang sama). Jika semua orang harus melempar kue dengan simultan(bersamaan), buktikan bahwa minimal ada satu orang yang tidak terkena lemparan kue.


Solusi:

- ▶ (i) Basis: Untuk $n=3$, ada tiga orang A, B dan C maka akan ada 1 pasang orang dengan jarak terpendek, sebut saja sehingga pasangan tersebut A dan B saling melempar kue satu sama lain, akibatnya C tidak akan kena lemparan kue, C akan melempar salah satu dari A atau B, tergantung yang paling dekat dengan C.



(ii) Langkah induksi: Karena n ganjil, misalkan untuk $n = 2k+1$ orang minimal ada satu orang yang tidak kena lemparan, maka akan dibuktikan dengan induksi untuk $n + 1 = 2(k+1)+1=2k+3$ orang juga terdapat minimal 1 orang yang tidak kena lemparan pie.

Buktinya sebagai berikut. Misalkan diantara $2k+3$ orang, A dan B adalah pasangan terdekat(jadi mereka melempar satu sama lain), di sini akan dibagi menjadi dua kasus :

- 
- Jika diantara $2k+1$ orang tersisa ada minimal satu orang yang melempar pie ke A atau B, maka akan ada maksimal $(2k+3)-3$ pie yang dilempar ke $2k+1$ orang, artinya ada $2k$ pie yang dilempar ke $2k+1$ orang, sehingga ada 1 orang yang tidak terlempar
 - Jika diantara $2k+1$ sisa orang tidak ada yang melempar ke A dan B, maka masalah selesai (dari hipotesis induksi $2k+1$).

Apa yang salah dari pembuktian induksi matematik ini?

18

Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama.


Basis induksi: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $p(1)$ benar.

Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama. (hipotesis)

Untuk membuktikan $p(n+1)$ benar, tinjau untuk himpunan dengan $n + 1$ kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan $1, 2, 3, \dots, n, n+1$.

Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama ($1, 2, \dots, n$) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir ($2, 3, \dots, n, n+1$) juga harus berwarna sama.

Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua $n+1$ kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar. Kesimpulannya: $p(n)$ benar.



Penyelesaian: langkah induksi tidak benar untuk himpunan dengan dua ekor kuda (yaitu ketika $n + 1 = 2$), sebab dua himpunan yang dibentuk tidak beririsan. Himpunan pertama berisi kuda bernomor 1, sedangkan himpunan kedua kuda bernomor 2.

- Apa yang salah dalam pembuktian dengan induksi berikut ini?

Teorema: Untuk setiap bilangan bulat tak-negatif n , berlaku bahwa $5n = 0$.

Basis induksi: Untuk $n = 0$, maka $5 \cdot 0 = 0$ benar)

Langkah induksi: Misalkan bahwa $5n = 0$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n . (hipotesis induksi)

Untuk membuktikan $p(n+1)$, tulislah $n + 1 = i + j$, yang dalam hal ini i dan j adalah bilangan asli yang kurang dari $n+1$.

$$\begin{aligned}\text{Selanjutnya, } 5(n+1) &= 5(i + j) \\ &= 5i + 5j \\ &= 0 + 0 \quad (\text{menurut hipotesis induksi}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Darikedua langkah di atas, maka terbukti untuk setiap bilangan bulat tak-negatif n , berlaku $5n = 0$.



Jawaban:

Kesalahan terjadi ketika berpindah dari $n = 0$ ke $n = 1$, sebab 1 tidak dapat ditulis sebagai penjumlahan dua buah bilangan asli.

Aplikasi Induksi Matematik
untuk membuktikan
kebenaran program

function Exp(a :integer, m : integer)

{ Fungsi untuk menghitung a^m }

Deklarasi

k, r : **integer**

Algoritma:

$r \leftarrow 1$

$k \leftarrow m$

while ($k > 0$)

$r \leftarrow r * a$

$k \leftarrow k - 1$

end

return r

{ Computes : $r = a^m$

Loop invariant : $r \times a^k = a^m$

}

Buktikan algoritma di atas **benar** dengan induksi matematika, yaitu di akhir algoritma fungsi mengembalikan nilai a^m

Misal r_n dan k_n adalah nilai berturut-turut dari r dan k , setelah melewati kalang (*loop*) *while* sebanyak n kali, $n \geq 0$.

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi: $r_n \times a^{k_n} = a^m$, $n \geq 0$.
Akan ditunjukkan bahwa $p(n)$ benar dengan induksi matematika

(i) Basis:

Untuk $n = 0$, maka $r_0 = 1$, $k_0 = m$.

Maka $p(0)$ benar sebab

$$r_0 \times a^{k_0} = a^m \Leftrightarrow 1 \times a^m = a^m$$

(ii) Langkah Induksi

Asumsikan $p(n)$ benar untuk $n \geq 0$, yaitu setelah melewati kalang n kali, yaitu $r_n \times a^{k_n} = a^m$. (hipotesis)

Kita harus menunjukkan $p(n+1)$ benar, yaitu untuk satu tambahan iterasi kalang *while*, maka

$$r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Setelah satu tambahan iterasi melewati kalang,

$$r_{n+1} = r_n \times a \text{ dan } k_{n+1} = k_n - 1 \quad \text{maka}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} &= (r_n \times a) \times a^{k_n - 1} \\ &= (r_n \times a) \times a^{k_n} \times a^{-1} \\ &= r_n \times a^{k_n} = a^m \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \end{aligned}$$

Jadi, $r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m \rightarrow p(n+1)$ benar

Karena basis dan langkah induksi benar, maka $p(n)$ adalah benar untuk setiap $n \geq 0$. Jadi algoritma benar.

Latihan

1. Buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk $n \geq 1$ turunan $f(x) = x^n$ adalah $f'(x) = nx^{n-1}$
2. Suatu *string* biner panjangnya n bit. Jumlah *string* biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1} . Buktikan pernyataan tersebut untuk $n \geq 1$.
3. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika A ,
 - ▶ B_1, B_2, \dots, B_n adalah himpunan, $n \geq 2$, maka

4. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa $a^n = 1$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n bilamana a adalah bilangan riil tidak-nol. Kita akan membuktikan ini dengan prinsip induksi kuat.

Basis induksi. Untuk $n = 0$, jelas $a^0 = 1$ adalah benar sesuai definisi a^0 .

Langkah induksi. Misalkan pernyataan tersebut benar untuk $0, 1, 2, \dots, n$, yaitu $a^0 = 1, a^1 = 1, a^2 = 1, \dots, a^n = 1$. Kita ingin memperlihatkan bahwa $a^{(n+1)} = 1$. Untuk menunjukkan hal ini, maka

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} \quad (\text{dari hipotesis induksi}) \\ &= 1 \end{aligned}$$