RELASI DAN SIFAT-SIFAT RELASI BINER

MATEMATIKA DISKRIT

RELASI

Sebelum memahami konsep Relasi, sebaiknya kita memahami terlebih dahulu konsep pasangan berurut dan kalimat matematika terbuka.

Hal ini dilakukan karena dengan memahami kosep pasangan berurut dan kalimat terbuka akan memudahkan memahami konsep Relasi.

RELASI
PASANGAN BERURUT

- Definisi,

Pasangan dari dua objek a dan b yang dinyakan dengan (a,b) disebut pasangan berurut apabila (a,b) memperhatikan urutan".

Dari definisi pasangan berurut, dapat diartikan bahwa (a, b) ≠ (b, a), dimana a ≠ b, sebab bagian pertama dari (a,b) ditempati oleh objek a, sedangkan bagian pertama dari (b,a) ditempati oleh b.

RELASI
KALIMAT MATEMATIKA TERBUKA

Kalimat matematika dengan peubah x dan y biasanya dinyatakan dengan P (x,y). Berikut didefinisikan Kalimat Matematika Terbuka .

- Definisi,

Kalimat matematika (P(x,y)) disebut Kalimat matematika terbuka dengan variabel x dan y, apabila nilai kebenaran dari P(x,y) belum dapat ditentukan.

Dari definisi tersebut nilai kebenaran dari kalimat matematika terbuka (P(x,y)) sangat tergantung dari variabel-variabelnya.

RELASI
KAL MATEMATIKA TERBUKA

Contoh

- P(x,y) ; “x lebih kecil dari pada y” Pada kalimat terbuka “x lebih kecil dari pada y” akan bernilai benar jika kita mengganti (mensubstitusi) nilai x = 2 dan y = 3 atau P(2,3) bernilai benar. Tetapi akan bernilai salah jika kita mensubsitusi nilai x = 4 dan y = 1 atau P(4,1) bernilai salah.

- P(a,b) ; “ a + b = 8”. Pada kalimat terbuka “a + b = 8” akan bernilai benar jika kita mensubstitusi nilai a = 5 dan b = 3 atau P(5,3) bernilai benar. Tetapi akan bernilai salah jika kita mensubsitutusi nilai a = 2 dan b = 3 atau P(2,3) bernilai salah.

RELASI

Definisi Relasi,

- Misalkan A dan B dua himpunan tak kosong dan P(x,y) kalimat matematika terbuka. Relasi R dari himpunan A dan B merupakan suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah pasangan berurut (a, b) dengan a ϵ A dan b ϵ A dari P(a,b) bernilai benar.
- Secara matematis relasi dapat dinyatakan sebagai berikut;

R = $[(x, y)$; $x \epsilon A \; dan \; y \epsilon B]$ atau R = $(A, B, P(x, y))$

RELASI

- Hubungan antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lain dinyatakan dengan struktur yang disebut *relasi*.

- Relasi antara himpunan A dan B disebut relasi biner, didefinisikan sebagai berikut :

  Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari A x B.

  Notasi : $\mathbf{R \subseteq (A \times B)}$

RELASI

- $a \, R \, b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya *a* dihubungkan dengan *b* oleh *R*
- $a \not R \, b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya *a* tidak dihubungkan oleh *b* oleh relasi *R*.
- Himpunan *A* disebut daerah asal (*domain*) dari *R*, dan himpunan *B* disebut daerah hasil (*range*) dari *R*.

RELASI

- Misalkan A={Amir, Budi, Cecep} adalah himpunan nama mahasiswa, dan B={IF221, IF251, IF342, IF323} adalah himpunan kode mk di jurusan teknik informatika.
- Perkalian kartesian antara A dan B menghasilkan himpunan pasangan terurut yg jumlah anggotanya adalah IAI.IBI=3.4=12 buah yaitu : AxB ={(Amir,IF221),(Amir,IF251),(Amir,IF342),(Amir,IF323),(Budi,IF221),(Budi,IF251),(Budi, IF342),(Budi,IF323),(Cecep,IF221),(Cecep,IF251),(Cecep,IF342),(Cecep,IF323)}

RELASI

Contoh 1

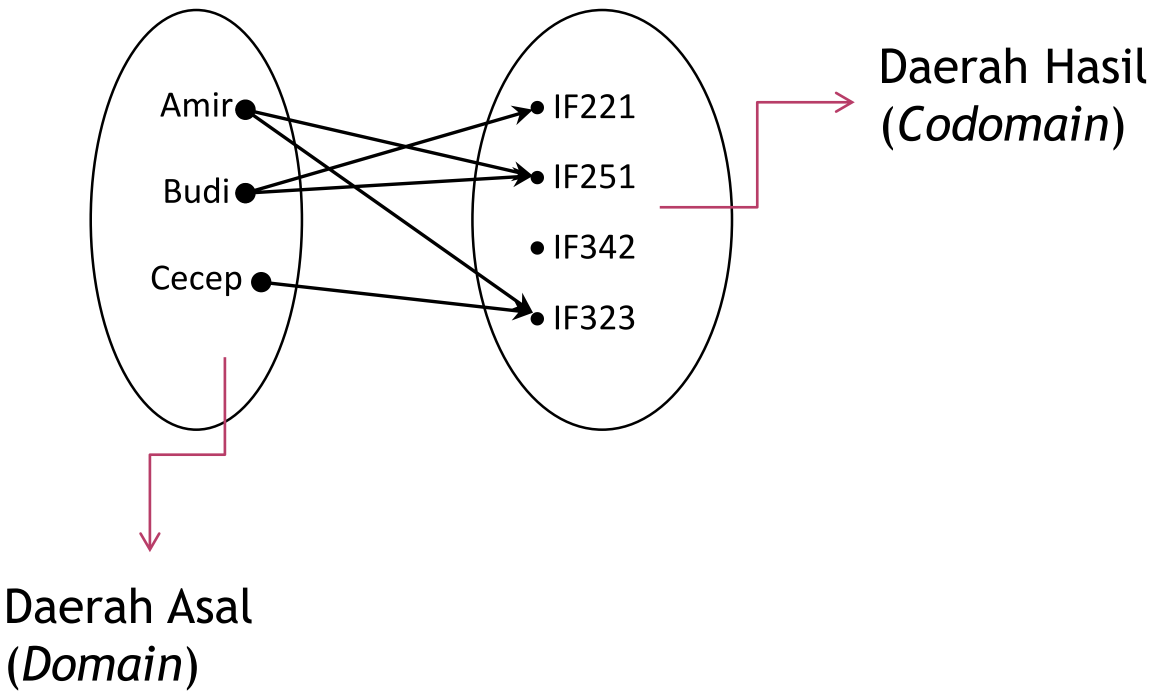
- Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yg diambil oleh mahasiswa yaitu :

R = {(Amir,IF251),(Amir,IF323),(Budi,IF221)
(Budi,IF251),(Cecep,IF323)}

- Kita dapat melihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$, A adalah daerah asal R dan B adalah daerah hasil R.
- Pasangan terurut pada relasi dari himpunan A ke himpunan B dapat digambarkan dengan diagram panah.

RELASI

- Relasi biner *R* antara *A* dan *B* adalah himpunan bagian dari *A* x *B*.



RELASI

Contoh 2 :

A = {x I x < 5, x $suatu\ bilangan\ Asli$} B = {y I y < 4, y $suatu\ bilangan\ Asli$} $P(x, y)$ = $x\ habis\ membagi\ y$.

Tentukan Relasi R dari himpunan A ke Himpunan B dari relasi $P(x, y)$ = $x\ habis\ membagi\ y$?

Jawab :

RELASI

Contoh 3

$Bila\ A$ = {2, 4, 6, 8} $dan\ B$ = {1, 2, 4}, $dan\ jika\ x \in A\ dan\ y \in B$, $maka\ relasi\ P(x, y) = x\ dua\ kali\ y$"
Tentukan Relasi R dari himpunan A ke Himpunan B dari relasi $P(x, y) = x\ dua\ kali\ y$?

Jawab

REPRESENTASI RELASI

Suatu relasi dapat disajikan dalam berbagai bentuk penyajian sebagai berikut :

1. Diagram Panah
2. Grafik Kartesius
3. Tabel
4. Matriks
5. Graf Berarah

REPRESENTASI RELASI

Contoh 4 :

A = {x I x < 5, x $suatu$ $bilangan$ $Asli$}

B = {y I y < 4, x $suatu$ $bilangan$ $Asli$}

$P(x,\ y)$ = x $habis$ $membagi$ y

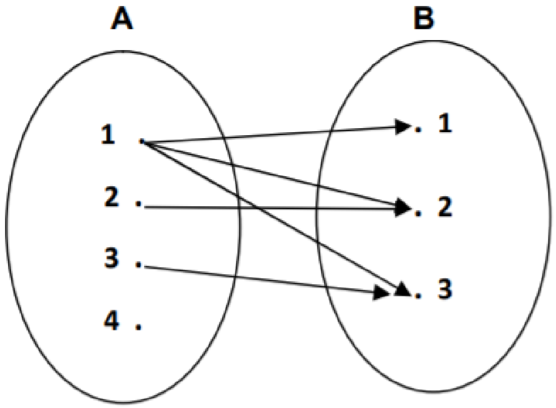
Diketahui Relasi R dari himpunan A ke Himpunan B adalah $P(x,y)$ = x $habis$ $membagi$ y.

Sajikan Relasi R dalam bentuk Diagram Panah; Grafik Kartesius; Tabel; Matriks; Graph berarah :

REPRESENTASI RELASI
DIAGRAM PANAH

Perhatikan bahwa relasi R dari himpunan A ke B dengan aturan "x *habis membagi* y", maka $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$

- Penyajian relasi R dengan diagram Panah yaitu.;

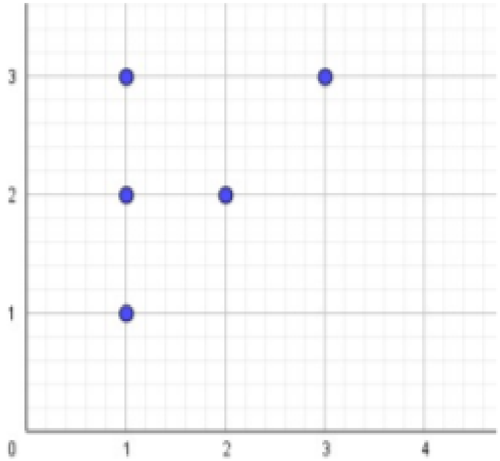


Anak panah menyatakan relasi x *habis membagi* y"

REPRESENTASI RELASI
GRAFIK KARTESIUS

- Penyajian relasi R dengan Grafik Kartesius yaitu.;

Himpunan B



Himpunan A

Koordinat titik-titik pada grafik Cartesius menyatakan pasangan berurutan dari relasi A dan B.

REPRESENTASI RELASI

- Penyajian relasi R dengan Tabel yaitu;

A	B
1	1
1	2
1	3
2	2
3	3

REPRESENTASI RELASI DENGAN TABEL

- Relasi biner dapat direpresentasikan sebagai tabel dimana kolom pertama tabel menyatakan daeral asal sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

A	B
Amir	IF 251
Amir	IF 323
Budi	IF 221
Budi	IF 251
Cecep	IF 323

P	Q
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

REPRESENTASI RELASI DENGAN MATRIKS

- Misalkan R adalah relasi dari A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan B = $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ maka R dapat disajikan dengan matriks $M=[m_{ij}]$

$$\begin{array}{cc} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} B \\ A \Big\downarrow & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

REPRESENTASI RELASI DENGAN MATRIKS

- Dengan kata lain, elemen matriks pada posisi (i,j) bernilai 1 jika a_i dihubungkan dengan b_j dan bernilai 0 jika a_i tidak dihubungkan dengan b_j .

REPRESENTASI RELASI DENGAN MATRIKS

Contoh 5

A = {x I x < 5, x $suatu\ bilangan\ Asli$} atau A = {1,2,3,4}

B = {y I y < 4, x $suatu\ bilangan\ Asli$} atau B = {1,2, 3}

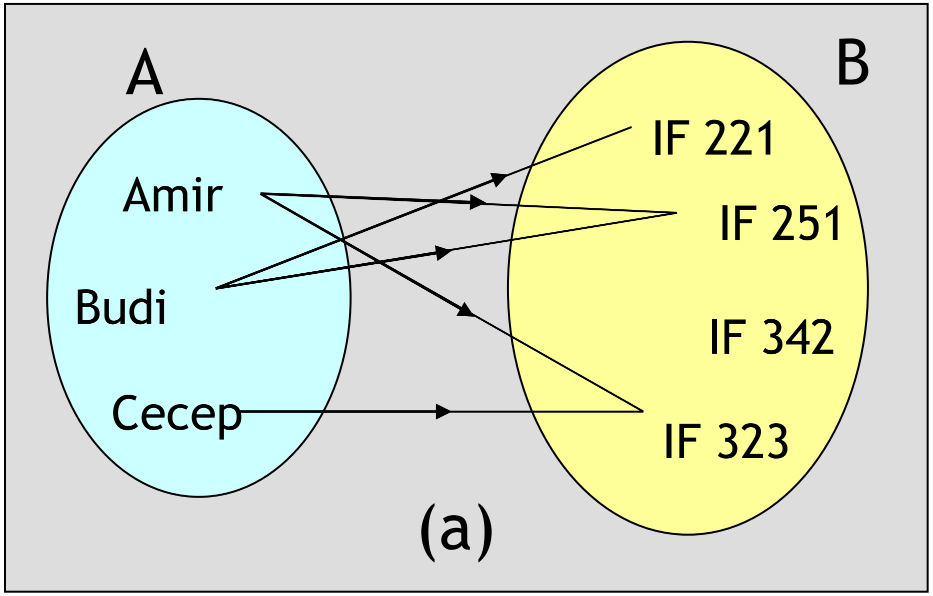
$P(x, y)$ = $x\ habis\ membagi\ y$

Sehingga R = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)}

Untuk menyajikan Relasi R dalam matriks maka,

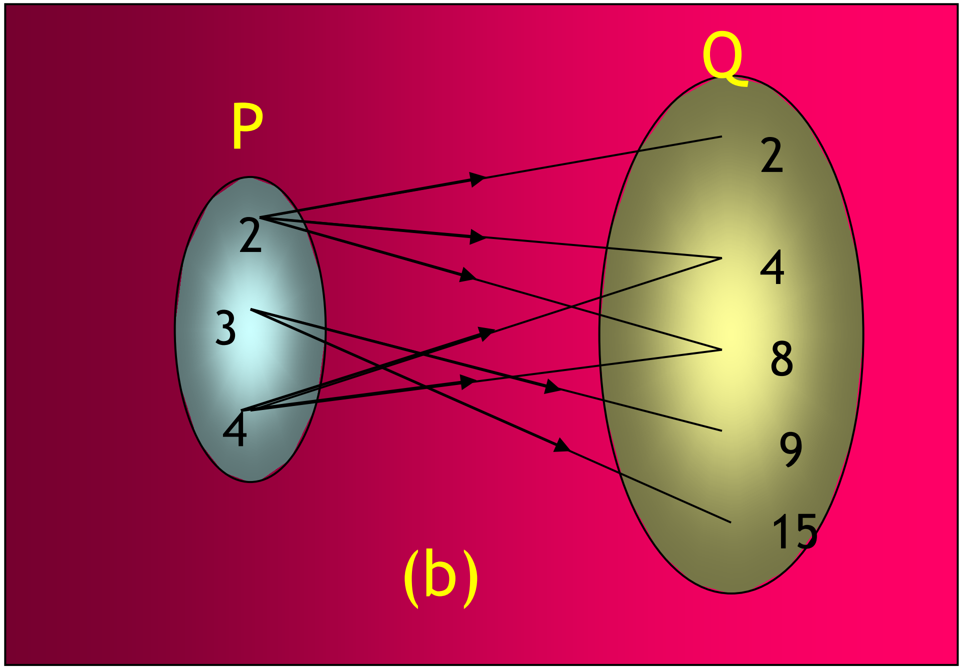
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REPRESENTASI RELASI DENGAN MATRIKS



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

REPRESENTASI RELASI DENGAN MATRIKS



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REPRESENTASI RELASI DENGAN GRAF BERARAH

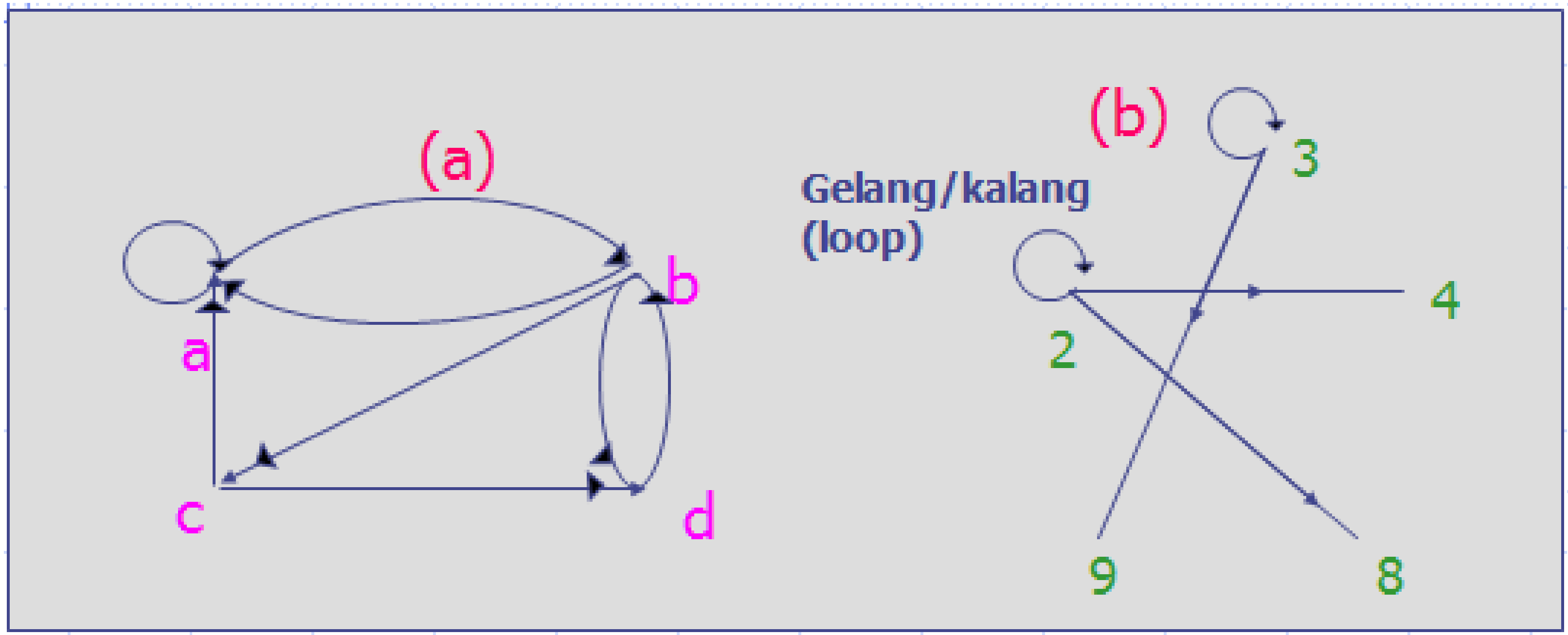
- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (dan disebut juga simpul atau vertex) dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur yang arahnya ditunjukkan dengan sebuah panah.
- Dengan kata lain, jika $(a,b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut simpul asal (*initial vertex*) dan simpul b disebut simpul tujuan (*terminal vertex*).

REPRESENTASI RELASI DENGAN GRAF BERARAH

- Pasangan terurut (a,a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut gelang (loop).
- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener)
- Jika $n = 2$, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basisdata

REPRESENTASI RELASI DENGAN GRAF BERARAH

Contoh 6



(a)Relasi R = {(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,d),(d,b)}

(b)Relasi R = {(2,2),(2,4),(2,8),(3,3),(3,9)}

SIFAT-SIFAT RELASI

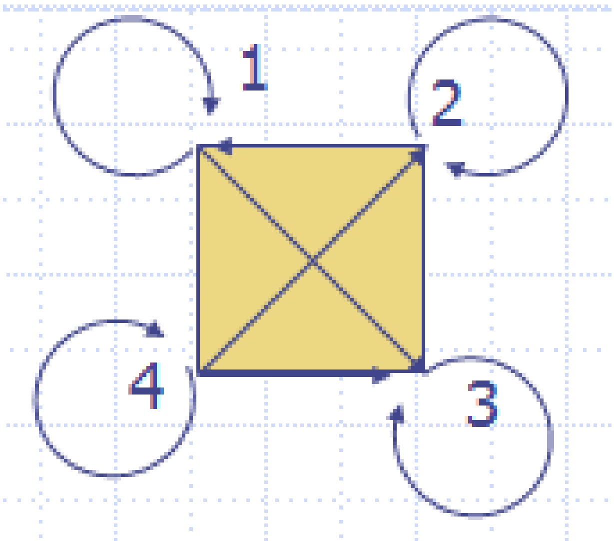
Setelah memahami konsep relasi, anda akan diperkenalkan dengan beberapa sifat dari suatu relasi. Di Buku ini akan dibahas beberapa sifatsifat relasi yaitu Relasi Refleksif, Relasi Transitif, Relasi Simetris, dan relasi anti-Simetris.

- Refleksif *(Reflexive)*
- Menghantar (*transitive*)
- Simetris/setangkup dan
- anti simetris (tolak setangkup)

REFLEKSIF

Definisi :

- Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika $(a,a) \in R$ untuk setiap $a \in A$
- Relasi R pada himpunan A disebut tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a,a) \notin R$



REFLEKSIF

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau m_{ij}=1, untuk i=1,2,…,n sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan dengan adanya gelang pada setiap simpulnya.

REFLEKSIF

Contoh 7

- Misalkan A={1,2,3,4} dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada himpunan A, tentukanlah apakah relasi bersifat refleksif?

a) Relasi R = {(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)}

b) Relasi R = {(1,1),(2,2),(2,3),(4,2),(4,3),(4,4)}

REFLEKSIF

Sifat refleksif memberi beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi, yaitu :

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang unsur diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,
- Relasi yang bersifat refleksif jika disajikan dalam bentuk graf berarah maka pada graf tersebut senantiasa ditemukan loop setiap simpulnya.

$\notin$

MENGHANTAR (TRANSITIVE)

Definisi

- Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, maka $(a,c) \in R$ untuk semua $a,b,c \in A$.

MENGHANTAR (TRANSITIVE)

Contoh 8

Misalkan A = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, dan relasi R didefinisikan oleh :

$a\ R\ b$ jika dan hanya jika a membagi b, dimana a, $b \in A$. Apakah relasi bersifat menghantar?

Jawab

MENGHANTAR (TRANSITIVE)

Contoh 9

Misalkan A={1,2,3,4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

R={(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)} , apakah relasi tersebut bersifat menghantar ?

MENGHANTAR (TRANSITIVE-2)

Contoh 10

Tentukanlah relasi berikut menghantar atau tidak menghantar ?

a. R = {(1,1), (2,3),(2,4),(4,2)}

b. R = {(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}

c. R = {(1,1),(1,2),(1,4), (2,1),(2,2),(3,3),(4,1), (4,4)}

MENGHANTAR (TRANSITIVE-2)

Sifat transitif memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian suatu relasi,yaitu :

- sifat transitif pada graf berarah ditunjukkan oleh jika ada busur dari a ke b dan busur dari b ke c, maka juga terdapat busur berarah dari a ke c.
- pada saat menyajikan suatu relasi transitif dalam bentuk matriks, relasi transitif tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya.

SETANGKUP / SIMETRI

- Suatu relasi *R* pada himpunan *A* disebut **simetris/setangkup** jika $(a,b) \in R$, untuk setiap a,b $\in A$ maka $(b,a) \in R$.

- Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan tidak simetri jika (a, b) ∈ R sementara $(b, a) \notin R$

SETANGKUP / SIMETRI

Sifat simetri memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian berbentuk matriks maupun graf, yaitu

- Relasi yang bersifat simetri mempunyai matriks yang unsur-unsur di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen unsur di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$ adalah :

$$\begin{bmatrix} & 1 & 0 \\ 1 & & 1 \\ 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

SETANGKUP / SIMETRI

- Relasi yang bersifat simetri, jika disajikan dalam bentuk graf berarah mempunyai ciri bahwa jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

ANTI SIMETRIS (TOLAK SETANGKUP)

- Relasi R pada himpunan A disebut **anti simetris/tolak-setangkup** jika $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$ hanya jika $a=b$, untuk semua $a,b \in A$.
- Relasi R pada himpunan A disebut **tidak tolak setangkup** jika ada elemen berbeda yaitu $(a,b) \in R$ sedemikian sehingga $(b,a) \in R$

SETANGKUP /TOLAK SETANGKUP

Contoh 11

Misalkan A={1,2,3,4} dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, Relasi R={(1,1), (1,2),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)}

Apakah relasi tersebut setangkup (simetri) , atau tolak setangkup (anti simetri)?

SETANGKUP DAN TOLAK SETANGKUP

Contoh 12

- Misalkan A={1,2,3,4} dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka apakah relasi bersifat simetri, tolak setangkup?

a. Relasi R = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)} ?

b. Relasi R = {(1,1),(2,3),(2,4),(4,2)} ?

c. Relasi R = {(1,1),(2,2),(3,3)}

d. Relasi R = {(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)}

$\not\in$

MENGKOMBINASIKAN RELASI

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan antara 2 relasi seperti irisan , gabungan, selisih dan beda setangkup atau lebih juga berlaku. Hasil operasi tersebut juga berupa relasi.

- Dengan kata lain jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga relasi dari A ke B.

III.5 MENGKOMBINASIKAN RELASI

Contoh 13

- $A = \{a,b,c\}$ dan $B = \{a,b,c,d\}$.
- Relasi $R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ dan
- Relasi $R_2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d)\}$ adalah relasi dari A ke B

$R1 \cap R2 = \{(a,a)\}$

$R1 \cup R2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(a,d)\}$

$R1 - R2 = \{(b,b),(c,c)\}$

$R2 - R1 = \{(a,b),(a,c),(a,d)\}$

$R1 \oplus R2 = \{(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(a,d)\}$

III.5 MENGKOMBINASIKAN RELASI

- Contoh 14

  Misalkan relasi R1 dan R2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad dan \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  maka matriks yang menyatakan $R_1 \cup R_2$ dan $R_1 \cap R_2$ adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KOMPOSISI RELASI

Definisi

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S , dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan sbb

$S \circ R = \{(a,c) \mid a \in A,\ c \in C$, dan untuk beberapa $b \in B$, $(a,b) \in R$, dan $(b,c) \in S \}$

III.6 KOMPOSISI RELASI

Contoh 15

Misalkan

R={(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)} adalah relasi dari himpunan {1,2,3} ke himpunan {2,4,6,8} dan S={(2,u), (4,s), (4,t), (6,t), (8,u)} adalah relasi dari himpunan {2,4,6,8} ke himpunan {s,t,u}. Tentukanlah R o S dan nyatakan dengan diagram panah /komposisi relasi R dan S adalah :

III.6 KOMPOSISI RELASI

- Contoh 16

Misalkan

$A = \{x,y,z\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $C = \{1,2,3,4,5\}$

R relasi dari A ke B dan S relasi dari B ke C, misalkan : $R = \{(x,a),(x,b),(y,b),(y,c),(y,d),(z,d)\}$

dan $S = \{(a,1),(a,3),(b,2),(b,3),(b,5),(d,3),(d,4)\}$

Maka $R \circ S$ *adalah* …..