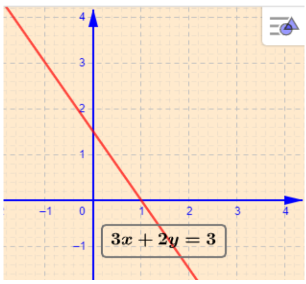
SISTIM PERSAMAAN LINIER

- **Pengantar Sistem Persamaan Linier**
- **Penyelesaian Sistim Persamaan Linier**
  - **Metode Determinan (Aturan Cramer)**
  - **Metode Invers**
  - **Metode Eliminasi**

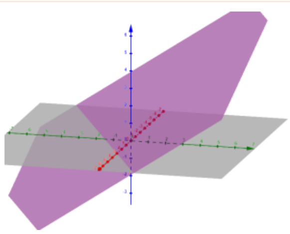
Pengantar Sistem Persamaan Linier

Materi ini berisi uraian tentang pengertian persamaan linier, sistem persamaan linier dalam n peubah, dan solusinya. Setelah mempelajari materi ini, pembaca diharapkan dapat menentukan apakah sebuah sistem persamaan linier mempunyai solusi (konsisten) atau tidak mempunyai solusi) tidak konsisten. Selain itu, beberapa metode penentuan solusi diharapkan dapat membantu dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang berkaitan.

1. Persamaan linier



Grafik 1. Persamaan linier dua peubah



Grafik 2. Persamaan linier tiga peubah

Permasalahan yang melibatkan sistim persamaan linier banyak dijumpai pada bidang biologi, fisika, kimia,

ekonomi, engineering, operation research dan ilmu-ilmu sosial. Sistim persamaan linier merupakan himpunan persamaan-persamaan linier.

Sebuah persamaan yang berbentuk:

$ax + by = c; a, b \neq 0$

dengan a, b dan c adalah bilangan riil disebut persamaan

linier dua peubah. Persamaan linier dua peubah merupakan sebuah garis lurus.

Persamaan linier yang berbentuk:

$$ax + by + cz = d$$

dengan $a, b, c \neq 0$ disebut persamaan linier tiga peubah. Grafik dari persamaan linier tiga peubah merupakan sebuah bidang.

Persamaan linier dalam 2 atau 3 peubah cukup dinyatakan dalam x, y atau z saja. Sedangkan persamaan linier dalam n peubah biasanya dinyatakan dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Berikut ini diberikan definisi persamaan linier dalam n peubah.

a_1 dan x_1 masing-masing disebut koefisien utama (leading coefficient) dan peubah utama (leading variabel); $x_2, x_3, \dots, x_n$ disebut **parameter**

Definisi persamaan linier. Persamaan yang berbentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

dengan

- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dan b adalah bilangan riil,
- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ konstanta tidak diketahui, disebut persamaan linier dalam n peubah.

Peubah utama pada sebuah persamaan linier adalah peubah dengan koefisien tak nol pertama pada sebuah persamaan. Sebagai contoh, peubah x pada persamaan

$$5\boldsymbol{x} + y - 4z + 7w = 4$$

merupakan peubah utama, sedangkan peubah y, z dan w merupakan ***peubah bebas*** atau ***parameter***.

Sebuah persamaan linier tidak memiliki suku-suku berbentuk perkalian antar peubah, pangkat atau akar peubah, serta tidak melibatkan peubah sebagai argumen dari fungsi trigonometri, logaritma atau eksponen.

Contoh 1. Persamaan linier

a. $2x - 3y + 4z = 5$
b. $\ln 4\, x + 2y + 4z - w = 0$
c. $x - \sin 3\pi\, y + e^7 z = 1$
d. $7t - \tan 5\, u + v + 2w = -4$

Contoh 2. Persamaan non linier

a. $x + y - 2\sin z = 7$
b. $xz + 5y - w = 3$
c. $-e^x + 10y + 2z = -1$
d. $2x + \ln y - 4y = 0$

Solusi dan Himpunan Solusi

Suatu solusi dari sebuah persamaan linier n peubah adalah sebuah barisan bilangan riil $s_1, s_2, \dots, s_n$ sedemikian sehingga substitusi

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$$

memenuhi persamaan linier. Solusi ini disebut **solusi khusus** dan ditulis dalam notasi vektor baris $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ atau vektor kolom $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$.

Himpunan semua solusi yang memenuhi sebuah persamaan linier disebut **solusi umum**. Solusi umum dari sebuah persamaan linier biasanya dinyatakan dalam persamaan parameter .

Contoh 3. Solusi persamaan linier

Tentukan solusi dari persamaan linier

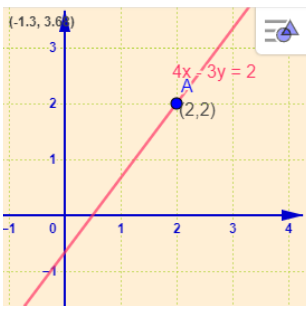
$$4x - 3y = 2$$

Penyelesaian

Solusi persamaan linier diperoleh dengan terlebih dahulu menuliskan suku utama (suku perkalian antara koefisien utama dan peubah utama) pada ruas sebelah kiri dan suku-suku lain pada ruas sebelah kanan sebagai berikut:

$$4x = 3y + 2$$

Untuk $y = 2$, maka nilai $x = 2$ memenuhi persamaan linier, dan untuk $y = 0$, maka $x = \frac{1}{2}$ memenuhi persamaan linier. Dalam hal ini, $x = 2$ dan $y = 2$ merupakan solusi dari persamaan linier. Demikian juga $x = \frac{1}{2}$ dan $y = 0$. Jadi pasangan titik $(2,2)$, dan $(\frac{1}{2}, 0)$ merupakan solusi khusus dari persamaan linier.



Gambar 3. Solusi persamaan linier

Secara umum jika dipilih nilai $y = t$ dengan t bilangan riil, maka $x = \frac{1}{4}(3t + 2)$ memenuhi persamaan. Jadi solusi dari persamaan linier adalah:

$$x = \frac{1}{4}(3t + 2), \qquad y = t, \quad t \in R.$$

Dalam hal ini t disebut parameter. Himpunan semua solusi yang dinyatakan dalam t inilah yang disebut **persamaan parameter** atau **bentuk parameter** atau disebut juga **solusi umum**.

Contoh 4. Persamaan parameter dari himpunan solusi

Selesaikan persamaan linier berikut ini:

$$x - 3y + 5z - w = 2$$

Penyelesaian

Dengan menetapkan y, z dan w sebagai peubah bebas (parameter) dan x sebagai peubah utama, maka persaman dapat ditulis kembali menjadi:

$$x = 2 + 3y - 5z + w.$$

Misalkan $y = r, z = s$ dan $w = t$ maka diperoleh solusi dalam persamaan parameter sebagai berikut:

$$x = 2 + 3r - 5s + t, \qquad y = r, \qquad z = s, \qquad w = t$$

dengan r, s, t adalah bilangan riil sebarang. Solusi ini dapat juga ditulis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 3r - 5s + t \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Sistem Persamaan linier

Sistem persamaan linier atau disingkat persamaan linier adalah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier. Sistim linier yang terdiri dari m persamaan dengan

n peubah mempunyai bentuk umum sebagaimana dinyatakan di bawah ini.

Index ij menyatakan bahwa a_{ij} adalah koefisien dari peubah x_j pada baris ke i

Sistim persamaan linier. Sistim m persamaan linier dalam n peubah mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \ldots \ (1)$$

Sistim persamaan linier (1) dikatakan homogen jika

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$$

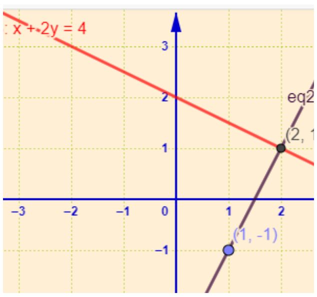
Solusi dari sebuah sistem linier n peubah adalah barisan bilangan riil $s_1, s_2, \ldots, s_n$ yang merupakan solusi dari setiap persamaan pada sistim linier.

Contoh 5. Solusi Sistem Persamaan Linier

Sistim persamaan

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

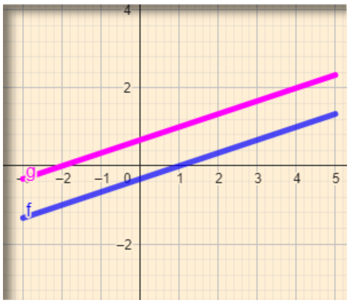
mempunyai pasangan titik $(x, y) = (2,1)$ sebagai solusi karena pasangan titik ini merupakan solusi pada kedua persamaan sistim linier. Tetapi pasangan titik $(1, -1)$ bukan solusi karena titik tersebut bukan solusi persamaan kedua meskipun merupakan solusi untuk persamaan pertama. Posisi kedua titik dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Solusi dan bukan solusi

Tidak semua sistem persamaan linier mempunyai solusi. Sebagai contoh, jika persamaan ke dua dari sistem persamaan linier

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}$$



Gambar 4. Grafik garis sejajar

di kalikan dengan -1, maka sistem persamaan linier menjadi

$$x - 3y = \quad 1$$
$$x - 3y = -2$$

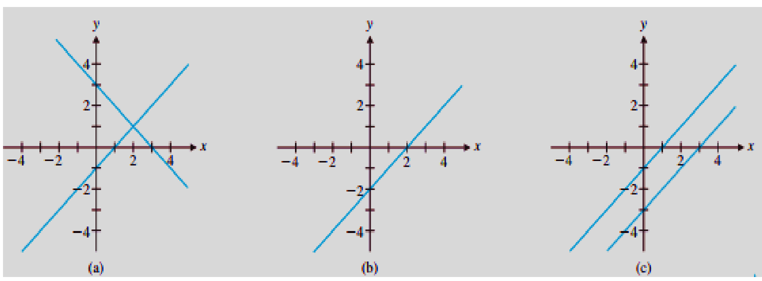
Sistem persamaan linier tersebut tidak konsisten, dan secara geometri kedua persamaan merupakan garis lurus yang sejajar dan tidak berpotongan.

Sistem persaamaan linier yang tidak mempunyai solusi dikatakan **tidak konsisten** (inconsistent). Sedangkan sistem linier yang mempunyai paling sedikit satu solusi dikatakan **konsisten** (concistent).

Untuk menggambarkan berbagai kemungkinan yang dapat terjadi pada penyelesaian sistem persamaan linier, pandang sistem persamaan linier berikut ini:

$$a_1x - b_1y = c_1 \qquad (a_1 \neq 0, \text{atau } b_1 \neq 0)$$
$$a_2x - b_2y = c_2 \qquad (a_2 \neq 0, \text{atau } b_2 \neq 0)$$

Grafik dari persamaan-persamaan tersebut masing-masing merupakan garis lurus, sebut l_1 dan l_2. Karena titik (x, y) terletak pada kedua garis jika x dan y memenuhi persamaan linier, maka solusi dari sistem persamaan adalah perpotongan antara garis l_1 dan l_2. Ada tiga kemungkinan yang dapat terjadi, sebagaimana diperlihatan pada gambar berikut:



Gambar 5. Posisi dua garis lurus

a. Kemungkinan pertama, terdapat tepat satu titik perpotongan antara kedua garis. Titik perpotongan ini menjadi solusi dari sistim persamaan linier. Dalam kasus ini sistim persamaan linier mempunyai *tepat satu solusi* (konsisten).

b. Pada gambar b, kedua garis berimpit sehingga setiap titik yang terletak pada garis pertama akan terletak pada garis kedua. Hal ini berarti bahwa setiap titik yang memenuhi persamaan pertama akan memenuhi persamaan kedua. Jadi setiap solusi persamaan pertama akan menjadi solusi persamaan kedua. Pada keadaan seperti sistim ini persamaan linier mempunyai *tak hingga banyak solusi* (konsisten).

c. Gambar c memperlihatkan kedua garis sejajar dan titik memilik perpotongan. Jadi tidak terdapat titik yang menjadi solusi untuk setiap persamaan pada sistim linier. Dalam hal ini sistim persamaan linier *tidak mempunyai solusi* (tidak konsisten).

Untuk sistim persamaan linier tiga peubah,

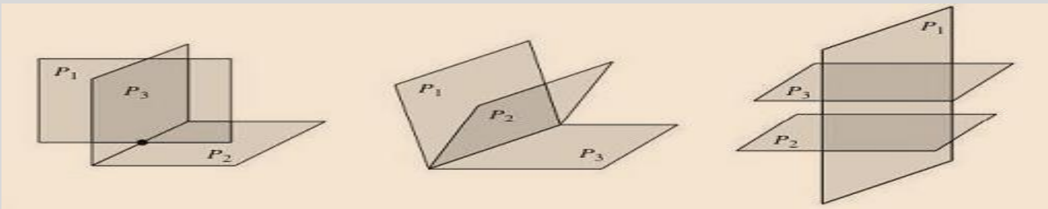
$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \ = d_1$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \ = d_2$$
$$a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 += d_3$$

setiap persamaan merupakan bidang datar di R^3. Misalkan bidang-bidang tersebut dilambangkan dengan P_1, P_2 dan P_3. Keadaan yang mungkin terjadi adalah ketiganya berpotongan tepat di satu titik (memiliki tepat satu solusi), berpotongan di tak hingga banyak titik (memiliki tak hingga banyak solusi), atau ketiganya tidak memiliki titik perpotongan (tidak memiliki solusi). Ilustrasi diperlihatkan Gambar 6.

Secara umum terdapat tiga kemungkinan solusi dari sebuah sistim persamaan linier sistem.

Solusi Sistim persamaan linier. Sebuah sistim persamaan linier memiliki tepat satu dari tiga kemungkinan solusi berikut ini:

- Solusi tepat satu (konsisten)
- Solusi tak hingga banyak (konsisten)
- Tidak ada solusi (tidak konsisten)



a. Solusi tepat satu b. Solusi tak hingga banyak c. Tidak ada solusi

Gambar 6. Posisi tiga bidang datar

Persamaan linier homogen merupakan persamaan linier yang konsisten, karena nol selalu merupakan solusi dari setiap persamaan linier homogen. Solusi nol disebut solusi trivial, dan solusi tak nol disebut solusi tak trivial. Jika terdapat solusi tak trivial, maka sistim linier homogen mempunyai tak hingga banyak solusi

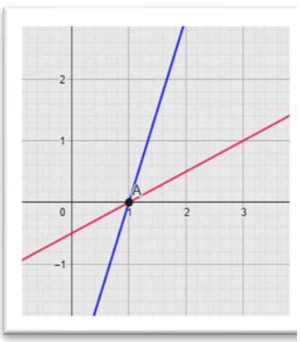
Contoh 6. Sistem linier satu solusi

Selesaikan sistim persamaan linier berikut ini:

$$3x + y = 3$$

$$x - 2y = 1$$

Penyelesaian



Gambar 7.

Persamaan kedua dari sistim persamaan dapat dituliskan sebagai

$$x = 1 + 2y.$$

Hasil tersebut disubstitusikan ke persamaan pertama, menjadi:

$$3(1 + 2y) + y = 3$$

atau

$$y = 0.$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan $y = 0$ ke salah satu dari dua persamaan linier diperoleh $x = 1$, sehingga solusi dari sistim linier adalah

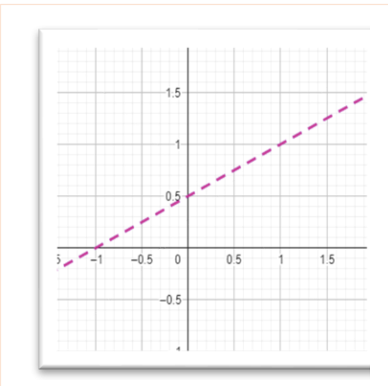
$$x = 1, y = 0.$$

Solusi ini merupakan titik potong kedua garis yang merepresantikan kedua persamaan linier. Tampak pada Gambar 7, titik (1,0) merupakan perpotongan kedua garis lurus yang dimaksud

Contoh 6. Sistem linier dengan tak hingga banyak solusi

Selesaikan sistim persamaan linier berikut ini:

$$2x - 4y = -2$$
$$-x + 2y = \ 1$$



Penyelesaian

Dengan mengalikan persamaan kedua dengan -2 akan diperoleh persamaan pertama, demikian juga mengalikan persamaan pertama dengan dengan $-\frac{1}{2}$ akan menghasilkan persamaan kedua. Jadi persamaan pertama dan kedua saling berkelipatan, sehingga solusi sistim persamaan linier cukup menggunakan salah satu persamaan saja. Misalkan menggunakan persamaan kedua. Dengan mengambil $y = t$ sebagai parameter maka akan diperoleh

$$x = 2t - 1.$$

Jadi solusi dari sistem persamaan linier adalah:

$$x = 2t - 1, \ \ y = t, \qquad t \in R.$$

Karena terdapat tak hingga banyak nilai t yang mungkin, maka sistem persamaan linier memiliki solusi tak hingga banyak.

3. Notasi Matriks

Misalkan diberikan sebuah sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Sistem persamaan linier di atas dapat ditulis ke dalam persamaan bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Atau penulisan singkat

$$Ax = b$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} ;\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks A selanjutnya disebut **matriks koefisien** dari sistim linier, $\boldsymbol{x}$ vektor peubah dan **b** sebagai **suku konstan**.

Matriks $[A \vdots \mathbf{b}]$ yang dibentuk dari matriks A dengan menambahkan matriks **b** pada kolom terakhir disebut ***matriks diperbesar*** (augmented matrix) dari sistem persamaan linier.

Contoh 7. Matriks Diperbesar

Matriks diperbesar yang bersesuaian dengan sistim persamaan linier dibawah ini

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Sistim Persamaan linier

Sistim persamaan linier dapat diselesaikan dengan menggunakan beberapa metode. Metode penyelesaian yang akan diuraikan di sini adalah:

1. Metode DeterminanMatriks
2. Metode Invers Matriks
3. Metode Gauss
4. Metode Gauss Jordan

Keempat metode tersebut pada dasarnya adalah mencari solusi untuk setiap persamaan yang ada pada sebuah sistim persamaan. Karena sistim persamaan bisa konsisten atau bisa tidak konsisten, maka beberapa sifat determinan akan sangat membantu dalam mempersingkat pengerjaan. Beberapa sifat dasar yang perlu diketahui dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema 1. Misalkan A matriks bujur sangkar. Pernyataan berikut ekuivalen:

1. A mempunyai invers
2. Sistim persamaan linier $Ax = b$ mempunyai tepat satu solusi untuk setiap b.
3. Sistim linier homogen $Ax = 0$ hanya mempunyai solusi trivial
4. $\det A \neq 0$

a. Metode Determinan

Metode determinan dikenal juga sebagai metode Cramer, setelah Gabriel Cramer (1704-1752) menggunakan determinan untuk menyelesaikan sistim n persamaan linier dengan n peubah. Aturan ini hanya berlaku untuk sistim persamaan linier dengan solusi tunggal. Untuk mengilustrasikan bagaimana aturan Cramer ini bekerja, pandang sistim linier 2 persamaan dengan 2 peubah sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

atau dalam matriks $Ax = b$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Jika $det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12.}a_{21} \neq 0$, maka sistim linier mempunyai tepat satu solusi (solusi tunggal).

Solusi untuk x_1 diperoleh dengan mengeliminasi peubah x_2 terlebih dahulu, dan hasilnya adalah:

$$x_1 = \frac{b_1.a_{22} - b_2.a_{12}}{a_{11}.a_{22} - a_{12.}a_{21}}.$$

Sebaliknya, dengan mengeliminasi peubah x_1, diperoleh solusi untuk x_2 sebagai berikut:

$$x_2 = \frac{b_2.a_{11} - b_1.a_{21}}{a_{11}.a_{22} - a_{12.}a_{21}}.$$

Pembilang dan penyebut pada solusi untuk $x_1$dan x_2 dapat ditulis sebagai determinan matriks $2x2$ sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \; a_{11}.a_{22} - a_{12.}a_{21} \neq 0$$

Penyebut untuk x_1 dan x_2 merupakan determinan matriks koefisien A pada sistim linier. Pembilang pada x_1 merupakan determinan matriks yang dibentuk dengan mengganti kolom pertama (koefisien x_1) dengan suku konstan **b,** demikian pula pembilang pada x_2 merupakan determinan matriks yang dibentuk dengan mengganti kolom kedua (koefisien x_2) dengan suku konstan **b.**

Untuk mempersingkat penulisan, solusi untuk x_1 dan x_2 ditulis:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \qquad |A| \neq 0,$$

Dengan

$$|A_1| = \begin{bmatrix} \color{red}{b_1} & a_{12} \\ \color{red}{b_2} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} a_{11} & \color{red}{b_1} \\ a_{21} & \color{red}{b_2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Metode penyelesaian sistim linier dengan solusi dalam bentuk determinan ini disebut **aturan Cramer**.

Aturan Cramer berlaku untuk sistim linier $Ax = b$ dengan A matriks bujur sangkar sebarang. Generalisasi dari aturan ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema Aturan Cramer. Misalkan $Ax = b$ adalah sistim linier n persamaan dengan n peubah. Jika $\det(A) \neq 0$ maka terdapat tepat satu solusi $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

dengan

- $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1,2, \dots, n$
- $|A_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \color{red}{\mathbf{b_1}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \color{red}{\dots} & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \color{red}{\mathbf{b_n}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Kolom ke-i

Contoh 8. Aturan Cramer untuk sistim linier tiga persamaan dengan tiga peubah

Tentukan solusi dari sistim linier di bawah ini:

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad &= \ \ 7 \\ -x_1 + 3x_2 - \ x_3 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

Penyelesaian

Persamaan matriks untuk sistem linier di atas adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determinan dari matriks koefisien adalah:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

Karena $\det A \neq 0$ maka sistim linier mempunyai tepat solusi, dan dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-21}{-21} = 1,$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-42}{-21} = 2, \text{dan}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-63}{-21} = 3.$$

b. Metode Invers

Metode invers atau inversi merupakan metode penyelesaian sebuah sistim persamaan linier $Ax = b$ untuk A berukuran nxn. Berdasarkan Teorema 1, 'A *mempunyai invers*' dan '*determinan* A *tidak nol*' merupakan dua pernyataan yang ekuivalen. Jadi apabila A mempunyai invers maka determinan A tidak nol, sehingga sistim persamaan linier mempunyai solusi tepat satu. Penegasan mengenai hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 2. Jika A berukuran nxn dan mempunyai invers, maka sistim persamaan linier $Ax = b$ mempunyai tepat satu solusi, yaitu $x = A^{-1}b$

Bukti

Diketahui A^{-1} ada.

Karena $Ax = A(A^{-1}b) = AA^{-1}b = Ib = b$, maka $x = A^{-1}b$ adalah solusi dari sistim linier $Ax = b$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A^{-1}b$ merupakan solusi satu-satunya.

Misalkan y adalah solusi yang lain, maka $Ay = b$. Karena $Ax = b$ maka

$$Ay = b = Ax, \text{ atau}$$

$$Ay = Ax.$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kiri diperoleh:

$$y = x \quad \text{atau} \quad y = A^{-1}\text{ b}.$$

Jadi solusi sistim linier $Ax = b$ bersifat tunggal dengan $x = A^{-1}$ b ♦

Contoh 9. Metode inverse untuk solusi sistim persamaan linier.

Pandang sistim persamaan linier $Ax = b$ pada Contoh 8. Karena $\det A \neq 0$ maka A^{-1} ada. Dengan menggunakan metode yang telah di uraikan pada pembahasan tentang inverse matriks, diperoleh inverse A yaitu

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{3}{21} & \frac{3}{21} & \frac{6}{21} \\ -\frac{11}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 2, solusi sistim linier adalah:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{3}{21} & \frac{3}{21} & \frac{6}{21} \\ -\frac{11}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c. Metode Eliminasi

Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam mencari penyelesaian Sistem Persmaan linier. Salah satu metode yang dimaksud adalah Metode Eliminasi. Dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linir, metode eliminasi bisa digunakan tanpa dikombinasikan dengan metode lain. Namun demikian, metode eliminasi dapat juga dikombinasikan dengan metode lain untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem persamaan linier. Dalam subbab ini, akan dibahas cara kerja metode eliminasi yang dikombinasikan dengan metode subtitusi dalam mencari penyelesaian sisstem persamaan linier

Dibanding dengan metode yang lain, metode eliminasi memiliki beberapa kelebihan. Metode eliminasi dapat digunakan mencari solusi peneyelesaian sistem persamaan linier dengan segala macam ukuran. Selain dari itu, metode eliminasi tidak bergantung pada deteminan matriks koefisien sistem persamaan linier. Lebih jauh, metode eliminasi dapat memberikan informasi tentang keberadaan solusi sistem persamaan linear. Seperti diketahui, ada tiga keadaan keberadaan penyelesaian sistem persamaan linear, yaitu:

i. Sistem persamaan linear tidak mempunyai penyelesaian.
ii. Sistem persamaan linear mempunyai satu penyelesaian saja.
iii. Sistem persamaan linear mempunyai banyak penyelesaian (tak berhingga banyaknya penyelesaian)

Ketiga jenis penyelesaian sistem persamaan linear tersebut akan dibahas setelah pembahasan cara kerja metode eliminasi.

Dalam menjalankan metode eliminasi, ada beberapa pengertian atau istilah yang digunakan. Isitilah yang biasa digunakan dalam metode eliminasi, diantaranya adalah istilah matriks eselon baris dan istilah satu utama. Istilah-istilah ini diharapkan sudah dipahami dengan baik oleh pembaca. Selain dari istilah tersebut, hal yang penting lainnya yang dibutuhkan adalah operasi dasar baris pada matriks. Sekedar mengingatkan kembali, ada tiga jenis operasi dasar baris yang dikenakan pada matriks. Ketiga operasi dasar baris tersebut adalah sebagai berikut:

a. Menukarkan dua baris.

Pada subpokok bahasan, operasi dasar baris ini disimbol dengan $B_i \leftrightarrow B_j$. Pengertian simbol ini adalah baris “i” ditukar dengan baris “j”. Jadi, baris “i” pada matriks yang lama akan menempati baris “j” pada matriks yang baru.

Begitu pula, baris “j” matriks yag lama akan menempati baris “i” matriks yang baru.

b. Mengalikan satu baris matriks dengan bilangan yang bukan nol.

Pada subpokok bahasan, operasi dasar baris ini disimbol dengan $(k)B_i \rightarrow B_i$. Pengertian simbol ini adalah baris “i” matriks yang lama dikalikan dengan bilangan k. Selanjtnya, hasil perkalian antara baris “i” dengan bilangan k ditempatkan pada baris “i” matriks yang baru. Jadi, baris i pada matriks yang baru adalah $(k)B_i$.

c. Menambahkan satu baris dengan hasil perkalian bilangan k dan baris yang lain.

Pada subpokok bahasan, operasi dasar baris ini disimbol dengan $(k)B_i + B_j \rightarrow B_j$. Pengertian simbol ini adalah baris “i” matriks yang lama dikalikan dengan bilangan k. Selanjtnya, hasil perkalian antara baris “i” dengan bilangan k ditambahkan ke baris “j” matriks yang lama. Selanjutnya, hasil penambahan ini ditempatkan pada baris “j “ matriks yang baru. Jadi, baris “j” pada matriks yang baru adalah $(k)B_i + B_j$.

Misalkan sistem persamaan linear yang akan dicari penyelesaiannya adalah:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{gathered}
$$

Untuk menjalankan metode eliminasi, penulisan sistem persamaan linear diatas dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan serangkaian eliminasi yang menggunakan operasi dasar baris terhadap matriks tersebut. Proses eliminasi (rangkaian operasi dasar baris) dilakukan sampai mencapai matriks yang berbentuk matriks eselon baris. Selanjutya, matriks yang sudah berbentuk eselon baris ditulis kembali menjadi sistem persamaan linier dalam bentuk aslinya. Dari sistem persamaan linear bentuk asli inilah solusi sistem persamaan linear dicari dengan metode subtitusi balik. Cara kerja metode eliminasi disajikan pada beberapa contoh berikut.

Contoh

Carilah penyelesaian sistem persmaan linear

$$4x + y = 5$$

$$x - 2y = -1$$

Penyelesaian:

Langkah pertama, mengubah penulisan sistem persamaan linier menjadi bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Langkah selanjutnya, melakukan eliminasi dengan serangkaian operasi dasar baris.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)B_2 + B_1 \to B_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)B_1 + B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 7 & 8\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/_9)B_2 \to B_2} \begin{pmatrix}1 & 7 & 8\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Proses eliminasi (operasi dasar baris) selesai sampai disini karena matriks $\begin{pmatrix}1 & 7 & 8\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ sudah berbentuk eselon baris.

Selanjutnya matriks $\begin{pmatrix}1 & 7 & 8\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ditulis dalam menjadi sistem persamaan linear dalam bentuk asli:

$$x + 7y = 8$$

$$0x + y = 1.$$

Dari sistem persamaan linear asli ditentukan solusi dengan subtitusi balik. Dari baris ke 2 sistem persamaan diperoleh:

$$0x + y = 1 \text{ atau diperoleh } y = 1.$$

Nilai $y = 1$ disubtitusi ke persamaan pertama, diperoleh:

$x + 7y = 8$ menjadi $x + 7(1) = 8$, sehingga $= 8 - 7 = 1$.

Jadi diperoleh $x = 1$. Dengan demikian diperoleh solusi $x = 1$ dan $y = 1$.

Berikut diberikan contoh sistem persamaan linear dengan 3 variabel dan 3 persamaan

Contoh

$$x + y + z = 1$$

$$3x - y - 2z = 2$$

$$5x + 6y + 4z = 3$$

Penyelesaian:

Langkah pertama, sistem persamaan linier ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Langkah selanjutnya, melakukan eliminasi dengan serangkaian operasi dasar baris.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)B_1+B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-5)B_1+B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)B_3+B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)B_2+B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/9)B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proses eliminasi dengan operasi dasar baris berhenti disini karena matriks $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sudah berbentuk eselon baris.

Selanjutnya matriks $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ diubah menjadi sistem persamaan linear dalam bentuk asli:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 0x + y - 10z &= -11 \\ 0x + 0y + z &= 1 \end{aligned}$$

Dari sistem persamaan linear asli yang terakhir dicari solusi dengan subtitusi balik:

Dari baris ketiga sistem persamaan diperoleh:

$0x + 0y + z = 1$ atau diperoleh $z = 1$.

Nilai $z = 1$ disubtitusi ke persamaan kedua, diperoleh:

$0x + y - 10z = -11$ menjadi $0x + y - 10(1) = -11$, sehingga $y = -11 + 10 = -1$.

Jadi, $y = -1$. Nilai $y = -1$ dan $z = 1$ disubtitusi ke persamaan pertama, diperoleh:

$x + y + z = 1$ menjadi $x + (-1) + (1) = 1$.

Jadi diperoleh $x = 1$. Dengan demikian diperoleh penyelesaian $x = 1$, $y = -1$, dan $z = 1$.

Sebelum pembahasan penentuan penyelesaian sistem persamaan linear dijelaskan lebih jauh, terlebih dahulu disajikan ciri-ciri sistem persamaan linear yang tidak mempunyai solusi, yang mempunyai solusi tunggal, dan yang mempunyai solusi banyak.

Misalkan sistem persamaan linear sudah dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Seperti yang diuraikan di atas, langkah selanjutnya dari metode eliminasi adalah mengolah matriks ini (dengan melakukan serangkaian operasi dasar baris) menjadi matriks eselon baris:

Misalkan matriks eselon baris disimbolkan dengan EB

$$EB = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Keadaan penyelesaian sistem persamaan liniear dapat diketahui dari ciri-ciri yang ada pada matriks EB. Cara mengenali sebagai berikut:

(i) Apabila pada matriks EB ada satu baris yang semua unsur-unsurnya adalah angka 0 kecuali angka pada kolom terakhir tidak nol, maka sistem persamaan linier tidak mempunyai penyelesaian.

Misalnya $EB = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Jika EB tampak seperti di atas maka sistem persamaan linear tidak mempunyai penyelesaian.

(ii) Apabila pada matriks EB, banyaknya baris yang tidak nol sama dengan banyaknya kolom dikurangi satu, maka sistem persamaan linear mempunyai satu penyelesaian saja.

Misalnya EB = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pada matriks EB di atas, banyaknya baris tidak nol adalah 3 sama dengan banyaknya kolom dikurangi satu. Oleh karena itu, penyelesaian dari sistem persamaan linear hanya ada satu. Caar menentukan penyelesaiaanya akan ditunjukkan pada contoh.

(iii) Apabila pada matriks EB, banyaknya baris tidak nol lebih sedikit dari banyaknya kolom dikurangi satu, maka sistem persamaan linier mempunyai penyelesaian banyak (takberhigga).

Misalnya EB = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pada matriks EB di atas, banyaknya baris tidak nol adalah 2 lebih sedikit dari banyaknya kolom dikurangi satu. Oleh karena itu, penyelesaian sistem persamaan linier ada banyak (takberhingga).

Berikut disajikan contoh-contoh yang akan memperjelas ciri-ciri keberadaan solusi sistem persamaan linier.

Contoh

Periksalah apakah system persamaan linier berikut mempunyai penyelesaian

$$x + 3y = 5$$

$$3x + 9y = 6.$$

Penyelesaian:

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan linier di atas ditulis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi dasar baris, matriks tersebut diubah menjadi matriks eselon baris sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)B_1+B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Jadi diperoleh matriks eselon baris:

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa pada matriks EB terdapat baris yang semua unsurnya nol kecuali yang ada pada kolom terakhir tidak nol. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa sistem persamaan linier tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh

Periksalah apakah system persamaan linier berikut mempunyai penyelesaian

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

Penyelesaian:

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan linier di atas ditulis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi dasar baris, matriks tersebut diubah menjadi matriks eselon baris sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)B_1+B_2\to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)B_1+B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Jadi diperoleh matriks eselon baris:

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa pada matriks EB terdapat baris yang semua unsurnya nol kecuali yang ada pada kolom terakhir tidak nol. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa sistem persamaan linier tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian system persamaan linier berikut

$$x - 2y = 4$$

$$-x + y = -1.$$

Penyelesaian:

Dalam bentuk matriks sistem persamaan linier di atas ditulis:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi dasar baris, matriks tersebut diubah menjadi matriks eselon baris sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_1+B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Jadi diperoleh matriks eselon baris:

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa pada matriks EB banyaknya baris yang tidak nol sama dengan banyaknya kolom dikurangi satu. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa solusi persamaan linier hanya ada satu. Selanjutnya, untuk memperoleh solusi sistem persamaan linier, dicari dari matriks

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matriks EB ini diterjemahkan kembali menjadi sistem persamaan linier sebagai berikut.

$$x - 2y = 4$$

$$0x + y = -3.$$

Setelah bentuknya menjadi sistem persamaan linier biasa, dilakukan subtitusi balik (subtitusi mulai dari persamaan yang paling bawah, dan dilanjutkan sampai persamaan paling atas).

Dari baris kedua sistem persamaan linier diperoleh $y = -3$. Selanjutnya, nilai $y = -3$ disubtitusi ke persamaan pertama, diperoleh:

$$x - 2y = 4$$

$$x - 2(-3) = 4$$

$$x = 4 - 6 = -2.$$

Dengan demikian, diperoleh penyelesaian $x = -2$ dan $y = -3$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian system persamaan linier berikut

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -4$$

Penyelesaian:

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan linier ditulis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Langkah selanjutnya, melakukan eliminasi dengan serangkaian operasi dasar baris.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)B_1 + B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)B_1 + B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & -5 & 5 & 5\\0 & -7 & 4 & -2\\1 & -1 & -1 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)B_1+B_4 \to B_4} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & -5 & 5 & 5\\0 & -7 & 4 & -2\\0 & -4 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & -5 & 5 & 5\\0 & -7 & 4 & -2\\0 & -4 & 0 & -8\end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/_5)B_2 \to B_2} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & -7 & 4 & -2\\0 & -4 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & -7 & 4 & -2\\0 & -4 & 0 & -8\end{pmatrix} \xrightarrow{(7)B_2+B_3 \to B_3} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & -3 & -9\\0 & -4 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & -3 & -9\\0 & -4 & 0 & -8\end{pmatrix} \xrightarrow{(4)B_2+B_4 \to B_4} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & -3 & -9\\0 & 0 & -4 & -12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & -3 & -9\\0 & 0 & -4 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/_3)B_3 \to B_3} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & -4 & -12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & -4 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow{(4)B_3+B_4 \to B_4} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Jadi diperoleh matriks eselon baris:

$$EB = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa pada matriks EB banyaknya baris yang tidak nol sama dengan banyaknya kolom dikurangi satu. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa penyelesaian sistem persamaan linier hanya ada satu. Selanjutnya, untuk memperoleh solusi sistem persamaan linier, dicari dari matriks;

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriks EB ini diterjemahkan kembali menjadi sistem persamaan linier sebagai berikut.

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$

$$0x_1 + x_2 - x_3 = -1$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 3$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Dari baris ketiga sistem persamaan linier diperoleh $x_3 = 3$. Selanjutnya, nilai $x_3 = 3$ disubtitusi ke persamaan kedua, diperoleh:

$$0x_1 + x_2 - x_3 = -1$$
$$0x_1 + x_2 - (3) = -1$$
$$0x_1 + x_2 = -1 + 3$$
$$x_2 = 2.$$

Diperoleh $x_2 = 2$. Selanjutnya, nilai $x_2 = 2$ dan $x_3 = 3$ disubtitusikan ke persamaan pertama, diperoleh:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$
$$x_1 + 3(2) - (3) = 4$$
$$x_1 + 3 = 4$$
$$x_1 = 4 - 3 = 1.$$

Dengan demikian, diperoleh penyelesaian $x_1 = 1, x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian system persamaan linier berikut

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = -46.$$

Penyelesaian:

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan linier di atas ditulis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -46 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi dasar baris, matriks tersebut diubah menjadi matriks eselon baris sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -46 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)B_1 + B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -15 \\ -1 & 3 & -1 & -46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -15 \\ -1 & 3 & -1 & -46 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_1 + B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 4 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 4 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 4 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 4 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-4)B_2 + B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi diperoleh matriks eselon baris:

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa pada matriks EB, banyaknya baris tidak nol lebih sedikit dari banyaknya kolom dikurangi satu. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa sistem persamaan linier mempunyai penyelesaian yang banyak. Cara menunjukkan bahwa penyelesaian ada banyak (talberhingga) adalah sebagai berikut:

Pada matriks EB ada dua angka "1" yang disebut dengan satu utama, yaitu angka satu yang berada pada baris satu kolom satu dan angka "1" yang berada pada baris dua kolom dua. Angka satu yang lainnya bukan satu utama. Karena satu utama berada pada kolom satu dan kolom dua, berarti koom tiga tidak terkait dengan satu utama. Oleh karena itu, variable yang terkait dengan kolom tiga, yaitu x_3, bebas ditentukan nilainya. Dalam pengertian Matematika, kata bebas ditentukan nilainya bisa diartikan diberi nilai simbol atau huruf. Jadi, misalkan variable x_3 diberi nilai huruf "a" atau $x_3 = a$. Selanjutnya, apabila matrik EB ditulis dalam bentuk persamaan linier asli, akan tampak seperti:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 15.$$

Dari baris kedua diperoleh nilai $x_2 = 15$. Selanjutnya nilai $x_3 = a$ dan $x_2 = 15$ disubtitusi masuk kedalam persamaan pertama, diperoleh

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 15 + a = 6$$

$$x_1 = -a - 9.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian $x_1 = -a - 9$, $x_2 = 15$, dan $x_3 = a$. Huruf a yang ada pada penyelesaian menandakan bahwa penyelesaian ada banyak (takberhingga). Hal ini dikarenakan, huruf a dapat diganti dengan angak apa saja dan nilai variable yang diperoleh merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linier. Misalkan huruf a diganti "1" atau huruf $a = 1$, maka diperoleh penyelesaian $x_1 = -10$, $x_2 = 15$, dan $x_3 = 1$. Jika huruf a diganti "2" atau huruf $a = 2$, maka diperoleh penyelesaian $x_1 = -11$, $x_2 = 15$, dan $x_3 = 2$. Hal seperti ini dapat dilakukan seterusnya.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 16x_4 = 0$$

Penyelesaian :

Dalam bentuk matriks sistem persamaan linear dapat ditulis :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan serangkaian operasi baris pada matriks diatas diperoleh matriks eselon baris sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 16 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_1+B_2\to B_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)B_1+B_3\to B_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2B_1+B_4\to B_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)B_2\to B_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)B_2+B_3\to B_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{6B_2+B_4\to B_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, diperoleh matriks eselon baris

$$EB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pada matriks EB diatas terdapat 2 unsur “1” utama, yaitu unsur 1 pada baris 1 kolom 1 dan unsur 1 pada baris 2 kolom 3. Dengan demikian, kolom 2 dan kolom 4 tidak terkait dengan unsur “1” utama. Oleh karena itu, variabel x_2 dan variabel x_4 tidak terkait dengan unsur “1” utama. Karena variabel x_2 dan x_4 tidak terkait dengan unsur “1” utama, maka variabel x_2 dan x_4 diberi nilai huruf. Misalkan $x_2 = a$ dan $x_4 = b$.

Apabila matriks EB diatas diterjemahkan menjadi sistem persamaan linear homogen bentuk asli diperoleh

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

Selanjutnya nilai $x_2 = a$ dan $x_4 = b$ (sudah diberikan diatas) disubstitusi pada persamaan diatas. Nilai $x_4 = b$ disubstitusi pada persamaan kedua diperoleh

$$x_3 - 3x_4 = 0$$

$$x_3 - 3b = 0$$

$$x_3 = 3b$$

Selanjutnya nilai $x_2 = a$, $x_3 = 3b$, $x_4 = b$ disubstitusi ke persamaan pertama, diperoleh

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - 2a - 2(3b) + b = 0$$

$$x_1 = 2a + 5b$$

Jadi, solusi sistem persamaan linear adalah $x_1 = 2a + 5b$, $x_2 = a$, $x_3 = 3b$, $x_4 = b$. Jika solusi ini ditulis dalam satu kesatuan diperoleh

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 5b \\ a \\ 3b \\ b \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, penulisan huruf "a" dan "b" dapat dipisah menjadi :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 5b \\ a \\ 3b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5b \\ 0 \\ 3b \\ b \end{pmatrix}$$

atau bisa ditulis dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, himpunan solusi sistem persamaan liniear adalah

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

SOAL LATIHAN

……………………………………………………..

1. Tentukan penyelesaian system persamaan linier berikut:

$$-4x - y = -3$$

$$2x - y = 3$$

2. Tentukan penyelesaian system persamaan linier berikut:

$$4x - y = 3$$

$$-2x + y = -1$$

$$4x + y = 5$$

3. Tentukan penyelesaian system persamaan linier berikut. Coab bandingkan penyelesaiannya dengan hasil penyelesaian sola nomr 2. Jelaskan menagpa demikian.

$$4x + y = 5$$

$$4x - y = 3$$

$$-2x + y = -1$$

4. Tentukan penyelesaian system persamaan liier berikut:

$$4x - 2y = 3$$

$$-2x - 3y = 2$$

$$6x + y = 4$$

5. Tentukan satu nilai untuk “a” yang ada pada sistem persamaan liier berikut agar penyelesaian sistem persamaan linier hanya ada satu.

$$4x - 2y = 3$$

$$-6x - 9y = \mathrm{a}$$

$$6x + y = 4$$

6. Tentukan satu nilai untuk “a” dan satu niali untuk “b” yang ada pada sistem persamaan linier berikut agar penyelesaian sistem persamaan linier hanya ada satu.

$$2x - by = 3$$

$$-6x - 9y = \mathrm{a}$$

$$6x + y = 4$$

7. Tentukan penyelesaian sistem persamaan linier

$$2x + 2y + 2z = 2$$

$$-3x + y + 2z = -2$$

$$5x + 6y + 4z = 3$$

8. Perhatikan sistem persamaan linier pada nomor 7 diatas. Gantilah satu persamaan yang ada pada sistem persamaan linier pada nomor 7 agar sistem persamaan linier yang baru (tetap tiga persamaan) tidak mempunyai penyelesaian. Tunjukkan cara eliminasinya.

9. Perhatikan sistem persamaan linier pada nomor 7 diatas. Gantilah satu persamaan yang ada pada sistem persamaan linier pada nomor 7 dengan persamaan yang berbeda dari ketiga persamaan yang ada, agar sistem persamaan linier yang baru (tetap tiga persamaan) mempunyai penyelesaian banyak (takberhingga). Tunjukkan cara eliminasinya.

10. Perhatikan sistem persamaan linier pada nomor 7 diatas. Tambhakan satu persamaan yang ada pada sistem persamaan linier pada nomor 7 dengan persamaan yang berbeda dari ketiga persamaan yang ada, agar sistem persamaan linier yang baru (ada empat persamaan) mempunyai penyelesaian satu saja. Tunjukkan cara eliminasinya.

11. Diberikan sistem persamaan linier dibawah ini. Proses pencarian penyelesaian sitem persamaan linier sudah diakukan. Namun demikian, proses penyelesaian belum selesai. Silahkan dilanjutkan untuk mendapatkan penyelesaian.

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -4$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3$$

Penyelesaian:

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan linier di atas ditulis:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi dasar baris, matriks tersebut diubah menjadi matriks eselon baris sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_2+B_1 \to B_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_1+B_2 \to B_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)B_1+B_3 \to B_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)B_1+B_4 \to B_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$