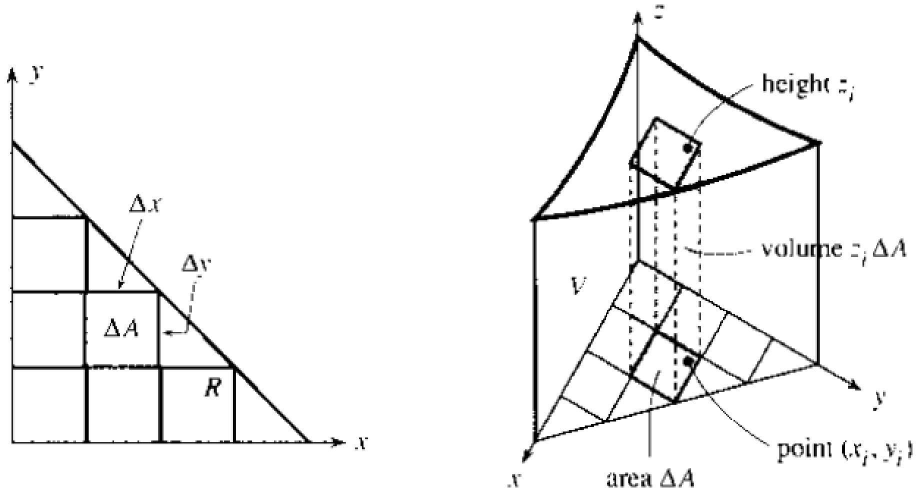
BAB V

INTEGRAL LIPAT

5.1. DEFINISI INTEGRAL LIPAT DUA



gambar 5.1 Luasan di bawah permukaan $\boldsymbol{f(x,y)}$

Pada Matematika Dasar I telah dipelajari integral tertentu $\int_a^b f(x)\,dx$ yang dapat didefinisikan, apabila $f(x)$ terdefinisi pada interval [*a*,*b*]. Demikian juga integral lipat dua: $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ akan didefinisikan dengan terlebih dahulu menganggap $f(x,y)$ terdefinisi pada daerah <u>tertutup</u> dan <u>terbatas</u> *R* di bidang *xy*.

Untuk mempermudah pemahaman integral lipat dua, Pandanglah *R* daerah tertutup dan terbatas di bidang *xy*, dan misalkan $f(x,y)$ suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada daerah *R*, lihat gambar 5.1.

Daerah *R* dipartisi menjadi *n* sub daerah yaitu dengan menarik garis-garis lurus yang sejajar sumbu koordinat sehingga membentuk *n* buah poligon dengan sisi-sisi Δx_i dan Δy_i dengan *i* = 1, 2, . . ., *n*. Luas sub daerah ke-*i* adalah $\Delta A_i = \Delta x_i \times \Delta y_i$ untuk *i*=1,2, …, *n*. Misalkan (x_i, y_i) suatu titik sebarang yang dipilih dalam sub daerah ke-i sehingga dengan ketinggian $f(x_i, y_i)$ terbentuk bangun berdimensi tinggi dengan volumenya adalah $f(x_i, y_i) \times \Delta A_i$, sebagaimana terlihat dalam gambar 5.1. Selanjutnya dibentuk jumlahan $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$. Jika partisi dapat dibuat sebanyak mungkin $(n \to \infty)$ sehingga luasan untuk setiap partisi makin kecil, atau $\Delta A_i \to 0$.

Jika limit jumlahan di atas ada, maka bentuk integral lipat dua atas fungsi permukaan $f(x,y)$ pada luasan R di bidang *xy* dapat dinyatakan sebagai limit jumlahan tersebut.

Definisi 5.1

Misalkan *R* suatu daerah tertutup dan terbatas pada bidang *xy*. Jika *f*(*x*,*y*) adalah sebuah fungsi dua peubah yang terdefinisi pada *R*, maka integral lipat dua *f* pada *R* dinyatakan

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i \,.$$

Perhatikan bahwa bentuk $\iint_R f(x,y)dA$ dapat ditulis pula dengan bentuk $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ atau $\iint_R f(x,y)dydx$.

Sifat-sifat Integral Lipat Dua:

(i). $\iint C\, f(x,y)dxdy = C\iint_R f(x,y)dx\,dy$ dengan C adalah konstanta

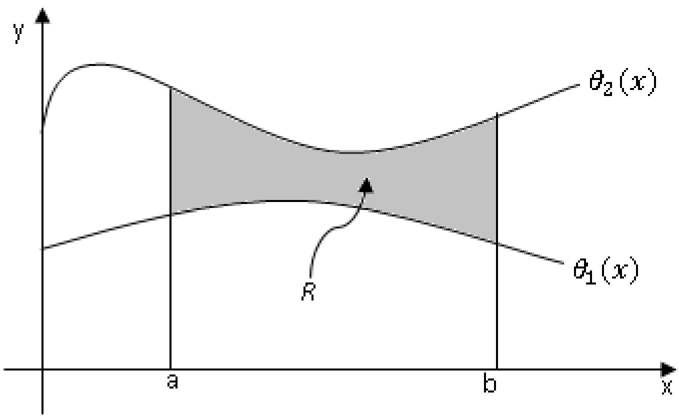
(ii). $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$ asalkan f dan g fungsi-fungsi yang terintegral pada R.

(iii). Jika R dapat dipartisi menjadi R_1 dan R_2 maka :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Pada umumnya menghitung integral Lipat Dua dengan menggunakan definisi di atas, biasanya sangat sukar menentukan nilainya. Teorema dasar kalkulus dapat membantu kita menghitung integral lipat dua dengan cara melakukan integral secara berulang sebagai berikut: suatu fungsi dua peubah diintegralkan pertama kali terhadap salah satu peubahnya dengan menganggap peubah yang lain sebagai konstanta, kemudian hasilnya diintegralkan terhadap peubah yang satunya lagi.

Dalam hal ini ada dua jenis daerah R yang biasa dijumpai :



gambar 5.2 Contoh daerah pengintegralan jenis I

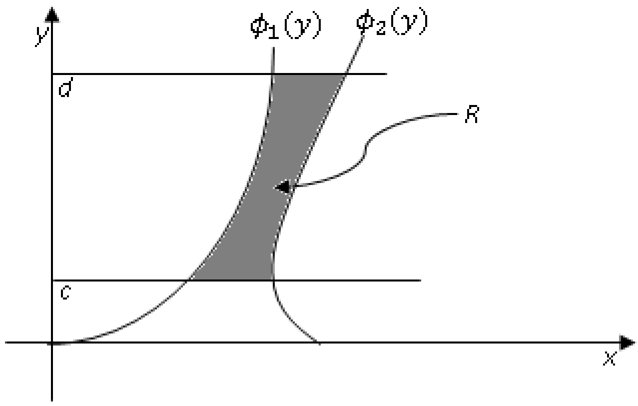
(1). **Daerah jenis I**: Jika R daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy yang dibatasi oleh kurva-kurva mulus $y = \theta_1(x)$ dan $y = \theta_2(x)$, dengan $\theta_1(x) \le \theta_2(x)$ untuk semua $x \in [a, b]$, atau $R = \{(x, y)\ |a \le x \le b, \theta_1(x) \le y \le \theta_2(x)\}$, perhatikan daerah yang diarsir pada gambar 5.2 yang dibatasi oleh dua kurva dan dua garis tegak.

maka :

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dydx = \int_a^b \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(x,y)dy \right\} dx$$

Integral dalam kurung diselesaikan lebih dahulu terhadap y (dengan menganggap x konstan), kemudian hasilnya diintegralkan terhadap x dari a ke b. Hal inilah yang dimaksud integral berulang.

(2) **Daerah Jenis II**: Jika R daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy yang dibatasi garis-garis $y = c, y = d$ dan dibatasi kurva-kurva mulus $\phi_1(y)$ dan $\phi_2(y)$ dimana $\phi_1(y) \le \phi_2(y)$ untuk nilai-nilai $y \in [c, d]$. Daerah R dapat dinyatakan sebagai $R = \{(x, y)\colon\ c \le y \le d, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$. Sebagai contoh ilustrasi daerah R dapat diperlihatkan oleh gambar 5.3.



gambar 5.3 Contoh daerah pengintegralan jenis II

Dengan cara serupa, mengintegralkan suatu fungsi f atas daerah jenis II seperti gambar 5.3 adalah mengintegralkan terlebih dahulu terhadap x, kemudian hasilnya diintegralkan lagi terhadap y. Bentuknya dapat dinyatakan seperti berikut:

$$\iint_R f(x,y)dAv = \iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x,y)dx\right\} dy.$$

Contoh 5.1

Hitung Integral lipat $\int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2+y^2)\, dydx$.

Penyelesaian

$$\int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2+y^2)dydx = \int_1^2 \left\{\int_1^{x^2} (x^2+y^2)dy\right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_1^{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^4 - x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{21} - \frac{x}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1006}{105}.$$

Contoh 5.2

Hitung $\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3}\, dx\, dy$

Penyelesaian:

$$\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3} dxdy = \int_1^3 \left\{\int_{-y}^{2y} xe^{y^3} dx\right\} dy$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{1}{2}x^2 e^{y^3}\right]_{-y}^{2y} dy = \int_1^3 \frac{3}{2}\, y^2 e^{y^3}\, dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{y^3}\right]_1^3 = \frac{(e^{27} - e)}{2}.$$

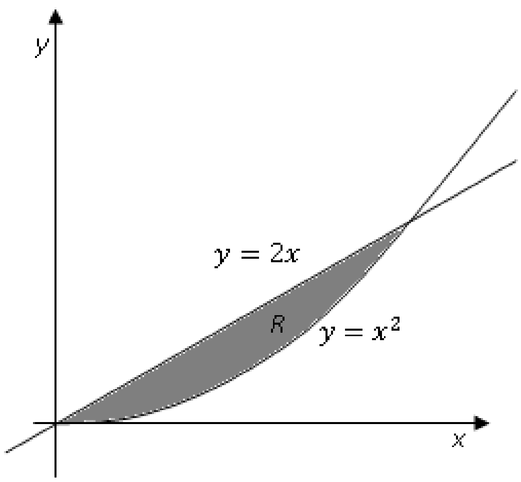
Perhatikanlah bahwa integral lipat pada kedua contoh di atas dihitung sebagai integral berulang. pengintegralan pertama dilakukan terhadap batas-batas fungsi yang sesuai dengan daerah jenis pengintegralannya dan integral yang terakhir memiliki batas-batas konstanta.

Ketika kita menghitung integral lipat seperti dalam contoh, sering kali membantu apabila kita dapat menggambarkan daerah pengintegralannya. Sehingga kita dapat memutuskan apakah kita akan mengerjakan integral lipat itu dengan menggunakan daerah jenis I ataukah jenis II.

Contoh 5.3

Carilah volume benda pejal yang terletak di bawah paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan di atas daerah R di bidang xy yang dibatasi oleh garis $y = 2x$ serta parabola$y = x^2$.

Sebelum kita menyelesaikan kita perhatikan bentuk daerah R di bidang xy seperti terlihat pada gambar 4.



gambar 5.4 *R* sebagai daerah jenis I

Penyelesaian:

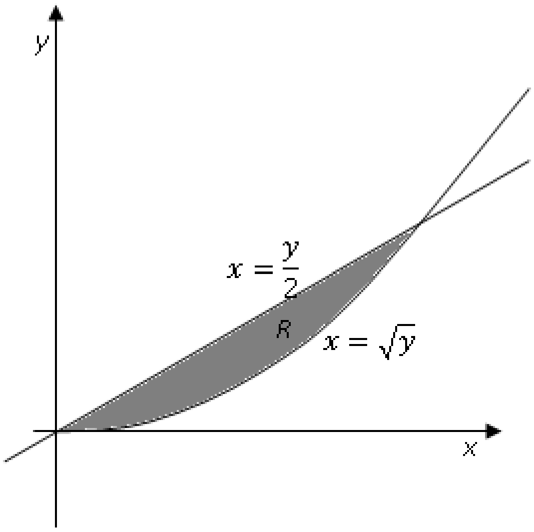
Dari gambar 5.4 kita lihat bahwa R adalah jenis I dan $R = \{(x,y)\colon\ 0 \le x \le 2,\ \ x^2 \le y \le 2x\}$. Volume di bawah $z = x^2 + y^2$ dan di atas R adalah

$$V = \iint_R (x^2+y^2)dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dydx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right)dx$$

$$= -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\Big]_0^2 = \frac{216}{35}.$$

Daerah pengintegralan yang sama dapat pula dipandang sebagai daerah jenis II, sebagaimana diperlihatkan pada gambar 5.5.



gambar 5.5. R sebagai daerah jenis II

Dari gambar 5, kita juga dapat menyatakan bahwa R dapat dituliskan sebagai daerah jenis II, yaitu $R = \left\{(x,y)\colon\ 0 \le y \le 4,\ \frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y}\right\}$. Karena itu ekspresi yang lain untuk volume bendanya adalah:

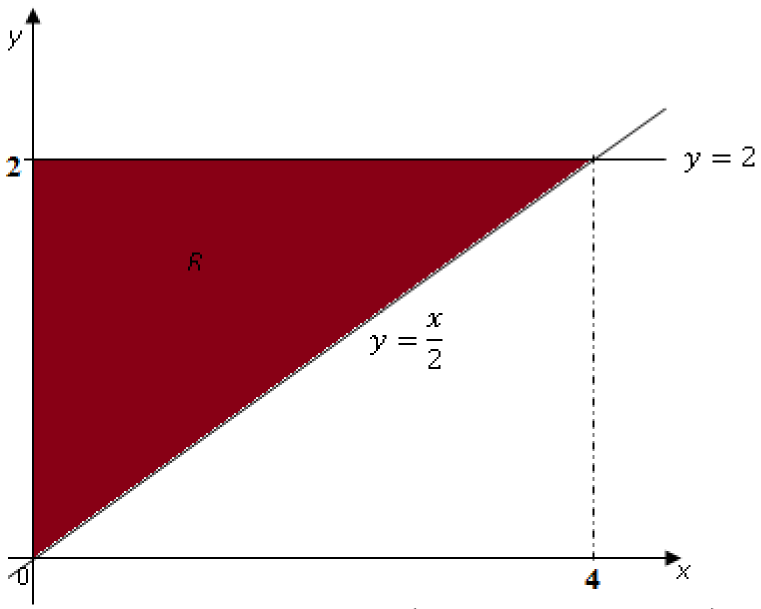
$$V = \iint_R (x^2+y^2)dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy$$

$$= -\frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4\Big]_0^4 = \frac{216}{35}.$$

5.2. MENGUBAH URUTAN PENGINTEGRALAN

Kadang-kadang dalam menghitung integral lipat dua, integral sebelah dalam tidak dapat dihitung sebagaimana adanya, hal ini dimungkinkan oleh fakta bahwa fungsi yang akan diintegralkan tersebut tidak mempunyai anti turunan elementer. Jika hal ini terjadi, maka untuk menghitung integralnya terlebih dahulu harus diubah urutan pengintegralannya. Perlu juga diketahui bahwa pada saat urutan pengintegralan diubah, maka batas pengintegralan juga berubah tapi daerah pengintegralannya tetap, lihat contoh 5.3 dan contoh 5.4 yang daerah pengintegralan sama tapi urutan pengintegralannya berbeda.



gambar 5.6. Daerah pengintegralan $\boldsymbol{R} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \frac{\boldsymbol{x}}{2} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{2}, \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{4}\right\}$

Contoh 5.5

Hitung $\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\, dy\, dx$.

Penyelesaian:

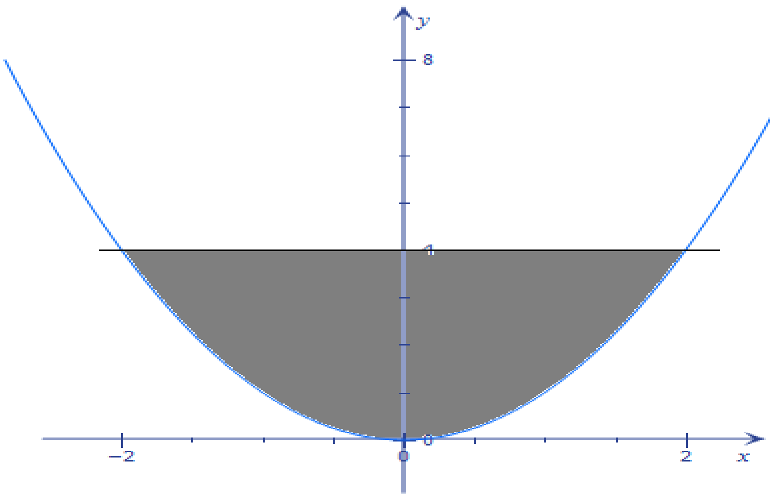
Integral bagian dalam, yaitu $\int e^{y^2}\, dy$ tidak dapat dihitung dengan cara-cara yang telah kita pelajari sebelumnya. Sehingga urutan pengintegralan diubah, yaitu kita akan mengubah urutan pengintegralan. Daerah pengintegralannya adalah $R = \left\{(x,y) : \frac{x}{2} \le y \le 2, 0 \le x \le 4\right\}$ merupakan daerah jenis I, perhatikan gambar 5.6 di atas.

Perubahan urutan pengintegralan, berarti orientasi pengintegralan, batas-batas konstan adalah di sumbu y, yaitu $0 \le y \le 2$. Sedangkan batas-batas fungsi x terhadap y adalah garis $x = 2y$ dan garis $x = 0$. Sehingga dengan perubahan urutan pengintegralannya diperoleh:

$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 x e^{y^2}\Big]_{x=0}^{x=2y} dy = \int_0^2 2y e^{y^2}\, dy = e^4 - 1.$$

Contoh 5.6

Tentukan batas-batas integral dari $\iint_A f(x,y)\, dxdy$ bila A adalah daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = 4$, sebagaimana pada gambar 5.7.



gambar 5.7 Daerah A yang dibatasi oleh $\boldsymbol{y = x^2}$ dan $\boldsymbol{y = 4}$

Penyelesaian:

Tentu saja akan jauh lebih mudah permasalahan ini jika kita mencari batas-batas integral dengan menggunakan daerah jenis I. Namun operasi integral harus dilakukan terhadap x dahulu kemudian terhadap y, maka dari gambar 5.7 diperoleh batas-batas integralnya adalah $x = -\sqrt{y}$ sampai dengan $x = \sqrt{y}$, dan $y = 0$ dan $y = 4$. Jadi bentuk integralnya adalah:

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Bentuk integral di atas tidak selalu mudah diselesaikan tergantung jenis fungsinya. Salah satu cara adalah mencari urutan integral yang lain dan lebih mudah untuk diselesaikan. Mengubah urutan integral pada daerah integral akan menuntut penataan batas-batas integral yang sesuai pula.

Contoh 5.7

Dari contoh 5.6, tentukan batas-batas integralnya bila integralnya menjadi $\iint_A f(x,y)\, dy\, dx$.

Penyelesaian:

Karena operasi integral harus dilakukan terhadap y dahulu, kemudian terhadap x, maka diperoleh batas-batasnya adalah $y = x^2$ sampai $y = 4$ dan batas x diperoleh dari perpotongan parabola $y = x^2$ dan garis $y = 4$, yaitu $x = -2$ sampai $x = 2$. Jadi integralnya menjadi:

$$\iint_A f(x,y) dydx = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} f(x,y) dydx.$$

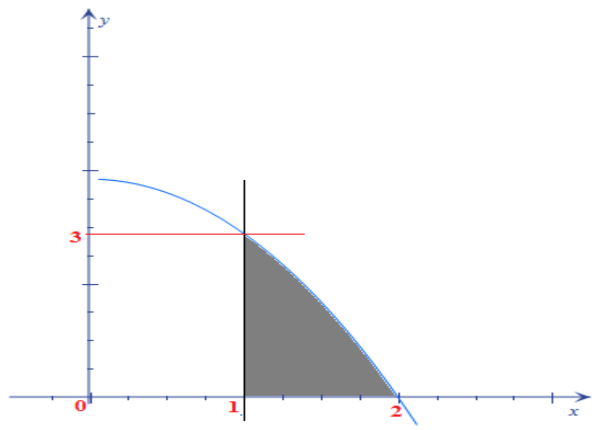
Contoh 5.8

Diketahui: $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dxdy$.

a. Sketsa daerah integrasinya
b. Ubahlah urutan integrasinya
c. Hitung integralnya

Penyelesaian:

a.



gambar 5.8. Sketsa daerah integrasi adalah daerah yang diarsir

Perhatikan batas-batas integralnya, untuk y dibatasi oleh $y = 0$ dan $y = 3$, dan untuk x dibatasi oleh dua fungsi terhadap y, yaitu $x = 1$ dan $x = \sqrt{4-y}$. Sketsa daerah pengintegralannya ditunjukkan oleh gambar 8.

b. Pertama, mengambil x konstan dan y fungsi terhadap x. Dari sketsa daerah integrasi gambar 8, menunjukkan batas x adalah $x = 1$ dan $x = 2$. Sedangkan batas y adalah kurva $y = 4 - x^2$ dan $y = 0$.

Jadi diperoleh bentuk integralnya adalah:

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{4-x^2} (x+y)\,dy\,dx.$$

c. Perhitungan integralnya adalah:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)\,dx\,dy &= \int_1^2 \int_0^{4-x^2} (x+y)\,dy\,dx.\\ &= \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x^2} dx\\ &= \int_1^2 4x - x^3 + 8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4\,dx\\ &= \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\right]_1^2\\ &= \frac{241}{60}.\end{aligned}$$

Pada contoh berikut diberikan penggunaan sifat integral iii, yang membagi daerah integrasinya dengan dua daerah partisi.

Contoh 5.9

Hitung $\iint_R x^2\, dA$ di mana R adalah daerah yang dibatasi oleh hiperbola $xy = 16$, garis $y = x$, garis $y = 0$ dan $x = 8$.

Penyelesaian:

Daerah R dapat dilihat pada daerah yang diarsir di gambar 9. Untuk menghitung integralnya, R dibagi oleh garis $x = 4$ menjadi dua daerah R_1 dan R_2.

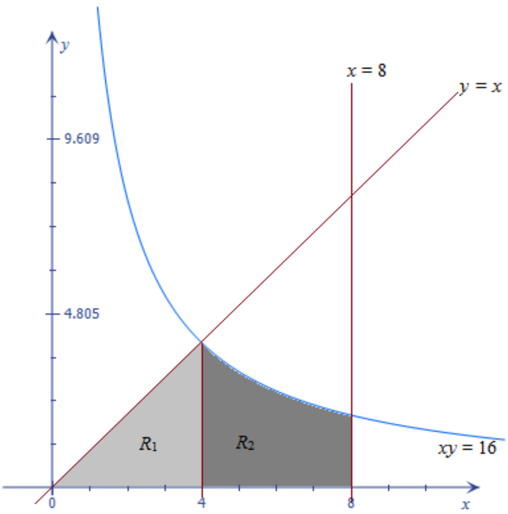
Jadi menurut sifat iii dan daerah jenis I, diperoleh:

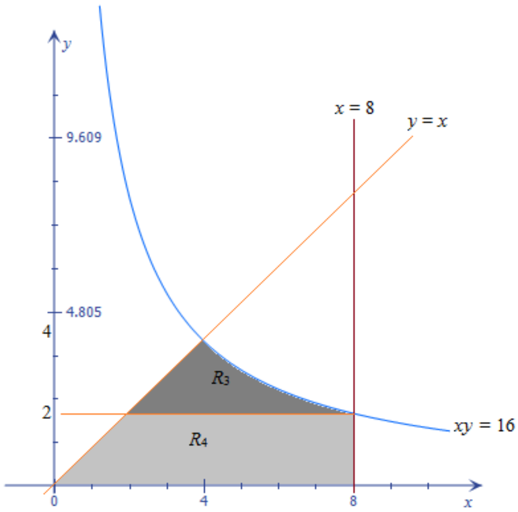
$$\iint_R x^2 dA = \iint_{R_1} x^2\, dA + \iint_{R_2} x^2\, dA$$

$$= \int_0^4 \int_0^x x^2\, dy\, dx + \int_4^8 \int_0^{\frac{16}{x}} x^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 x^3\, dx + \int_4^8 16x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4\Big]_0^4 + \; 8x^2\Big]_4^8 \; = 64 + 384 = 448.$$





gambar 5.9 Daerah R yang dipartisi dengan dua cara, sejajar sumbu y dan sejajar sumbu x

Daerah R juga dapat dibagi menjadi R_3 dan R_4 oleh garis $y = 2$ seperti pada gambar 5.9. Sehingga kita dapat menghitung integralnya sesuai Daerah jenis II.

$$\iint_R x^2 dA = \iint_{R_3} x^2\, dA + \iint_4 x^2\, dA$$

$$= \int_2^4 \int_y^{\frac{16}{y}} x^2\, dx\, dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2\, dx\, dy$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{3}\left(\left(\frac{16}{y}\right)^3 - y^3\right) dy + \int_0^2 \frac{1}{3}(8^3 - y^3)\, dx$$

$$= \left[-\frac{16^3}{6y^2} - \frac{y^4}{12}\right]_2^4 + \left[\frac{8^3}{3}y - \frac{y^4}{12}\right]_0^2$$

$$= 128 - 20 + 340 = 448.$$

5.3. INTEGRAL LIPAT DUA DALAM KOORDINAT POLAR

Kurva-kurva tertentu pada bidang, seperti lingkaran, ellips dan kardioid, lebih mudah diuraikan dalam bentuk koordinat polar (kutub) daripada dalam koordinat kartesian. Jadi diharapkan integral lipat dua atas daerah yang seperti itu akan lebih mudah dikerjakan dengan menggunakan koordinat polar. Sebagai pengantar untuk membahas integral lipat dua dengan koordinat kutub terlebih dahulu ditinjau transformasi koordinat dari kartesian ke kutub.

Pada integral satu peubah seringkali perubahan variabel membuat integral menjadi lebih mudah dikerjakan. Misalkan $\int x\, e^{x^2} dx$ ditulis dalam variabel $u = x^2$. Hal yang sama dapat dilakukan dalam integral lipat. Misalkan kita memiliki bentuk integral lipat dua

$$V = \iint_R f(x, y)\, dxdy,$$

yang akan dihitung dengan menggunakan variabel u dan v yang dinyatakan dalam persamaan $x = m(u,v)$ dan $y = n(u,v)$. Definisikan suatu fungsi $J(u,v)$ yang disebut determinan Jacobi,

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \times \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Maka integral lipat dua dalam koordinat baru tersebut adalah

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R'} f(m(u,v), n(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv.$$

Misalkan sebuah titik (x,y) dalam koordinat kartesian dinyatakan dalam koordinat polar (r,θ) dengan transformasinya $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ di mana $r \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sehingga determinan jacobinya adalah

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Maka integral lipat $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ dapat ditulis dalam koordinat polar menjadi:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$$

Contoh 5.10

Hitunglah $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ dalam koordinat polar, jika R merupakan cakram berjari-jari a.

Penyelesaian:

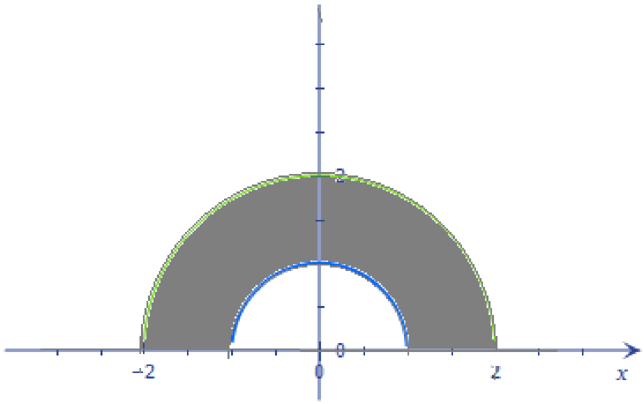
Cakram berjari-jari a memberikan daerah pengintegralan berupa lingkaran yang dibuat oleh sebuah garis dari pusat koordinat $r = 0$ sampai $r = a$, kemudian garis tersebut diputar berlawanan jarum jam sebesar 2π $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Dengan transformasi koordinat polar $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, maka $x^2 + y^2 = r^2$. Sehingga dalam koordinat polar, integralnya menjadi

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{R'} e^{-r^2}\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-r^2}\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^a d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{a^2}\right)\theta\Big]_0^{2\pi} = \pi\left(1 - e^{a^2}\right).$$



gambar 5.10. Daerah R yang berupa setengah cincin

Contoh 5.11

Hitunglah $\iint_R (3x + 4y)dA$, dengan R adalah daerah di setengah bidang atas yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.

Penyelesaian:

Daerah R dapat dideskripsikan sebagai $R = \{(x, y)\colon\ y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Daerah ini adalah setengah cincin yang diperlihatkan pada gambar 5.10, dan dalam koordinat polar diberikan oleh $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Maka

$$\iint_R (3x + 4y)dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[r^3\cos\theta + \frac{4}{3}r^3\sin\theta\right]_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left(7\cos\theta + \frac{28}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$$= \left[7\sin\theta - \frac{28}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{56}{3}.$$

5.4. APLIKASI INTEGRAL LIPAT DUA

Beberapa contoh dan soal pada pembahasan sebelumnya telah memberikan kita penerapan integral lipat dua, yaitu pada penghitungan volume benda dan luas daerah. Beberapa penerapan lain seperti penghitungan massa, pusat massa, momen inersia, dan muatan listrik juga akan ditambahkan pada pembahasan ini.

(1) Volume Benda

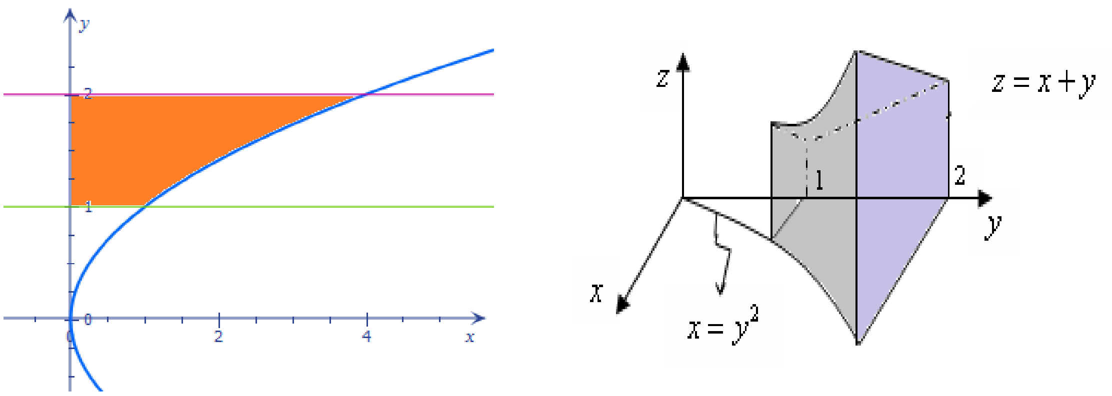
Misalkan $f(x,y)$ adalah fungsi yang positif, maka kita dapat menafsirkan integral lipat dua $\iint_R f(x,y)dA$ sebagai volume V dari benda pejal S yang terletak di atas R dan di bawah permukaan $z = f(x,y)$.

Contoh 5.12

Hitunglah volume benda yang berada di bawah luasan $z = x + y$ di atas bidang R di bidang xy, jika R adalah daerah yang dibatasi oleh parabola $x = y^2$, garis $y = 2$, $y = 1$, dan sumbu y.

Penyelesaian

Domain atau daerah definisi R di bidang xy dapat dilihat pada gambar 5.11.



gambar 5.11. Domain dan bentuk benda pejalnya

Maka benda dibawah permukaan $z = x + y$ dan di atas daerah R seperti yang tampak pada gambar 11. Volume bendanya akan dihitung dengan menggunakan integral lipat dua.

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA = \int_1^2 \int_0^{y^2} (x+y)dx\,dy$$

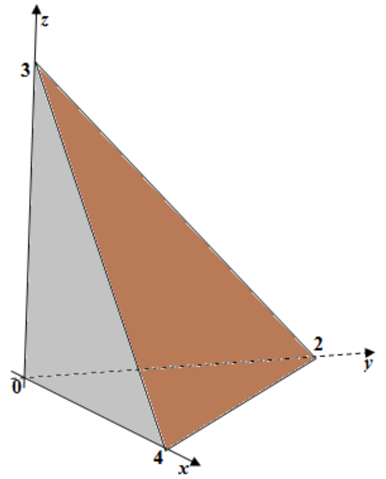
$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^{y^2} dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{y^4}{2} + y^3\right) dy$$

$$= \left[\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{4}\right]_1^2 = \frac{137}{20} \text{ (satuan volume).}$$

Contoh 5.13

Gunakan integral lipat dua untuk menghitung volume tetrahedron yang dibatasi bidang-bidang koordinat dengan bidang $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.



gambar 5.12. Tetrahedron di oktan pertama

Penyelesaian

Pandang daerah R adalah segitiga di bidang xy yang menjadi alas tetrahedron seperti tampak pada gambar 5.12. Volume yang dimaksud dibatasi atas daerah R dan di bawah permukaan $z = \frac{3}{4}(4 - x - 2y)$. Bidang R terletak di bidang xy yang dibatasi oleh perpotongan sumbu x, sumbu y, dan garis $x + 2y - 4$. Maka volume bendanya adalah

$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^2 \int_0^{4-2y} \frac{3}{4}(4 - x - 2y)dxdy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{4}\left[4x - \frac{x^2}{2} - 2yx\right]_0^{4-2y} dy$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 (16-8y) - \left(\frac{16-16y+4y^2}{2}\right) - (8y-4y^2)\ dy$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 8 - 8y + 2y^2\ dy$$

$$= \frac{3}{4}\left[8y - 4y^2 + \frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = 4.$$

Dapat pula dilakukan dengan mengubah urutan pengintegralan, yaitu

$$V = \iint_R zdA = \int_0^4 \int_0^{2-x/2} \frac{3}{4}(4-x-2y)dydx$$

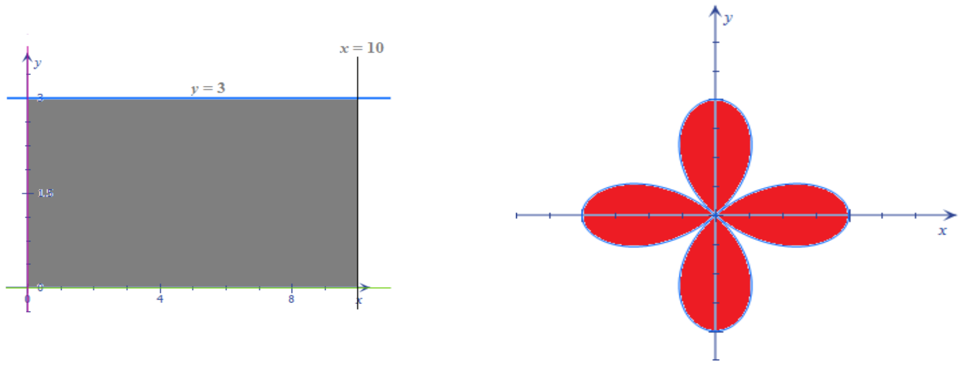
$$= \int_0^4 \left[3y - \frac{3xy}{4} - \frac{3y^2}{4}\right]_0^{2-x/2} dx$$

$$= \int_0^4 \left(6 - \frac{3x}{2}\right) - \left(\frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{8}\right) - \left(3 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{16}\right) dx$$

$$= \int_0^4 3 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{16}\ dx$$

$$= \left[3x - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right]_0^4 = 4.$$

Jadi volume tetrahedron adalah 4 (satuan volume).



gambar 5.13. daerah persegi panjang dan loop mawar berdaun 4

(2) Luas Daerah

Jika fungsi yang diintegralkan adalah $z = f(x, y) = 1$, maka bentuk integral lipatnya selain dapat dinyatakan sebagai volume benda yang tingginya 1, juga dapat dinyatakan sebagai luas daerah R pada bidang xy.

Contoh 5.14

Gunakan integral lipat untuk menghitung luas persegi panjang yang panjangnya 3 dan lebarnya 10.

Penyelesaian

Persoalan ini dapat diselesaikan dengan mudah, yaitu $L = 3 \times 10 = 30$ satuan luas. Tapi di sini akan ditunjukkan hasilnya dengan menggunakan integral berulang. Misalkan daerah $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 3\}$ dapat dilihat pada gambar 5.13, sehingga dengan integral berulang:

$$L = \iint_R dA = \int_0^{10} \int_0^3 dy\, dx = \int_0^{10} 3\, dx = 30.$$

Contoh 5.15

Gunakan integral lipat untuk mendapatkan luas 4 loop dari persamaan mawar $r = \cos 2\theta$.

Penyelesaian

Dari gambar 5.13, keempat loopnya mempunyai bentuk yang sama, sehingga hanya diperlukan menghitung luas satu loop saja. Misalkan diambil satu loopnya adalah

$$R = \left\{(r, \theta) :\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\right\}$$

Maka

$$L = \iint_R dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 \Big]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \left[\frac{\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{16}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}.$$

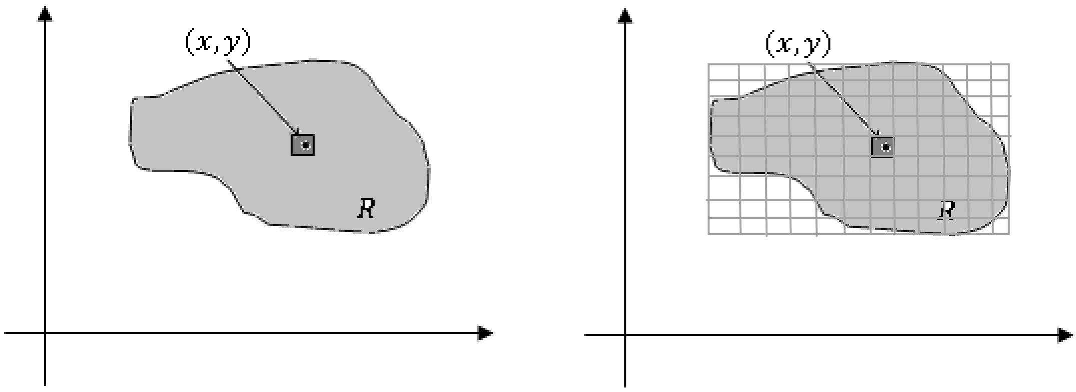
Jadi luas 4 loop mawar $r = \cos 2\theta$ adalah $A = \frac{\pi}{2}$ satuan luas.

(3) Kerapatan dan massa

Pandang suatu lamina yang berupa pelat tipis sehingga dapat dipandang sebagai luasan. Lamina tersebut mencakup suatu daerah R di bidang xy. Kerapatan/densitas (massa per luas) di suatu titik (x, y) dapat dinyatakan sebagai fungsi kontinu $\rho(x, y)$. Ini berarti bahwa

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

di mana Δm adalah massa dan ΔA adalah luas daerah segiempat kecil yang memuat titik (x, y) seperti terlihat pada gambar 5.14.



gambar 5.14. Lamina di bidang $\boldsymbol{xy}$ dan Lamina yang dibagi menjadi segiempat-segiempat kecil di bidang $\boldsymbol{xy}$

Untuk mendapatkan massa total lamina, maka kita bagi segiempat D yang mengandung R menjadi segiempat R_{ij} berukuran sama (seperti pada gambar 5.14) dan menganggap $\rho(x, y)$ sama dengan nol di luar R. Jika diambil sembarang titik (x_{ij}^*, y_{ij}^*) dalam R_{ij}, maka massa bagian lamina yang menempati R_{ij} adalah $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, dengan ΔA adalah luas R_{ij}. Jika kita tambahkan semua massa bagian lamina maka diperoleh massa totalnya

$$m = \iint_R \rho(x, y)\, dA,$$

dengan $\rho(x, y)$ kontinu dan tak negatif.

Contoh 5.16

Carilah massa pelat tipis berbentuk persegi dengan titik sudut $(0,0),(2,0),(0,3),(2,3)$ dan fungsi rapat massanya adalah $\rho(x,y)=x$.

Penyelesaian

$$m=\int_0^3\int_0^2 x\,dx\,dy=\int_0^3 \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 dy=\int_0^3 2\,dy=2y\Big]_0^3=6.$$

Jadi massa pelat adalah 6 (satuan massa).

(4) Momen dan Pusat Massa

Pandang suatu lamina yang densitasnya berupa $\rho(x,y)$ yang mencakup daerah R di bidang xy. Kita mendefinisikan momen partikel terhadap suatu sumbu sebagai hasil kali massa dengan jarak lurusnya dari sumbu. Maka momen lamina terhadap sumbu x dinyatakan oleh

$$M_x=\iint_R y\,\rho(x,y)dA,$$

dan momen lamina terhadap sumbu y adalah

$$M_y=\iint_R x\rho(x,y)dA.$$

Pusat massa $(\bar{x},\bar{y})$ dinyatakan sebagai titik di mana keseluruhan massa lamina terkonsentrasi sehingga lamina seimbang. Koordinat pusat massa dari lamina yang menempati daerah R dan mempunyai fungsi densitas $\rho(x,y)$ adalah

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint_R x\rho(x,y)dA}{\iint_R \rho(x,y)dA}\,,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint_R y\rho(x,y)dA}{\iint_R \rho(x,y)dA}.$$

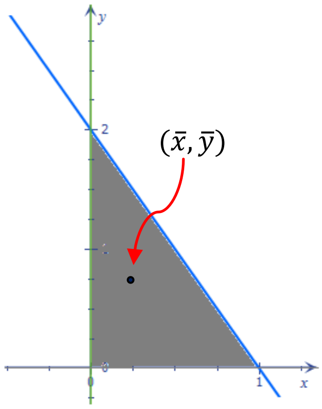
Contoh 5.17

Carilah pusat massa dari lamina segitiga dengan titik sudut $(0,0),(1,0)$ dan $(0,2)$ jika fungsi densitasnya adalah $\rho(x,y)=1+x+y$.

Penyelesaian

Segitiganya diperlihatkan pada gambar 15. Massa lamina adalah

$$m=\iint_R \rho(x,y)dA=\int_0^1\int_0^{2-2x}(1+x+y)dydx$$



gambar 5.15. Lamina segitiga

$$= \int_0^1 \left[y + xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 4 - 4x \; dx$$

$$= 4x - 2x^2]_0^1 = 2.$$

Maka koordinat pusat massanya adalah

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_R x\rho(x,y)dA = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2-2x}(x + x^2 + xy)dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[xy + x^2y + \frac{xy^2}{2}\right]_0^{2-2x} dx \;= \frac{1}{2}\int_0^1(4x - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_R y\rho(x,y)dA = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2-2x}(y + xy + y^2)dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2-2x} dx \;= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{14}{3} - 10x + 6x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{14x}{3} - 5x^2 + 2x^3 - \frac{x^4}{6}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

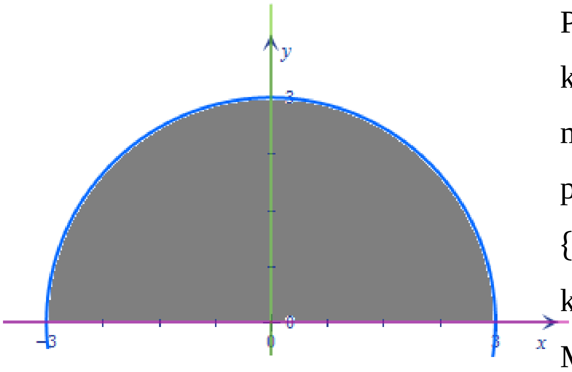
Jadi pusat massa lamina segitiga adalah $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$.

Contoh 5.18

Kerapatan di sebarang titik pada lamina setengah lingkaran berjari-jari 3 adalah 2 kali jarak dari pusat lingkaran. Carilah pusat massa lamina.

Penyelesaian

Pertama, kita letakkan lamina sebagai setengah dari lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ sebagaimana terlihat pada gambar 16. Maka jarak dari titik (x,y) ke pusat lingkaran adalah $\sqrt{x^2+y^2}$. Karena itu fungsi kerapatannya adalah $\rho(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$.



gambar 5.16. setengah lingkaran berjari-jari 3, dengan pusat di (0,0)

Persamaan Lamina dan dan kerapatannya membuat kita untuk memutuskan menggunakan koordinat polar, maka daerah lamina $R = \{(r,\theta):\ 0 \le r \le 3, 0 \le \theta \le \pi\}$ dan kerapatannya $\rho(x,y) = \rho(r,\theta) = 2r$. Maka massanya adalah

$$m = \iint_R \rho(r,\theta) r dr d\theta$$

Jadi diperoleh

$$m = \int_0^{\pi} \int_0^3 2r^2 dr d\theta = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 r^2 dr$$

$$= 2\pi \frac{r^3}{3}\Big]_0^3 = 18\pi.$$

Koordinat pusat massanya adalah

$$\bar{x} = \frac{1}{18\pi}\int_0^{\pi}\int_0^3 r\cos\theta\,(2r^2)\,dr d\theta$$

$$= \frac{1}{9\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^3 r^3 dr = \frac{1}{9\pi}\sin\theta\Big]_0^{\pi}\frac{r^4}{4}\Big]_0^3$$

$$= \frac{9}{4\pi}(\sin\pi - \sin 0) = 0.$$

Di sini terlihat Lamina dan kerapatan keduanya simetri terhadap sumbu y.

$$\bar{y} = \frac{1}{18\pi}\int_0^{\pi}\int_0^3 r sin\,\theta(2r^2)\,dr d\theta$$

$$= \frac{1}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^3 r^3 dr = -\frac{1}{9\pi}\cos\theta\Big]_0^{\pi}\frac{r^4}{4}\Big]_0^3$$

$$= -\frac{9}{4\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{9}{2\pi}.$$

Jadi pusat massa ada di titik $\left(0,\ \frac{9}{2\pi}\right)$.

(5) Momen Inersia

Misalkan R adalah sebuah lamina, momen inersia yang juga disebut momen kedua dari suatu lamina bermassa m terhadap suatu sumbu didefinisikan sebagai mr^2, dengan r adalah jarak titik di lamina terhadap sumbu. Maka momen inersia terhadap sumbu x dan sumbu y dinyatakan oleh masing-masing bentuk berikut ini.

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x,y)\, dA$$

$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x,y)\, dA,$$

dengan $\rho(x,y)$ adalah fungsi densitas lamina.

Selain kedua momen inersia itu, menarik juga untuk melihat momen inersia terhadap titik asal, yang juga disebut momen inersia polar.

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x,y)\, dA.$$

Dapat dilihat bahwa momen inersia polar adalah jumlah kedua momen inersia terhadap sumbu-sumbunya, $I_0 = I_x + I_y$.

Contoh 5.19

Suatu lamina yang dibatasi oleh sumbu x, garis $x = 8$ dan kurva $y = x^{2/3}$ mempunyai densitas yang berbeda-beda di setiap titiknya dan dinyatakan oleh persamaan $\rho(x,y) = xy$, lihat gambar 5.17. Tentukan momen inersia terhadap titik asal.

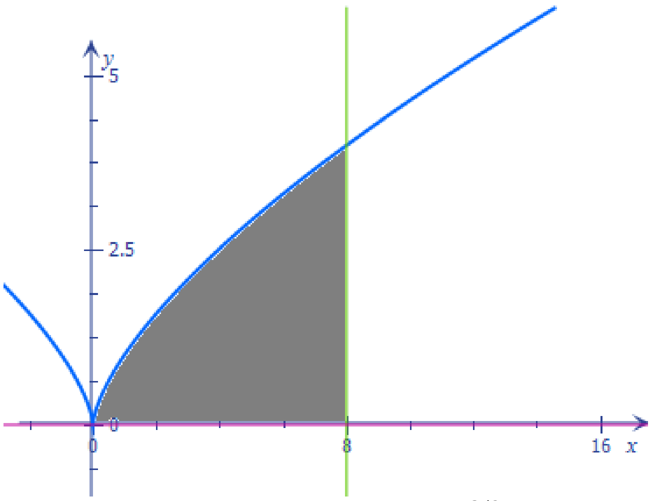
Penyelesaian

$$I_x = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^3\, dydx$$

$$= \int_0^8 \frac{xy^4}{4}\bigg]_0^{x^{2/3}} dx$$

$$= \int_0^8 \frac{x^{11/3}}{4}\, dx$$

$$= \frac{3x^{14/3}}{56}\bigg]_0^8 = \frac{6144}{7}.$$



gambar 5.17. Lamina yang dibatasi oleh $\boldsymbol{y = x^{2/3}}$, $\boldsymbol{x = 8}$ dan $\boldsymbol{y = 0}$

$$I_y = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} x^3 y \, dy dx = \int_0^8 \frac{x^3 y^2}{2} \bigg]_0^{x^{2/3}} dx$$

$$= \int_0^8 \frac{x^{13/3}}{2} dx = \frac{3x^{\frac{16}{3}}}{32} \Bigg]_0^8 = 6144.$$

Jadi Momen inersia polarnya adalah

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{6144}{7} + 6144 = \frac{49152}{7}.$$

Contoh 5.20

Carilah momen inersia I_x, I_y dan I_0 dari cakram homogen R dengan kerapatan $\rho(x, y) = \rho$, pusat di titik asal dan jari-jari a.

Penyelesaian

Perbatasan R adalah lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ dan koordinat polar dari R adalah persegi yang dibatasi oleh $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$.

$$I_x = \iint_R y^2 \rho \, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \sin^2 \theta \, dr \, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^a r^3 \, dr = \rho \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \bigg]_0^a$$

$$= \frac{\pi \rho a^4}{4}.$$

$$I_y = \iint_R x^2 \rho \, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \cos^2 \theta \, dr \, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^a r^3 \, dr = \rho \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \bigg]_0^a$$

$$= \frac{\pi \rho a^4}{4}.$$

Sedangkan momen inersia polarnya adalah

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr \, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi \rho a^4}{2}.$$

Perhatikan bahwa massa cakram pada contoh 20 adalah $m = \rho \times \pi a^2$ sehingga momen inersia cakram terhadap titik asal dapat dituliskan sebagai $I_0 = \frac{1}{2} m\, a^2$. Jadi jika kita memperbesar massa atau jari-jari cakram, berarti momen inersia akan membesar. Momen inersia rodalah yang mempersulit untuk memulai atau menghentikan perputaran roda.

Jari-jari putaran lamina terhadap suatu sumbu adalah bilangan r sedemikian rupa sehingga $mr^2 = I$, dengan m adalah massa dan I adalah momen inersia terhadap sumbu yang diberikan. Jadi jari-jari putaran $\bar{\bar{y}}$ terhadap sumbu x dan jari-jari putaran $\bar{\bar{x}}$ terhadap sumbu y diberikan oleh persamaan $m\, \bar{\bar{y}}^2 = I_x$ dan $m\, \bar{\bar{x}}^2 = I_y$. Maka titik $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ adalah titik tempat massa lamina dipusatkan tanpa mengubah momen inersia terhadap sumbu koordinat.

Contoh 5.21

Carilah jari-jari putaran terhadap sumbu x dan sumbu y dari cakram dalam contoh 5.20.

Penyelesaian

Karena $I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi \rho a^4$, $m = \rho \times \pi a^2$ dan persamaan $m\, \bar{\bar{y}}^2 = I_x$, $m\, \bar{\bar{x}}^2 = I_y$ maka diperoleh

$$\bar{\bar{x}}^2 = \frac{I_y}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi \rho a^4}{\rho \pi a^2} = \frac{a^2}{4} \;, \bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi \rho a^4}{\rho \pi a^2} = \frac{a^2}{4}\,.$$

Jadi jari-jari putaran terhadap sumbu y adalah $\bar{\bar{x}} = a/2$ dan jari-jari putaran terhadap sumbu x adalah $\bar{\bar{y}} = a/2$.

Penerapan yang lain, seperti Luas permukaan, peluang untuk dua peubah acak, nilai ekspetasi dari distribusi peluang, dan lain-lainnya akan dipelajari pada mata kuliah-mata kuliah tingkat lanjut.

LATIHAN

Soal 1 – 5 Hitung integral berulangnya.

1. $\int_1^3 \int_0^1 dy\, dx$
2. $\int_1^4 \int_0^2 x\ \ dxdy$
3. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2\,y)\ dy\, dx$
4. $\int_1^2 \int_y^2 xy\ dxdy$
5. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\ \ dudv$

Soal 6 – 10 Gambarkan daerah R dan hitung integral lipat dua atas daerah R yang diberikan.

6. $\iint_R 6xy^2\, dA$, $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq y \leq 1\}$
7. $\iint_R x^3 y^2\, dA$, $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 2x\}$
8. $\iint_R x \cos y\, dA$, Rdibatasi oleh $y = 0, y = x^2$ dan $x = 1$
9. $\iint_R y^3\, dA$, R adalah daerah segitiga dengan titik-titik $(0,2), (1,1)$, dan $(3,2)$
10. $\iint_R xy^2\, dA$, Rdaerah yang dibatasi oleh $x = 0$ dan $x = \sqrt{1 - y^2}$

Soal 11 – 15 Tentukan volume benda pejal.

11. Volume benda di bawah bidang $x + 2y - z = 0$ dan di atas daerah yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = x^4$
12. Volume benda dibawah permukaan $z = 2x + y^2$ dan di atas daerah yang dibatasi oleh $x = y^2$ dan $x = y^3$
13. Volume benda di bawah permukaan $z = xy$ dan di atas segitiga dengan titik-titik sudutnya $(1,1), (4,1)$ dan $(1,2)$
14. Volume yang dibatasi oleh paraboloida $z = x^2 + 3y^2$ dan bidang $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, dan $z = 0$
15. Volume benda yang dibatasi oleh bidang-bidang $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ dan $z = 0$

Soal 16 – 20 Gambarlah daerah pengintegralannya dan ubahlah urutan integralnya.

16. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dydx$
17. $\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x, y) dydx$
18. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dxdy$

19. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x,y)dxdy$

20. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y)dy\,dx$

Soal 21 – 25 Hitung integralnya dengan terlebih dahulu mengubah urutan integralnya.

21. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dxdy$

22. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,dxdy$

23. $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dxdy$

24. $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3\sin(y^3)\,dy\,dx$

25. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\,\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$

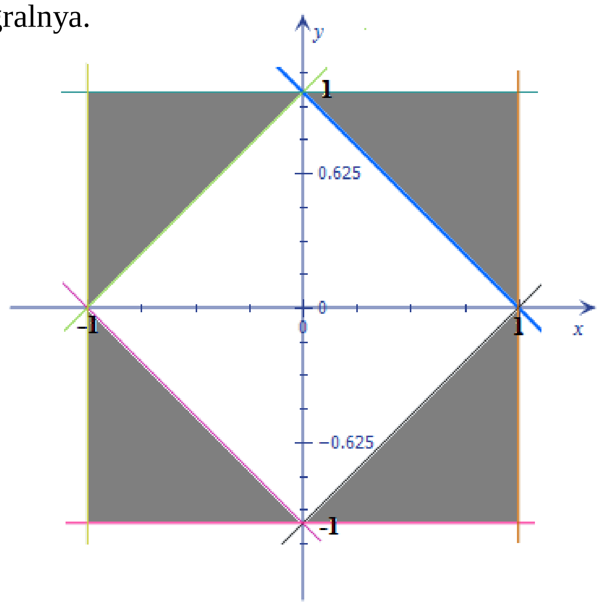
26. Dalam penghitungan integral lipat dua pada daerah R, salah satu jumlah integral berulangnya diperoleh sebagai berikut:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\,dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\,dxdy$$

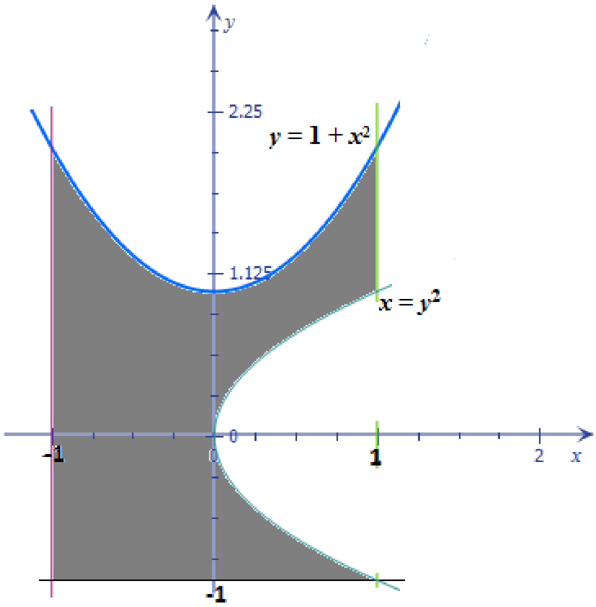
Sketsakan daerah R dan ekspresikan integral lipat duanya sebagai integral berulang dengan urutan pengintegralan terbalik.

Soal 27 – 28 Ekspresikan R pada gambar sebagai gabungan daerah jenis I atau jenis II dan hitung integralnya.

27. $\iint_R x^2\,dA$



28. $\iint_R xy\, dA$



Soal 29 – 30 Hitung integral berulang, gambarkan daerah pengintegralannya, ubah urutan pengintegralannya kemudian hitung integralnya setelah urutannya diubah.

29. $\int_{-1}^{1}\int_{y}^{|y|} dxdy$

30. $\int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} dydx$

Soal 31 – 35 Hitunglah integral yang diberikan dengan mengubah ke koordinat polar.

31. $\iint_R x\, dA$ dengan R adalah cakram dengan pusat $(0,0)$ dan jari-jarinya 5

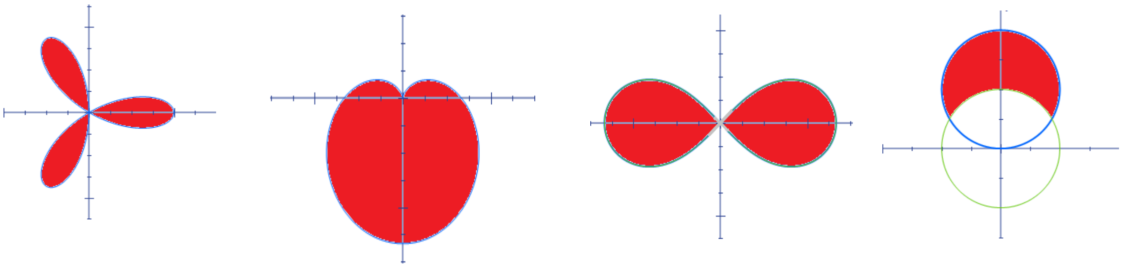
32. $\iint_R y\, dA$ dengan R adalah daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ dan garis-garis $y = x$ dan $y = 0$

33. $\iint_R xy\, dA$ dengan R adalah daerah di kuadran pertama yang terletak di antara lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan $x^2 + y^2 = 25$

34. $\iint_R e^{-x^2-y^2}\, dA$ dengan R adalah daerah yang dibatasi setengah lingkaran $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y

35. $\iint_R (x^2 + y^2) dA$ dengan R adalah daerah yang dibatasi oleh spiral $r = \theta$ dan $r = 2\theta$ untuk $0 \le \theta \le 2\pi$

Soal 36 – 39 Integral lipat dua, $\iint_R dA$ dapat digunakan untuk menghitung luas daerah R. Gunakan integral lipat dua untuk mencari luas daerah berikut.



36. Satu loop mawar $r = \cos 3\theta$
37. Daerah yang dilingkupi oleh kardioda $r = 1 - \sin\theta$
38. Daerah yang dilingkupi oleh lemniskat $r^2 = 4\cos 2\theta$
39. Daerah di sebelah dalam lingkaran $r = 4\sin\theta$ dan di luar lingkaran $r = 2$

Soal 40 – 41 Gunakan koordinat polar untuk mencari volume benda pejal yang diberikan.

40. Di bawah paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan di atas cakram $x^2 + y^2 \leq 9$
41. Dibatasi oleh paraboloida $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ dan bidang $z = 4$

Soal 42 – 45 Hitunglah integral berulang berikut dengan menggunakan koordinat polar.

42. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$
43. $\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx\, dy$
44. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 - y^2) dx\, dy$
45. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

Soal 46 – 50 Carilah massa dan pusat massa lamina yang menempati daerah R dan mempunyai fungsi kerapatan ρ yang diberikan.

46. $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\};\ \rho(x, y) = x^2$

47. $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3\};\ \rho(x, y) = y$

48. R daerah segitiga dengan titik sudut $(0,0), (1,1), (4,0)$; $\rho(x, y) = x$

49. R adalah daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = 1$; $\rho(x, y) = xy$

50. $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \cos x\ ,\ 0 \leq x \leq \pi/2\}$; $\rho(x, y) = x$

51. Lamina menempati bagian cakram $x^2 + y^2 \leq 1$ di kuadran pertama. Carilah pusat massa jika kerapatan pada sebarang titik adalah sebanding terhadap jaraknya dari sumbu x.

52. Carilah pusat massa lamina berbentuk segitiga siku-siku sama kaki dengan kaki yang sama panjangnya a dan kerapatannya pada sebarang titik sebanding dengan kuadrat jaraknya dari titik sudut yang berhadapan dengan sisi miringnya.

53. Carilah momen inersia I_x, I_y, I_0 untuk lamina pada soal 46

54. Carilah momen inersia I_x, I_y, I_0 untuk lamina pada soal 47

55. Carilah momen inersia I_x, I_y, I_0 untuk lamina pada soal 48

56. Carilah momen inersia I_x, I_y, I_0 untuk lamina pada soal 49

57. Carilah momen inersia I_x, I_y, I_0 untuk lamina pada soal 50

Soal 58 – 59 Carilah massa, pusat massa, dan momen inersia lamina yang menempati daerah R dan mempunyai fungsi kerapatan yang diberikan.

58. $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sin x\ ,\ 0 \leq x \leq \pi\}$; $\rho(x, y) = xy$

59. R dilingkupi oleh kardioda $r = 1 + \cos\theta$; $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

60. Lamina dengan kerapatan konstan $\rho(x, y) = \rho$ menempati bujur sangkar dengan titik sudut $(0,0), (a, 0), (a, a)$, dan $(0, a)$. Carilah momen inersia I_x, I_y dan jari-jari putaran $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$