Kuliah I
Matematika Diskrit

Zaenab Muslimin

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Dalam bahasa sehari-hari kita memakai implikasi dalam bermacam-macam arti, misalnya:

a) Untuk menyatakan suatu syarat: “Bila kamu tidak membeli karcis, maka kamu tidak akan diperbolehkan masuk”.

b) Untuk menyatakan suatu hubungan sebab akibat:” Bila kehujanan, maka Tono pasti sakit”.

c) Untuk menyatakan suatu tanda:”Bila bel berbunyi, maka mahasiswa masuk ke dalam ruang kuliah.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

- Implikasi adalah pernyataan majemuk yang di sajikan dalam “jika ….. maka …… “.
- Notasi “***p => q***”,dibaca “ jika ***p*** maka ***q”***.
- Pada implikasi p => q, p disebut anteseden (hipotesis) dan q disebut konsekuen.
- “ p => q” akan salah jika “B => S (p = B, q =S) selainnya benar.
- Perhatikan tabel kebenaran untuk implikasi berikut.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Implikasi $p \to q$ adalah proposisi yang bernilai salah jika p benar dan q salah, dan bernilai benar jika lainnya.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh

- Jika adik lulus ujian, maka ia mendapat hadiah
- Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

- Contoh-contoh tersebut di atas adalah berbentuk “jika p, maka q”, dimana p biasa disebut hipotesis dan q adalah konklusi.
- Pernyataan semacam ini disebut proposisi bersyarat atau kondisonal atau implikasi.
- Didalam bahasa alami (bahasa percakapan manusia), terdapat hubungan sebab akibat antara hipotesis dan konklusi.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh :

“Jika suhu mencapai 80^0C, maka alarm berbunyi”

- Implikasi seperti ini adalah normal dalam Bahasa Indonesia.
- Tetapi dalam penalaran matematik dipandang implikasi lebih umum daripada implikasi dalam bahasa alami.
- Definisi mengenai implikasi adalah pada nilai kebenarannya, bukan didasarkan pada penggunaan bahasa.

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh :

“Jika Paris adalah ibukota Perancis, maka 1+1=2”

- Implikasi di atas tetap valid secara matematis meskipun tidak ada kaitan antara Paris sebagai ibukota Perancis dengan 1+1=2.
- Implikasi tersebut bernilai benar karena hipotesis benar (Paris ibukota Perancis adalah benar) dan konklusi juga benar (1+1=2 adalah benar).

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh :

"Jika Paris adalah ibukota Perancis, maka 1+1=3"

- Bernilai salah karena hipotesis benar tetapi 1+1 = 3 salah.
- Implikasi p $\rightarrow$ q memainkan peranan penting dalam penalaran

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Contoh :

“Bila x adalah bilangan genap, maka x habis dibagi 2. x habis dibagi 2 bila x adalah bilangan genap”

- x adalah bilangan genap hanya bila x habis di bagi 2.
- “x habis di bagi 2 “ merupakan syarat perlu agar “ x adalah bilangan bulat “
- “x adalah bilangan bulat “ merupakan syarat cukup untuk “x habis di bagi 2 “

1.2.5 Implikasi (JIKA - MAKA)

Implikasi ini tidak hanya diekspresikan dalam pernyataan standar “jika p, maka q” tetapi juga dapat di ekspresikan dalam berbagai cara, antara lain :

(a)	Jika p, maka q	(*if p, then q*)
(b)	Jika p, q	(*if p,q*)
(c)	p mengakibatkan q	(*p implies q*)
(d)	q jika p	(*q if p*)
(e)	p hanya jika q	(*p only if q*)
(f)	p syarat cukup agar q	(*p is sufficient for q*)
(g)	q syarat perlu bagi p	(*q is necessary for p*)
(h)	q bilamana p	(*q whenever p*)

1.2.5 Contoh implikasi (1)

a. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur
b. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang
c. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik
d. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan
e. Ahmad bisa mengambil matakuliah teori bahasa formal hanya jika ia sudah lulus matematika diskrit
f. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dan rokok
g. Syarat perlu bagi Imdonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan
h. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebang

1.2.5 Contoh Implikasi (2)

Implikasi

“Jika hari ini hari Jumat maka 2+3 > 7.”

bernilai benar untuk semua hari kecuali hari Jumat, walaupun 2+3 > 7 bernilai salah.

1.2.5 Contoh Implikasi (3)

Kapan pernyataan berikut bernilai benar?

"Jika hari tidak hujan maka saya akan pergi ke Lembang."

Bernilai benar :

– jika hari tidak hujan dan pergi ke Lembang,

– hari hujan dan tetap pergi ke Lembang,

– hari hujan dan tidak pergi ke lembang

Bernilai salah apabila

– hari tidak hujan dan tidak pergi ke Lembang.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

- Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang bernilai sama dengan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sehingga dapat dibaca: "p jika dan hanya jika q" atau "p bila dan hanya bila q."
- Dengan demikian jelaslah bahwa biimplikasi dua pernyataan p dan q hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai sama, yaitu keduanya bernilai salah atau keduanya bernilai benar.
- Biimplikasi merupakan kalimat bersyarat ganda.
- Biimplikasi menggunakan kata hubung **JIKA DAN HANYA JIKA**.
- Notasinya: "<=>"

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Operator Biner, Simbol: $\leftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 1 :

"Jika sore ini hujan, maka jalan raya basah"

Jika jalan raya basah, apakah selalu disebabkan oleh hujan? Tentu saja tidak selalu begitu, karena jalan raya basah bisa saja disebabkan disiram, banjir, ataupun hal lainnya. Pernyataan seperti ini telah kita ketahui sebagai sebuah implikasi.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 2 :

"Jika orang masih hidup maka dia masih bernafas"

- Jika seseorang masih bernafas, apakah bisa dipastikan orang tersebut masih hidup? Ya, karena jika dia sudah tidak bernafas, pasti orang tersebut sudah meninggal.
- Pernyataan yang demikian disebut *biimplikasi* atau *bikondisional* atau *bersyarat ganda*.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 3:

"Jika nilai ujian matematika saya lebih dari 7.50 maka saya lulus."

- Apakah saya bisa lulus selain jika nilai matematika saya lebih dari 7.50? Tidak
- Satu-satunya syarat kelulusan adalah bila nilai ujiannya lebih dari 7.50.
- Inilah yang disebut biimplikasi.

1.2.6 Bikondisional (JIKA DAN HANYA JIKA)

Contoh 4:

Perhatikan pernyataan berikut ;

(a) $x^2 \geq 0$ jhj $2^0 = 1$

(b) $x^2 \geq 0$ jhj $2^0 = 0$

(c) $x^2 < 0$ jhj $2^0 = 1$

(d) $x^2 < 0$ jhj $2^0 = 0$

- Pernyataan (a) dan (d) merupakan pernyataan yang benar, sebab kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama.
- Sedangkan pernyataan (b) dan (c) merupakan pernyataan yang salah, sebab kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang berbeda.

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Tautologi

adalah pernyataan yang selalu benar.

Contoh :

Tautologi

p	~p	P V ~p
B	S	B
S	B	B

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah.

- Contoh :

Kontradiksi

p	$\sim p$	$P \wedge \sim p$
B	S	S
S	B	S

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Dua pernyataan disebut ekivalen jika nilai kebenaran kedua pernyataan tersebut sama,

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

p	q	(p⇒q	∧	q⇒p)
B	B	B	**B**	B
B	S	S	**S**	B
S	B	B	**S**	S
S	S	B	**B**	B

$p \Leftrightarrow q$

p	q	p⇔q
B	B	**B**
B	S	**S**
S	B	**S**
S	S	**B**

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

Pernyataan-pernyataan dapat digabungkan dengan operasi untuk membentuk pernyataan baru.

p	q	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

1.3 Tautologi , Kontradiksi & Ekivalen

p	q	$\neg(p\wedge q)$	$(\neg p)\vee(\neg q)$	$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p)\vee(\neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Pernyataan $\neg(P\wedge Q)$ dan $(\neg P)\vee(\neg Q)$ ekivalen secara logika, karena $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q)$ selalu benar.

1.4 Urutan Pengerjaan (Presedens) Operator Logika

- Dalam aritmetika di sekolah menengah kita mengenal bahwa 2 + 3 x 4 = 14,
- Hal ini terjadi karena presedens (urutan pengerjaan) operator x lebih tinggi daripada operator +.
- Kita juga dapat menggunakan tanda kurung untuk memperjelas urutan pengerjaan.
- Sebagai contoh, 2 + 3 x 4 berarti 2 + (3 x 4) = 14, sedangkan (2 + 3) x 4 = 20.

1.4 Urutan Pengerjaan (Presedens) Operator Logika

- Diberikan proposisi $p \wedge q \rightarrow r$. manakah bentuk yang dimaksud:

1. $p \wedge (q \rightarrow r)$
2. $(p \wedge q) \rightarrow r$

- Presedens operator logika memberikan suatu aturan operator mana yang harus lebih dulu dioperasikan (dikenakan pada suatu operand).

1.4 Urutan Pengerjaan (Presedens) Operator Logika

- Tabel urutan pengerjaan (presendens) operator logika

Operator	Urutan
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\oplus$	4
$\rightarrow$	5
$\leftrightarrow$	6

- Sebagaimana aritmetika bilangan bulat, kita dapat menggunakan tanda kurung "("dan ")" untuk memperjelas operasi yang harus didahulukan.

RINGKASAN TABEL KEBENARAN OPERATOR LOGIKA

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T

1.5 Hukum-hukum Logika Proposisi

1. Hukum identitas (i) $p \vee F \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge T \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi) (i) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
2. Hukum Null / dominasi (i) $p \wedge F \Leftrightarrow F$ (ii) $p \vee T \Leftrightarrow T$	7. Hukum Komutatif (i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (ii) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
3. Hukum negasi (i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow T$ (ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$	8. Hukum asosiatif (i) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
4. Hukum idempoten (i) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$	9. Hukum distributif (i) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Hukum involusi (negasi ganda) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	10. Hukum De Morgan (i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

1.5 Hukum-hukum Logika Proposisi

- Digunakan untuk membuktikan:

  – Dua proposisi ekivalen
    (selain menggunakan tabel kebenaran)
  – Suatu proposisi tautologi atau kontradiksi (selain menggunakan tabel kebenaran)
  – Membuktikan kesahan suatu argumen

1.5.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

. Hukum De Morgan

(i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

1.5.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

Hukum distributif

(i) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \quad \text{(Hukum distributif)}$$

1.5.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p\vee\sim(p\vee q)$ dan $p\vee\sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

Hukum negasi

(i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow T$

(ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

$$p\vee\sim(p\vee q) \Leftrightarrow (p\vee\sim p)\wedge(p\vee\sim q)$$

$$\Leftrightarrow T \wedge(p \vee \sim q) \qquad \text{(Hukum negasi)}$$

1.5.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

Hukum identitas

(i) $p \vee F \Leftrightarrow p$

(ii) $p \wedge T \Leftrightarrow p$

$$
\begin{aligned}
p \vee \sim(p \vee q) &\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q) \\
&\Leftrightarrow p \vee \sim q \qquad \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

1.5.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekuivalen secara logika

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

$\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

1.5.1 Contoh penggunaan hukum-hukum logika

Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (p \vee q)$ (Hukum identitas)

$\Leftrightarrow p \vee (F \wedge q)$ (Hukum distributif)

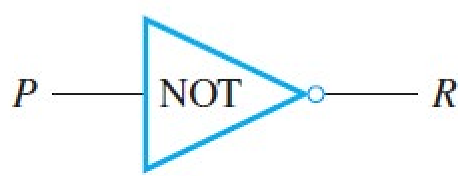
$\Leftrightarrow p \vee F$ (Hukum *Null*)

$\Leftrightarrow p$ (Hukum identitas)

1.5.2 Aplikasi pada Rangkaian Logika Digital

- Ada tiga gerbang rangkaian logika yang dikenal.
- Simbol masing – masing diperlihatkan pada gambar dibawah ini :

NOT

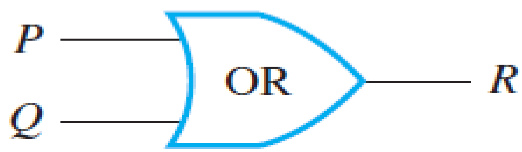


Input	Output
P	***R***
1	0
0	1

AND

Input		Output
P	***Q***	***R***
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

OR



Input		Output
P	***Q***	***R***
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Terima Kasih