# BAB 6. MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

- **Matriks dan Operasi Dasar Matriks**
- **Operasi Baris Elementer**
- **Invers dan Determinan**
- **Sistem Persamaan Linear dan Penyelesaiannya**

## 6.1.1 Matriks dan Operasi Dasar Matriks

Suatu matriks dapat dianggap sebagai gabungan beberapa vektor baris (vektor kolom) yang berdimensi sama sehingga terbentuk susunan yang terdiri atas baris dan kolom, yang berbentuk persegi panjang atau bujur sangkar. Bilangan–bilangan itu yang dinamakan unsur/entri-entri yang ditulis diantara dua kurung ( ) atau [ ] .

Seperti halnya pada vektor, suatu matriks biasanya diberi nama dengan huruf besar dan unsur–unsurnya secara umum dinyatakan dengan huruf kecil yang sama dengan nama matriks tersebut dan diberi indeks yang menunjukkan letaknya pada baris dan kolom.

**Contoh 6.1.**

a. $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

b. $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

Pada contoh 6.1 matriks $A$ terdiri atas $m$ baris dan $n$ kolom, maka dikatakan $A$ mempunyai ordo $m \times n$ dinyatakan dengan singkat $A_{m\times n}$. Pada bagian b matriks $B$ berordo $4 \times 4$ dinamakan matriks bujur sangkar ordo 4, ditulis $B_4$ .

Kedua matriks tersebut juga ditulis sebagai berikut

$A = (a_{ij})$, dengan $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$. Entri $a_{ij}$ menunjukkan entri matriks $A$ pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$.

Jika pada matriks $A$ terdapat banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom adalah $n$ maka $A$ disebut matriks bujur sangkar ordo $n$, ditulis $A_n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unsur-unsur $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ disebut entri-entri diagonal utama.

Ada beberapa macam matriks bujur sangkar yaitu:

a) Matriks segi tiga (Triagular)

Matriks bujursangkar $A$ yang unsur-unsurnya $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*). Jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

**Contoh 6.2.**

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix}$ adalah matriks segitiga atas

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$ adalah matriks segitiga bawah

b) Matriks diagonal

Matriks segitiga atas dan sekaligus segitiga bawah atau yang semua unsur-unsurnya 0 kecuali unsur-unsur pada diagonal utama disebut matriks diagonal.

**Contoh 6.3.**

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sering ditulis $B = diag(b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44})$ , $D = diag(3,1,4)$

Jadi matriks diagonal berordo-$n$, dinyatakan dalam bentuk

$D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$.

c) Matriks skalar

Jika pada matriks diagonal, semua unsur pada diagonal utama sama $d_{11} = d_{22} = d_{33} = \cdots = d_{nn} = k$, dengan $k$ sebuah konstanta, maka matriksnya disebut matriks skalar.

d) Matriks identitas (I)

Jika pada matriks skalar, nilai $k = 1$, maka matriks tersebut dinamakan matriks identitas($I$). Jadi pada matriks identitas unsur-unsur diagonal utama semua 1 dan unsur yang lain semua 0.

**Contoh 6.4.**

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B$ dan $I$ adalah matriks skalar, $I$ adalah juga matriks identitas.

e) Matriks setangkup (simetri)

Suatu matriks bujur sangkar, $A = (a_{ij})$ disebut simetri apabila untuk setiap $i, j = 1,2, \cdots, n$ berlaku $a_{ji} = a_{ij}$

**Contoh 6.5.**

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah dua matriks yang simetri

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah dua buah matriks yang tidak simetri

Tapi $B + B^t = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ adalah matriks simetri

f) Matriks simetri miring (*skew-symmetric*)

Jika pada suatu matriks $A$ berlaku untuk setiap $i, j = 1,2, \dots, n$ $a_{ij} = a_{ji}$, maka $A$ disebut simetri miring. Dalam hal demikian jelas bahwa entri-entri diagonal utama harus semuanya 0.

**Contoh 6.6.**

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks simetri miring

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah dua buah matriks yang tidak simetri

Tapi $B - B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks simetri

Berbagai jenis matriks yang lain dan tidak harus bujur sangkar antara lain

1) Matriks baris dan matriks kolom
   Matriks yang terdiri atas satu baris saja dinamakan matriks baris dan yang hanya satu kolom saja disebut matriks kolom .

2) Kesamaan dua matriks
   Dua buah matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dikatakan sama jika dan hanya jika kedua matriks itu berukuran sama dan setiap unsurnya yang bersesuaian (seletak) juga sama yaitu untuk setiap indeks$i, j = 1,2, \cdots, n$, berlaku $a_{ij} = b_{ij}$. Jadi $A_{m\times n} = B_{m\times n}$ jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk $\forall\ i, j = 1,2, \cdots, n$.

3) Matriks nol
   Matriks yang semua unsurnya 0 dinamakan matriks nol. Dinyatakan dengan **0** tidak dipersoalkan berapapun ordenya.
   Misalnya :
   $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Transpose dari suatu matriks
   Transpose matriks matriks $A$ dinyatakan dengan $A^t$ adalah suatu matriks yang diperoleh dengan merubah baris ke-$i$dari matriks $A$ menjadi kolom ke-$i$ dari matriks $A^t$dan tentu saja yang sebaliknya terjadi, kolom ke-$j$ dari matriks $A$ berubah menjadi baris ke-$j$ dari matriks $A^t$.

   **Contoh 6.7.**

   Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ maka $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Jika } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{maka } B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Hal yang menarik dapat diliat pada matriks simetri adalah $A^t = A$. Perhatikan Contoh 6.5.

### Contoh 6.8

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Demikian juga dari contoh yang sama diperoleh sifat, jika $A$ adalah matriks bujur sangkar, dan $A^t$ adalah transpose dari matriks $A$, maka $A + A^t$ adalah matriks simetri. Sifat yang lain $A - A^t$ adalah matriks simetri miring.

## OPERASI MATRIKS

### Penjumlahan matriks

Jumlah antara dua buah matriks $A_{m\times n}$ dan $B_{m\times n}$ ditulis $A + B = C$ adalah suatu matriks berordo $m \times n$ yang unsur-unsurnya diperoleh dengan jalan menjumlahkan unsur-unsur yang bersesuaian dari matriks $A$ dan $B$. Jadi $A + B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Demikian pula untuk pengurangan, kedua matriks harus berordo sama dan hasil pengurangan keduanya diperoleh dari pengurangan tiap unsur-unsur yang bersesuaian. Jadi $A - B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$.

### Contoh 6.9

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

a. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+1 \\ 1+4 & 0+7 \\ 4+2 & 5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

b. $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 3-1 \\ 1-4 & 0-7 \\ 4-2 & 5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c. $A + A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 3+3 \\ 1+1 & 0+0 \\ 4+4 & 5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan, maka dikatakan *conformable* untuk penjumlahan dan pengurangan . Matriks $-A$ disebut negatif $A$, diperoleh dari $A$ dengan mengalikan setiap unsurnya dengan -1 atau dengan mengubah tanda semua unsurnya.

### Contoh 6.10

$$-A = -1\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Jika $A$ , $B$ , $C$ *conformable* untuk penjumlahan, maka berlaku:

a. $A + B = B + A$ berlaku sifat komutatif

b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ berlaku sifat asosiatif

c. $k(A + B) = kA + kB = (A + B)k$, untuk $k$ adalah konstanta sebarang.

d. Ada matriks $X$ yang memenuhi $A + X = B$

e. $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

f. $A + (-A) = \mathbf{0}$

## Perkalian matriks

(a) Perkalian Bilangan Skalar Dengan Matriks

Berdasarkan pengertian $A + A + A = 3A$, maka perkalian bilangan $k$ dengan matriks $A$ adalah semua unsur-unsur dari $A$ dikalikan dengan $k$.

Catatan : Disini yang dimaksud dengan skalar adalah bilangan riil.

### Contoh 6.11

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 10 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & \dots & ka_{3n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & . & . & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

(b). Perkalian antar matriks

Perkalian antar matriks $A$ dan $B$, yaitu $AB$ (atau $A \times B$), dapat didefinisikan bila banyaknya kolom matriks $A$ sama dengan banyaknya baris matriks $B$. Misalkan Matriks $A_{m\times n}$ dan $B_{n\times k}$, maka $A \times B = AB$ akan menghasilkan suatu matriks $C$ yang berordo $m \times k$.

Jadi $A \times B = C$, dengan unsur-unsur

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \qquad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,k.$$

Jika $A$ dapat dikalikan dengan $B$ menghasilkan $AB$, maka dikatakan $A$ Conformable ke $B$ untuk perkalian.

**Contoh 6.12**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}\, b_{13} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{12} + a_{13}\, b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}\, b_{13} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}\, b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}\, b_{13} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}\, b_{32} \end{bmatrix}$$

jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1x1 + 1x2 + 1x1 & 1x1 + 1x0 + 1x2 \\ 1x1 + 2x2 + 3x1 & 1x1 + 2x0 + 3x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

## Matriks Commute dan Anti Commute

Jika $A$ dan $B$ matriks bujur sangkar berorde sama maka dapat diperoleh hasil perkalian $AB$ dan $BA$. Tetapi pada umumnya $AB \neq BA$ atau pada perkalian dua matriks tidak berlaku sifat komulatif. Dalam keadaan khusus, apabila $AB = BA$ maka dikatakan $A$ dan $B$ *commute* dan jika $AB = -BA$, maka $A$ dan$B$, disebut *anti-commute*.

## Invers suatu Matriks

Jika $A$ dan $B$ matriks bujur sangkar dan berlaku $AB = BA = I$ (matriks identitas) maka $B$ disebut invers dari $A$ dan ditulis $B = A^{-1}$. Sebaliknya invers dari matriks $B$ adalah $A$, jadi $A = B^{-1}$.

### Contoh 6.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

inversnya satu sama lain sebab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Jika $A$ dan $B$ matriks bujur sangkar berordo sama dengan invers masing-masing adalah $A^{-1}$dan$B^{-1}$ maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

### Matriks Idempotent, Nilpotent dan Involutry

Jika $A \times A = A^2 = A$, maka dikatakan $A$ matriks idempotent. Jika $A^p = \mathbf{0}$ dengan $p$ bilangan bulat positif maka $A$ disebut nilpotent. Jika $A^2 = I$ maka $A$ disebut matriks involutry. Suatu matriks involutry mempunyai invers dirinya sendiri.

### Contoh 6.14

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ matriks involutry sebab } A^2 = I$$

Setiap matriks identitas I adalah Involutry.

### Sifat-sifat pada operasi matriks

1. Jika $A$ matriks$m \times n$, $B$ dan $C$ matriks $n \times p$ maka $A(B + C) = AB + AC$.
2. Jika$A$ dan $B$ keduanya matriks $m \times n$ dan $C$ matriks $n \times p$ maka $(A + B)C = AC + BC$.
3. Jika $A$ adalah matriks $m \times n$, $B$ matriks $n \times p$, dan $k$ adalah skalar maka $(kA)B = k(AB)$.
4. Jika $A$, $B$, dan $C$ masing-masing merupakan matriks berordo $m \times n$, $n \times p$, dan $p \times q$, maka berlaku sifat asosiatif pada perkalian matriks, yaitu $A(BC) = (AB)C$
5. Pada matriks transpose berlaku:
   a. Jika $A$ dan $B$ berordo sama maka$(A + B)^t = A^t + B^t$
   b. Jika $A$ matriks $m \times n$dan $B$ matriks $n \times p$ maka $(AB)^t = B^t A^t$
   c. Untuk $k$ adalah konstanta apapun, maka $(kA)^t = k\ A^t$

d. Matriks transpose dari matriks transpose $A$ adalah $A$, $(A^t)^t = A$

## 6. Operasi Baris Elementer

Yang dimaksud dengan operasi dasar elementer suatu matriks ialah:

a. Menukarkan dua baris atau kolom, misalnya baris ke $i$ dengan baris ke $j$ ditandai dengan $H_{ij}$ (atau $K_{ij}$) jika kolom).

b. Mengalikan semua elemen pada sembarang baris ( atau kolom) dengan skalar k yang bukan nol. Misalnya baris ke $i$ ditandai dengan $H_i(k)$( atau $K_j(k)$).

c. Menambahkan baris ke j (kolom ke j) yang telah dikalikan dengan skalar k kepada baris ke i (kolom ke i), ditandai dengan $H_{ij}(k)$ ( atau $K_{ij}(k)$).

Operasi Elementer H disebut Operasi Baris Elementer dan Operasi Elementer K disebut Operasi Kolom Elementer.

**Contoh 6.15**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan $H_{21}(-2)$ menghasilkan matriks:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

**Contoh 6.16**

Ubahlah matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ menjadi $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan operasi elementer.

Caranya sebagai berikut,

1. Operasi elementer $H_{23}$: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Operasi elementer $H_{13}(-3)$: $A_2 = \begin{bmatrix} -8 & 13 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. Operasi elementer $H_{23}(-2)$: $A_3 = \begin{bmatrix} -8 & 13 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Operasi elementer $H_2\left(\frac{1}{7}\right)$: $A_4 = \begin{bmatrix} -8 & 13 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

5. Operasi elementer $H_{12}(-9)$: $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

6. Operasi elementer $H_{32}(3)$: $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Operasi elementer $H_{21}(2)$: $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Operasi elementer $H_2\left(\frac{1}{5}\right)$: $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Operasi elementer $H_{12}(-4)$: $A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tidak semua matriks dapat diubah menjadi matriks identitas.

Misalnya $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan operasi elementer menghasilkan :

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ yang bukan matriks identitas.

## Matriks Ekuivalen

Dua matriks $A$ dan $B$ disebut *ekuivalen*, $A \approx B$ jika yang satu dapat diperoleh dari yang lain dengan menggunakan *operasi elementer.*

### Contoh 6.17

Dengan menggunakan operasi elementer berturut-turut $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{31}(-1)$, maka:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada contoh 6.16, hanya digunakan operasi elementer pada baris saja, maka dikatakan ekuivalen baris. Matriks yang diperoleh jika operasi baris elementer (atau kolom) digunakan pada matriks identitas $I_n$ disebut Matriks Dasar Baris (atau kolom).

**Contoh 6.18**

Matriks dasar diperoleh dari $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ialah

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{12}\ ; H_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = K_3(k)$$

$$H_{23}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

# LATIHAN

1. $A = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
2. $A = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$
3. $2A - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
4. $3A + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + 2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$
7. $A\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

Untuk soal 8 s/d 10 tentukan matriks $A$ dan $B$

8. $A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
9. $A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, 2A - 3B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
10. $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk soal 11 s/d 14 hitung $AB\ dan\ BA$ bila mungkin

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Hitunglah $(AB)^t$ dan $B^t A^t$,, tunjukkanlah bahwa keduanya sama

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

19. Ubahlah matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ menjadi:

    Matriks segi tiga atas, dengan menggunakan operasi baris elementer.

20. Ubahlah matriks $A$ tersebut pada soal no. 1, menjadi matriks segi tiga bawah, selanjutnya ubahlah menjadi matriks diagonal.

21. Ubahlah matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ menjadi:

    a. Matriks segi tiga atas

    b. Matriks segi tiga bawah

    c. Matriks diagonal

    dengan menggunakan operasi elementer lajur dasar.