Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

Désignons par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Le carré d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est toujours positif ou nul : $x^2 \geq 0$. Ainsi, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. En fait, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Les *nombres complexes*, construits comme extension des nombres réels, furent introduits afin que de telles équations aient des solutions.
Bien que des références aux racines des nombres négatifs soient déjà apparues dans l'antiquité, les nombres complexes furent introduits à la fin du XVIe siècle par les mathématiciens italiens, et successivement formalisés par l'école française.

1.1 Le corps des nombres complexes

Dans la suite, on note $\mathfrak{i}$ un nombre ≪ *imaginaire* ≫ ayant la propriété $\mathfrak{i}^2 = -1$. Le nombre $\mathfrak{i}$, dit *unité imaginaire*, est l'une des deux solutions de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.

Définition 1.1. Un nombre *complexe* z s'écrit de façon unique sous la forme, dite *cartésienne*, suivante :

$$z = x + \mathfrak{i}y, \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Dans l'équation (1.1), x s'appelle la *partie réelle* de z, notée $x = \mathrm{Re}(z)$; y s'appelle la *partie imaginaire* de z, notée $y = \mathrm{Im}(z)$.
On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Notons qu'un nombre complexe $z = x + \mathfrak{i}y$ est réel si et seulement si $y = \mathrm{Im}(z) = 0$. Un nombre z est dit *imaginaire pur* si $x = \mathrm{Re}(z) = 0$.

1.1.1 Sommes et produits de nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes est muni d'une somme et d'un produit (qui étendent somme et produit usuels dans les nombres réels).

Définition 1.2. Soient $z = x + \mathfrak{i}y$ et $w = u + \mathfrak{i}v$ deux nombres complexes. La *somme* $z + w$ est donnée par

$$z + w = (x + \mathfrak{i}y) + (u + \mathfrak{i}v) := (x + u) + \mathfrak{i}(y + v).$$

Le *produit* zw est donné par

$$zw = (x + \mathfrak{i}y)(u + \mathfrak{i}v) = xu + \mathfrak{i}yu + \mathfrak{i}xv + \mathfrak{i}^2yv := (xu - yv) + \mathfrak{i}(yu + xv).$$

Notons que $0 = 0 + \mathrm{i}0$ est l'*élément neutre de la somme* : $z + 0 = 0 + z = z$. De même $1 = 1 + \mathrm{i} \cdot 0$ est l'*élément neutre du produit* : $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.
Notons aussi que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre réel, le produit λz est donné par

$$\lambda(x + \mathrm{i}y) = \lambda x + \mathrm{i}\lambda y.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un nombre complexe $w := -z$, dit *symétrique* de z, tel que $z + w = 0$. Si $z = x + \mathrm{i}y$, alors $-z = -x + \mathrm{i}(-y)$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, il existe un nombre complexe $w := z^{-1}$, dit *inverse* de z, tel que $zw = wz = 1$. Si $z = x + \mathrm{i}y$, on peut montrer par calcul direct que $z^{-1} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$.

1.1.2 Conjugué et module

Définition 1.3. Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.
Le *conjugué* $\overline{z}$ de z est donné par $\overline{z} = x - \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$.
Le *module* $|z|$ de z est donné par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, +\infty[$.

Notons que $|z|^2 = z\overline{z}$, ou de même $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
À partir des définitions, on obtient les relations suivantes :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}. \tag{1.2}$$

Propriétés du conjugué

Pour tous z, $w \in \mathbb{C}$, on a

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
- $\overline{\overline{z}} = z$ (on dit que l'opération $z \mapsto \overline{z}$ est *involutive*),
- $z \in \mathbb{R}$ est réel si et seulement si $z = \overline{z}$,
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Propriétés du module

Pour tous z, $w \in \mathbb{C}$, on a

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$,
- $|z| > 0$ pour tout $z \neq 0$,
- $|\overline{z}| = |z|$,
- $|zw| = |z| \cdot |w|$,
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$, et de même $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, avec égalité si et seulement si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*inégalité triangulaire*),
- $z = |z|$ si et seulement si $z \in [0, +\infty[$.

Démonstration de l'inégalité triangulaire. D'abord, notons que

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$

De plus, $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z|\,|w|$. On en déduit

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|w| = (|z| + |w|)^2.$$

On conclut en utilisant la croissance sur $[0, +\infty[$ de la fonction racine carrée. $\square$

1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1.2.1 Forme cartésienne

Définition 1.4. Considérons le plan cartésien $\mathbb{R}^2$, rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné. L'image d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est le point M de coordonnées (x, y).
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z. Le nombre complexe z s'appelle l'*affixe* du point M, ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

- Le module $|z|$ est la longueur du segment $|OM|$, c'est-à-dire, la distance entre O et M.
- L'image du conjugué $\overline{z}$ de z est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des abscisses.
- L'image de $-z$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'origine O.
- Étant donnés deux nombres complexes z, w, l'image de la somme $z + w$ est donnée par la somme des vecteurs images de z et w.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre réel, l'image de λz est donnée par le vecteur image de z multiplié par le scalaire λ.

Voir Figure 1.1 pour une représentation géométrique de ces opérations.

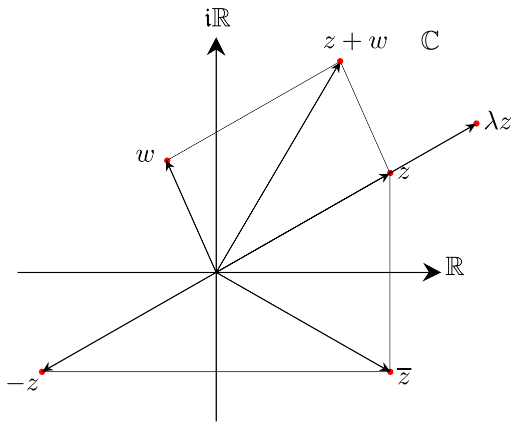


FIGURE 1.1 – Représentation géométrique en forme cartésienne, avec z, $w \in \mathbb{C}$, $\lambda > 1$.

1.2.2 Forme trigonométrique

Définition 1.5. Lorsque $z \neq 0$, l'image de z est distincte de l'origine O. On appelle *argument* de z, noté $\arg(z)$, une mesure α de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ (avec signe), bien défini à un multiple de 2π près. Si $r = |z|$ est le module de z, on a donc

$$z = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha),$$

dite *forme trigonométrique*, ou *forme polaire*, de z (voir la Figure 1.2 pour une représentation géométrique des nombres complexes sous formes cartésienne et polaire).

Comme on vient de le dire l'argument d'un nombre complexe n'est bien défini qu'à un multiple de 2π près. On aura donc besoin de la définition suivante.

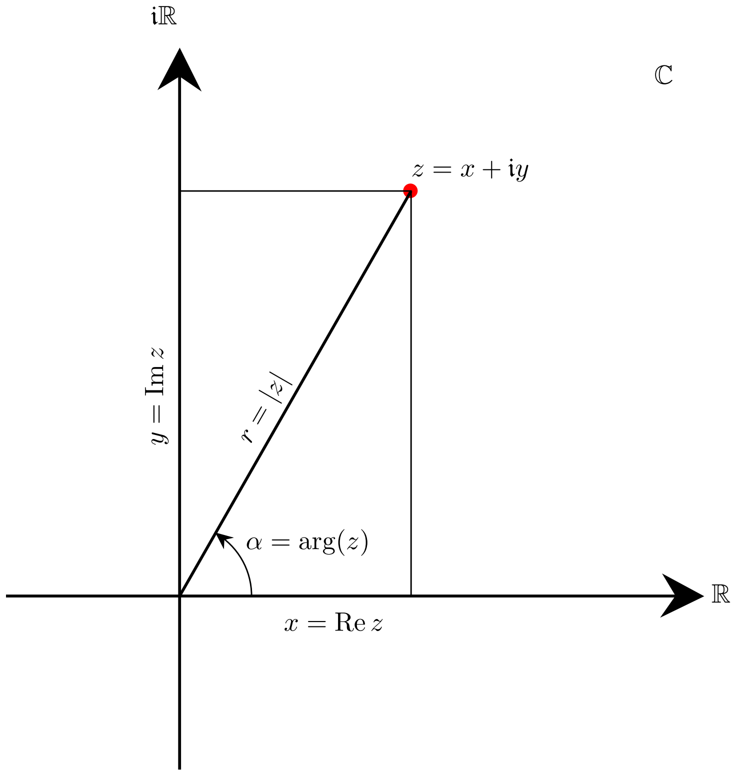


FIGURE 1.2 – Forme cartésienne et polaire d'un nombre complexe.

Définition 1.6. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels, et $h \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ un nombre réel différent de zéro. On dit que a équivaut à b modulo h, et on le note par $a \equiv b \pmod h$, ou par $a = b \pmod h$, si $a - b$ est un multiple entier de h. Autrement dit

$$a \equiv b \pmod h \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = b + kh.$$

Il y a une définition analogue pour les nombres complexes (il suffit de remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$).

Proposition 1.7. *Soient a, $b \in \mathbb{R}$, h, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $a \equiv b \pmod h$ si et seulement si $\lambda a \equiv \lambda b \pmod{\lambda h}$.*

Démonstration. On a :

$$a \equiv b \pmod h \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid a = b + kh \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \lambda a = \lambda b + k\lambda h \Longleftrightarrow \lambda a \equiv \lambda b \pmod{\lambda h}.$$

□

Étant donnée la forme trigonométrique d'un nombre complexe $z = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, on retrouve facilement la forme cartésienne $z = x + \mathrm{i}y$:

$$x = \operatorname{Re}(z) = r\cos\alpha, \quad y = \operatorname{Im}(z) = r\sin\alpha.$$

D'autre part, étant donnée la forme cartésienne $z = x + \mathrm{i}y$ d'un nombre complexe, on se ramène à la forme trigonométrique $z = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ comme suit :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}.$$

Si $x = 0$, *i.e.*, $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, on a

$$\arg(\mathrm{i}y) = \alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, on a (la fonction arctan sera définie au Chapitre 5)

$$\arg(x + \mathrm{i}y) = \alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemples 1.8.
- L'argument de 1, ou plus généralement d'un nombre réel positif, vaut $0 \pmod{2\pi}$. L'argument d'un nombre réel négatif vaut $\pi \pmod{2\pi}$.
- L'argument de l'unité imaginaire i vaut $\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Plus généralement, l'argument d'un nombre imaginaire pur vaut $\pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, selon le signe de sa partie imaginaire.
- L'argument de $1 + \mathrm{i}$ est $\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$; l'argument de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ est $-\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ est un nombre réel non nul et $z \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe, on a

$$\begin{cases} \arg(\lambda z) \equiv \arg(z) \pmod{2\pi} \text{ si } \lambda > 0, \\ \arg(\lambda z) \equiv \arg(z) + \pi \pmod{2\pi} \text{ si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Remarque 1.9. À partir de l'interprétation géométrique de la distance et de l'argument d'un nombre complexe, on obtient que l'inégalité triangulaire $|z + w| \leq |z| + |w|$ est une égalité si et seulement si $z = 0$, ou $w = 0$, ou $\arg(z) \equiv \arg(w) \pmod{2\pi}$.

Propriétés de l'argument

Pour tous z, $w \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, on a :
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$,
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$,
- $\arg(z^{-1}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$,
- $\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$,
- $\arg(z^p) \equiv p\arg(z) \pmod{2\pi}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

La seule relation non triviale est la quatrième, due aux formules d'addition trigonométrique.

Proposition 1.10 (Formules d'addition trigonométrique)**.** *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{1.3}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{1.4}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{1.5}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \tag{1.6}$$

Démonstration. On montre d'abord la relation (1.4). Considérons deux angles α et β, comme sur la Figure 1.3, les points U, A, B, C étant sur le cercle unité.
Les coordonnées des points U, A, B, C sont les suivantes :

$$U = (1, 0), \quad A = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad B = (\cos\beta, \sin\beta), \quad C = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)).$$

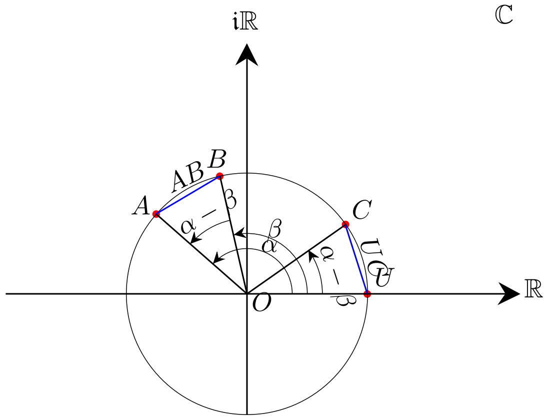


FIGURE 1.3 – Formule d'addition trigonométrique.

Notons que les triangles de sommets AOB et COU sont congruents. En faits, les longueurs OU, OA, OB, OC valent 1, *i.e.* sont égales au rayon du cercle unité. De plus, les angles $\widehat{UOC}$ et $\widehat{BOA}$ sont égaux à $\alpha - \beta$. Il s'en suit que les longueurs UC et AB sont égales. On a donc :

$$\begin{aligned}\overline{UC}^2 &= \big(\cos(\alpha-\beta)-1\big)^2 + \big(\sin(\alpha-\beta)\big)^2 \\ &= \big(\cos(\alpha-\beta)\big)^2 + 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \big(\sin(\alpha-\beta)\big)^2 \\ &= 2 - 2\cos(\alpha-\beta),\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation trigonométrique $\big(\cos(\alpha-\beta)\big)^2 + \big(\sin(\alpha-\beta)\big)^2 = 1$. De même :

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \big(\cos\alpha - \cos\beta\big)^2 + \big(\sin\alpha - \sin\beta\big)^2 \\ &= (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 - 2\cos\alpha\cos\beta + (\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 - 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

On en déduit l'équation (1.4).

Pour montrer l'équation (1.3), il suffit prendre l'équation (1.4) pour α et $-\beta$ et de se rappeler que $\cos(-\beta) = \cos\beta$ et $\sin(-\beta) = -\sin\beta$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Pour montrer l'équation (1.5), on utilise les rélations $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ comme suit :

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

ainsi que (1.4).
Enfin, l'équation (1.6) est obtenue à partir de (1.5), en remplaçant β par $-\beta$ comme précédemment.

□

1.2.3 Forme exponentielle

La *formule d'Euler*

$$e^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \tag{1.7}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, nous permet d'écrire un nombre complexe sous *forme exponentielle*. En effet, soit z un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique $z = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$; la formule d'Euler (1.7) permet d'écrire

$$z = re^{\mathrm{i}\alpha},$$

où $r \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Par les formules d'addition trigonométriques, si $z = re^{\mathrm{i}\alpha}$ et $w = se^{\mathrm{i}\beta}$, on a

$$zw = rse^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)};$$

donc les modules se multiplient, et les arguments s'aditionnent. On a obtenu une interprétation géométrique du produit de deux nombres complexes (voir Figure 1.4).

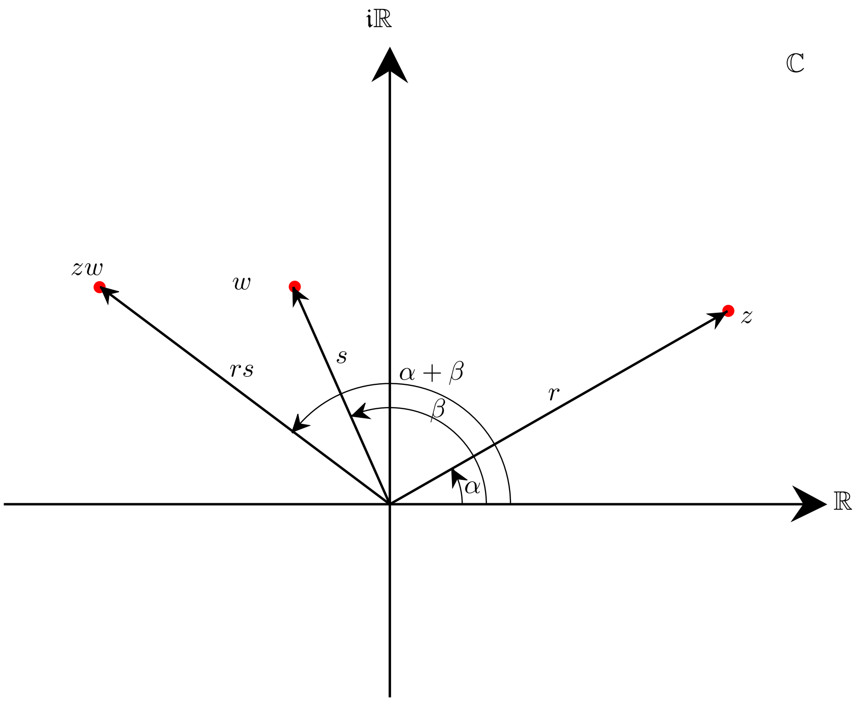


FIGURE 1.4 – Produit de deux nombres complexes.

Remarque 1.11. Attention (1.7) est une convention d'écriture : on montrera en seconde année que l'on peut donner un sens intrinsèque à $\exp z$ pour z dans $\mathbb{C}$.

Remarque 1.12. Notons que, comme la forme trigonométrique, la forme exponentielle n'est pas déterminée de manière unique. En effet $re^{\mathrm{i}\alpha}$ et $se^{\mathrm{i}\beta}$ déterminent le même nombre complexe si et seulement si $r = s > 0$ et $\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$, ou $r = s = 0$.

Propriétés de la forme exponentielle.

Notons que si $z = re^{\mathrm{i}\alpha}$, alors

- $\overline{z} = re^{-\mathrm{i}\alpha}$,
- $-z = re^{\mathrm{i}(\alpha+\pi)}$,
- $|z| = r$,
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-\mathrm{i}\alpha}$,
- $z^p = r^p e^{\mathrm{i}p\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

1.3 Solutions d'équations polynomiales

1.3.1 Équations de premier degré

Considerons d'abord une équation de premier degré :

$$az + b = 0,$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. De façon directe, on trouve que l'unique solution d'une telle équation est donnée par

$$z_1 = -\frac{b}{a}.$$

Remarque 1.13. Notons qu'on a

$$az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right) = a(z - z_1),$$

où z_1 est la solution de l'équation $az + b = 0$.

Avant de passer au cas des équations du second degré commençons par un cas particulier, celui des racines carrées.

1.3.2 Racines carrées

Soit $w \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On veut trouver les solutions complexes de $z^2 = w$.

Méthode exponentielle.

Écrivons $z = re^{\mathrm{i}\alpha}$ et $w = se^{\mathrm{i}\beta}$ sous forme exponentielle. On a $z^2 = w$ si et seulement si

$$r^2 e^{\mathrm{i}2\alpha} = z^2 = w = se^{\mathrm{i}\beta},$$

d'où on obtient

$$r = \sqrt{s}, \quad 2\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi},$$

c'est-à-dire $\alpha = \beta/2 \bmod \pi$, soit $\alpha = \beta/2 \bmod 2\pi$ ou $\alpha = \beta/2 + \pi \bmod 2\pi$ (Proposition 1.7). Donc les racines carrées de $w = se^{\mathrm{i}\beta}$ sont données par

$$\pm\sqrt{s}e^{\mathrm{i}\beta/2},$$

car $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$ (voir aussi Remarque 1.16).
Voir Figure 1.5 pour une représentation géométrique de la méthode exponentielle.

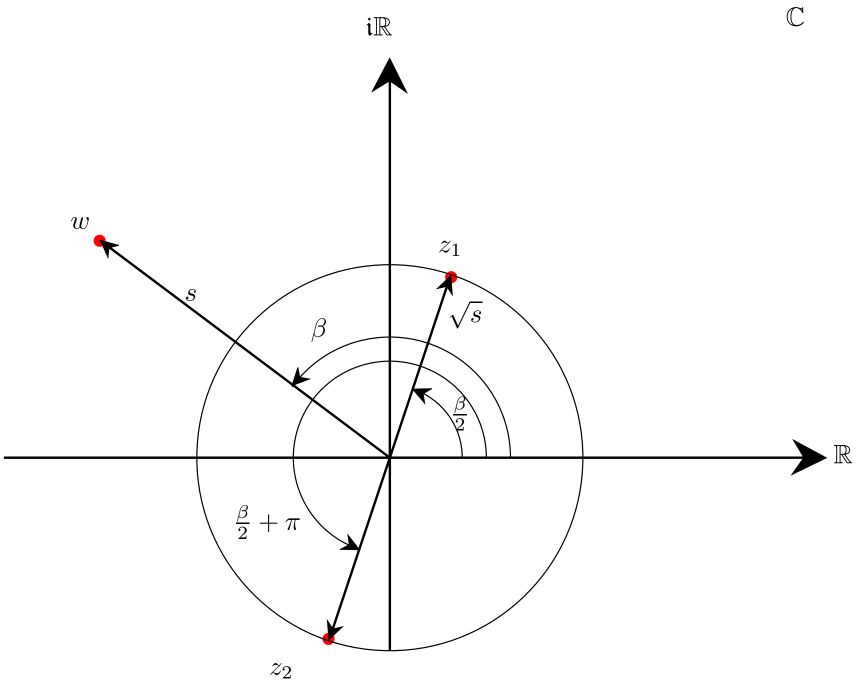


FIGURE 1.5 – Racines carrées d'un nombre complexe $w = se^{i\beta}$.

Méthode cartésienne.

Écrivons $z = x + iy$ et $w = u + iv$ sous forme cartésienne. On a $z^2 = w$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u, \\ 2xy = v. \end{cases}$$

De plus, on a

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |w| = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

À partir des première et troisième équations on a : $2x^2 = u + \sqrt{u^2+v^2}$ et $2y^2 = \sqrt{u^2+v^2} - u$; on obtient donc x et y au signe près (rappelons que $x, y \in \mathbb{R}$). La deuxième équation nous permet de déterminer les signes respectifs de x et y.

Exemple 1.14. On veut déterminer les racines carrées de $w = 1 + i$, *i.e.* on veut trouver les solutions $z = x + iy$ de l'équation $z^2 = w$. Il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) = 1, \\ x^2 + y^2 = |w| = \sqrt{2}, \\ 2xy = \mathrm{Im}(w) = 1. \end{cases}$$

On a donc $2x^2 = 1 + \sqrt{2}$, $2y^2 = \sqrt{2} - 1$, et x, y sont de même signe, car $xy = \frac{1}{2} > 0$.
Par conséquent ou bien $x = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, y = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$, ou bien $x = -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$.
Si on écrit w sous forme exponentielle, on obtient $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de w sont données par $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i5\pi/8} = -z_1$.

La formule d'Euler (1.7) implique que

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,\mathrm{Re}(z_1) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,\mathrm{Im}(z_1) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Comparer les résultats avec la Figure 1.9.

1.3.3 Équations du second degré

Pour les équations du second degré, on a l'énoncé suivant.

Théorème 1.15. *Les solutions d'une équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0, \tag{1.8}$$

avec a, b, $c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, sont données par

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}, \tag{1.9}$$

où δ est un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta := b^2 - 4ac$. Le nombre Δ est dit discriminant *de l'équation* (1.8).

Remarque 1.16. Notons que si δ_1 est une solution de $\delta^2 = \Delta$, alors $\delta_2 = -\delta_1$ est une autre solution de la même équation. En fait,

$$\delta_2^2 = (-\delta_1)^2 = (-1)^2\delta_1^2 = 1 \cdot \Delta = \Delta.$$

Cette remarque justifie le signe $\pm$ dans (1.9), en accord avec la notation commune $\sqrt{\Delta} \geq 0$ quand $\Delta \geq 0$ est un réel positif.

Remarque 1.17. En littérature (UNIQUEMENT dans la littérature étrangère, en particulier pas dans la littérature française qui est celle qui nous sert de référence), on peut trouver la notation $\sqrt{w}$ avec $w \in \mathbb{C}$ un nombre complexe quelconque. Dans ce cas, $\sqrt{w}$ indique n'importe quelle solution complexe de l'équation $z^2 = w$.

Démonstration. Appliquons la « méthode de complétion du carré » à l'équation (1.8), comme suit

$$0 = az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

Notons $w = z + b/2a$. On obtient alors

$$w^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\pm\frac{\delta}{2a}\right)^2,$$

soit

$$w^2 - \left(\pm\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \iff \left(w - \frac{\delta}{2a}\right)\left(w + \frac{\delta}{2a}\right) = 0,$$

d'où on déduit

$$z = w - \frac{b}{2a} = \frac{\pm\delta}{2a} - \frac{b}{2a}.$$

□

Remarque 1.18. Si z_1, z_2 sont les solutions complexes d'une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, données par (1.9), alors on a

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

On en déduit que $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Remarque 1.19. Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré ; notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors les deux solutions z_1, z_2 données par (1.9) coïncident ($z_1 = z_2$) si et seulement si $\Delta = 0$. Dans ce cas on dit que l'équation admet une solution *de multiplicité* 2. En fait, on peut écrire

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2.$$

Exemple 1.20. Considerons l'équation du second degré

$$z^2 + 2z + 1 + \mathfrak{i} = 0 \tag{1.10}$$

D'après le Théorème 1.15, les solutions sont données par

$$z = \frac{-2 \pm \delta}{2} = -1 \pm \frac{\delta}{2}, \quad \text{où} \quad \delta^2 = 4 - 4(1 + \mathfrak{i}) = -4\mathfrak{i}.$$

Il nous faut donc calculer les deux racines carrées $\pm\delta/2$ de $-\mathfrak{i}$.
En suivant la méthode exponentielle, on a $-\mathfrak{i} = 1 \cdot e^{-\mathfrak{i}\pi/2}$. Par suite les solutions sont données par $\pm e^{-\mathfrak{i}\pi/4}$.
La formule d'Euler (1.7) assure que $e^{-\mathfrak{i}\pi/4} = \cos(-\pi/4) + \mathfrak{i}\sin(-\pi/4) = \sqrt{2}/2 - \mathfrak{i}\sqrt{2}/2$.
On pouvait aussi suivre la méthode cartésienne. Les solutions de l'équation $(x+\mathfrak{i}y)^2 = -\mathfrak{i}$ satisfont

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(-\mathfrak{i}) = 0, \\ x^2 + y^2 = |-\mathfrak{i}| = 1, \\ 2xy = \mathrm{Im}(-\mathfrak{i}) = -1, \end{cases}$$

d'où on déduit $x^2 = y^2 = 1/2$ et x, y sont de signes opposés car $xy = -1/2 < 0$; par conséquent ou bien $x = -y = \sqrt{2}/2$, ou bien $x = -y = -\sqrt{2}/2$.
Pour résumer, les deux solutions de l'équation (1.10) sont données par

$$z_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathfrak{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathfrak{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2) &= \left(z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathfrak{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathfrak{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= (z+1)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathfrak{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= z^2 + 2z + 1 + \mathfrak{i}. \end{aligned}$$

1.3.4 Racines n-ièmes

On veut résoudre l'équation $z^n = w$ pour un nombre complexe w donné.

L'écriture sous forme exponentielle de $z = re^{\mathrm{i}\alpha}$ et $w = se^{\mathrm{i}\beta}$ permet de montrer que $r = \sqrt[n]{s}$ et $n\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi}$. Les solutions sont données par $\alpha \equiv \frac{\beta}{n} \left(\mathrm{mod}\, \frac{2\pi}{n}\right)$ (Proposition 1.7), c'est-à-dire, par $\alpha = \frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, pour $k \in \mathbb{Z}$. On constate que lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$ on obtient n solutions distinctes ; on peut donc par exemple supposer que $k = 0, \ldots, n-1$.
Géométriquement, on peut noter que les solutions de $z^n = w$ appartiennent au cercle de centre 0 et rayon $\sqrt[n]{|w|}$ et forment un polygone régulier à n côtés.

Exemple 1.21. On cherche à trouver les racines 3-ièmes de $8\mathrm{i}$ (voir la Figure 1.6). On veut donc résoudre $z^3 = 8\mathrm{i} = 8e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. On obtient $z = re^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $r = \sqrt[3]{8} = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, avec $k = 0, 1, 2$. Ainsi

$$z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = 2e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = 2e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}.$$

Sous forme cartésienne, on obtient

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \\
z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \\
z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

On peut verifier directement ces solutions :

$$(\pm\sqrt{3} + \mathrm{i})^3 = \pm 3\sqrt{3} + 9\mathrm{i} \pm 3\sqrt{3}\ \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 8\mathrm{i}, \quad (-2\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}^3 = 8\mathrm{i}.$$

Remarquons que les trois solutions forment les sommets d'un triangle équilatéral centré à l'origine (voir Figure 1.6). Notons qu'on a aussi $z_1 z_2 z_3 = 8\mathrm{i}$ et $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Ces faits sont généraux (voir Proposition 1.30).

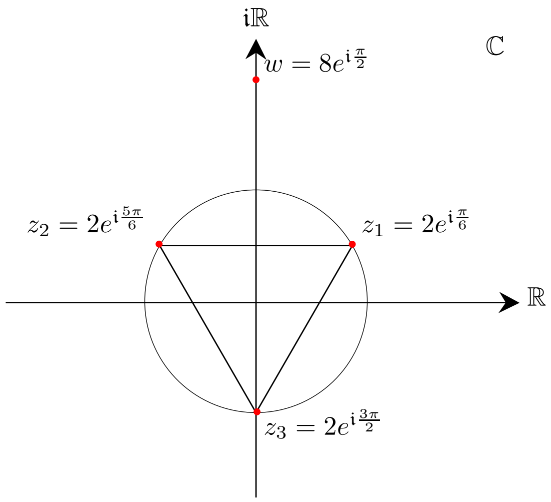


FIGURE 1.6 – Racines 3-ièmes de $w = 8\mathrm{i}$.

Racines n-ièmes de l'unité

Un cas particulier de racine d'un nombre complexe est donné par les racines de l'unité 1.

Comme précédemment, les solutions de $z^n = 1$ sont données par

$$z = e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, appartiennent au cercle de rayon 1, et l'une de ces racines est 1.
En notation cartésienne, on obtient

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Exemples 1.22. On écrit de façon explicite les racines n-ièmes de l'unité pour $n = 1, \ldots, 5$ (voir aussi Figure 1.7).

- La seule solution de $z = 1$ est $z_0 = e^0 = 1$.
- Les solutions de $z^2 = 1$ sont $z_0 = e^0 = 1$ et $z_1 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, et elles forment les sommets d'un segment qui passe par l'origine.
- Les solutions de $z^3 = 1$ sont

  $$z_0 = e^0 = 1, \quad z_1 = e^{\mathrm{i}2\pi/3} = \Big(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\Big)/2, \quad z_2 = e^{\mathrm{i}4\pi/3} = \Big(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\Big)/2;$$

  elles forment les sommets d'un triangle équilatéral.
- Les solutions de $z^4 = 1$ sont $z_0 = e^0 = 1$, $z_1 = e^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $z_3 = e^{\mathrm{i}3\pi/2} = -\mathrm{i}$; elles forment les sommets d'un carré.
- Les solutions de $z^5 = 1$ sont $z_0 = e^0 = 1$, $z_1 = e^{\mathrm{i}2\pi/5}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}4\pi/5}$, $z_3 = e^{\mathrm{i}6\pi/5}$ et $z_4 = e^{\mathrm{i}8\pi/5}$; elles forment les sommets d'un pentagone régulier.

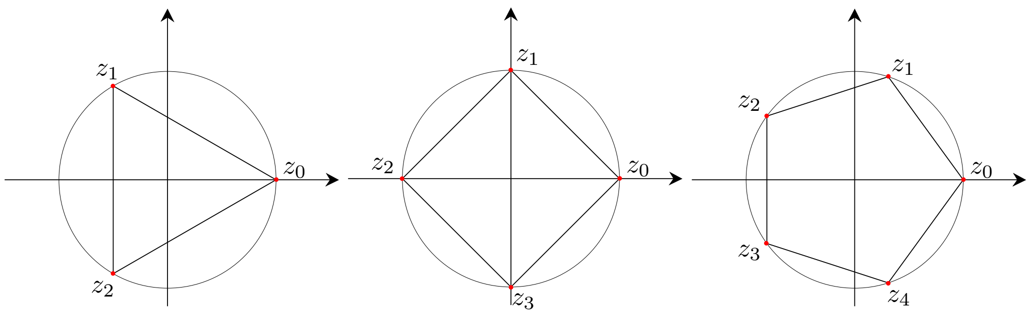


FIGURE 1.7 – Racines 3-ièmes, 4-ièmes, 5-ièmes de l'unité.

Remarquons que, si η est une racine n-ième de l'unité, alors η^k est une racine n-ième de l'unité pour tout k. En fait, si $\eta^n = 1$, on a $(\eta^k)^n = \eta^{kn} = (\eta^n)^k = 1^k = 1$.

Définition 1.23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine n-ième η de l'unité est dite *primitive* si $\eta^m \neq 1$ pour tout $0 < m < n$.

Proposition 1.24. *Soit η une racine n-ième de l'unité. La racine η est primitive si et seulement si toutes les racines n-ièmes de l'unité sont données par $\{\eta^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*

La Proposition 1.24 reste valable si on écrit $k = 1, \ldots, n$ à la place de $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour l'implication directe, il suffit de montrer que si η est primitive, alors $\eta^k \neq \eta^h$ pour tout $1 \leq k,\, h \leq n,\, h \neq k$. Supposons que $\eta^k = \eta^h$ avec $1 \leq k < h \leq n$. Alors $\eta^{h-k} = 1$ avec $1 \leq h - k < n$, ce qui contredit le fait que η est une racine primitive.
Pour l'implication inverse, supposons qu'il existe $m < n$ tel que $\eta^m = 1$. Mais alors $\eta^k = \eta^{k+m}$ pour tout k, et l'ensemble $S = \{\eta^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ contient au plus m éléments différents. Mais il existe $n > m$ racines n-ièmes distintes, donc S ne contient pas toutes les racines n-ièmes de l'unité : contradiction. □

Remarque 1.25. Notons que $z_0 = 1$ est une racine n-ième de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais elle n'est jamais primitive pour $n \geq 2$.

Exemples 1.26.

- Cas $n = 2$. La racine $z_0 = 1$ n'est pas primitive, car $z_0^1 = 1$, mais $z_1 = -1$ est bien primitive, car $z_1^1 = -1 \neq 1$.
- Cas $n = 3$. Soient $z_0 = e^0 = 1$, $z_1 = e^{\mathrm{i}2\pi/3} = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, $z_2 = e^{\mathrm{i}4\pi/3} = (-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ les trois racines cubiques de l'unité. Notons que $z_1^2 = z_2$ et $z_2^2 = z_1$. La Proposition 1.24 assure que z_0 n'est pas primitive, par contre z_1 et z_2 sont des racines cubiques primitives.
- Cas $n = 4$. Soient $z_0 = e^0 = 1$, $z_1 = e^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $z_3 = e^{\mathrm{i}3\pi/2} = -\mathrm{i}$ les racines quatrièmes de l'unité. Notons que $z_1^2 = z_2$, $z_1^3 = z_3$. Par la Proposition 1.24, z_1 est primitive. De même façon, z_3 est primitive. Comme $z_2^2 = (-1)^2 = 1$, par définition z_2 n'est pas une racine quatrième primitive. Enfin $z_0 = 1$ n'est pas non plus primitive.
- Cas $n = 5$. Soient $z_0 = e^0 = 1$, $z_1 = e^{\mathrm{i}2\pi/5}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}4\pi/5}$, $z_3 = e^{\mathrm{i}6\pi/5}$, $z_4 = e^{\mathrm{i}8\pi/5}$. Les racines z_1 et z_4 sont primitives. On note aussi que $z_2^2 = z_4$, $z_2^3 = z_1$ et $z_2^4 = z_3$, d'où on en déduit que z_2 est primitive. De même z_3 est primitive.
- Considérons les racines 6-ièmes de l'unité (Figure 1.8). Elles sont données par $z_k = e^{\mathrm{i}\pi k/3}$, avec $k = 0, \ldots, 5$, soit sous forme cartésienne, on a $z_0 = 1$, $z_1 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, $z_2 = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, $z_3 = -1$, $z_4 = (-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, $z_5 = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})/2$.
  Les racines z_1 et z_5 sont primitives. En effet $z_1^k = (e^{\mathrm{i}\pi/3})^k = e^{\mathrm{i}\pi k/3} = z_k$, et de même $z_5^k = e^{\mathrm{i}5k\pi/3}$, donc $z_5^k = z_{6-k}$ pour $k = 1, \ldots, 6$.
  Par contre, z_0, z_2, z_3, z_4 ne sont pas primitives. En fait, $z_0 = z_2^3 = z_3^2 = z_4^3 = 1$.
  On obtient $\{z_0^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1\}$, $\{z_2^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1, z_2, z_4\}$ (les racines cubiques de l'unité), $\{z_3^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1, -1\}$ (les racines carrées de l'unité), $\{z_4^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1, z_2, z_4\}$ (encore les racines cubiques de l'unité).

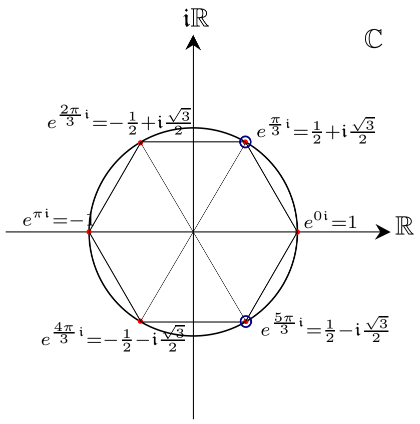


FIGURE 1.8 – Racines 6-ièmes de l'unité. Les racines primitives sont entourées

Remarque 1.27. À partir de la Proposition 1.24 on obtient que $e^{\mathrm{i}2\pi/n}$ et $e^{-\mathrm{i}2\pi/n}$ sont toujours racines primitives n-ièmes de l'unité.
Notons aussi que si z est une racine n-ième d'un nombre complexe w, les autres racines sont données par les nombres $z\eta$, où η varie parmi les racines n-ièmes de l'unité. En effet $(z\eta)^n = z^n\eta^n = w \cdot 1 = w$.
Si η est une racine n-ième primitive de l'unité, toutes les racines n-ièmes de w sont données par $z\eta^k$ avec $k = 0, \dots, n-1$.

Remarque 1.28. Notons que $e^{\mathrm{i}2\pi k/n}$ est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement si k et n sont premiers entre eux.

Exemple 1.29. Dans cet exemple, on va calculer (sous forme cartésienne) les racines 6-ièmes de $8\mathrm{i}$, et on va en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. On pourra comparer ces resultats avec la Figure 1.9.
Les racines 6-ièmes de $8\mathrm{i}$ sont données sous forme exponentielle par

$$w_0 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}, w_1 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}, w_2 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{12}},$$
$$w_3 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}, w_4 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{12}}, w_5 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{21\pi}{12}}.$$

Parmi ces solutions, on sait écrire sous forme cartésienne $w_2 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}3\pi/4} = -1+\mathrm{i}$, et $w_5 = -w_2 = 1-\mathrm{i}$.
On en déduit que $w_0 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/12} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}21\pi/12}e^{\mathrm{i}4\pi/12} = w_5\eta$, où $\eta = z_1 = e^{\mathrm{i}\pi/3} = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2$ est une des racines 6-ièmes primitives de l'unité donnée dans l'Exemple 1.26. On a donc

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

d'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Propriétés des racines n-ièmes.

Soient $w \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $z_1, \dots, z_n$ les racines n-ièmes de w. On peut montrer que

$$z^n - w = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k).$$

Une preuve de ce résultat suit de l'algorithme de division des polynômes, qui nous dit que si $p(z)$ est un polynôme tel que $p(z_0) = 0$, alors $(z - z_0)$ divise $p(z)$. Par récurrence sur le nombre des racines, on obtient le résultat.
De cette formule, on déduit les propriétés suivantes.

Proposition 1.30. *Soient $w \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $z_1, \dots, z_n$ ses racines n-ièmes. Alors on a*

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^{n+1}w, \quad \sum_{k=1}^{n} z_k = 0. \tag{1.11}$$

Démonstration. Écrivons $w = se^{\mathrm{i}\beta}$ sous forme exponentielle. On a vu que $z_k = \sqrt[n]{s}e^{\mathrm{i}\frac{\beta+2k\pi}{n}}$. D'une part

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{s}e^{\mathrm{i}\frac{\beta+2k\pi}{n}} = se^{\mathrm{i}\beta}e^{(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\sum_k k)} = we^{\mathrm{i}\pi(n+1)} = (-1)^{n+1}w,$$

où on a utilisé la propriété $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
D'autre part, soit $S = \sum_{k=1}^{n} z_k$, et soit $\eta = e^{\mathrm{i}2\pi/n}$ une racine primitive n-ième de 1. On a

$$S = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \eta z_k = \eta S,$$

d'oú $S = 0$, car $\eta \neq 1$. □

1.4 Applications à la trigonométrie

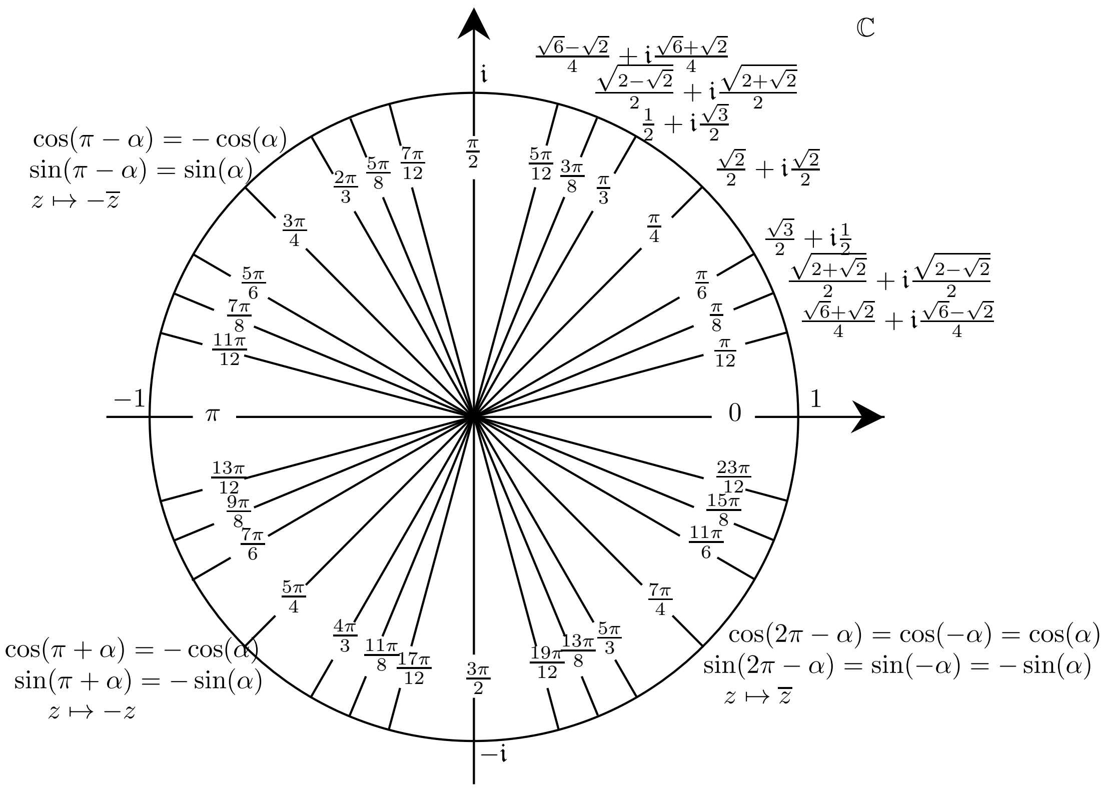


FIGURE 1.9 – Expression de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ pour certains angles $\alpha \in [0, 2\pi]$ sous forme cartésienne $z = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha) = e^{\mathrm{i}\alpha}$.

1.4.1 Formules d'Euler et de Moivre

La formule d'Euler (1.7) et les équations (1.2) permettent d'exprimer le cosinus et le sinus d'un angle en termes d'exponentielles complexes :

$$\cos\alpha = \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\alpha}) = \frac{e^{\mathrm{i}\alpha} + e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}\alpha}) = \frac{e^{\mathrm{i}\alpha} - e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}. \tag{1.12}$$

Ces formules sont toujours appelées *formules d'Euler*.
De la formule d'Euler (voir aussi (1.16)), on déduit aussi la *formule de Moivre* :

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + \mathrm{i}\sin(n\alpha) \tag{1.13}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet on a

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = (e^{\mathrm{i}\alpha})^n = e^{\mathrm{i}n\alpha} = \cos(n\alpha) + \mathrm{i}\sin(n\alpha).$$

1.4.2 Formule du binôme de Newton

Définition 1.31. Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers. On définit le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ (lu « k parmi n ») le nombre

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

où $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ est la *factorielle* de n. On pose par convention $0! := 1$.
Dans la littérature, la notation C_n^k à la place de $\binom{n}{k}$ est également utilisée.

Le coefficient binomial nous donne le nombre des parties de cardinalité k dans un ensemble de cardinalité n (voir Chapitre 2).
Notons que, directement de la définition, on a

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

De plus, les coefficients binomiaux satisfont la propriété suivante.

Lemme 1.32. *Soient n, $h \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq h \leq n$. Alors*

$$\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} = \binom{n+1}{h}.$$

Démonstration. Par calcul direct, on a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} &= \frac{n!}{(h-1)!(n-h+1)!} + \frac{n!}{h!(n-h)!} \\
&= \frac{n!}{(h-1)!(n-h)!}\left(\frac{1}{n-h+1} + \frac{1}{h}\right) \\
&= \frac{n!}{(h-1)!(n-h)!}\left(\frac{n+1}{h(n-h+1)}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{h!(n+1-h)!} \\
&= \binom{n+1}{h}.
\end{aligned}$$

□

Ce lemme nous permet de calculer les coefficients binomiaux, et construire ce qu'on appelle le *triangle de Pascal* :

$$\begin{array}{c}
\swarrow h{=}0 \\
\xrightarrow{n=0} \binom{0}{0} \qquad\qquad \swarrow h{=}1 \\
\xrightarrow{n=1} \binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1} \qquad\qquad \swarrow h{=}2 \\
\xrightarrow{n=2} \binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2} \qquad\qquad \swarrow h{=}3 \\
\xrightarrow{n=3} \binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3} \qquad\qquad \swarrow h{=}4 \\
\xrightarrow{n=4} \binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \qquad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5} \\
\iddots\;\ddots \quad \iddots\;\ddots \quad \iddots\;\ddots \quad \iddots\;\ddots \quad \iddots\;\ddots \quad \iddots\;\ddots
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \qquad 1 \\
1 \qquad 2 \qquad 1 \\
1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\
1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1 \\
1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \\
\iddots\ddots \quad \iddots\ddots \quad \iddots\ddots \quad \iddots\ddots \quad \iddots\ddots \quad \iddots\ddots
\end{array}$$

On peut finalement montrer la *formule du binôme de Newton*.

Théorème 1.33. *Soient z, $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}. \tag{1.14}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $1 = (z+w)^0 = \binom{0}{0} z^0 w^0 = 1$ est bien verifié. Supposons que l'équation (1.14) soit vérifiée pour n, et montrons-la pour $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}(z+w)^{n+1} &= (z+w)(z+w)^n = (z+w)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{k+1}w^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k+1}\\ &= \sum_{h=0}^{n+1}\left(\binom{n}{h-1}+\binom{n}{h}\right) z^h w^{n+1-h},\end{aligned}$$

où on pose $\binom{n}{h} = 0$ si $h < 0$ ou si $h > n$. Le Lemme 1.32 assure que $\binom{n}{h-1}+\binom{n}{h} = \binom{n+1}{h}$ d'où ((1.14)). □

1.4.3 Applications

Écrire $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de puissances de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

En utilisant la formule de Moivre, on peut écrire $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de puissances de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
Pour $n = 2$, on obtient

$$\cos(2\alpha) + \mathfrak{i}\sin(2\alpha) = (\cos\alpha + \mathfrak{i}\sin\alpha)^2 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \mathfrak{i}(2\cos\alpha\sin\alpha)$$

d'où

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha. \tag{1.15}$$

Pour $n = 3$, on obtient

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) + \mathfrak{i}\sin(3\alpha) &= (\cos\alpha + \mathfrak{i}\sin\alpha)^3\\ &= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + \mathfrak{i}(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\\ \sin(3\alpha) &= 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Des formules analogues peuvent être obtenues pour tout n :

$$\begin{aligned}\cos(2n\alpha) &= \sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{2n}{2h}\cos^{2(n-h)}\alpha\sin^{2h}\alpha,\\ \sin(2n\alpha) &= \sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\binom{2n}{2h+1}\cos^{2(n-h)-1}\alpha\sin^{2h+1}\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos((2n+1)\alpha) &= \sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{2n+1}{2h}\cos^{2(n-h)+1}\alpha\sin^{2h}\alpha,\\ \sin((2n+1)\alpha) &= \sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{2n+1}{2h+1}\cos^{2(n-h)}\alpha\sin^{2h+1}\alpha.\end{aligned}$$

À partir des formules précédentes, on obtient les formules suivantes pour la fonction tangente :

$$\begin{aligned}
\tan(2\alpha) &= \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\\
\tan(3\alpha) &= \frac{\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)} = \frac{3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha},\\
\tan(2n\alpha) &= \frac{\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\binom{2n}{2h+1}\tan^{2h+1}\alpha}{\displaystyle\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{2n}{2h}\tan^{2h}\alpha},\\
\tan((2n+1)\alpha) &= \frac{\displaystyle\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{2n+1}{2h+1}\tan^{2h+1}\alpha}{\displaystyle\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{2n+1}{2h}\tan^{2h}\alpha}.
\end{aligned}$$

Notons qu'on peut aussi exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$, comme suit :

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},\\
\sin(2\alpha) &= 2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Linéarisation de $\cos^n\alpha$ et $\sin^n\alpha$.

On veut exprimer $\cos^n\alpha$ et $\sin^n\alpha$ comme combinaison linéaire de $\cos(k\alpha)$ et $\sin(k\alpha)$ pour certains entiers k.
Les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton permettent d'établir que :

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2i\alpha}+2+e^{-2i\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}}{2}\right)+1\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha)+1\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2i\alpha}-2+e^{-2i\alpha}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}}{2}\right)-1\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\alpha)\right).
\end{aligned}$$

On retrouve (1.15).
De manière analogue, pour $n = 3$ on obtient

$$\begin{aligned}\cos^3\alpha &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}\alpha}+e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3\mathrm{i}\alpha}+3e^{\mathrm{i}\alpha}+3e^{-\mathrm{i}\alpha}+e^{-3\mathrm{i}\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{e^{3\mathrm{i}\alpha}+e^{-3\mathrm{i}\alpha}}{2}\right)+3\left(\frac{e^{\mathrm{i}\alpha}+e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos(3\alpha)+3\cos\alpha\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3\alpha &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}\alpha}-e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(e^{3\mathrm{i}\alpha}-3e^{\mathrm{i}\alpha}+3e^{-\mathrm{i}\alpha}-e^{-3\mathrm{i}\alpha}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\left(\frac{e^{3\mathrm{i}\alpha}-e^{-3\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}\right)-3\left(\frac{e^{\mathrm{i}\alpha}-e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(-\sin(3\alpha)+3\sin\alpha\right).\end{aligned}$$

En général, on peut montrer les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\cos^{2n}\alpha &= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n}+\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{n-h}\cos(2h\alpha)\right),\\ \sin^{2n}\alpha &= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n}+\sum_{h=1}^{n}(-1)^h\binom{2n}{n-h}\cos(2h\alpha)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^{2n+1}\alpha &= \frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{h=0}^{n}\binom{2n+1}{n-h}\cos\big((2h+1)\alpha\big)\right),\\ \sin^{2n+1}\alpha &= \frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\binom{2n+1}{n-h}\sin\big((2h+1)\alpha\big)\right).\end{aligned}$$

Exponentielle complexe

La formule d'Euler (1.7) nous permet de définir l'*exponentielle* d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ comme suit :

$$e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x \cdot e^{\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

L'exponentielle complexe étend l'exponentielle réelle (voir le Chapitre 5), car si $z = x + \mathrm{i}0$, alors

$$e^z = e^{x+\mathrm{i}0} = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = e^x(1+\mathrm{i}0) = e^x.$$

De plus, étant donnés deux nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $w = u + \mathrm{i}v$, grâce aux propriétés de l'argument et des formules d'addition trigonométrique, on obtient

$$\begin{aligned}e^{z+w} &= e^{(x+u)+\mathrm{i}(y+v)} = e^{x+u}\big(\cos(y+v)+\mathrm{i}\sin(y+v)\big)\\ &= e^x e^u\big((\cos y\cos v-\sin y\sin v)+\mathrm{i}(\cos y\sin v+\sin y\cos v)\big)\\ &= e^x e^u(\cos y+\mathrm{i}\sin y)(\cos v+\mathrm{i}\sin v)\\ &= e^z e^w.\end{aligned}$$

Par suite l'exponentielle complexe d'une somme satisfait la même propriété formelle que l'exponentielle réelle.
On en déduit (par récurrence sur $|n|$) la propriété

$$(e^z)^n = e^{nz} \tag{1.16}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.34. Notons que deux nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $w = u + \mathrm{i}v$ ont la même exponentielle $e^z = e^w$ si et seulement si

$$x = u, \quad y \equiv v \pmod{2\pi},$$

c'est-à-dire $y = v + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Autres applications

Exemple 1.35. On calcule la forme cartésienne de $\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{16}$. En forme exponentielle, $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{\mathrm{i}\pi/3}$. Donc $(e^{\mathrm{i}\pi/3})^{16} = e^{\mathrm{i}16\pi/3}$.
Notons que $16\pi/3 = 4\pi + 4\pi/3$ Donc

$$e^{\mathrm{i}16\pi/3} = e^{\mathrm{i}4\pi/3} = \cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 1.36. On veut calculer la somme trigonométrique de la forme $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha)$.
Notons que cette somme est la partie réelle de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \big(\cos(k\alpha) + \mathrm{i}\sin(k\alpha)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}k\alpha} =: S_n.$$

La dernière somme n'est autre que la somme des n premiers termes d'une progression géométrique [1] de premier terme 1 et raison $e^{\mathrm{i}\alpha}$. Si $e^{\mathrm{i}\alpha} = 1$, c'est-à-dire $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, alors $S_n = n$. Supposons que $e^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$. Alors on a

$$S_n = \frac{1 - e^{\mathrm{i}n\alpha}}{1 - e^{\mathrm{i}\alpha}} = \frac{e^{\mathrm{i}n\alpha/2}\big(e^{-\mathrm{i}n\alpha/2} - e^{\mathrm{i}n\alpha/2}\big)}{e^{\mathrm{i}\alpha/2}\big(e^{-\mathrm{i}\alpha/2} - e^{\mathrm{i}\alpha/2}\big)} = e^{\mathrm{i}(n-1)\alpha/2}\,\frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

et il en résulte que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha) = \mathrm{Re}(S_n) = \cos((n-1)\alpha/2)\,\frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}.$$

1.5 Exercices

Questions de cours.

(a) Donner la définition de nombre complexe sous forme cartésienne (ou algébrique).

(b) Donner la définition de partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

(c) Définir la somme et le produit de deux nombres complexes sous forme cartésienne.

(d) Définir le conjugué et le module d'un nombre complexe.

(e) Que signifie « deux nombres réels a, b sont équivalents modulo $h \in]0, +\infty[$ » ?

(f) Donner la définition d'argument d'un nombre complexe.

(g) Décrire les formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.

(h) Décrire le produit de deux nombres complexes sous forme exponentielle.

---

1. Rappelons que si $q \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$.

(i) Donner la formule de résolution d'une équation de second degré à coefficients complexes. Quel est le discriminant d'une telle équation ?

(j) Décrire la méthode cartésienne pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe.

(k) Décrire la méthode exponentielle pour trouver les racines n-ièmes d'un nombre complexe.

(l) Donner la définition de racine primitive de l'unité.

(m) Énoncer les formules d'Euler.

(n) Énoncer la formule de Moivre.

(o) Soit n un entier, définir $n!$, *i.e.* « factoriel n ». Définir les coefficients binomiaux.

(p) Énoncer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1.1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(a) $\dfrac{2}{1-2\mathrm{i}}$, (b) $\dfrac{1}{1-2\mathrm{i}}+\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}$, (c) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$,

(d) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$, (e) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$, (f) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-\dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

Exercice 1.2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

(a) $-3\sqrt{2}$, (b) $\pi\mathrm{i}$, (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$,

(d) $(1-\mathrm{i})^9$, (e) $(\sqrt{5}-\mathrm{i})(\sqrt{5}+\mathrm{i})$, (f) $e^{3+4\mathrm{i}}$.

Exercice 1.3. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

(a) $-3\sqrt{2}$, (b) $\pi\mathrm{i}$, (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$,

(d) $(\mathrm{i}-1)^9$, (e) $\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathrm{i}$, (f) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$,

(g) $\mathrm{i}+\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, (h) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, (i) $\overline{\sqrt{3}\mathrm{i}+e^{-\mathrm{i}\pi}}$,

(j) $3+4\mathrm{i}$, (k) $x+x^2\mathrm{i}$, $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 1.4. Déterminer les nombres complexes z tels que :

(a) $|\overline{z}-\mathrm{i}|=1$, (b) $z^2=\overline{z}$,

(c) $z\overline{z}=z^3$, (d) $\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z^2)-\mathrm{Im}(z^2)=z$,

(e) $z^2+\overline{z}-1$ est réel, (f) $z^2+2\overline{z}-2$ est imaginaire pur,

(g) $\arg(z+2\overline{z})=\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$.

Exercice 1.5. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$,

(b) $z^4-2\cos(2\theta)z^2+1=0$.

Exercice 1.6. Soient $z_1=3\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$, $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

(a) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z_1 et z_2.

(b) Déterminer la forme cartésienne de $z=\frac{z_1}{z_2^2}$.

(c) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 1.7. Soit $w = 1 + \mathrm{i}$.

(a) Déterminer les racines carrées de w sous forme cartésienne.

(b) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de w et ses racines carrées.

(c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

1.6 Exercices, sujets années antérieures

Exercice 1.8 (Partiel, 2010)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1-\mathrm{i})z-2+\mathrm{i}=0$. On exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne).

Exercice 1.9 (Partiel, 2011)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{1}{2}\,z^2+2\sqrt{2}\,z+3+\mathrm{i}=0$. On exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne, c'est-à-dire sous forme $a+\mathrm{i}b$, avec a, b des réels).

Exercice 1.10 (Partiel, 2011)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4-(2+\mathrm{i})z^2+1+\mathrm{i}=0$. On pourra commencer par résoudre l'équation $Z^2-(2+\mathrm{i})Z+1+\mathrm{i}=0$ et on exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne).

Exercice 1.11 (Examen, 2011)**.** Déterminer les nombres complexes z tels que : $z^3 = 8\mathrm{i}$ sous forme polaire, puis sous forme algébrique.

Exercice 1.12 (Examen, 2011)**.** Dans cet exercice θ désignera un nombre réel.

(a) Trouver les solutions Z complexes de l'équation : $Z^2-2\cos(\theta)\,Z+1=0$.

(b) Donner les solutions complexes de l'équation

$$z^3 = e^{\mathrm{i}\theta},$$

et de l'équation

$$z^3 = e^{-\mathrm{i}\theta}.$$

(c) Calculer le polynôme $(z-e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{3}})(z-e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{3}})$ et montrer que ses coefficients sont des nombres réels.

(d) En utilisant les questions précédentes, montrer que le polynôme suivant

$$z^6-2\cos(\theta)\;z^3+1$$

peut s'écrire comme produit de trois polynômes à coefficients réels de degré 2 que l'on écrira explicitement.

Exercice 1.13 (Examen, 2011)**.** (a) Déterminer tous les nombres complexes z tels que

$$z^5 = 16-16\,\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2+(1+4\mathrm{i})z-5-\mathrm{i}=0.$$

Exercice 1.14 (Partiel, 2012)**.** (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z\in\mathbb{C}$: $Z^2+1=0$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $(z^2+z+1)^2+1=0$.

Exercice 1.15 (Partiel, 2012)**.** On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - (3+4\mathrm{i})z^2 + (1+11\mathrm{i})z - 10\mathrm{i} + 10 = 0.$$

(a) Chercher d'abord une solution imaginaire pure $z = \mathrm{i}y$ avec $y \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que

$$z^3 - (3+4\mathrm{i})z^2 + (1+11\mathrm{i})z - 10\mathrm{i} + 10 = (z - 2\mathrm{i})\big(z^2 - (3+2\mathrm{i})z + 5 + 5\mathrm{i}\big).$$

(c) Finalement calculer toutes les solutions de

$$z^3 - (3+4\mathrm{i})z^2 + (1+11\mathrm{i})z - 10\mathrm{i} + 10 = 0.$$

Exercice 1.16 (Partiel, 2012)**.** (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0.$$

Indication : observer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(1-z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) = 1 - z^7.$$

(b) Soit w une solution quelconque de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$. Vérifier que $1 + w^{2k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, 3$, puis que

$$w^7 = 1,\ \ w^8 = w,\ \ w^9 = w^2,\ \ w^{10} = w^3,\ \ w^{11} = w^4,\ \ w^{12} = w^5.$$

(c) Notons encore w une solution quelconque de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$. En utilisant la question précédente, démontrer que

$$\frac{w}{1+w^2} + \frac{w^2}{1+w^4} + \frac{w^3}{1+w^6} = -2.$$

(d) Déduire de la question précédente la valeur de

$$\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}.$$

Indication : observer que

$$\frac{w}{1+w^2} + \frac{w^2}{1+w^4} + \frac{w^3}{1+w^6} = \frac{1}{w+w^{-1}} + \frac{1}{w^2+w^{-2}} + \frac{1}{w^3+w^{-3}}.$$

Exercice 1.17 (Examen, 2012)**.** Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

$$z^7 = 64\sqrt{3} + 64\mathrm{i}.$$

Exercice 1.18 (Examen, 2012)**.** On considère les equations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$E\ :\ z^5 + 1 = 0 \qquad E'\ :\ z^4 + \overline{z} = 0$$

(a) Écrire -1 sous forme polaire.

(b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

(c) Montrer que les solutions de (E) sont solutions de (E').

(d) Soit z une solution non nulle de (E'), montrer que $|z| = 1$ puis que z est solution de (E).

(e) Résoudre l'équation (E') dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1.19 (Examen, 2013)**.** Dans cet exercice, α désigne un nombre réel tel que $\cos(\alpha) \neq 0$.

(a) Rappeler les définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe $z \neq 0$.

(b) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $-\mathfrak{i}$.

(c) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe z_0 donné par :

$$z_0 = \frac{1 + \mathfrak{i}\,\tan(\alpha)}{1 - \mathfrak{i}\,\tan(\alpha)}.$$

(d) Trouver les nombres réels α vérifiant l'équation :

$$\left(\frac{1 + \mathfrak{i}\,\tan(\alpha)}{1 - \mathfrak{i}\,\tan(\alpha)}\right)^2 = -\mathfrak{i}.$$

Exercice 1.20 (Partiel, 2013)**.** (a) Exprimer les racines 3-ièmes de l'unité sous formes exponentielle, trigonométrique et cartésienne.

(b) Exprimer les racines 3-ièmes de $2 + 2\mathfrak{i}$ sous formes exponentielle et trigonométrique.

(c) À l'aide du point (a), exprimer les racines 3-ièmes de $2 + 2\mathfrak{i}$ sous forme cartésienne.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(e) Exprimer $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

(f) Linéariser $\cos^3\alpha$.

(g) Vérifier les formules des points (e) et (f) pour $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

Exercice 1.21 (Examen, 2014)**.** Les deux parties sont *indépendantes.*

1. **Racines d'un nombre complexe**

   (a) Calculer le module et un argument du nombre complexe $16 + 16\mathfrak{i}\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle ou trigonométrique de $16 + 16\mathfrak{i}\sqrt{3}$.

   (b) Déterminer (sous forme exponentielle ou trigonométrique) tous les nombres complexes z tels que
   $$z^5 = 16 + 16\mathfrak{i}\sqrt{3}.$$

2. **Équation de degré deux dans $\mathbb{C}$**
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z
   $$z^2 - (3 - \mathfrak{i})z + 4 = 0.$$

1.7 Exercices, rappels et compléments

Division euclidienne

Définition 1.37. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ uniques tels que

$$n = mq + r.$$

Cette écriture est appelée *division euclidienne* de n par m.

Définition 1.38. Soient n, $m \in \mathbb{N}^*$ deux nombres entiers positifs. On dit que m *divise* n, ou que n est un *multiple* de m (on écrit $m \mid n$) s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$.
On dit que n et m sont *premiers entre eux* si $\nexists\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $k \mid n$ et $k \mid m$.

De même on a :

Définition 1.39. Soient n, $m \in \mathbb{N}^*$ deux nombres entiers positifs. Le *plus grand commun diviseur* de n et m est

$$\mathrm{pgcd}(n, m) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \ : \ k \mid n \text{ et } k \mid m\}.$$

Plus généralement le plus grand diviseur commun d'un sous-ensemble $I \subset \mathbb{N}^*$ est le plus grand entier positif qui divise tout element dans I.

Alors n et m sont premiers entre eux si et seulement $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$.

Exercice 1.22 (**Algorithme d'Euclide**)**.** Soient n, $m \in \mathbb{N}^*$ deux nombres entiers positifs.

(a) Soit $n = mq + r$ la division euclidienne de n par m. Montrer que $\mathrm{pgcd}(n, m) = \mathrm{pgcd}(m, r)$.

Remarquons que si $n \geq m$, alors dans la division euclidienne on a $n > r$. On peut considerer donc l'algorithme suivant (dit *algorithme d'Euclide*) :

(i) Si $n < m$, échanger le rôle de n et m.

(ii) Soit $n = mq + r$ la division éuclidienne de n par m.
- Si $r = 0$, alors on définit $d = m$.
- Si $r = 1$, alors on définit $d = 1$.
- Sinon, on remplace n par r et on recommence au (i).

(b) Montrer que l'algorithme d'Euclide s'arrête après un nombre fini d'étapes, et que son résultat d donne le plus grand commun diviseur entre n et m.

Exercice 1.23. Calculer le plus grand diviseur commun des familles suivantes.

(a) $\{12, 9\}$, (b) $\{21, 14\}$, (c) $\{132, 44\}$, (d) $\{192, 80\}$,

(e) $\{154, 45\}$, (f) $\{32412, 9\}$, (g) $\{123, 24, 300\}$, (h) $\{132, 121, 144\}$.

Exercice 1.24. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Soit $z_k = e^{\mathrm{i}2\pi \frac{k}{n}}$. Montrer que z_k est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement si n et k sont premiers entre eux.

Chapitre 2

Ensembles et applications

Dans ce chapitre, nous traitons de deux notions qui sont fondamentales pour toutes les mathématiques : celle d'*ensemble*, utilisée pour représenter les objets mathématiques de toute sorte, et celle d'*application* (entre deux ensembles) qui sert à formaliser les interactions entre objets mathématiques.

2.1 La notion d'ensemble

1. Nous donnons une notion intuitive (≪ naïve ≫) d'*ensemble* comme étant une collection E d'objets a, b, c, ... appelés éléments de E munie d'une relation d'égalité et d'une relation d'appartenance :
    - $a = b$ exprime le fait que a et b représentent le même élément de E.
    - $a \neq b$ est une abréviation de la négation de l'assertion ≪ $a = b$ ≫.
    - $a \in E$ exprime que a est élément de E. On dit aussi que a *appartient* à E ou encore que E *contient* a.
    - $a \notin E$ est une abréviation de la négation de l'assertion ≪ $a \in E$ ≫.
2. Exemples :
    - Une bibliothèque est un ensemble de livres ; un livre étant lui-même un ensemble de pages.
    - Il existe un ensemble ne contenant aucun élément : c'est l'*ensemble vide*, on le note $\emptyset$.
    - On parle volontiers de l'ensemble des ponts de Paris, ou encore de l'ensemble des atomes de l'Univers, de l'ensemble des nombres entiers, de celui des nombres entiers pairs etc...

2.1.1 Inclusion et parties d'un ensemble

Définition 2.1. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est *inclus* dans F, et l'on note $E \subset F$, lorsque tout élément de E est élément de F. Autrement dit $E \subset F$ si, et seulement si, pour tout x, si $x \in E$, alors $x \in F$:

$$\forall x,\ (x \in E \ \Rightarrow\ x \in F).$$

On dit encore que E est une *partie* de F, ou que E est un *sous-ensemble* de F.

Observons que l'ensemble vide $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.

L'axiome suivant traduit l'une des intuitions fondamentales sur les ensembles.

Axiome d'extensionalité :

Deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, E est inclus dans F et F est inclus dans E :

$$E = F \text{ si, et seulement si, } E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

Autrement dit, deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils contiennent les mêmes éléments.

Exemple 2.2. Soit E l'ensemble des entiers pairs plus petit que 9, c'est-à-dire

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est pair et } x < 9\},$$

et soit $F = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Alors $E = F$.

2.1.2 Ensembles fondamentaux

Voici quelques ensembles fondamentaux :

$\mathbb{N}$: l'ensemble des *entiers naturels* $0, 1, 2, \ldots$;
les éléments de $\mathbb{N}$ différents de 0 sont appelés les *entiers positifs*.

$\mathbb{Z}$: l'ensemble des *entiers relatifs* $0, 1, -1, 2, -2\ldots$

$\mathbb{Q}$: l'ensemble des *nombres rationnels*

$\mathbb{R}$: l'ensemble des *nombres réels*

$\mathbb{C}$: l'ensemble des *nombres complexes*

Notons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et que toutes ces inclusions sont strictes.

Au niveau élémentaire où nous nous plaçons, nous considérons ces ensembles comme donnés, et nous n'en présentons donc pas de construction.

2.2 Construction d'ensembles

Quand on veut développer un cadre rigoureux pour la théorie des ensembles, il faut procéder avec beaucoup de soin. Afin d'éviter certains paradoxes aberrants [1], on doit renoncer à l'idée que toute 'collection d'objets' est donnée par un ensemble. Par exemple, il n'existe pas d'« ensemble de tous les ensembles ».

On peut formuler des axiomes qui permettent de construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles déjà existants, en évitant des ensembles « trop grands ». Les constructions que nous donnons ci-dessous se situent dans ce cadre. (Les deux premières ont déjà été utilisées dans l'exemple 2.2.)

En donnant la liste des éléments

Si n est un entier et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des objets, il existe un ensemble E dont les éléments sont précisément les x_i, pour $i = 1, \ldots, n$. On l'écrit $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

1. Le paradoxe le plus célèbre dans ce contexte est l'antinomie de Russell (1901), un analogue ensembliste du paradoxe du barbier.

Par sélection

Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x. Alors la proposition « $x \in E$ et x vérifie $P(x)$ » définit un ensemble noté $\{x \in E \mid P(x)\}$ qui est une partie de E. (Le trait « | » se lit « tel que ».)

Exemples 2.3. (a) Si $a \in E$, on a $\{x \in E \mid x = a\} = \{a\}$. L'ensemble vide quant à lui peut s'écrire $\{x \in E \mid x \neq x\}$.

(b) Soit $P(x)$ l'assertion « $x > 0$ » pour $x \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid P(x)\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.

Réunion de deux ensembles

Si E, F sont deux ensembles, alors il existe un ensemble noté $E \cup F$ dont tout élément est soit un élément de E soit un élément de F. Cet ensemble s'appelle la *réunion* de E et F.

Ensemble des parties d'un ensemble

Si E est un ensemble, alors $\{A \mid A \subset E\}$ définit un ensemble appelé *ensemble des parties* de E et noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque 2.4.
1. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide (même si E l'est), car il contient toujours $\emptyset$ et E.
2. Il ne faut pas confondre les éléments et les parties. Si x est un élément de E, on écrit $x \in E$; de plus $\{x\}$ est un sous-ensemble de E, et on écrit $\{x\} \subset E$; enfin, $\{x\}$ est un élément de l'ensemble des parties de E, et on écrit $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$.

Exemples 2.5. (a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(b) $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$

(c) $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

Produit cartésien

1. *La notion de couple.* Soient a et b deux objets. On note (a, b) le *couple* de a et b, et on dit que deux couples (a, b) et (a', b') sont égaux si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$. Notons que l'on peut utiliser $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ pour représenter le couple (a, b) par un ensemble.

2. *La notion de produit cartésien.* Soient E et F deux ensembles. Alors il existe un ensemble, noté $E \times F$ et appelé *produit cartésien* de E et F, qui est formé par les couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$. Lorsque $F = E$, on note $E \times E = E^2$.

3. *Quelques propriétés du produit cartésien.*
   - $E \times F = \emptyset$ si, et seulement si, $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
   - Si $A \subset E$ et $B \subset F$, alors $A \times B \subset E \times F$.
   - La *diagonale* de E^2 est l'ensemble

$$D_E = \{(x, y) \in E^2 \mid x = y\} = \{(x, x) \mid x \in E\}.$$

2.3 Opérations sur les ensembles

Définition 2.6. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. On définit :

- *le complémentaire de A dans E* constitué par l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :
$$E \smallsetminus A = A^c = \{x \in E \mid x \notin A\};$$
- *l'intersection de A et B* constituée par l'ensemble des éléments de E qui sont à la fois des éléments de A et de B :
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \quad (\text{lu} \ll A \text{ inter } B \gg);$$
- *la réunion de A et B* constituée par l'ensemble des éléments de E qui sont des éléments de A ou des éléments de B :
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (\text{lu} \ll A \text{ union } B \gg).$$

Observons que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. De même, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

Exemples 2.7. (a) $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$
(b) Soit $\mathrm{i}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs. Alors $\mathbb{R} \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \{0\}$.

Propriétés du complémentaire, de l'intersection et de la réunion

Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. *Propriétés du complémentaire* :
   - $E \smallsetminus E = E^c = \emptyset$, $E \smallsetminus \emptyset = \emptyset^c = E$
   - $E \smallsetminus (E \smallsetminus A) = (A^c)^c = A$
   - Si $B \subset A$, alors $A^c \subset B^c$.
2. *Propriétés de la réunion* :
   - commutativité : $A \cup B = B \cup A$
   - associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, et on notera cet ensemble $A \cup B \cup C$
   - idempotence : $A \cup A = A$
   - $A \cup \emptyset = A$, $A \cup E = E$
3. *Propriétés de l'intersection* :
   - commutativité : $A \cap B = B \cap A$
   - associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, et on notera cet ensemble $A \cap B \cap C$
   - idempotence : $A \cap A = A$
   - $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap E = A$
4. *Distributivité* :
   - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
   - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
5. *Lois de De Morgan* :
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.4 La notion d'application

Définition 2.8. • On appelle *application* d'un ensemble E dans un ensemble F, une correspondance f qui associe à tout élément $x \in E$ un, et un seul, élément $y \in F$. Cet élément sera désormais noté $f(x)$. L'application sera notée

$$f\colon E \to F,\ x \mapsto f(x).$$

- On appelle E l'*ensemble de départ* de f (ou encore le *domaine* de f) et F l'*ensemble d'arrivée* de f (ou encore le *codomaine* de f).
- Le *graphe* $\mathcal{G}(f)$ de f est le sous-ensemble de $E \times F$ constitué par les couples $(x, f(x))$ pour $x \in E$.
- La *restriction* de l'application $f\colon E \to F$ à une partie $A \subset E$ est l'application $f_{|A}\colon A \to F$ définie par $f_{|A}(x) = f(x)$, pour tout $x \in A$.
- On dit que deux applications $f,\ g\colon E \to F$ sont *égales* et on écrit $f = g$ si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Exemples 2.9. (a) L'*application identique* id_E d'un ensemble E dans lui-même est définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$. Le graphe $\mathcal{G}(\mathrm{id}_E) = \{(x, x) \mid x \in E\}$ est la diagonale de E^2.

(b) Si $A \subset E$ est une partie de E, alors la restriction de id_E à A s'appelle l'*inclusion canonique* de A dans E.

(c) L'application $\mathrm{pr}_1\colon E \times F \to E$ définie par $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$ s'appelle la *première projection* de $E \times F$ sur E. On définit de manière analogue la *seconde projection* $\mathrm{pr}_2\colon E \times F \to F$, $(x, y) \mapsto y$.

(d) Soit E un ensemble. À une partie A de E on associe sa *fonction caractéristique* $\chi_A\colon E \to \{0, 1\}$, définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

(e) Soit $a \in F$ un élément. L'application $\sigma_a\colon E \to E \times F$, définie par $\sigma_a(x) = (x, a)$ est appelée une *section*.

(f) L'application $\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ qui au réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x est appelée *fonction partie entière* [2]. La partie entière $\lfloor x\rfloor$ de x est l'unique entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$.

(g) Au premier chapitre du cours, nous avons vu les deux applications $\mathrm{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ qui associent à un nombre complexe sa partie réelle et imaginaire, respectivement.

Définition 2.10. Si E est un ensemble et $f\colon E \to E$ est une application, on dit que $e \in E$ est *invariant* sous f si $f(e) = e$. L'ensemble des points invariants de f est donc donné par $\{x \in E \mid f(x) = x\}$.

Famille d'ensembles

Soit $f\colon I \to \mathcal{P}(E)$ une application de domaine I telle que $A_i = f(i)$ soit un ensemble pour tout $i \in I$. Une donnée d'un tel f est appelée une *famille d'ensembles*, notée parfois $(A_i)_{i\in I}$. La collection d'objets $\{x \mid$ il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i\}$ est alors un ensemble, appelée la *réunion* de la famille $(A_i)_{i\in I}$ et notée $\bigcup_{i\in I} A_i$.
On dit que la famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ définit une *partition* de l'ensemble E si $E = \bigcup_{i\in I} A_i$ et si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$.

2. Dans la littérature, on trouve également la notation $E(x)$ pour la partie entière de x.

Exemple 2.11. Soit $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'ensemble des entiers positifs, $E = \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'application qui associe à $q \in \mathbb{N}^*$ le sous-ensemble

$$f(q) = \tfrac{1}{q}\mathbb{Z} := \left\{ \tfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$$

de $\mathbb{R}$. Ces données définissent une famille d'ensembles $(\frac{1}{q}\mathbb{Z})_{q\in\mathbb{N}^*}$ dont la réunion est

$$\bigcup_q \tfrac{1}{q}\mathbb{Z} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z} \text{ tels que } x = \tfrac{p}{q} \right\} = \mathbb{Q}.$$

Notons que cette famille n'est pas une partition de $\mathbb{Q}$; en effet $\mathbb{Z} \subset \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.

Composition des applications

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On note

$$g \circ f\colon E \to G,\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (\text{lu « } g \text{ rond } f \text{ »})$$

l'application *composée* de f et g.

Proposition 2.12. *Soient E, F, G et H quatre ensembles. Soient $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon G \to H$ trois applications.*

1. *Alors $f \circ \mathrm{id}_E = f = \mathrm{id}_F \circ f$.*
2. *La composition des applications est associative :*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Démonstration. Montrons l'associativité. Soit x un élément du domaine de f. Alors on a

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\big(g(f(x))\big) = h\big((g \circ f)(x)\big) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x).$$

□

Exemples 2.13. (a) Avec les notations introduites précédemment, on a $\mathrm{pr}_1 \circ \sigma_a = \mathrm{id}_E$.

(b) Soit $f\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ définie par $n \mapsto 2n$. Considérons $g\colon 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(m) = \frac{m}{2}$. La restriction de g au sous-ensemble des entiers pairs $2\mathbb{N}$ est telle que $g_{|2\mathbb{N}}(2k) = k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $g_{|2\mathbb{N}} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. De même, on a $f \circ g_{|2\mathbb{N}} = \mathrm{id}_{2\mathbb{N}}$.

L'ensemble des applications.

Soient E et F deux ensembles. Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$. On le note aussi parfois F^E. Ainsi, on peut considérer la composition de fonctions comme une application

$$\circ\colon \mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(F, G) \to \mathcal{F}(E, G), \quad (f, g) \mapsto g \circ f.$$

2.5 Image directe et image réciproque

2.5.1 Image directe d'une application

Définition 2.14. Soient E et F deux ensembles. Soient f une application de E dans F et $A \subset E$ un sous-ensemble. L'*image directe* de A par f est le sous-ensemble de F constitué par les images par f des éléments de A, c'est-à-dire l'ensemble

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists\, a \in A,\ f(a) = y\} = \{f(a) \mid a \in A\} \subset F.$$

L'image $f(E)$ de l'ensemble E tout entier est parfois notée $\mathrm{im}(f)$.

Proposition 2.15 (Propriétés de l'image directe)**.** *Soient E et F deux ensembles. Soient $f\colon E \to F$ une application et A, B des parties de E. On a :*

- $f(\emptyset) = \emptyset$,
- *si* $A \subset B$, *alors* $f(A) \subset f(B)$,
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Exemples 2.16. (a) On a $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$ et $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.
(b) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application qui à x associe x^2. Alors $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

2.5.2 Image réciproque d'une application

Définition 2.17. Soient E et F deux ensembles. Soient f une application de E dans F et $A \subset F$ un sous-ensemble de F. L'*image réciproque* de A par f est l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \subset E.$$

Proposition 2.18 (Propriétés de l'image réciproque)**.** *Soient E et F deux ensembles. Soient $f\colon E \to F$ et A, B des parties de F.*

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,
- $f^{-1}(F) = E$,
- *Si* $A \subset B$, *alors* $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Proposition 2.19. *Soient E et F deux ensembles. Soient $f\colon E \to F$, A une partie de F et C une partie de E. On a $f(f^{-1}(A)) \subset A$ et $C \subset f^{-1}(f(C))$.*

Exemples 2.20. (a) $\sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$, $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
(b) $\cos^{-1}([0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$
(c) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Alors $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ et $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.
(d) $\arg^{-1}(\{\pi\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} =]-\infty, 0[$
(e) Soit $|\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ la fonction qui à $z \in \mathbb{C}$ associe son module $|z|$ et soit $r \in \mathbb{R}_+$. Alors $|\cdot|^{-1}(\{r\})$ est le cercle de centre 0 et de rayon r dans le plan complexe.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f\colon E \to F$ une application. Remarquons que (par définition même d'une application) si a, b sont deux éléments distincts de F, alors $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. De plus, $E = \bigcup_{a \in F} f^{-1}(\{a\})$. Il s'ensuit que la famille d'ensembles $\left(f^{-1}(\{a\})\right)_{a \in F}$ forme une *partition* de E.

2.6 Injection, surjection et bijection

Définition 2.21. Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F :

- f est une *injection* de E dans F si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes (contraposée l'une de l'autre) suivantes :

$$\text{pour tous } a, b \in E, \text{ si } f(a) = f(b) \text{ alors } a = b$$

$$\text{pour tous } a, b \in E, \text{ si } a \neq b \text{ alors } f(a) \neq f(b)$$

- f est une *surjection* de E sur F si elle vérifie :

$$\text{pour tout } y \in F, \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

- f est une *bijection* de E sur F si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si

$$\text{pour tout } y \in F, \text{ il existe un unique } x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

Exemples 2.22. (a) L'application identité id_E est une bijection de E sur E.

(b) Si $A \subset E$ est une partie de E, alors l'inclusion canonique $i_A = (\mathrm{id}_E)_{|A}$ de A dans E est une injection. Plus généralement, la restriction d'une application injective est injective.

(c) Supposons $F \neq \emptyset$. Alors la première projection $\mathrm{pr}_1 \colon E \times F \to E$ est une surjection.

(d) L'application $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ est surjective sans être injective ; par contre, sa restriction à $\mathbb{R}_+$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

(e) Soient a, $b \in \mathbb{C}$. Alors l'application $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 + az + b$ est surjective sans être injective.

(f) L'application $f \colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ sur le sous-ensemble propre des entiers pairs $2\mathbb{N}$.

(g) L'application $\tan \colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.

(h) L'application $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ réalise une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Bijection réciproque d'une bijection

Définition 2.23. Soient E et F deux ensembles. Si $f \colon E \to F$ est une bijection, alors à tout $y \in F$ correspond un unique élément $x \in E$ satisfaisant l'équation $y = f(x)$. On peut donc définir l'application $f^{-1} \colon F \to E$, qui à $y \in F$ fait correspondre l'unique solution $x \in E$ de l'équation $y = f(x)$. On définit ainsi la *bijection réciproque* $f^{-1} \colon F \to E$ de la bijection $f \colon E \to F$. On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

Théorème 2.24. *Soient E et F deux ensembles. Une application $f \colon E \to F$ est une bijection si, et seulement si, il existe une application $g \colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.*
De plus, si $g \colon F \to E$ vérifie $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, alors on a $g = f^{-1}$. Autrement dit, la bijection réciproque est unique.

Cet énoncé est une conséquence des propriétés que nous énonçons maintenant. (Certaines de ces propriétés seront démontrées dans les exercices.)

Proposition 2.25. *Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \colon E \to F$ et $g \colon F \to G$ deux applications. Alors :*

- *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*

- *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
- *Si g est injective et si $h \colon E \to F$ vérifie $g \circ f = g \circ h$, alors $f = h$.*
- *Si f est surjective et si $h \colon F \to G$ vérifie $g \circ f = h \circ f$, alors $g = h$.*
- *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration du théorème 2.24. Supposons qu'il existe une application g telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Puisque $\mathrm{id}_E = g \circ f$ est injective, f est injective (Proposition 2.25, première assertion) ; de même, la surjectivité de $\mathrm{id}_F = f \circ g$ entraîne la surjectivité de f (Proposition 2.25, seconde assertion). L'application f est donc bijective.

L'unicité de la bijection réciproque suit de la troisième assertion de la Proposition 2.25. □

Exemples 2.26. (a) La fonction $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $x \mapsto x^2$ est une bijection, de bijection réciproque $g \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

(b) La fonction exponentielle $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ est une bijection, de bijection réciproque la fonction logarithme $\ln \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

(c) La fonction $\tan \colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est une bijection, de bijection réciproque la fonction $\arctan \colon \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$.

(d) La fonction $f \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ définie par $z \mapsto \frac{1}{z}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est égale à elle-même : on a $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$.

(e) Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. L'application $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto az + b$ est alors bijective, de bijection réciproque $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-b}{a}$.

2.7 Exemples : quelques transformations géométriques du plan

Nous nous plaçons dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$, rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné, et nous utilisons les coordonnées cartésiennes d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ pour associer à tout point du plan un nombre complexe (son affixe), et récipoquement un point du plan à tout $z \in \mathbb{C}$ (voir Chapitre 1.)

2.7.1 Translations

Soit $\vec{v}$ un vecteur dans le plan. La *translation* par $\vec{v}$ est la transformation qui associe à tout point P du plan l'unique point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.

- La translation par $\vec{v}$ transforme le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en le repère orthonormal $(M, \vec{i}, \vec{j})$, où M est l'image de O par la translation.
- Soit $b \in \mathbb{C}$ l'affixe du vecteur $\vec{v}$. Alors la translation par $\vec{v}$ correspond à l'application
$$\tau_b \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto z + b.$$
Réciproquement, τ_b décrit une translation pour tout $b \in \mathbb{C}$.
- Si $b \neq 0$, aucun point n'est invariant sous τ_b ; si $b = 0$, $\tau_b = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, et alors tout point de $\mathbb{C}$ est invariant.
- La translation τ_b est bijective, avec bijection réciproque donnée par la translation τ_{-b}.

2.7.2 Rotations

- Soit C un point d'affixe $c \in \mathbb{C}$. La rotation de centre C et d'angle α est la transformation qui à tout point P du plan associe le point Q tel que $||CP|| = ||CQ||$ et $\widehat{PCQ} = \alpha$. La *rotation* du plan de centre C et d'angle $\alpha \in [0, 2\pi]$ correspond alors à l'application
$$\rho_{c,\alpha} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{\mathrm{i}\alpha}(z - c) + c = e^{\mathrm{i}\alpha} z + (1 - e^{\mathrm{i}\alpha})c.$$
- Cette rotation transforme le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ en le repère orthonormal
$$(M, \cos\alpha \overrightarrow{i} + \sin\alpha \overrightarrow{j}, \cos\alpha \overrightarrow{j} - \sin\alpha \overrightarrow{i}),$$
où M est le point d'affixe $(1 - e^{\mathrm{i}\alpha})c$.
- Si $\alpha = 0$, c'est une translation.
- Si $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$, alors le centre C est le seul point invariant par la rotation.
- Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$, l'application qui à z associe $e^{\mathrm{i}\alpha} z + a$ décrit une rotation : la rotation de centre d'affixe $c = \frac{a}{1-e^{\mathrm{i}\alpha}}$ et angle α.
- Soient f, $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $f(z) = e^{\mathrm{i}\alpha} z + a$ et $g(z) = e^{\mathrm{i}\beta} z + b$. Alors
$$(f \circ g)(z) = e^{\mathrm{i}\alpha}(e^{\mathrm{i}\beta} z + b) + a = e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} z + (e^{\mathrm{i}\alpha} b + a).$$
On en déduit en particulier :
  (a) la composition de deux rotations $\rho_{c,\alpha}$ et $\rho_{d,\beta}$ avec $\beta \neq -\alpha (\operatorname{mod} 2\pi)$ est une rotation (d'angle $\alpha + \beta$) ;
  (b) si τ_b est une translation et si $\rho_{c,\alpha}$ est une rotation avec $\alpha \neq 0 (\operatorname{mod} 2\pi)$, alors les composées $\tau_b \circ \rho_{c,\alpha}$ et $\rho_{c,\alpha} \circ \tau_b$ sont des rotations (d'angle α) ;
  (c) la composition de deux rotations $\rho_{c,\alpha}$ et $\rho_{d,\beta}$ avec $\beta = -\alpha (\operatorname{mod} 2\pi)$ est une translation.
- Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout angle α, l'application $\rho_{c,\alpha}$ est bijective, et sa bijection réciproque est donnée par la rotation $\rho_{c,-\alpha}$.

2.7.3 Homothéties

Soit λ un nombre réel avec $\lambda > 0$, et soit C un point du plan. L'*homothétie* de centre C et de *rapport* λ est la transformation qui envoie tout point P du plan sur l'unique point Q tel que $\overrightarrow{CQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{CP}$.
Si $c \in \mathbb{C}$ est l'affixe de C, l'homothétie décrite correspond à l'application
$$h_{c,\lambda} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \ z \mapsto \lambda(z - c) + c = \lambda z + (1 - \lambda)c.$$

- Si $\lambda \neq 1$, c est l'unique point invariant par $h_{c,\lambda}$.
- L'homothétie décrite transforme le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ en le repère *orthogonal* $(P, \lambda \cdot \overrightarrow{i}, \lambda \cdot \overrightarrow{j})$, où P est le point d'affixe $(1 - \lambda)c$.
- Soit $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \lambda z + b$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1 et $b \in \mathbb{C}$. Alors g décrit l'homothétie de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-\lambda}$ et de rapport λ.
- Soient λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et b_1, $b_2 \in \mathbb{C}$. Pour $i = 1, 2$, on considère les applications $f_i \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \lambda_i z + b_i$. Alors
$$(f_1 \circ f_2)(z) = \lambda_1(\lambda_2 z + b_2) + b_1 = \lambda_1\lambda_2 z + (\lambda_1 b_2 + b_1).$$
On en déduit en particulier :

(a) la composition de deux homothéties h_{c,λ_1} et h_{d,λ_2} avec $\lambda_2 \neq \lambda_1^{-1}$ est une homothétie (de rapport $\lambda_1\lambda_2$) ;

(b) si τ_b est une translation et si $h_{c,\lambda}$ est une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$, alors les composées $\tau_b \circ h_{c,\lambda}$ et $h_{c,\lambda} \circ \tau_b$ sont des homothéties (de rapport λ) ;

(c) la composition de deux homothéties $h_{c,\lambda}$ et $h_{d,\lambda^{-1}}$ est une translation.

- Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $h_{c,\lambda}$ est bijective, et sa bijection réciproque est donnée par l'homothétie $h_{c,\lambda^{-1}}$.

2.8 Ensembles finis, ensembles dénombrables

Dans cette section, nous nous intéressons à la 'taille' d'un ensemble. Nous verrons que l'existence d'une injection / surjection entre deux ensembles est un bon moyen pour comparer leurs tailles. On dit que deux ensembles E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection $f : E \to F$.

2.8.1 Ensembles finis

Définition 2.27. Un ensemble E est *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit équipotent à $\{1, 2, \ldots, n\}$.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que toute partie de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est finie. Puisque tout ensemble qui est équipotent à un ensemble fini est fini (par définition des ensembles finis), on en déduit que toute partie d'un ensemble fini est finie.

Théorème 2.28. *Pour tous entiers positifs n et k, s'il existe une injection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, k\}$, alors $n \leq k$.*

Démonstration. Pour n positif on note $\mathfrak{P}_n$ la propriété suivante : *si k est positif et s'il existe une injection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, k\}$, alors $n \leq k$.*
Nous allons montrer par récurrence que $\mathfrak{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété $\mathfrak{P}_1$ est clairement vraie.
Soit maintenant $n \geq 1$. Supposons $\mathfrak{P}_n$ vraie et démontrons $\mathfrak{P}_{n+1}$. Soit $f : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ une injection, pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $f(1) \neq f(n+1)$ par injectivité de f, on a $k \geq 2$. L'application $h : \{1, \ldots k\} \smallsetminus \{f(n+1)\} \to \{1, 2, \ldots, k-1\}$ définie par

$$h(i) := \begin{cases} i, \text{ si } i < f(n+1)\,; \\ i-1, \text{ si } i > f(n+1) \end{cases}$$

est bijective (vérification directe). L'application $h \circ f_{|\{1,\ldots,n\}} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k-1\}$ définit alors une injection. Par hypothèse de récurrence, on a $n \leq k-1$, et donc $n+1 \leq k$, ce qu'il fallait démontrer. □

En particulier, par le Théorème 2.28, si $n \neq k$ sont deux entiers positifs distincts, il n'existe pas de bijection entre $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $\{1, 2, \ldots, k\}$. On en déduit le résultat suivant.

Proposition-Définition 2.29. *Si E est fini et non vide, il existe un unique entier positif n tel que E et $\{1, \ldots, n\}$ soient équipotents. On appelle n le* cardinal *de l'ensemble E et on note $n = \mathrm{card}(E) = \#E$.*
L'ensemble vide est l'ensemble à 0 élément ; on pose $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$.

Remarque 2.30. En reformulant le Théorème 2.28, on obtient le *principe des tiroirs de Dirichlet* qui dit que si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles finis E et F tels que $\#E = n > m = \#F$, alors il existe $a \in F$ tel que $\#f^{-1}(\{a\}) \geq 2$.

Proposition 2.31 (Propriétés du cardinal)**.**

- *Si E est un ensemble fini qui est équipotent à l'ensemble F, alors $\#E = \#F$.*
- *Soient E un ensemble fini et $A \subset E$. Alors A est fini et $\#A \leq \#E$. De plus, on a $A = E$ si, et seulement si, $\#A = \#E$.*
- *Soient E et F deux ensembles, $f\colon E \to F$ une application et $A \subset E$ une partie finie de E. Alors $f(A)$ est fini, et on a $\#f(A) \leq \#A$. De plus, $\#f(A) = \#A$ si et seulement si $f_{|A}$ est injective.*

Démonstration. Nous montrons la troisième assertion par récurrence sur $\#A$. Si $\#A = 0$, l'énoncé est clair.

Soit $n \geq 0$. On suppose l'énoncé vrai pour les parties de cardinal n. Soit $A \subset E$ avec $\#A = n+1$. On choisit $a \in A$ et on pose $A' = A \smallsetminus \{a\}$. Alors $\#A' = n$ et $f(A')$ est donc fini de cardinal $\#f(A') \leq n$ par hypothèse de récurrence. Comme $f(A) = f(A') \cup \{f(a)\}$, $f(A)$ est fini et on a $\#f(A) \leq \#f(A') + \#\{f(a)\} \leq n + 1$.
Si $f_{|A}$ n'est pas injective, dans l'argument ci-dessus, on peut choisir $a \in A$ tel que $f(a) \in f(A')$. On en déduit que $\#f(A) = \#f(A') \leq n$. Réciproquement, si $f_{|A}$ est injective, $f_{|A'}$ est injective aussi, et on a $\#f(A') = n$ par hypothèse d'induction. De plus, $\{f(a)\}$ et $f(A')$ sont des ensembles disjoints, également par injectivité de $f_{|A}$, et il vient $\#f(A) = \#f(A') + \#\{f(a)\} = n + 1$. □

Théorème 2.32. *Soient E et F deux ensembles finis ayant le même cardinal et $f\colon E \to F$ une application. Alors on a l'équivalence des trois propriétés suivantes :*

(a) f est injective,

(b) f est surjective,

(c) f est bijective.

Démonstration. Il suffit de montrer que (a) et (b) sont équivalents. Dans la preuve, nous utilisons les propriétés établies dans la Proposition 2.31. Soit $n = \#E = \#F$. Si f est injective, on a $\#\operatorname{im}(f) = \#E = n$ et donc $\operatorname{im}(f) = F$, c'est-à-dire f est surjective.
Réciproquement, si f est surjective, on a $\operatorname{im}(f) = F$, c'est-à-dire $\#\operatorname{im}(f) = \#E$. L'application f est donc injective (Proposition 2.31). □

Proposition 2.33 (Calcul de cardinaux)**.** *(a) Soient I un ensemble fini et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles qui définit une partition de l'ensemble E. On suppose que A_i est fini pour tout $i \in I$. Alors E est fini et*

$$\#E = \sum_{i\in I} \#A_i.$$

En particulier, si A et B sont deux ensembles finis disjoints, on a $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

(b) Plus généralement, si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini et

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

(c) Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\#(E \times F) = \#E \cdot \#F.$$

(d) Soient E et F deux ensembles finis. Alors l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E vers F est un ensemble fini et

$$\#\mathcal{F}(E, F) = \#F^{\#E}.$$

Démonstration. La preuve de (a) est laissée en exercice. (On raisonne par récurrence sur $\#I$.)

Montrons (b). Posons $A' = A \smallsetminus (A \cap B)$. Observons que $A \cup B$ est la réunion disjointe de A' et B, donc $\#(A \cup B) = \#A' + \#B$ par la partie (1). De plus A est la réunion disjointe de $A \cap B$ avec A', ainsi $\#A = \#A' + \#(A \cap B)$. En combinant ces deux formules, il vient $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Montrons (c). On observe que la famille d'ensembles $(\{a\} \times F)_{a \in E}$ forme une partition finie de $E \times F$. De plus, pour tout $a \in E$, $\{a\} \times F$ est équipotent à F. Par la partie (1), on a donc $\#(E \times F) = \sum_{a \in E} \#F = \#E \cdot \#F$.

Montrons (d). Notons $m = \#E$ et $n = \#F$. Construire une application f de $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ vers F revient à choisir $f(x_1)$ (il y a n choix possibles), $f(x_2)$ (il y a n choix possibles), etc... Donc il y a n^m applications de E vers F. $\square$

2.8.2 Nombre de parties d'un ensemble fini

Théorème 2.34. *Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et on a*

$$\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}.$$

Démonstration. L'application $\Phi \colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0,1\})$ définie par $A \mapsto \chi_A$ (la fonction caractéristique de A) réalise une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$. En effet, l'application

$$\Psi \colon \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \to \mathcal{P}(E), \quad f \mapsto \{x \in E \mid f(x) = 1\}$$

en est la bijection réciproque.
Par la Proposition 2.33, on a donc $\#\mathcal{P}(E) = \#\mathcal{F}(E, \{0,1\}) = \#\{0,1\}^{\#E} = 2^{\#E}$. $\square$

Nous nous intéressons maintenant au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. On convient que si $n = 0$, alors $\{1, \ldots, n\}$ désigne l'ensemble vide. Pour deux entiers k, n avec $0 \leq k \leq n$, on note $\mathcal{P}_n^k := \{A \subset \{1, \ldots, n\} \mid \#A = k\}$.

Remarques 2.35. (a) On a $\mathcal{P}_n^0 = \{\emptyset\}$ pour tout $n \geq 0$.

(b) Soient $0 \leq k \leq n$. Alors l'application $C \colon \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) \to \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ définie par $A \mapsto A^c$ est une bijection, et on a $C(\mathcal{P}_n^k) = \mathcal{P}_n^{n-k}$.

Rappelons les coefficients binômiaux vus au premier chapitre. Pour deux entiers k, n avec $0 \leq k \leq n$, on note $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lemme 2.36. *Pour tous entiers k, n avec $0 < k < n$, on a $\#\mathcal{P}_n^k = \#\mathcal{P}_{n-1}^{k-1} + \#\mathcal{P}_{n-1}^k$.*

Démonstration. On considère les ensembles

$$E = \{A \in \mathcal{P}_n^k \mid n \in A\} \quad \text{et} \quad F = \mathcal{P}_n^k \smallsetminus E = \{A \in \mathcal{P}_n^k \mid n \notin A\}.$$

L'application qui à A associe $A \smallsetminus \{n\}$ définit une bijection entre E et $\mathcal{P}_{n-1}^{k-1}$. De plus, F s'identifie à $\mathcal{P}_{n-1}^k$. Comme $\mathcal{P}_n^k$ est la réunion disjointe de E et F, il vient :

$$\#\mathcal{P}_n^k = \#E + \#F = \#\mathcal{P}_{n-1}^{k-1} + \#\mathcal{P}_{n-1}^k.$$

$\square$

Théorème 2.37. *Soient k, n deux entiers avec $0 \leq k \leq n$. Alors $\#\mathcal{P}_n^k = \binom{n}{k}$.*

Démonstration. On montre par récurrence sur n que $\#\mathcal{P}_n^k = \binom{n}{k}$ pour tout k avec $0 \leq k \leq n$. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont clairs. De plus, pour tout n, on a $\#\mathcal{P}_n^0 = \#\mathcal{P}_n^n = 1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$. Soit maintenant $0 < k < n$ et supposons le résultat vrai pour $n-1$. Par hypothèse d'induction, on a $\#\mathcal{P}_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ et $\#\mathcal{P}_{n-1}^k = \binom{n-1}{k}$. Par le Lemme 2.36, on en déduit que $\#\mathcal{P}_n^k = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Mais nous avons vu dans la preuve de la formule du binôme de Newton au premier chapitre que $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, ce qui termine la preuve. □

Exemple 2.38. Il y a $\frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$ possibilités de choisir trois mois parmi les 12 mois de l'année.

Corollaire 2.39. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Démonstration. La famille d'ensembles $\left(\mathcal{P}_n^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ définit une partition de $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$. Il suffit alors d'appliquer la Proposition 2.33 et les Théorèmes 2.34 et 2.37 pour calculer

$$2^n = \#\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) = \sum_{k=0}^{n} \#\mathcal{P}_n^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

□

2.8.3 Ensembles dénombrables

Définition 2.40. Un ensemble E est *dénombrable* [3] lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exemples 2.41. (a) Le sous-ensemble $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ des entiers pairs est dénombrable. En effet, nous avons déjà construit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N}$. Elle est donnée par $n \mapsto 2n$.

(b) L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
En effet, l'application $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $\varphi(0) = 0$, et pour $n > 0$,

$$\varphi(n) = \begin{cases} -m & \text{si } n = 2m \\ m+1 & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$$

définit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

(c) Le produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
Pour le voir, il nous faut énumérer les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On procède par 'diagonales', et on énumère les couples (i, j) par tranches sur lesquelles $i + j$ est constante, et on construit ainsi une bijection $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
L'application $g \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $g(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ est alors la bijection réciproque de f. (Il est clair que $f(p, q)$ est un entier puisque $p+q$ et $p+q+1$ sont des entiers consécutifs donc l'un d'eux est divisible par 2.)

3. Dans la définition d'un ensemble dénombrable, on inclut parfois aussi les ensembles finis, et on appelle alors un ensemble *infini dénombrable* lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

(d) L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

(e) L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Intuitivement, le résultat suivant exprime que les ensembles dénombrables sont les 'plus petits' ensembles infinis.

Théorème 2.42. *Soient E un ensemble dénombrable et $A \subset E$ une partie de E. Alors A est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $E = \mathbb{N}$. Soit donc $A \subset \mathbb{N}$.
Si A est fini, il n'y a rien à montrer.
Supposons que A soit infini. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous allons construire une énumération croissante $f(0) < f(1) < \cdots < f(n) < \cdots$ de A. Pour commencer, soit $f(0)$ le plus petit élément de A. Supposons construits $f(0) < \cdots < f(n)$ dans A, où $n \in \mathbb{N}$. Soit $f(n+1)$ le plus petit élément de $A_n = A \smallsetminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$. On notera que $A_n \neq \emptyset$ puisque A est un ensemble infini.
Nous avons ainsi construit une bijection $f\colon \mathbb{N} \to A$, ce qui montre que A est dénombrable. $\square$

Le théorème de Cantor

Remarquons d'abord que pour tout ensemble E, l'application $s\colon E \to \mathcal{P}(E)$, $x \mapsto \{x\}$ définit une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Comme $2^n > n$ pour tout entier n, nous savons de plus que si E est fini, il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$. Ceci reste vrai pour tout ensemble :

Théorème 2.43 (Cantor 1892)**.** *Soit E un ensemble. Alors il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.*

On en déduit en particulier que l'on ne peut pas énumérer les parties de $\mathbb{N}$:

Corollaire 2.44. *L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non-dénombrable.*

Démonstration du théorème de Cantor. Soit $f\colon E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On considère la partie suivante de E :

$$\Delta = \{e \in E \mid e \notin f(e)\}.$$

Soit $d \in E$ tel que $f(d) = \Delta$. On a alors $d \in \Delta$ si, et seulement si, $d \in f(d)$ si, et seulement si, $d \notin \Delta$ (la seconde équivalence suit de la définition de Δ). Ceci est une contradiction. Il ne peut donc pas exister de d tel que $f(d) = \Delta$. En particulier, f n'est pas surjective. $\square$

2.9 Exercices

Questions de cours. (a) Donner la définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application.

(b) Donner la définition d'une application injective, respectivement surjective, respectivement bijective.

(c) En utilisant les nombres complexes, donner les équations des translations, rotations et homothéties du plan.

(d) Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f\colon E \to F$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit une bijection. Justifier votre réponse.

(e) Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E, donner une formule pour le cardinal de $A \cup B$. Justifier votre réponse.

(f) Soient E et F deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications de E vers F ? Justifier votre réponse.

(g) Soit E un ensemble fini. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$? Justifier votre réponse.

(h) Soient $k \leq n$. Combien y a t-il de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments ?

(i) Donner la définition d'un ensemble dénombrable. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$ sont-ils dénombrables ? Justifier votre réponse (au moins pour les premiers).

Exercice 2.1. Soient E un ensemble et A, B des parties de E.

(a) Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A \cap (A \cap B), \quad A \cup (A \cup B), \quad A \cup (A \cap B), \quad A \cap (A \cup B).$$

(b) Trouver un ensemble E et trois parties A, B et C de E tels que

$$(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C).$$

Exercice 2.2. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

(a) Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

(b) Montrer que $A \cap B = A \cap C$ si et seulement si $A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C)$.

(c) Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cup C \subset B \cup C$.

(d) Montrer que $E \setminus (A \cup B) = E \setminus A \cap E \setminus B$.

(e) Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cap (E \setminus B) = \emptyset$

Exercice 2.3. On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$. Trouver un élément de $(I \cup J) \times (I \cup J)$ qui n'appartient pas à $(I \times I) \cup (J \times J)$.

Exercice 2.4. On considère l'application $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$.

(a) Déterminer les ensembles

(i) $f(\emptyset)$, (ii) $f(\{0\})$, (iii) $f(\{2\})$, (iv) $f([-2, 3])$.

(b) Déterminer les ensembles

(i) $f^{-1}(\emptyset)$, (ii) $f^{-1}(-1)$, (iii) $f^{-1}(\{0, 1\})$,
(iv) $f^{-1}([0, 1])$, (v) $f^{-1}([-2, 3])$.

Exercice 2.5. On considère l'application $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$.

(a) Comparer les ensembles $[0, \pi/2]$ et $f^{-1}(f([0, \pi/2]))$.

(b) Comparer les ensembles $[0, 2]$ et $f(f^{-1}([0, 2]))$

Exercice 2.6. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

(a) $f_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$;

(b) $f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$;

(c) $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;

(d) $f_4 \colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Exercice 2.7. Soit $E = [0, 1]$.

(a) Donner un exemple d'application $f \colon E \to E$ non injective et non surjective.

(b) Donner un exemple d'application $f\colon E \to E$ non injective et surjective.

(c) Donner un exemple d'application $f\colon E \to E$ injective et non surjective.

(d) Donner un exemple d'application $f\colon E \to E$ bijective.

Exercice 2.8. Considérons
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-2}{x+2}.$$

(a) La fonction f est-elle une application ? Comment restreindre f à minima pour avoir une application ? Notons f_1 cette restriction.

(b) L'application f_1 est-elle injective ? surjective ?

(c) Comment restreindre f_1 à minima pour avoir une bijection ? On appelle f_2 cette bijection.

(d) Donner une formule algébrique pour la réciproque de f_2.

Exercice 2.9. Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par
$$f(x) = x+1, \quad g(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x \in [1, +\infty[\\ 0 \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$$

(a) Montrer que f est injective mais non surjective.

(b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.

(c) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 2.10. Soient X, Y deux ensembles et $f\colon X \to Y$ une application.

(a) Rappeler la définition de l'image directe d'un sous-ensemble de X par f et la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble de Y par f.

(b) Soient A, $B \subset X$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(c) Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A, B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(d) Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toutes parties A de E, on a $F \setminus f(A) = f(E \setminus A)$.

(e) Soient A, $B \subset Y$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, puis que $f^{-1}(Y \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 2.11. Soient X, Y, Z trois ensembles et $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ des applications.

(a) Rappeler la définition d'une application injective, d'une application surjective.

(b) Donner l'exemple d'une application injective, d'une application surjective, d'une application ni injective, ni surjective.

(c) Montrer que :

  (i) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,

  (ii) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 2.12. Soient X, Y deux ensembles et $f\colon X \to Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est injective,

(b) pour tout $a \in X$, $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$,

(c) pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 2.13. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est surjective,

(b) pour tout $b \in Y$, $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$,

(c) pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$. *Indications :* On vérifiera d'abord que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 2.14. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soient

$$\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \quad B \mapsto f^{-1}(B), \qquad \psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad A \mapsto f(A).$$

(a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est injective
   (ii) φ est surjective
   (iii) ψ est injective

(b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est surjective
   (ii) φ est injective
   (iii) ψ est surjective

Exercice 2.15. Soit E un ensemble ; pour toute partie A de E, on note $\varphi_A : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cap A$ et $\phi_A : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cup A$.

(a) Montrer que φ_A est injective si, et seulement si, φ_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.

(b) Montrer que ϕ_A est injective si, et seulement si, ϕ_A est surjective si, et seulement si, $A = \emptyset$.

Exercice 2.16. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = \mathbf{1}_E$. Montrer que f est bijective et exprimer sa bijection réciproque.

Exercice 2.17. Soient E et F deux ensembles finis. On note $m = \sharp E$ (resp. $n = \sharp F$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Déterminer le nombre d'injections de E dans F. Puis déterminer le nombre de bijections de E sur F.

2.10 Exercices, sujets années antérieures

Exercice 2.18 (Partiel, 2010)**.**

1. Soient E, F deux ensembles non vides et $\varphi : E \to F$ une application. Après avoir rappelé la définition de l'image directe et de l'image réciproque, montrer que pour toute partie A de E on a l'inclusion suivante : $A \subset \varphi^{-1}\big(\varphi(A)\big)$.
2. On considère l'application :

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \cos x.$$

   (a) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

   (i) $f^{-1}\big(\{0\}\big)$, (ii) $f^{-1}\big(]0, +\infty[\big)$, (iii) $f^{-1}\big([-1, 0]\big)$,
   (iv) $f\big([\pi/6, \pi/3]\big)$, (v) $f\big([\pi/2, \pi]\big)$.

(b) Donner un exemple de partie A de $[-\pi, \pi]$ pour laquelle :

$$f^{-1}\big(f(A)\big) \neq A\,.$$

Exercice 2.19 (Partiel, 2011)**.** (a) Soient E, F deux ensembles non vides et $\varphi\colon E \to F$ une application.

(a) Rappeler la définition de l'image directe $\varphi(A)$ d'un sous-ensemble $A \subset E$ par φ.

(b) Rappeler la définition de l'image réciproque $\varphi^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble $B \subset F$ par φ.

(c) Montrer que pour toute partie B de F on a l'inclusion suivante :

$$\varphi\big(\varphi^{-1}(B)\big) \subset B.$$

(b) On considère l'application :

$$f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x) + 1.$$

(a) Étudier les variations de la fonction f sur $[-\pi, 2\pi]$, puis représenter son graphe et déterminer son image $f([-\pi, 2\pi])$.

(b) Décrire les sous-ensembles suivants de $[-\pi, 2\pi]$:

(i) $f^{-1}\big(\{2\}\big)$, (ii) $f^{-1}\big(\{0\}\big)$, (iii) $f^{-1}\big(\{1\}\big)$, (iv) $f^{-1}\big(\{-1\}\big)$,
(v) $f^{-1}\big(]0, +\infty[\big)$, (vi) $f^{-1}\big([0, 1]\big)$.

(c) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

(i) $f\big([0, \pi]\big)$, (ii) $f\big([-\pi, 0]\big)$.

(d) Donner un exemple de partie B de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$.

Exercice 2.20 (Partiel, 2012)**.** Soit $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = \frac{\mathrm{i}}{z}$.

(a) Démontrer que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$, où $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est définie par $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}(z) = z$.

(b) Calculer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.

(c) Soit $C_r = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = r\}$ le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon r. Calculer l'image directe par f du sous-ensemble C_r. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 2.21 (Partiel, 2012)**.** Considérons l'application suivante :

$$f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

(a) Rappeler les définitions d'une application injective, d'une application surjective, d'une application bijective.

(b) Vérifier que l'application f ci-dessus est bien définie.

(c) Étudier les variations de f et les résumer dans un tableau.

(d) Calculer l'image directe $f(\mathbb{R}_+^*)$ de $\mathbb{R}_+^*$ par f. L'application f est-elle surjective (justifier votre réponse) ?

(e) Calculer les images réciproques $f^{-1}(]0, 1[)$ et $f^{-1}([2, 4])$.

(f) L'application f est-elle injective (justifier votre réponse) ?

(g) On s'intéresse maintenant à l'application :

$$g\colon [1,+\infty[\to [2,+\infty[,\ x\mapsto x+\frac{1}{x}.$$

Montrer que g est bien définie et qu'elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[2,+\infty[$.

Exercice 2.22 (Partiel, 2013)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=\cos(2x)$.

(a) Décrire les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Soit $g\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}$, définie par $g(x)=\cos(2x)$, la restriction de f à l'intervalle $[0,\pi]$.

(b) Décrire les ensembles $g([0,\pi])$ et $g^{-1}(\{0\})$.

Soient maintenant E, F deux ensembles, A, $B\in\mathcal{P}(E)$, deux parties de E, et $h\colon E\to F$ une application.

(c) Montrer que $h(A\cap B)\subseteq h(A)\cap h(B)$.

(d) Montrer que l'inclusion peut être stricte en utilisant l'exemple précédent : trouver deux intervalles I, $J\subset[0,\pi]$ tels que $g(I\cap J)\neq g(I)\cap g(J)$.

Exercice 2.23 (Partiel, 2013)**.** Soit $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ l'application définie par $f(z)=z^2+2\mathfrak{i}(z-1)$.

(a) Soit w un nombre complexe. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(z)=w$ où l'inconnue est z. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(b) Trouver les nombres complexes $z\in\mathbb{C}$ tels que

$$\mathfrak{i}z^2-(2+\mathfrak{i})z+2=0.$$

(c) En déduire l'ensemble $\mathrm{Fix}(f):=\{z\in\mathbb{C}\mid f(z)=z\}$ des éléments fixés par f.

Soit $g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ l'application définie par $g(z)=\mathfrak{i}z-\mathfrak{i}+1$.

(d) Montrer que g est bijective et écrire la bijection réciproque g^{-1}.

(e) Déterminer l'ensemble $g^{-1}(\mathrm{Fix}(f))$.

(f) Donner une interprétation géométrique de l'application g. Est-ce une translation, une rotation, une homothétie ?

Chapitre 3

Introduction à l'algèbre linéaire

3.1 La structure d'espace vectoriel

Commençons par présenter les acteurs principaux que sont les vecteurs.

Définition 3.1. Un *vecteur* u à n composantes est un n-uplet d'éléments de $\mathbb{R}$. On peut écrire les vecteurs en colonnes :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } u_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i,$$

ou bien en ligne :

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ peuvent être additionnés : si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, alors leur somme est définie par :

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

D'autre part, on peut multiplier le vecteur $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ selon la règle :

$$\lambda \cdot u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ces deux opérations munissent $\mathbb{R}^n$ d'une *structure d'espace vectoriel* (sur $\mathbb{R}$).

3.1.1 La notion d'espace vectoriel

Définition 3.2. Un *espace vectoriel* (sur $\mathbb{R}$) est un ensemble E dans lequel est spécifié un élément zéro, noté 0_E et appelé le *vecteur nul*, et muni de deux opérations :

- l'*addition* $E \times E \ni (x, y) \mapsto x + y \in E$ satisfaisant les propriétés suivantes :
  (a) $(x + y) + z = x + (y + z)$, pour tous x, y, $z \in E$,
  (b) $x + y = y + x$, pour tous x, $y \in E$,
  (c) $0_E + x = x$, pour tout $x \in E$,
  (d) pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x + y = 0_E$. Cet élément s'appelle l'*inverse* de x, on le note $-x$.

- la *multiplication par un scalaire* $\mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \in E$ satisfaisant les propriétés suivantes :

  (a) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$, pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et $x \in E$,

  (b) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et $x \in E$,

  (c) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et x, $y \in E$,

  (d) $1 \cdot x = x$, pour tout $x \in E$.

3.1.2 Propriétés élémentaires

- Le zéro 0_E de E est unique.
- L'inverse $-x$ de $x \in E$ est unique.
- Si x, $y \in E$ sont tels que $x + y = x$, alors $y = 0_E$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
- Pour tout $x \in E$, on a $0 \cdot x = 0_E$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ sont tels que $\lambda \cdot x = 0_E$, alors on a $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
- On a $(-1) \cdot x = (-x)$ pour tout $x \in E$.

3.1.3 Exemples fondamentaux

- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$. Remarquons que $0_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ fois}}$; on désigne souvent $0_{\mathbb{R}^n}$ par 0_n ou encore par 0.
- L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ des fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques.
- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.

3.1.4 Notion de combinaisons linéaires

Définition 3.3. Soient E un espace vectoriel et $(a_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de vecteurs. Une *combinaison linéaire* d'éléments de $(a_\iota)_\iota$ est un vecteur de E qui s'écrit sous la forme $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota \cdot a_\iota$, où $\{\lambda_\iota \mid \iota \in I\} \subset \mathbb{R}$ est une famille de scalaires *presque tous nuls*, c'est-à-dire au plus un nombre fini de λ_ι sont non nuls.

En particulier les combinaisons linéaires sont finies.
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $(a_i)_{i \in I}$ est le sous-espace $\mathrm{Vect}((a_i)_{i \in I}) = \mathrm{Vect}(\{a_i \mid i \in I\})$.

3.1.5 Sous-espaces vectoriels

Définition 3.4. Soit F un sous-ensemble *non vide* d'un espace vectoriel E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si la restriction des opérations de E à F fait de F un espace vectoriel.

Remarque 3.5. En particulier, $0_E \in F$.

Théorème 3.6. *Soit E un espace vectoriel. Une sous-partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

(a) $F \neq \emptyset$,

(b) $\forall\, x, y \in F,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F.$

Démonstration. Les assertions (a) et (b) sont évidemment nécessaires ; montrons qu'elles sont suffisantes. L'élément neutre de E, 0_E, est nécessairement l'élément neutre de F. En effet, puisque F n'est pas vide, il contient au moins un élément x. Donc grâce à (b), $0_E = x - x \in F$. De même l'inverse d'un élément de F est automatiquement dans F. □

Proposition 3.7. *Soit E un espace vectoriel. L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Soit $\left(F_\alpha\right)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de sous-espaces de E. Utilisons le Théorème 3.6 pour s'assurer que $\bigcap_\alpha F_\alpha$ est un sous-espace de E.
Quel que soit $\alpha \in \Lambda$, $0_E \in F_\alpha$, donc $0_E \in \bigcap_\alpha F_\alpha$, ce qui montre que $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$. Si $x,\, y \in \bigcap_\alpha F_\alpha$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F_\alpha$, quel que soit $\alpha \in \Lambda$, de sorte que $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in \bigcap_\alpha F_\alpha$. □

Exemples 3.8. (a) $\{0_E\}$ est le sous-espace vectoriel *trivial* de l'espace vectoriel E.

(b) E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

(c)
- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les droites vectorielles, *i.e.* les ensembles de la forme $\{\lambda \cdot v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$, où $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, sont des sous-espaces.
- De même dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les droites et les plans vectoriels sont des sous-espaces.
- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, la droite affine, *i.e.* l'ensemble de la forme

$$\{\lambda \cdot v + u \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

où $u \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, est un sous-espace si et seulement si u est colinéaire à v.

(d) Exemple fondamental : solution d'un système d'équations linéaires homogène.
- Le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$(\mathcal{D}) \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

est représenté géométriquement par deux droites vectorielles dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le système $(\mathcal{D})$ admet pour unique solution $(0,0)$, point d'intersection des deux droites. C'est le sous-espace trivial.

- Considérons le système linéaire homogène suivant :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{pmatrix} t+s \\ t \\ t+2s \\ s \end{pmatrix} \,|\, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- Plus généralement, considérons le système homogène (à coefficients dans $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système d'équations est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

3.1.6 Sous-espace engendré par une partie

Proposition 3.9. *Soit $\mathcal{E}$ une partie d'un espace vectoriel E.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}\subset V} V$*, l'intersection étant prise sur les sous-espaces vectoriels V de E contenant $\mathcal{E}$, est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{E}$. On le note* $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ *ou* $\langle\mathcal{E}\rangle$ *; on dit que c'est le sous-espace engendré par $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Observons en premier lieu que $\bigcap_{\mathcal{E}\subset V} V$ est un sous-espace de E (comme intersection de sous-espaces de E) qui contient $\mathcal{E}$, donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}) \subset \bigcap_{\mathcal{E}\subset V} V$. Réciproquement, $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ étant lui même un sous-espace de E contenant $\mathcal{E}$, on a $\bigcap_{\mathcal{E}\subset V} V \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{E})$. □

Exemples 3.10. (a) Le sous-espace vectoriel des solutions du système $(\mathcal{S})$ ci-dessus est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(b) Si V est un sous-espace de E, alors $\mathrm{Vect}(V) = V$.

Proposition 3.11. $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme* $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$*, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $v_i \in \mathcal{E}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $v_i \in \mathcal{E}$ (la somme vide est également une combinaison linéaire). De manière évidente $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$. Vérifions que $\mathcal{V}$ est un sous-espace de E. Tout d'abord, $\mathcal{V}$ n'est pas vide. Ensuite, la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{E}$ ou le produit par un scalaire d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est encore une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$. On a donc montré que $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{V}$. Réciproquement, si V est un sous-espace de E contenant $\mathcal{E}$, alors V contient toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$, ainsi $\mathcal{V} \subset V$. En définitive $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}(\mathcal{E})$. □

3.2 Base d'un espace vectoriel

3.2.1 Familles génératrices

Définition 3.12. Soit E un espace vectoriel. On dit que $(a_\iota)_{\iota\in I}$ *engendre* l'espace E si tout vecteur $v \in E$ est une combinaison linéaire de la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot a_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.13. Une autre formulation est la suivante : $(a_i)_{i\in I}$ *engendre* l'espace E si et seulement si $\mathrm{Vect}\left((a_i)_{i\in I}\right) = E$.

Exemples 3.14. (a) Les vecteurs $(1,-1)$ et $(2,0)$ engendrent $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs non colinéaires engendrent $\mathbb{R}^2$.

(b) Le vecteur $(1,2)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

(c) La famille $((1,0))$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

(d) Le vecteur $(1,-1)$ n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

(e) Dans $\mathbb{R}^3$, soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$; la famille (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathbb{R}^3$.

(f) *Exemple fondamental* : considérons le système linéaire

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}$. Notons A_i la i-ème colonne du système, c'est-à-dire :

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

et B le vecteur :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Le système $(\mathcal{S})$ possède (au moins) une solution si et seulement si $B \in \mathrm{Vect}(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Démonstration. Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dire que X est solution de $(\mathcal{S})$ revient à dire que :

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n = B.$$

Ceci montre donc bien que le système ci-dessus possède au moins une solution si et seulement si $B \in \mathrm{Vect}(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$. $\square$

Proposition 3.15. *Soit E un espace vectoriel. Toute famille de E contenant une sous-famille génératrice de E est génératrice de E.*

3.2.2 Indépendance linéaire — Familles libres

Proposition 3.16. *Soient E un espace vectoriel et v_i des vecteurs de E.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) toute combinaison linéaire telle que $\sum_{i \in J} \lambda_i \cdot v_i = 0$, J fini, vérifie $\lambda_i = 0$, pour tout i,

(b) aucun des v_i n'est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Évidente en contraposant. □

Définition 3.17. Une famille vérifiant l'une des conditions précédentes est dite *libre*. On dit aussi que les vecteurs x_i sont *linéairement indépendants*. Dans le cas contraire, on parle de famille *liée* ou on dit que les vecteurs x_i sont *linéairement dépendants*.

Proposition 3.18.
- *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
- *Toute famille contenant le vecteur 0_E est liée.*
- *Toute famille contenant une sous-famille liée est liée.*

Exemples 3.19. (a) La famille réduite à (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.

(b) Les vecteurs $(1,-1)$ et $(2,0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs non nuls et distincts, la famille (x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas colinéaires.

(c) Dans $\mathbb{R}^3$, soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, alors e_1, e_2, e_3 sont linéairement indépendants.

(d) Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0), (0,1,0))$ est libre mais pas génératrice.

(e) *Exemple fondamental* : considérons le système linéaire homogène

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système $(\mathcal{S})$ possède une solution autre que la solution nulle si et seulement si la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ n'est pas libre. Ici A_i est la i-ème colonne du système.

Démonstration. Posons encore une fois

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Si le vecteur X est solution du système, alors les composantes de X satisfont à l'égalité dans $\mathbb{R}^n$ suivante :

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n = 0_n.$$

Ainsi, le système précédent possède une solution autre que la solution nulle $X = 0_n$ si et seulement si $x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n = 0_n$ avec des x_i non tous nuls, ou ce qui revient au même si et seulement si la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est liée. □

3.2.3 La notion de base

Définition 3.20. Une *base* d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de E.

Exemples 3.21. (a) Les vecteurs $(1,-1)$ et $(2,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) La *base canonique*

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) = ((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1))$$

de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.22. *Soit $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ est une base de E ;

(b) tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) Si $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ est une base de E, alors tout $x \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$. Montrons que cette écriture est unique. Supposons que x s'écrive sous la forme de deux combinaisons linéaires d'éléments de $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$:

$$x = \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota \cdot \alpha_\iota \text{ et } x = \sum_{\iota \in I} \lambda'_\iota \cdot \alpha_\iota.$$

On a alors

$$0_E = x - x = \sum_{\iota \in I} (\lambda_\iota - \lambda'_\iota) \cdot \alpha_\iota.$$

Mais comme $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille libre, il vient $\lambda_\iota - \lambda'_\iota = 0$ pour tout $\iota \in I$. D'où l'unicité.

(b) $\Rightarrow$ (a) Réciproquement, si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$, alors on sait d'ores et déja, que $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ engendre E. Montrons encore que $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota \cdot \alpha_\iota = 0_E.$$

Or,

$$0_E = \sum_{\iota \in I} 0 \cdot \alpha_\iota,$$

d'où par unicité de l'écriture, $\lambda_\iota = 0$, quel que soit $\iota \in I$. □

Proposition 3.23. *Soient E un espace vectoriel et $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $(\alpha_\iota)_\iota$ est une base de E,

(b) $(\alpha_\iota)_\iota$ est une famille libre maximale[1] de E,

(c) $(\alpha_\iota)_\iota$ est une famille génératrice minimale[2] de E.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) On sait par définition qu'une base $(\alpha_\iota)_\iota$ est une famille libre. Montrons qu'elle est maximale. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E contenant à la fois $(\alpha_\iota)_\iota$ et $x \in E$. Comme $(\alpha_\iota)_\iota$ est une base de E, il existe une famille presque nulle $(\lambda_\iota)_\iota$ d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que

$$x = \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota \cdot \alpha_\iota.$$

1. au sens de l'inclusion des ensembles
2. au sens de l'inclusion des ensembles

Ceci montre que la famille $(x, (\alpha_\iota)_{\iota \in I})$ n'est donc pas libre et par conséquent que $\mathcal{F}$ n'est pas libre non plus. En conclusion, la base $(\alpha_\iota)_\iota$ est donc maximale parmi les familles libres de E.

$\underline{(a) \Rightarrow (c)}$ On sait par définition qu'une base $(\alpha_\iota)_\iota$ est une famille génératrice. Montrons qu'elle est minimale. Par l'absurde supposons qu'il existe $\iota_0 \in I$ tel que la famille $(\alpha_\iota)_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}}$ soit génératrice. Il existe donc en particulier une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{R}$, $(\lambda_\iota)_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}}$, telle que

$$\alpha_{\iota_0} = \sum_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}} \lambda_\iota \cdot \alpha_\iota$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $(\alpha_\iota)_\iota$ est une base de E. En conclusion, la base $(\alpha_\iota)_\iota$ est donc minimale parmi les familles génératrices de E.

$\underline{(b) \Rightarrow (a)}$ Soit $(\alpha_\iota)_\iota$ une famille libre maximale de E ; montrons que $(\alpha_\iota)_\iota$ est une famille génératrice de E. Soit $x \in E \setminus \{\alpha_\iota \mid \iota \in I\}$. La famille $(x, \alpha_\iota\, \iota \in I)$ est donc liée. Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une famille presque nulle $(\lambda_\iota)_\iota$ d'éléments de $\mathbb{R}$, ces nombres non tous nuls, tels que

$$\lambda \cdot x + \sum_\iota \lambda_\iota \cdot \alpha_\iota = 0.$$

Observons que $\lambda \neq 0$. En effet, si λ était nul, on aurait $\sum_\iota \lambda_\iota \cdot \alpha_\iota = 0$ avec des nombres λ_ι non tous nuls, ce qui est impossible puisque $(\alpha_\iota)_\iota$ est une famille libre.
Ainsi on a

$$x = \sum_\iota -\frac{\lambda_\iota}{\lambda} \cdot \alpha_\iota,$$

et donc $x \in \mathrm{Vect}(\{\alpha_\iota \mid \iota \in I\})$.

$\underline{(c) \Rightarrow (a)}$ Soit $(\alpha_\iota)_\iota$ une famille génératrice minimale de E. Montrons que $(\alpha_\iota)_\iota$ est une famille libre de E. Soit $(\lambda_\iota)_\iota$ une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_\iota \lambda_\iota \cdot \alpha_\iota = 0.$$

S'il existait $\iota_0 \in I$ tel que $\lambda_{\iota_0} \neq 0$, alors on aurait

$$\alpha_{\iota_0} = \sum_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}} -\frac{\lambda_\iota}{\lambda} \cdot \alpha_\iota,$$

de sorte que la famille $(\alpha_\iota)_{\iota \in I \setminus \{\iota_0\}}$ serait aussi génératrice, contrairement à l'hypothèse de minimalité (remarquons que si $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{E})$, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{E} \cup \{x\})$. ☐

Définition 3.24. Un espace vectoriel est de *type fini* s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition 3.25. *Tout sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel de type fini est de type fini.*

Exemple 3.26. $\mathbb{R}^n$ est de type fini.

Théorème 3.27 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soient E un espace vectoriel de type fini, $\mathcal{L} \subset E$ une famille libre et $\mathcal{G} \subset E$ une famille génératrice finie. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset (\mathcal{L} \cup \mathcal{G})$. En particulier, toute famille libre peut être complétée en une base.*

Démonstration. Elle utilise les deux lemmes suivants (conséquence immédiate des définitions).

Lemme 3.28. *Soient E un espace vectoriel de type fini, $\mathcal{F}$ une famille de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Pour que $\mathcal{F}$ soit génératrice, il faut et il suffit que $g \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, pour tout $g \in \mathcal{G}$.*

Lemme 3.29. *Soient E un espace vectoriel de type fini, $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$. Supposons que $V \subset E$ (i.e. $V \subseteq E$ et $V \neq E$) et soit $x \in E \setminus V$. Alors $\mathcal{L} \cup \{x\}$ est libre.*

La démonstration est alors la suivante : soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ telles que $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ et $\mathcal{L} \cup \mathcal{P}$ est libre. L'ensemble $\mathcal{E}$ est ordonné par l'inclusion. Notons $\sharp\mathcal{G}$ le nombre d'éléments de $\mathcal{G}$. Pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{E}$, on a $\sharp\mathcal{P} \leqslant \sharp\mathcal{G}$. Il existe donc une partie $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{E}$ ayant le maximum d'éléments. La famille $\mathcal{L} \cup \mathcal{P}_0$ est bien entendu libre, vérifions qu'elle est génératrice. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $x \in \mathcal{G}$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L} \cup \mathcal{P}_0)$, alors $\mathcal{L} \cup (\mathcal{P}_0 \cup \{x\})$ serait encore libre : contradiction avec l'hypothèse de maximalité portant sur $\mathcal{P}_0$. La famille $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{P}_0$ répond donc à la question. □

Corollaire 3.30. *Tout espace vectoriel de type fini possède une base finie.*

3.3 Dimension d'un espace vectoriel

3.3.1 La notion de dimension

Des espaces de type fini à la définition de la dimension...

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que tout espace de type fini possède au moins une base finie, c'est-à-dire au moins un système de vecteurs à la fois libre et générateur. L'étape décisive qu'il nous faut maitenant franchir est d'établir que deux bases d'un même espace de type fini ont le même nombre d'éléments. Le résultat suivant connu dans la littérature sous le nom de « Lemme d'échange de Grassmann »va justement permettre de démontrer l'invariance du nombre d'éléments d'une base d'un espace de type fini donné et permettra donc d'aboutir à la définition de la notion de dimension d'un espace vectoriel.

Lemme d'échange de Grassmann

Théorème 3.31. *Soient E un espace vectoriel de type fini, $(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \dots,\, \alpha_m)$ une famille libre de E et $(\beta_1,\, \beta_2,\, \dots,\, \beta_n)$ une famille génératrice de E. Alors $m \leqslant n$; et il existe une renumérotation des vecteurs β_j telle que $(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \dots,\, \alpha_m,\, \beta_{m+1},\, \beta_{m+2},\, \dots,\, \beta_n)$ engendre E.*

Démonstration. Si $m = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $m \geqslant 1$. Pour tout entier $r \in \{1, \dots, m\}$ on considère l'assertion suivante :

$$\mathcal{A}(r) : \begin{cases} r \leqslant n, \text{ et après renumérotation éventuelle des} \\ \text{vecteurs } \beta_j, \mathrm{Vect}(\alpha_1,\, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_n) = E. \end{cases}$$

Nous allons montrer par récurrence que $\mathcal{A}(r)$ est vraie. La conclusion du théorème est l'assertion $\mathcal{A}(m)$.
Démonstration de l'assertion $\mathcal{A}(1)$. L'espace E n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $m \geqslant 1$. Donc $r = 1 \leqslant n$. Par ailleurs, comme $(\beta_1,\, \beta_2, \dots,\, \beta_n)$ est une famille génératrice, il existe des scalaires $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \dots,\, \lambda_n$ vérifiant $\alpha_1 = \sum_i \lambda_i \cdot \beta_i$; sans perte de généralité, quitte à renuméroter les β_j, nous pouvons supposer que $\lambda_1 \neq 0$. On peut donc exprimer b_1 comme combinaison linéaire de α_1 et des autres b_j :

$$\beta_1 = \lambda_1^{-1} \cdot \alpha_1 - \sum_{j=2}^{n} \lambda_1^{-1} \lambda_j \cdot \beta_j.$$

En conclusion, $E = \mathrm{Vect}(\beta_1,\, \beta_2,\, \dots,\, \beta_n) = \mathrm{Vect}(\alpha_1,\, \beta_2,\, \beta_3,\, \dots, \beta_n)$.

Récurrence. Supposons l'assertion $\mathcal{A}(r)$ vraie pour $r \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, et montrons que l'assertion $\mathcal{A}(r+1)$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, nous savons que $r \leqslant n$. S'il y avait égalité, la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ serait génératrice, ce qui contredit le fait que la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1})$ est libre. Donc $r+1 \leqslant n$. C'est la première partie de l'assertion $\mathcal{A}(r+1)$.
De même que précédemment, comme la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_n)$ est génératrice, il existe des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ tels que

$$\alpha_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot \alpha_i + \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j \cdot \beta_{j+r}.$$

Observons de plus que nécessairement $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ ne sont pas simultanément nuls car la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1})$ est libre ; quitte à renuméroter les vecteurs $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$, on peut toujours supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Par suite β_{r+1} s'écrit comme combinaison linéaire des α_i, $1 \leqslant i \leqslant r+1$, et des β_j, $r+2 \leqslant j \leqslant n$:

$$\beta_{r+1} = -\sum_{i=1}^{r} \lambda_1^{-1} \mu_i \cdot \alpha_i + \lambda_1^{-1} \cdot \alpha_{r+1} - \sum_{j=2}^{n-r} \lambda_1^{-1} \lambda_j \cdot \beta_{j+r}.$$

On en déduit donc que

$$E = \mathrm{Vect}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n) = \mathrm{Vect}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \beta_{r+2}, \beta_{r+3}, \ldots, \beta_n).$$

□

Théorème-Définition 3.32. *Dans un espace vectoriel de type fini E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la* dimension*, on le note* $\dim_{\mathbb{R}} E$.

Convention

L'espace vectoriel nul $\{0\}$ est par convention de dimension finie 0.

Démonstration. L'espace E étant de dimension finie, E possède au moins une base de type fini que l'on note $\mathcal{B}$. Soient $n = \sharp\mathcal{B}$ le nombre de ses éléments et $\mathcal{B}'$ une autre base de E.
Le lemme de Grassmann implique que toute famille libre finie dans E a au plus n éléments ; donc en particulier la famille $\mathcal{B}'$ est finie et a au plus n éléments : $\sharp\mathcal{B}' \leqslant n$. Une nouvelle application du lemme de Grassmann en échangeant le rôle de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, assure que $n \leqslant \sharp\mathcal{B}'$, et finalement que $n = \sharp\mathcal{B}'$. □

Exemples 3.33. (a) Exemples d'espaces de dimension finie : $\dim \mathbb{R}^n = n$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
(b) Exemples d'espaces de dimension infinie : l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions, l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques ne sont pas de dimension finie.

Conséquences importantes

Corollaire 3.34. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*
(a) Toute famille libre à n éléments est une base.
(b) Toute famille génératrice à n éléments est une base.

Corollaire 3.35. *Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace de E. On suppose que* $\dim E = n$ *et* $\dim F = m$. *Toute base de* $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ *de F peut être complétée en une base*

$$(\beta_1,\, \beta_2,\, \dots,\, \beta_m,\, \beta_{m+1}, \dots,\, \beta_n)$$

de E. En particulier $m \leqslant n$.

Corollaire 3.36. *Soit E un espace de dimension finie n. Alors :*

(a) toute famille ayant au moins $n+1$ éléments est liée,

(b) toute famille ayant au plus $n-1$ éléments ne peut être génératrice.

3.3.2 Exemple fondamental : système linéaire

Considérons le système linéaire (avec second membre) suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}$. Notons A_i la i-ème colonne du système, c'est-à-dire :

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

et B le vecteur :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) quel que soit $B \in \mathbb{R}^n$, le système possède *au moins* une solution,

(b) le système homogène associé

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

possède l'*unique solution* $X = 0_n$,

(c) quel que soit $B \in \mathbb{R}^n$, le système possède *au plus* une solution,

(d) quel que soit $B \in \mathbb{R}^n$, le système possède *exactement* une solution.

Démonstration. Elle consiste simplement à reformuler les assertions ci-dessus de la façon suivante :

1. l'assertion (a) est équivalente à ≪ la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ engendre $\mathbb{R}^n$ ≫ ;
2. l'assertion (b) est équivalente à ≪ la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est libre ≫ ;
3. l'équivalence des assertions (b) et (c) est évidente ; en effet supposons que quel que soit $B \in \mathbb{R}^n$ le système possède deux solutions distinctes, par soustraction le système homogène associé admet une solution non nulle.
4. l'assertion (d) est équivalente à ≪ la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ≫ ;

Les assertions (a)–(d) sont donc équivalentes en utilisant le Corollaire 3.34. □

3.4 La méthode d'élimination de Gauss (ou méthode du pivot)

L'étude de l'indépendance ou de la dépendance linéaire d'une famille de vecteurs est au cœur des problèmes de l'algèbre linéaire : détermination de bases, calcul de dimension, etc... Le but de cette partie est de donner une méthode générale pour résoudre ce type de problème. Cette méthode s'appelle la méthode d'élimination de Gauss.

3.4.1 Opérations élémentaires sur les équations d'un système linéaire

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}$. La méthode d'élimination de Gauss est fondée sur l'observation suivante : Observation fondamentale : l'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les *opérations élémentaires* suivantes :

1. changer l'ordre des équations,
2. multiplier une des équations par un scalaire non nul,
3. ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres.

Illustrons cette observation sur deux exemples.

(a) Considérons le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & 2y & - & z & = & 1 & (L_1) \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 2 & (L_2) \\ x & + & 4y & - & 6z & = & 2 & (L_3) \end{array}\right.$$

Transformons le système grâce aux opérations élémentaires dans le but de chercher ses solutions : on dit que l'on *échelonne le système*.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccr} x & + & 2y & - & z & = & 1 & & (L_1) \\ & - & y & + & 3z & = & 0 & (L_2') = & (L_2) - 2(L_1) \\ x & + & 4y & - & 6z & = & 2 & & (L_3) \end{array}\right.$$

puis

$$\left\{\begin{array}{ccccccccr} x & + & 2y & - & z & = & 1 & & (L_1) \\ & - & y & + & 3z & = & 0 & & (L_2') \\ & & 2y & - & 5z & = & 1 & (L_3') = & (L_3) - (L_1) \end{array}\right.$$

d'où encore

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & - & z & = & 1 & & (L_1) \\ & - & y & + & 3z & = & 0 & & (L_2') \\ & & & & z & = & 1 & & (L_3'') = (L_3') + 2(L_2') \end{array}\right.$$

Donc $z = 1$, puis en reportant dans (L_2'), on trouve $y = 3$, puis enfin en reportant dans (L_1), il vient $x = -4$. Le système admet donc une unique solution $(x, y, z) = (-4, 3, 1)$.

(b) Considérons le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccl} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 & (L_1) \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 & (L_2) \\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 3w & = & 5 & (L_3) \end{array}\right.$$

Faisons les opérations élémentaires suivantes :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccl} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 & (L_1) \\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5 & 2(L_2) - 3(L_1) \\ & & 3y & + & 12z & - & 15w & = & 7 & 2(L_3) - 3(L_1) \end{array}\right.$$

Observons que les membres de gauches des deux dernières équations sont proportionnels, mais pas leur membre de droite. Le système n'a donc pas de solution.

3.4.2 Méthode de résolution d'un système linéaire

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}$.

Les étapes sont les suivantes :

(a) On s'arrange pour que la *première équation commence par un coefficient non nul* quitte à changer l'ordre des équations. Ce coefficient s'appelle le *pivot*.

(b) On échelonne ensuite le système. Deux cas peuvent se présenter :

1er cas : il y a une équation du type :

$$(\circ) \quad 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \text{ avec } b \neq 0.$$

Dans ce cas, le système n'a pas de solution : le système est incompatible. *2ème cas :* il n'y a pas d'équation de la forme $(\circ)$. Si une équation du type

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$$

apparaît, il suffira de l'éliminer dans le système. Une fois éliminées ces équations, on aboutit à un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,s}x_s + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1' \\ \\ \mathbf{a_{i,r}}x_r + \ldots + a_{i,s}x_s + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i' \\ \ddots \qquad\qquad \\ \mathbf{a_{m,s}}x_s + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m' \end{array}\right.$$

Les coefficients en caractères gras sont tous non nuls. On met ainsi en évidence un sous-système échelonné dont la dernière ligne n'a qu'un seul coefficient $\mathbf{a_{m,s}}$ qui est non nul. Les inconnnues x_1, x_2, ..., x_s s'appellent les inconnues principales du système, les autres (s'il y en a) sont les variables dites libres. Deux cas sont possibles :

- S'il n'y a pas de variable libre (*i.e.* $s = n$), alors le système admet *une et une seule solution* que l'on obtient en calculant successivement x_m, x_{m-1}, ..., x_1.
- S'il y a des variables libres, disons p, alors on les porte dans le second membre de chaque équation, puis on résout comme précédemment : il existe alors une *infinité de solutions dépendantes de p paramètres.*

3.4.3 Exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 & (L_1) \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 & (L_2) \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 & (L_3) \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 & (L_1) \\ z - 2w = 1 & (L_2) - 2(L_1) \\ 2z - 4w = 2 & (L_3) - 5(L_1) \end{cases}$$

ou encore puisque les deux dernières équations sont proportionnelles

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ z - 2w = 1 \end{cases}$$

x et z sont les inconnues principales, y et w les variables libres. On a donc

$$\begin{cases} x - 2z = 2 - 2y - 3w \\ z = 1 + 2w \end{cases}$$

Le système admet donc une infinité de solutions donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2t + s \\ t \\ 1 + 2s \\ s \end{pmatrix} \quad \text{avec } t, s \in \mathbb{R}.$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.4 Les systèmes linéaires homogènes

Considérons le système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$. Un tel système admet toujours au moins une solution, la solution nulle : $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. C'est la solution triviale. On a le résultat suivant :

Proposition 3.37. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si le système sous forme échelonnée comporte k équations, l'espace des solutions est de dimension $n-k$. En particulier, un système homogène avec plus d'inconnues que d'équations ($n > m$) admet des solutions non nulles.*

Exemple 3.38. Considérons le système homogène suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système se ramène au système échelonné suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3z + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Les variables libres sont x_3, x_4, x_5 ; l'ensemble des solutions est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. La solution générale est :

$$x_1 = s_1 - 3s_2 + 5s_3, \quad x_2 = s_1 + s_2 - 2s_3, \quad x_3 = s_1, \quad x_4 = s_2, \quad x_5 = s_3.$$

En conclusion, une base de l'espace des solutions est :

$$(1,1,1,0,0), \quad (-3,1,0,1,0), \quad (5,-2,0,0,1).$$

3.5 Application aux familles libres et aux familles génératrices

3.5.1 Comment montrer qu'une famille est libre ?

Vérifions que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,-2,-3),\ v_2 = (2,3,-1),\ v_3 = (3,2,1)$$

forment une famille libre.
Il s'agit d'établir l'assertion suivante :

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0 \text{ implique } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

ou ce qui revient au même que le système homogène :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

admet comme seule solution la solution nulle.
On échelonne le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 30\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

3.5.2 Détermination des relations linéaires liant une famille de vecteurs

Déterminer les relations linéaires liant les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 1, 0, 2),\ v_2 = (-1, 0, 2, 1),\ v_3 = (0, 1, 2, 3),\ v_4 = (1, 3, 4, 8).$$

Il s'agit de trouver des $x_i \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0$$

c'est-à-dire les solutions (non nulles) du système homogène :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 8\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

On échelonne le système de la façon suivante :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

En posant $\lambda_2 = s$ et $\lambda_4 = t$, on obtient

$$\lambda_1 = s - t$$

$$\lambda_3 = -s - 2t$$

d'où les relations :

$$(s - t) \cdot v_1 + s \cdot v_2 - (s + 2t) \cdot v_3 + t \cdot v_4 = 0 \text{ avec } s,\ t \in \mathbb{R}.$$

En donnant au couple (s, t) les valeurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, on obtient les solutions indépendantes (non multiples l'une de l'autre) :

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 \text{ et } -v_1 - 2v_3 + v_4 = 0.$$

3.5.3 Comment montrer qu'une famille est génératrice ?

Montrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (0, 1, -1)$$

engendrent $\mathbb{R}^3$.
Il s'agit de montrer que *tout* vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ c'est-à-dire que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système

$$(a, b, c) = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$$

admet au moins une solution.
On a

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= b \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= c \end{aligned}\right.$$

On échelonne le système de la façon suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \quad a \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= b - a \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= c - a \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire finalement :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 = & a \\ \lambda_2 = & \frac{1}{2}(b + c - 2a) \\ \lambda_3 = & \frac{1}{2}(b - c) \end{array}\right.$$

Remarque 3.39. Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et que la famille considérée compte 3 vecteurs, montrer que la famille est génératrice est équivalent à montrer que la famille est libre.

3.5.4 Équation d'un sous-espace vectoriel

Déterminer les équations du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs :

$$v_1 = (1, 3, -2, 2, 3),\ v_2 = (1, 4, -3, 4, 2),\ v_3 = (2, 3, -1, -2, 9).$$

Une équation quelconque du système est du type

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 0.$$

En imposant que les composantes de v_1, v_2, v_3 vérifient cette équation, on trouve le système :

$$\left\{\begin{aligned} a + 3b - 2c + 2d + 3e &= 0 \\ a + 4b - 3c + 4d + 2e &= 0 \\ 2a + 3b - c + 2d + 9e &= 0 \end{aligned}\right.$$

Il vient

$$\left\{\begin{aligned} a + 3b - 2c + 2d + 3e &= 0 \\ b - c + 2d - e &= 0 \\ -3b + 3c - 6d + 3e &= 0 \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{aligned} a + 3b - 2c + 2d + 3e &= 0 \\ b - c + 2d - e &= 0 \end{aligned}\right.$$

En donnant aux variables libres c, d, e les valeurs $(1, 0, 0)$ (respectivement $(0, 1, 0)$, respectivement $(0, 0, 1)$) on trouve $(a, b) = (-1, 1)$ (respectivement $(a, b) = (4, -2)$, respectivement $(a, b) = (-6, 1)$) d'où le système :

$$\left\{\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0 \\ -6x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \end{aligned}\right.$$

3.6 Compléments

3.6.1 Produits, sommes et sommes directes d'espaces vectoriels

Produit

Définition 3.40. Soient E, F deux espaces vectoriels. Le produit $E \times F$ est aussi un espace vectoriel pour les lois :

$$\forall (x,y) \in E \times F, \forall (x',y') \in E \times F, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in E \times F, \lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y).$$

La vérification des axiomes d'espace vectoriel est une simple routine laissée au lecteur.

Exemple 3.41. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ s'identifie à $\mathbb{R}^{2n}$ de façon évidente.

Somme

Définition 3.42. Soient E un espace vectoriel et V_1, V_2 deux sous-espaces de E. Le sous-ensemble de E constitué des éléments de la forme $v_1 + v_2$, avec $v_i \in V_i$, est un sous-espace de E appelé *somme* de V_1 et V_2. On le note $V_1 + V_2$.

Proposition 3.43. *Soient E un espace vectoriel et V_1, V_2 deux sous-espaces de E. On a : $V_1 + V_2 = \mathrm{Vect}(V_1 \cup V_2)$.*

Démonstration. Le sous-espace $V_1 + V_2$ contient à la fois V_1 et V_2, il contient donc $\mathrm{Vect}(V_1 \cup V_2)$. Réciproquement, $\mathrm{Vect}(V_1 \cup V_2)$ contient tous les éléments de la forme $v_1 + v_2$, avec $v_i \in V_i$, il contient donc $V_1 + V_2$. □

Somme directe

Proposition 3.44. *Soient V_1, V_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $E = V_1 + V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \{0_E\}$,

(b) tout vecteur $v \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = v_1 + v_2$, avec $v_i \in V_i$.

Démonstration. Montrons que $(a) \Rightarrow (b)$. Tout vecteur $v \in E$ s'écrit sous la forme $v = v_1 + v_2$ avec $v_i \in V_i$ car $E = V_1 + V_2$. Supposons qu'il existe d'autres vecteurs $v_1' \in V_1$ et $v_2' \in V_2$ tels que $v = v_1' + v_2'$, alors $(v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') = 0_E$ avec $v_i - v_i' \in V_i$. Ainsi

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0_E\},$$

ce qui montre que $v_i = v_i'$ pour $i = 1, 2$.
Réciproquement l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ est évidente. □

Définition 3.45. Sous les hypothèses de la Proposition 3.44, on dit que E est la *somme directe* des sous-espaces V_1 et V_2, ou encore que V_1 et V_2 sont des sous-espaces *supplémentaires*. On note $E = V_1 \oplus V_2$.

Exemple 3.46. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est la somme directe du plan $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et de la droite $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$.

3.6.2 Dimensions des sommes, sommes directes, produits

Proposition 3.47. *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. L'espace vectoriel $E \times F$ est de dimension finie et :*

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Proposition 3.48 (Formule de Grassmann)**.** *Soient E, F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel de dimension finie, on a :*

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F.$$

Démonstration. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ une base de $E \cap F$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m \in E$ et des vecteurs $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n \in F$ tels que $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m)$ soit une base de E et $(a_1, a_2, \ldots, a_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n)$ soit une base de F. Il nous reste à montrer que

$$(\star) \quad (a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n) \text{ est une base de } E + F.$$

Tout d'abord, il est évident que la famille $(\star)$ engendre $E + F$.
Par ailleurs, montrons que la famille $(\star)$ est libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots, \mu_m, \nu_{k+1}, \nu_{k+2}, \ldots, \nu_n$ des scalaires tels que

$$\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \cdot a_\ell + \sum_{\ell=k+1}^{m} \mu_\ell \cdot b_\ell + \sum_{\ell=k+1}^{n} \nu_\ell \cdot c_\ell = 0.$$

On a donc

$$\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \cdot a_\ell + \sum_{\ell=k+1}^{m} \mu_\ell \cdot b_\ell = - \sum_{\ell=k+1}^{n} \nu_\ell \cdot c_\ell.$$

Le membre de gauche de l'équation précédente est dans E, son membre de droite est dans F, donc ce vecteur appartient à $E \cap F$. En particulier, $\sum_{\ell=k+1}^{n} \nu_\ell \cdot c_\ell$ est une combinaison linéaire des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Comme de plus la famille $(a_1, a_2, \ldots, a_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n)$ est libre (puisque c'est une base de F), il en résulte que $\nu_{k+1} = \cdots = \nu_n = 0$. D'où l'on déduit (puisque $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m)$ est une base de E), que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \mu_{k+1} = \mu_{k+2} = \cdots = \mu_m = 0.$$

La formule sur les dimensions est une conséquence immédiate. □

Exemple 3.49. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons U (resp. V) le sous-espace des vecteurs de la forme $(x, 0, z)$ (resp. $(0, y, z)$). On a $U \cap V = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3 = U + V$, $\dim U = \dim V = 2$, $\dim(U + V) = 3$ et $\dim(U \cap V) = 1$.

Proposition 3.50. *Si V_1, V_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors V_1 et V_2 sont supplémentaires si et seulement si $E = V_1 + V_2$ et $\dim E = \dim V_1 + \dim V_2$.*

Proposition 3.51. *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède un supplémentaire.*

Remarque 3.52. En général, le supplémentaire n'est pas unique. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$ toute droite vectorielle non horizontale est un supplémentaire du plan horizontal $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

3.7 Exercices

Questions de cours.

(a) A quelles conditions le sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

(b) Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de V. Donner la définition de « $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre dans V ».

(c) Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de V. Donner la définition de « $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de V ».

(d) Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de V. Donner la définition de « $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de V ».

(e) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition de la dimension de V. Si $n = 3$, quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de V ?

Exercice 3.1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$;

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$;

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$;

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 4\}$;

(f) $F = \{(t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$;

(g) $G = \{(u + v, u - v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(h) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 3\}$;

(i) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$;

(j) $J = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$;

(k) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0\}$;

(l) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;

(m) $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right\}$;

(n) $N = \{(u, 3v, v - u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(o) $O = \{(u + 1, 3v, v - u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(p) $P = \{(u + v, 2u, v - 4u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(q) $Q = \{(-u, v, u + 3v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(r) $R = \{(u + v - 2, v + 2, 2u + 3v - 2) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3.2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 3.3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non colinéaires, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 3.4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, 3)$ et $w = (2, -4, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) On suppose que w n'est pas multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a $P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \}$, où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 3.5. Déterminer une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ où $a_1 = (3, 3, 10)$, $a_2 = (0, 3, 4)$ et $a_3 = (1, 0, 2)$;

(b) $B = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ où $b_1 = (1, 0, 0)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$;

(c) $C = \{(2t + u, -u, -2t) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$;

(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$;

(e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \;\text{ et }\; 3x - y + z = 0\}$.

Exercice 3.6. Comparaison de deux sous-espaces.

(a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 3, 2),\ v_2 = (3, -1, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, -6, -3),\ v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3, v_4). Déterminer la dimension de F et en donner une base. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

(b) Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G.

(c) Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 3.7. Résoudre les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - 3y + 7z = -4 \\ x - 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases}$$

Exercice 3.8. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(a) \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + 4y - 2z = 4 \\ 5x + 6y - 10z = 10 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}.$$

Exercice 3.9. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y + 2z = 3 \end{cases}$$

(a) n'ait aucune solution ;

(b) ait une infinité de solutions ;

(c) ait une solution unique.

Exercice 3.10. Pour quelles valeurs des paramètres réels α, β, γ le système suivant admet au moins une solution ?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 3x + 8y - 14z = \beta \\ 2x + 4z = \gamma \end{cases}$$

Exercice 3.11. Soit le système

$$(S)\ \begin{cases} x + 3y + 4z = 0 & (L_1) \\ 3x + 2y + 4z = 0 & (L_2) \\ x + 2y + 3z = 0 & (L_3) \end{cases}.$$

On remplace L_1 par $L_1' = L_2 - L_1$, L_2 par $L_2' = L_2 - L_3$ et L_3 par $L_3' = L_1 - L_3$. Le système (S) est-il équivalent au système (S') $\begin{cases} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{cases}$?

Exercice 3.12.

(a) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille composée des vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$.
La famille $\{u, v\}$ est-elle libre ? La famille $\{u, v\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? La famille $\{u, v\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Soient u, v les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (0, 3, 4)$ et $v = (1, 0, 5)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(c) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -1)$ et $w = (9, 8, 1)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(d) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $u = (1, 1)$, $v = (-1, 1)$ et $w = (3, 3)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

(e) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (-1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-2, 5, 5)$.
Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Ces vecteurs engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(f) Soient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ et $v_4 = (2, 1, 1)$.
Cette famille est-elle libre ? Cette famille est-elle génératrice ? Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(g) Compléter si possible la famille $\{(1, 0, -1), (0, 2, 3)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

(h) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(i) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.13. Pour quelles valeurs du paramètre réel a les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 0, 2) \quad v_2 = (1, 0, 1, 2) \quad v_3 = (1, 3, 5, 7) \quad v_4 = (0, 2, 3, a)$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3.14. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

(a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 3.15. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 3.16. Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

(b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

(c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 3.17. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2, 3, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, 7)$.

3.8 Exercices, sujets années antérieures

Exercice 3.18 (Partiel, 2007)**.** Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(u - 2v, u + v, 5u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$.

(a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Donner une base $\mathcal{B}$ de E et déterminer la dimension de E.

(c) Compléter la base $\mathcal{B}$ de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Trouver un système d'équations linéaires définissant E.

Exercice 3.19 (Examen, 2007)**.** On considère les vecteurs $u_1 = (1, -1, 2, 2)$, $u_2 = (1, 1, 0, 2)$ et $u_3 = (1, -3, 4, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et u_3. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations de F.

(b) On considère le vecteur $w_1 = (2, 1, 1, 2)$. Sans les calculer, montrer qu'il existe deux vecteurs w_2 et w_3 dans F tels que (w_1, w_2, w_3) soit une base de F.

(c) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + 2t = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de G.

(d) Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est la dimension de $F \cap G$?

(e) Calculer $\dim(F + G)$ et en déduire $F + G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

(f) Trouver un supplémentaire de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.20 (Examen, 2007)**.** Dans un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, quand dit-on que des vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de V engendrent V ? Les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ $(0, 0, 1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? En est-il de même lorsque l'on retire le premier de ces quatre vecteurs ? le deuxième en gardant les trois autres ?

Exercice 3.21 (Examen, 2007)**.** Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2t = 0, \\ x + 2z - t = 0 \end{array} \right. \}.$$

Soit α un réel. Posons $u = (-1, \alpha, 1, 1)$, $v = (1, 1, \alpha, -1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(b) Donner une base de E; en déduire la dimension de E.

(c) Montrer qu'il existe une unique valeur α_0 de α pour laquelle F est inclus dans E.

(d) Montrer que F est inclus dans E si et seulement si $\dim F = 1$.

(e) Déterminer $E \cap F$. En déduire suivant les valeurs de α la dimension de $E \cap F$. En déduire que pour $\alpha \neq -1$ les sous-espaces E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(f) Donner suivant les valeurs de α un système d'équations de F.

(g) Trouver, lorsque $\alpha = -1$, une base d'un supplémentaire de F dans E.

Exercice 3.22 (Examen, 2007)**.** On considère dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels définis par

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y - z + t = 0\} \quad \& \quad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + t = 0\}.$$

On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, 2, 3, 4)$.

(a) Quelle est la dimension de E ? Celle de F ?

(b) Vérifier que u_1 et u_2 appartiennent à E et compléter (u_1, u_2) en une base (u_1, u_2, u_3) de E.

(c) Trouver un vecteur de F qui n'est pas dans E et, sans calcul, montrer que $E + F = \mathbb{R}^4$. Quelle est la dimension de $E \cap F$? En donner une base.

Exercice 3.23 (Examen, 2008)**.** Soient $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $u_1 = (1, 2, -2, -2)$, $u_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $u_3 = (0, 5, -1, 0)$, $u_4 = (1, -2, -1, -2)$, $u_5 = (0, 4, -2, -1)$, $u_6 = (1, -6, 1, -1)$.
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1 et u_2; soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_4, u_5 et u_6.

(a) Montrer que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

(b) Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Donner ses coordonnées x', y', z' et t' dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Montrer que v appartient à E si et seulement si $z' = t' = 0$. En déduire des équations de E dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(d) Extraire de $\{u_4, u_5, u_6\}$ une base de F; donner un système d'équations de F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(e) Trouver une base de $E \cap F$. En déduire le rang de $\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}$. Retrouver ce rang par une méthode directe.

Exercice 3.24 (Partiel, 2010)**.** On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + 3y - 2z + 4t = 0 \;\text{ et }\; 2x + 5y + 4z - t = 0\right\}.$$

Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de F.

Exercice 3.25 (Examen, 2011)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y - 4z = 0\right\}$.

(a) Quelles sont les propriétés qu'une partie P de $\mathbb{R}^3$ doit satisfaire pour être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'il satisfait ces propriétés.

(b) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F ; en déduire la dimension de F.
Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs suivants : $v_1 = (1, 6, 1)$, $v_2 = (1, 3, -5)$ et $v_3 = (2, 7, -8)$.

(c) Justifier *sans aucun calcul* que la dimension de G vérifie : $2 \leqslant \dim G \leqslant 3$.

(d) Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre. *Sans aucun calcul supplémentaire*, extraire de cette famille une base $\mathcal{B}_2$ de G, en justifiant soigneusement qu'il s'agit bien d'une base de G. Préciser la dimension de G.

(e) Montrer que G est défini par l'équation $11x - 2y + z = 0$. (Autrement dit, montrer que les vecteurs de G sont exactement les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $11x - 2y + z = 0$.)

(f) Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ du sous-espace vectoriel $F \cap G$; en déduire la dimension de $F \cap G$.

(g) Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$. Déterminer sans calculs supplémentaires si $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.26 (Partiel, 2010)**.** On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -2, 1, -3), \quad u_2 = (3, -7, 4, -5), \quad u_3 = (2, -1, 0, -9).$$

(a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

(b) Montrer sans calcul que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

(c) Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F engendré par la famille (u_1, u_2, u_3).

Exercice 3.27 (Partiel, 2011)**.** (a) Montrer que le système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

admet pour unique solution le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
En déduire que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants (qui sont les « colonnes du système ») :

$$(1, 0, 2),\ (-1, 1, 0),\ (2, -2, -1)$$

sont linéairement indépendants.

(b) Montrer que le système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

admet une infinité de solutions et déterminer une base de l'espace des solutions du système.
Calculer la dimension de l'espace des solutions du système.
Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants $(1, -1, 2), (-1, 2, -1), (2, -4, 2)$ sont-ils linéairement indépendants ?

(c) Considérons maintenant le système d'équations linéaires avec second membre suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = \alpha \\ -x + 2y - 4z = \beta \\ 2x - y + 2z = \gamma \end{cases}$$

Montrer que ce système possède au moins une solution si, et seulement si,

$$\gamma = 3\alpha + \beta.$$

(d) On suppose que $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$. Calculer l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3.28 (Examen, juin 2011)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 3, 2, -1)$, $u_2 = (2, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, -1, 1, 1)$ et $u_4 = (0, 1, 1, 1)$ et on note F le sous-espace vectoriel engendré par ces 4 vecteurs.

(a) Déterminer une équation (cartésienne) de F.
La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(b) Peut-on en déduire si (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre ou liée ? Justifier.

(c) Après avoir rappelé la définition de la dimension d'un espace vectoriel, déterminer la dimension de F.

(d) Soit m un réel, on considère le système $\mathcal{S}_m$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -m \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & m \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

D'après les questions précédentes, pour quelles valeurs de m ce système admet-il au moins une solution ?

(e) On suppose $m = 1$, déterminer l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}_1$.

Exercice 3.29 (Examen, 2012)**.** Soient les vecteurs $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (2, 4, 0)$, $u_3 = (2, 7, 6)$, $u_4 = (2, 5, 2)$ et $u_5 = (1, 2, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(a) Rappeler la définition d'une base d'un espace vectoriel puis celle de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3$?

(b) La famille de vecteurs (u_2, u_4, u_5) est-elle libre ?

(c) Justifier soigneusement et *sans aucun calcul* le fait que (u_2, u_4, u_5) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Déterminer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 3)$ dans la base (u_2, u_4, u_5). On considère la partie $F = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4\alpha + 2\beta - 3\gamma = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(e) Rappeler la définition de *sous-espace vectoriel*, puis montrer que la partie F de $\mathbb{R}^3$ vérifie cette définition.

(f) *Sans effectuer aucun calcul*, déterminer le sous-espace engendré par u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. On considère le sous-espace G de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4.

(g) Déterminer *sans faire de calcul* si la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

(h) Montrer que pour tout vecteur $v = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation vectorielle $xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = v$ possède (au moins) une solution (x, y, z, t) si et seulement si $4a - 2b + c = 0$.

(i) Peut-on conclure à l'aide de la question précédente que l'on a :

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x - 2y + z = 0\}$$

Justifier soigneusement la réponse.

(j) Extraire de la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) une base de G et préciser $\dim G$.

(k) Justifier le fait que le sous-ensemble $F \cap G$ de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de ce sous-espace $F \cap G$ puis calculer $\dim(F \cap G)$.

Exercice 3.30 (Examen, 2012)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\,\}$ et les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 3, 2)$. On note $G = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

(a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F puis sa dimension.

(c) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Justifier votre réponse.

(d) En déduire la dimension de G.

(e) On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ à ceux de la famille (u_1, u_2, u_3). $\mathcal{E}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

(f) La famille $\mathcal{B}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

(g) En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 3.31 (Examen, 2012)**.** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1, -3)$, $u_2 = (2, -1, -1, 2)$ et $u_3 = (-3, 2, 2, -1)$.
On note $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

(a) Justifier que $F \neq \mathbb{R}^4$ puis calculer une équation de F.

(b) Rappeler la définition d'une base de F.

(c) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F.

(d) Soit $v = (3, 3, -1, 1)$. Montrer que $v \in F$ puis déterminer les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 3.32 (Examen, 2013)**.** (a) Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$. Qu'appelle-t-on *dimension* d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^n$? Dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), on note $v = (2, 3, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$ et on considère les sous-ensembles

$$E = \{(x, y, z) \mid -3x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}.$$

(b) Pour chacun des ensembles suivants, dire en justifiant votre réponse s'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou non : E, F, $E \cap F$, $E \cup F$, $E + F := \{e + f \mid e \in E, f \in F\}$.

(c) Donner les dimensions de E et F respectivement.

(d) Trouver une base, que l'on notera $\mathcal{B}_0$ de $E \cap F$ et donner la dimension de $E \cap F$.

(e) Soit $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_0 \cup \{v\}$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de E.

(f) Soit $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_0 \cup \{w\}$. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de F.

(g) Montrer que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.33 (Décembre 2013)**.** Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, trois paramètres réels. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ donné par

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = \alpha \\ 2x + 2y - z = \beta \\ -x + 3y - 3z = \gamma \end{cases}$$

(a) Pour quelles valeurs des paramètres α, β, γ le système $(\mathcal{S})$ admet-il au moins une solution ?

(b) Considérons les trois vecteurs $u_1 = (3, 2, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 3)$ et $u_3 = (2, -1, -3)$; forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3.34 (Décembre 2013)**. Etude d'un sous-espace vectoriel** F

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F, puis calculer la dimension de F.

Etude d'un sous-espace vectoriel G

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 5, 1),\ u_2 = (3, 1, 3) \text{ et } u_3 = (1, -1, 1).$$

On note $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1, u_2, u_3.

(c) La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.

(d) Calculer la dimension de G.

(e) Donner un système d'équations cartésiennes caractérisant G.

Etude du sous-espace vectoriel engendré par F et G

(f) On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ et la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$.
Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$? Est-ce que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

(g) La famille $\mathcal{E}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

Exercice 3.35 (Examen, juin 2013)**.** (a) Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$. Qu'appelle-t-on dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^n$?

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), on note $v = (2, 3, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$ et on considère les sous-ensembles

$$E := \{(x, y, z) \mid -3x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad F := \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}.$$

(b) Pour chacun des ensembles suivants, dire en justifiant votre réponse s'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou non : E, F, $E \cap F$, $E \cup F$, $E + F := \{x + y \mid x \in E,\ y \in F\}$.

(c) Donner les dimensions de E et F respectivement.

(d) Trouver une base, que l'on notera $\mathcal{B}_0$ de $E \cap F$ et donner la dimension de $E \cap F$.

(e) Soit $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_0 \cup \{v\}$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de E.

(f) Soit $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_0 \cup \{w\}$. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de F.

(g) Montrer que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.36 (Examen, juin 2014)**.** Les différentes parties sont *indépendantes.*

(a) **Sous-espaces vectoriels**
- Le sous-ensemble $E = \{(3\alpha, \alpha + \beta, \beta + 2) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
- Le sous-ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} x - 3y = 0 \\ z - 2x = 0 \end{array} \right. \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

(b) **Famille libre, famille génératrice, base**

Considérons les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, -1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_4 = (3, 3, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- La famille (u_1, u_2) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?
- La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
- La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(c) **Dimension et système d'équations cartésiennes**

Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, -1, 0)$ et $v_2 = (3, 0, 1)$.
- Donner la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- Quelle est la dimension de G ?
- Donner une équation cartésienne de G.

3.9 Exercices, compléments

Exercice 3.37. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. A quelle condition $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 3.38. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + t = 0\} \quad \& \quad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = y = z = t\}.$$

(a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer des bases de E et de F.

Exercice 3.39. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (2, 1, 1)$ et $v_2 = (2, 2, 1)$, $w_1 = (1, 2, -1)$ et $w_2 = (2, 1, 2)$.

(a) Déterminer la dimension de $E_1 \cap E_2$.

(b) Déterminer la dimension de $E_1 + E_2$.

(c) A-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?

Exercice 3.40. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, $w_1 = (0, 6, -1, 4)$ et $w_2 = (3, 3, 1, 5)$.

(a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$.

(b) Donner une base de $E_1 + E_2$.

(c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.41. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous-espaces E et F suivants sont-ils supplémentaires ?

(a) $E = \{(x, y, z) \,|\, x = y = z\}$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

(b) $E = \{(3t, 3t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(2u + v, u + 2v, u) \,|\, u \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}\}$.

(c) $E = \{(2u + v, u + 2v, u + v) \,|\, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(u + v, u + v, 2u) \,|\, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

Chapitre 4

Propriétés de $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, nous allons analyser les propriétés fondamentales de l'ensemble des nombres réels que nous noterons $\mathbb{R}$. Bien que les nombres réels puissent être formellement construits à partir des nombres naturels (ou les nombres rationnels), nous avons décidé de présenter un autre point de vue.
Nous donnons une liste des propriétés fondamentales associées aux nombres réels et nous montrons comment celles-ci en impliquent d'autres.

4.1 L'ensemble des réels est un corps ordonné

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations binaires, l'addition $(+)$ et la multiplication $(\cdot)$. Ces opérations ont les propriétés « habituelles » qui font de $\mathbb{R}$ un *corps commutatif* : commutativité, associativité, existence de l'élément neutre, existence d'inverse et distributivité.

4.1.1 Propriétés d'ordre de $\mathbb{R}$

Remarque 4.1. Une notion fondamentale sur les réels est celle d'ordre ; pour être utile la relation d'ordre doit être compatible avec les opérations algébriques, plus précisément elle doit vérifier les règles suivantes :

(A) Pour tous x, y, z réels, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (compatibilité avec l'addition) ;

(M) Pour tous x, y réels, pour tout a réel positif $x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$ (compatibilité avec la multiplication).

On peut aussi en déduire :

1. $0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$;
2. $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$ et $\forall\, x,\ x^2 \geq 0$.

Un corps satisfaisant ces règles est appelé un *corps ordonné*.

L'ordre est *total* : pour tous réels x et y, ou bien $x \leq y$, ou bien $y \leq x$.

4.1.2 Valeur absolue

La relation d'ordre permet aussi de définir la distance entre deux réels et donc de dire si deux réels sont proches :

Définition 4.2. La *valeur absolue* d'un nombre réel x est $\max\{x, -x\}$ et se note $|x|$. La *distance* entre deux réels x et y est $|x-y|$.

La valeur absolue d'un nombre est donc toujours positive. Rappelons les propriétés fondamentales de la valeur absolue :

(a) $|xy| = |x|\,|y|$.

(b) Si $z \geq 0$, alors $|x| \leq z$ si, et seulement si, $-z \leq x \leq z$.

(c) (inégalité triangulaire) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Si on désigne par $d(x,y)$ la distance entre deux nombres réels x et y, on peut aussi exprimer l'inégalité (c) sous la forme plus géométrique $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. La notion de distance permet de formaliser l'idée de « tendre vers un point ».

4.1.3 Intervalles

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ détermine une famille naturelle de sous-ensembles appelés *intervalles*. On peut faire la distinction entre les intervalles bornés et les intervalles infinis. Si α, β sont deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$, on note :

- l'intervalle borné ouvert par : $]\alpha, \beta[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha < x < \beta\}$;
- l'intervalle borné fermé par : $[\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha \leq x \leq \beta\}$;
- les intervalles bornés mixtes par : $[\alpha, \beta[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha \leq x < \beta\}$, $]\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha < x \leq \beta\}$.

Les intervalles infinis sont mixtes ou ouverts :

- ouverts : $]\alpha, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha < x\}$, $]-\infty, \beta[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < \beta\}$;
- mixtes : $[\alpha, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha \leq x\}$, $]-\infty, \beta] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq \beta\}$.

Notez que pour $\alpha = \beta$ les définitions ci-dessus ont un sens et donnent :

$$[\alpha, \alpha] = \{\alpha\},\ ]\alpha, \alpha] = [\alpha, \alpha[\ =\ ]\alpha, \alpha[\ = \emptyset \text{ et }]-\infty, \infty[\ = \mathbb{R}.$$

Remarque 4.3. Les intervalles peuvent aussi s'écrire en termes de valeur absolue. Ainsi un ensemble du type $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-\alpha| \leq \beta\}$ (respectivement $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-\alpha| < \beta\}$) est l'intervalle fermé $[\alpha-\beta, \alpha+\beta]$ (respectivement ouvert $]\alpha-\beta, \alpha+\beta[$).
Réciproquement un intervalle $[\alpha, \beta]$ peut aussi s'écrire

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - \tfrac{\alpha+\beta}{2}| \leq \tfrac{\beta-\alpha}{2}\}.$$

4.1.4 Voisinages

Un voisinage d'un point est intuitivement une zone de l'espace qui entoure ce point.
Plus précisément, en topologie, un voisinage d'un point est un sous-ensemble qui contient un ouvert contenant ce point. Pour être en mesure de simplifier les preuves sur les limites du chapitre prochain, on admet les généralisations suivantes : les voisinages à l'infini et les voisinages à gauche et à droite.

Définition 4.4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Un *voisinage de* x est un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ qui contient $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$; autrement dit V est un voisinage de x si, et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \subset V$. En particulier, si $\varepsilon > 0$, on dit que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un *voisinage ouvert de* x.
On définit les *voisinages à l'infini* par :

- V est *un voisinage de* $+\infty$ si, et seulement si, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty[\subset V$;
- V est *un voisinage de* $-\infty$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, \alpha[\subset V$.

On définit les *voisinages à gauche et à droite* par :

- V est un *voisinage à gauche de* x si, et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x] \subset V$;
- V est un *voisinage à droite de* x si, et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x, x + \varepsilon[\subset V$.

Exemples 4.5. (a) L'intervalle $[0, 1[$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$ et un voisinage à droite de 0 ; en revanche ce n'est pas un voisinage à gauche de 1.

(b) L'ensemble $]-\infty, \pi] \cup \{5\}$ est un voisinage de $-\infty$, un voisinage de 2 et un voisinage à gauche de π ; en revanche ce n'est pas un voisinage de 5.

Habituellement on utilise l'expression « la proposition P est vraie au voisinage de α », pour dire que « il existe un voisinage V de α tel que la proposition $P(y)$ est vraie pour tout $y \in V$ ».

Exemple 4.6. La fonction $f(x) = x^2(1 - x^2)$ est positive au voisinage de 0 et négative au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4.2 Majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure

4.2.1 Définitions

Considérons maintenant un sous-ensemble E des nombres réels ; il est souvent intéressant de connaître un nombre réel qui est plus grand que tous les éléments de E ; on peut aussi chercher un tel nombre le plus petit possible. C'est le but des définitions suivantes :

Définition 4.7. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble des nombres réels. Un élément $m \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de E si pour tout x dans E on a $x \leq m$. Le plus petit des majorants de E (s'il existe) s'appelle la *borne supérieure* de E (dans $\mathbb{R}$).
Si la borne supérieure de E appartient à E, elle s'appelle le *maximum* de E (le plus grand élément de E).
On peut bien sûr définir de la même façon un *minorant* et la *borne inférieure* comme le plus grand des minorants et le minimum si elle appartient à l'ensemble.

La borne supérieure (resp. inférieure) de F est notée $\sup F$ (resp. $\inf F$). Le minimum (resp. maximum) de F est noté $\max F$ (resp. $\min F$).

Exemple 4.8. Soit $E \subset \mathbb{R}$ l'intervalle $[0, 1[$. On peut vérifier que 0 est la borne inférieure de E (et son minimum) et que 1 est sa borne supérieure bien que E n'ait pas de maximum.

Une autre façon d'exprimer la définition précédente est la suivante : un réel m est la borne supérieure d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si,

(a) $\forall x \in E,\ x \leq m$;

(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ m - \varepsilon \leq x$.

4.2.2 Complétude de $\mathbb{R}$

Les propriétés d'ordre que nous avons annoncées jusqu'ici sont satisfaites par les nombres rationnels donc pas uniquement par les réels. Il faut imposer une propriété qui exprime la complétude de $\mathbb{R}$ pour le distinguer de l'ensemble des nombres rationnels (nous verrons que $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas cette propriété, Remarque 4.12).

(C) Propriété de la borne supérieure.
Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure. Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure.

Cette propriété a de nombreuses conséquences. En particulier, on peut en déduire le Théorème de Cauchy qui dit qu'une suite est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy (ceci est la formulation habituelle pour dire que $\mathbb{R}$ est complet).

4.2.3 Propriété archimédienne

L'intuition suivante « une quantité, aussi petite soit-elle, ajoutée suffisamment de fois à elle-même dépasse n'importe quelle quantité donnée » est justifiée dans $\mathbb{R}$ (et aussi dans $\mathbb{Q}$) :

Proposition 4.9 (Propriété archimédienne). *Pour tout nombre réel y et pour tout nombre réel x strictement positif il existe un entier $n \geq 1$ tel que $nx = x + \ldots + x > y$.*

Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, puisqu'alors il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > \frac{y}{x}$.
En raison de la familiarité avec l'ensemble $\mathbb{R}$ et l'image habituelle de la droite réelle, il peut sembler évident que l'ensemble des nombres naturels n'est pas borné dans $\mathbb{R}$. Comment pouvons-nous prouver ce fait « évident » ? Nous devons utiliser la propriété de la borne supérieure ainsi que le principe de récurrence de $\mathbb{N}$ (c'est à dire, si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}$).
S'il y avait un majorant x de $\mathbb{N}$, il existerait une borne supérieure $u \in \mathbb{R}$, par la propriété de la borne supérieure. En soustrayant 1 à u, nous obtenons $u-1$ qui est inférieur à la borne supérieure, donc $u - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $u - 1 < m$. Ajoutant 1, nous avons $u < m + 1$, et puisque $m + 1 \in \mathbb{N}$, cette inégalité contredit le fait que u est une borne supérieure de $\mathbb{N}$.

Remarques 4.10. On peut définir axiomatiquement les nombres réels comme les éléments d'un corps avec un ordre total qui satisfait les propriétés **(A)**, **(M)** et **(C)** et qui contient les nombres naturels.
Si on veut éviter de supposer que les réels contiennent les nombres naturels, on peut remplacer cette hypothèse par la propriété archimédienne.
Ainsi, les nombres réels forment un corps totalement ordonné, archimédien et possédant la propriété de la borne supérieure (complet). Ces propriétés caractérisent le corps ordonné $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ à « isomorphisme » près.

4.3 Les nombres rationnels dans $\mathbb{R}$

4.3.1 $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$

Si on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{Z}$ les nombres entiers, par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, on a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Il est clair que les deux premières inclusions sont strictes, puisque $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
On veut étudier maintenant l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Pour montrer que cette inclusion est stricte, nous allons d'abord démontrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel r tel que $r^2 = 2$. Après, nous montrerons qu'il existe un nombre réel positif x tel que $x^2 = 2$ que nous désignons par $\sqrt{2}$.

Proposition 4.11. *Il n'existe pas de nombre rationnel r tel que $r^2 = 2$.*

Remarque 4.12. Cet énoncé permet de justifier le fait que $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure en considérant l'exemple suivant : $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} = \sqrt{2}$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe des entiers p et q tels que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. On peut supposer que p et q sont positifs et n'ont pas de facteurs communs. Comme $p^2 = 2q^2$, p^2 est pair. Cela signifie que p est également pair (parce que si $p = 2n+1$ est impair, alors $p^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ est aussi impair). Comme p et q n'ont pas de facteurs communs, q doit être impair. Puisque p est pair, alors p s'écrit $2m$ pour un certain entier m et, par conséquent, $4m^2 = 2q^2$, d'où $2m^2 = q^2$. Alors, q^2 est pair, et par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, q est un nombre pair. Ceci conduit à une contradiction avec la conclusion du paragraphe précédent. $\square$

Proposition 4.13. *Il existe un nombre réel x tel que $x^2 = 2$.*

Démonstration. L'ensemble $A = \{s \in \mathbb{R} \mid s > 0 \text{ et } s^2 < 2\}$ est non-vide ($1 \in A$) et il est majoré par 2 (car si $s > 2$, $s \cdot s > 2 \cdot s > 4$ et s n'appartient pas à A). Par la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure qu'on note x. On verra que $x^2 = 2$ en écartant les autres deux possibilités $x^2 < 2$ et $x^2 > 2$.
Supposons que $x^2 < 2$. On va trouver un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + \frac{1}{n} \in A$, contredisant le fait que x soit une borne supérieure. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, remarquez que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Alors,

$$\left(x + \tfrac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n^2} \leq x^2 + \tfrac{1}{n}(2x+1).$$

Par conséquent, si on peut choisir n tel que $\frac{1}{n}(2x+1) < 2 - x^2$ ou, de façon équivalente,

$$2x + 1 < n(2 - x^2),$$

alors, $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < x^2 + (2 - x^2) = 2$. Et on sait qu'on peut atteindre un tel n par la propriété archimédienne.
Supposons maintenant que $x^2 > 2$. On va trouver un $m \in \mathbb{N}$ tel que $x - \frac{1}{m}$ est encore un majorant, contredisant le fait que x soit une borne supérieure. Remarquons que

$$\left(x - \tfrac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \tfrac{2x}{m} + \tfrac{1}{m^2} > x^2 - \tfrac{2x}{m}.$$

Par conséquent, si on peut choisir m tel que $\frac{2x}{m} < x^2 - 2$ ou, de façon équivalente,

$$2x < m(x^2 - 2),$$

alors, $\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 > x^2 - (x^2 - 2) = 2$. Par hypothèse $x^2 - 2 > 0$, donc, on peut atteindre un tel m par la propriété archimédienne. $\square$

4.3.2 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les nombres rationnels sont strictement inclus dans les nombres réels et, en fait, en termes de cardinalité ≪ il y a beaucoup plus de nombres réels que de nombres rationnels ≫. Mais $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'entre deux réels il existe toujours un rationnel, ou de façon équivalente, tout intervalle ouvert non vide contient un nombre rationnel.

Proposition 4.14. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, i.e. *entre deux réels il existe toujours un rationnel.*

Démonstration. On montre que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$. Sans perdre de généralité on peut supposer que $x > 0$. La propriété archimédienne assure l'existence d'un entier n tel que $n(y - x) > 1$. Avec cet n, on a $ny - nx > 1$.
L'ensemble $S = \{p \in \mathbb{N} \,|\, nx < p\}$ est non vide parce que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Soit m l'élément minimal dans cet ensemble S. Alors $m - 1 \notin S$, donc, $m - 1 \leq nx < m$.
Remarquez qu'on a aussi $m < ny$, puisque $m \leq nx + 1 < ny$. Alors $nx < m < ny$, d'où $r := \frac{m}{n}$ est le nombre rationnel recherché. □

Pour finir ce chapitre, nous montrons que la même propriété de densité est vrai pour l'ensemble des nombres irrationnels.

Proposition 4.15. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, i.e. *entre deux réels il existe toujours un irrationnel.*

Démonstration. On montre que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < z < y$. En appliquant la Proposition 4.14 aux nombres $\frac{x}{\sqrt{2}}$ et $\frac{y}{\sqrt{2}}$, on obtient un nombre rationnel r tel que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Alors, $z := r\sqrt{2}$ est irrationnel et il satisfait $x < z < y$. □

4.4 Développement décimal d'un nombre réel

On appelle *chiffre* un élément de $C := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (on pourrait d'ailleurs faire les mêmes raisonnements dans une autre base que 10). Considérons une suite α_1, α_2, α_3, … de chiffres et associons lui la suite de nombres rationnels

$$s_n := \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

qu'on notera aussi $s_n := 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$.
La suite s_n est croissante puisque $s_n - s_{n-1} = \frac{\alpha_n}{10^n} > 0$. Par ailleurs, s_n est majorée, par exemple par 1, puisque

$$s_n = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n} < 1.$$

Par conséquent, la suite s_n converge vers un réel $x \in [0, 1]$. On introduit la notation :

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$$

et on appelle cette écriture un *développement décimal* de x.

On veut montrer que tout nombre réel admet un développement décimal (existence des développements décimaux). En remarquant que $y - \lfloor y \rfloor \in [0, 1[$, on peut se borner à considérer les réels dans l'intervalle $[0, 1[$. Soit, donc, $x \in [0, 1[$, est-ce qu'il admet un développement décimal $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$?

On fabrique la suite

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \lfloor 10x \rfloor, \\ \alpha_2 &:= \lfloor 10^2 x - 10\alpha_1 \rfloor, \ldots \\ \alpha_n &:= \lfloor 10^n x - 10^{n-1}\alpha_1 - \ldots - 10\alpha_{n-1} \rfloor, \end{aligned}$$

et ensuite on définit

$$s_n := \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

On va montrer par récurrence que $\alpha_n \leq 9$ (*i.e.* l'entier α_n est un chiffre) et $0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}$.

D'abord, comme $x < 1$, alors $10x < 10$ et

$$\alpha_1 \leq 9.$$

Par ailleurs, $\alpha_1 \leq 10x < \alpha_1 + 1$, et par conséquent $\frac{\alpha_1}{10} \leq x < \frac{\alpha_1}{10} + \frac{1}{10}$. Rappelons que $s_1 = \frac{\alpha_1}{10}$, donc

$$0 \leq x - s_1 < \frac{1}{10}.$$

Maintenant, on suppose que l'assertion est vraie pour α_{n-1} et $x - s_{n-1}$ et on veut le prouver pour α_n et $x - s_n$. Si $0 \leq x - s_{n-1} < \frac{1}{10^{n-1}}$ alors $0 \leq 10^n x - 10^n s_{n-1} = 10^n x - 10^{n-1}\alpha_1 - \ldots - 10\alpha_{n-1} < 10$ donc

$$0 \leq \alpha_n < 10,$$

et α_n est un chiffre. Ensuite $\alpha_n \leq 10^n x - 10^{n-1}\alpha_1 - \ldots - 10\alpha_{n-1} < \alpha_n + 1$ donc

$$0 \leq x - \frac{\alpha_1}{10} - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{10^{n-1}} - \frac{\alpha_n}{10^n} < \frac{1}{10^n};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par conséquent, nous avons construit une suite $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x, c'est à dire le nombre x admet un développement décimal $0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$.

Etant donné un nombre réel x on a montré l'existence d'un développement décimal, ensuite on voudrait montrer que ce développement décimal est unique. Mais si on considère par exemple le développement décimal $x := 0, 99999 \ldots 9 \ldots$, on obtient que $x = 1$. En fait, $x = \lim s_n$ où $s_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n}$. Donc $x = \lim s_n = \lim \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1 - \lim \frac{1}{10^n} = 1$.

On a vu que le développement décimal n'est pas unique parce que, par exemple, $0, 2314 = 0, 231399 \ldots 9 \ldots$. Mais on va voir que c'est l'unique construction qui cause une ambiguïté. à savoir, le développement décimal

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$$

est unique si l'on impose la condition :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \exists\, n > N, \alpha_n \neq 9.$$

Pour montrer l'affirmation précédente, on raisonne par l'absurde et on suppose que

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots = 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_n \ldots$$

où $\alpha_1 = \beta_1$, …, $\alpha_{r-1} = \beta_{r-1}$ mais $\alpha_r < \beta_r$.
Alors on obtient que $\frac{\beta_r - \alpha_r}{10^r} = 0, 0 \ldots 0\alpha_{r+1} \ldots - 0, 0 \ldots 0\beta_{r+1} \ldots$. Le membre à gauche vaut au moins $\frac{1}{10^r}$ car $\beta_r - \alpha_r \geq 1$ mais si on considère

$$\begin{aligned} 0, 0 \ldots 0\alpha_{r+1} \ldots &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_{r+1}}{10^{r+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n}\right) \\ &< \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10^{r+1}} + \ldots + \frac{9}{10^n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^r} - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{10^r}, \end{aligned}$$

l'inégalité est stricte (même avec les limites) car il existe des $\alpha_n < 9$ par hypothèse. En effet, si $\alpha_k < 9$, la suite $\frac{\alpha_{r+1}}{10^{r+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n}$ est majorée par $\frac{\alpha_{r+1}}{10^{r+1}} + \ldots + \frac{\alpha_k+1}{10^k}$ qui est strictement plus petit que $\frac{1}{10^r}$.
On a donc obtenu que

$$\begin{aligned} \frac{1}{10^r} \leq \frac{\beta_r - \alpha_r}{10^r} &= 0,0\ldots 0a_{r+1}\ldots - 0,0\ldots 0\beta_{r+1}\ldots \\ &\leq 0,0\ldots 0\alpha_{r+1}\ldots < \frac{1}{10^r}, \end{aligned}$$

ce qui nous mène à une contradiction.
La « solution » au problème de la duplicité des développements décimaux est l'exclusion des développements du type $0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 9999\ldots 9\ldots$ (avec $\alpha_n \neq 9$) que l'on remplace par

$$0,\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)0\ldots.$$

4.5 Exercices

Questions de cours. (a) Donner la définition de valeur absolue d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$.
(b) Énoncer l'inégalité triangulaire de la valeur absolue.
(c) Soient E un ensemble ordonné et $F \subseteq E$ un sous-ensemble de E. Donner la définition de la borne inférieure de F et de minimum de F.
(d) Donner des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, tels que :
   (a) la borne supérieure n'existe pas ;
   (b) le sous-ensemble n'admet pas de minorant ;
   (c) le sous-ensemble n'admet pas de majorant ;
   (d) le sous-ensemble admet une majorant, mais n'a pas de maximum ;
   (e) la borne inférieure existe, mais n'a pas de minimum.
(e) Énoncer la propriété de la borne supérieure pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
(f) Énoncer la propriété archimédienne des nombres réels.
(g) Donner la définition de densité d'un sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$.
(h) Donner quatre exemples de sous-ensembles denses dans $\mathbb{R}$.
(i) Énoncer une propriété d'ordre que soit vérifiée pour les nombres réels $\mathbb{R}$, mais ne soit pas vérifiée pour les nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Exercice 4.1. Soient α, β, γ et δ quatre nombres réels. Montrer que si $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ alors $\alpha\delta + \beta\gamma < \alpha\gamma + \beta\delta$.

Exercice 4.2. Soient α et β deux nombres réels. Simplifier l'inégalité $\alpha^2 < \alpha\beta < \beta^2$.

Exercice 4.3. Soit γ nombre réel.
(a) Montrer que si $0 < \gamma < 1$, alors $0 < \gamma^2 < \gamma < 1$.
(b) Montrer que si $1 < \gamma$, alors $1 < \gamma < \gamma^2$.

Exercice 4.4. Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $n^2 \geq n$; en déduire que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 4.5. Montrer que $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ si, et seulement si, $\alpha\beta \geq 0$.

Exercice 4.6. Soient α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \gamma$. Montrer que $\alpha < \beta < \gamma$ si, et seulement si, $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| = |\alpha - \gamma|$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 4.7. Hachurez la région du plan Oxy définie par l'équation ou par les inégalités.

(a) $|x| = |y|$,
(b) $|x| + |y| = 1$,
(c) $|x| - |y| = 2$,
(d) $|xy| = 2$,
(e) $|x| \leq |y|$,
(f) $|x| + |y| \leq 1$,
(g) $|x| - |y| \leq 2$,
(h) $|xy| \geq 2$.

Exercice 4.8. Soient α, β, x et y quatre nombres réels tels que $\alpha < x < \beta$ et $\alpha < y < \beta$. Montrer que $|x - y| < |\beta - \alpha|$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 4.9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $x < |x - 1|$,
(b) $x < -|x - 1|$,
(c) $x^2 < |x - 1|$,
(d) $x^2 < -|x - 1|$,
(e) $x^2 < |x - \frac{1}{4}|$,
(f) $|x - 5| < |x - 1|$,
(g) $1 < |x - 2| \leq 3$,
(h) $|x + 2|\,|x - 2| > 4$,
(i) $|x - 1| < |x|$,
(j) $|x| + |x + 1| < 2$.

Exercice 4.10. Donner les intervalles que définissent les ensembles suivants :

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$,
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x < 2\}$,
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ et } x^2 + x - 6 < 0\}$,
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < x^2 - 12 < 4x\}$,
(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R}\}$,
(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x+3} < 0\}$,
(g) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$,
(h) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{x-1} \geq 0\}$,
(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid (2x + 1)^6(x - 1) \geq 0\}$.

Exercice 4.11. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto |x + 1| - |x| + |x - 1|$.

Exercice 4.12. Si $E := \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ trouver $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 4.13. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ contient un de ses majorants, montrer que ce majorant est la borne supérieure de E.

Exercice 4.14. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Montrer que $u = \sup E$ si, et seulement si,

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de E, et
(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u + \frac{1}{n}$ est un majorant de E.

Exercice 4.15. Soit y un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < y$.

Exercice 4.16. Montrer que les nombres réels suivants sont irrationnels :

(a) $\sqrt{3}$,
(b) $\sqrt{6}$,
(c) $\sqrt{2} + 1$,
(d) $3\sqrt{2}$,
(e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Exercice 4.17. Montrer que si $y \in \mathbb{R}$ est irrationnel et si r est un rationnel non nul, alors $r + y$ et ry sont irrationnels.

Exercice 4.18. Montrer qu'il existe un nombre réel positif u tel que $u^3 = 2$.

Exercice 4.19.
Propriété des intervalles emboîtés.
Soit $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ une suite décroissante d'intervalles fermés bornés non vides, c'est-à-dire :

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots .$$

On veut montrer qu'il existe un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que l'ensemble $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a une borne supérieure ; dans la suite on la notera x.

(b) Supposons $n \leq k$; montrer que $\alpha_k \leq \beta_n$.

(c) Supposons $n > k$; montrer que $\alpha_k \leq \beta_n$.

(d) En déduire que l'ensemble $\{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par x.

(e) Finalement montrer que $x \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.20. (a) Soient n un entier strictement positif et $I_n := [0, \frac{1}{n}]$. Montrer que si $x > 0$, alors $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$.

(b) Soient n un entier strictement positif et $J_n :=]0, \frac{1}{n}]$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

Exercice 4.21. Développement binaire d'un nombre réel (Répétez la construction du développement décimal en base 2). On appelle *chiffre* un élément de $C := \{0, 1\}$. Considérons une suite α_1, α_2, α_3, ... de chiffres et associons lui la suite de nombres rationnels

$$s_n := \tfrac{\alpha_1}{2} + \tfrac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \tfrac{\alpha_n}{2^n},$$

qu'on notera aussi $s_n := 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Rappelons la définition de la limite d'une suite convergente : x est limite de la suite convergente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad ((n \geq N) \Rightarrow (|s_n - x| < \varepsilon)).$$

On dit que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite x.

Si on utilise les deux résultats suivants (énoncés sans preuve), on peut résoudre l'exercice sans se servir de la définition de convergence :

— Une suite majorée et croissante est convergente.

— **Lemme des gendarmes**. Si (a_n), (b_n) et (c_n) sont trois suites telles que (a_n) et (c_n) convergent vers x et
$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
alors (b_n) converge vers x aussi.

— La limite de $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.

(a) Montrer que la suite s_n est croissante et majorée. En déduire que s_n converge vers un réel $x \in [0, 1]$.

On introduit la notation : $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$ et on appelle cette écriture un développement binaire de x.

(b) Fabriquons la suite

$$\alpha_1 := \lfloor 2x \rfloor,\ \alpha_2 := \lfloor 2^2 x - 2\alpha_1 \rfloor,\ \ldots,\ \alpha_n := \lfloor 2^n x - 2^{n-1}\alpha_1 - \ldots - 2\alpha_{n-1} \rfloor$$

et ensuite $s_n := \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n}$. Montrer par récurrence que $\alpha_n \leq 1$ (*i.e.* l'entier α_n est un chiffre) et $0 \leq x - s_n < \frac{1}{2^n}$.

(c) En déduire que tout nombre réel $x \in [0, 1[$ admet un développement binaire

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots .$$

(d) Montrer que $0, 111 \dots 11 \dots = 1$.

Le développement binaire $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots$ est unique si on impose la condition :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \alpha_n \neq 1.$$

(e) Pour montrer l'affirmation précédente, raisonnons par absurde et supposons

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots = 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \dots \beta_n \dots \text{ et } \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{r-1} = \beta_{r-1} \text{ mais } \alpha_r < \beta_r.$$

Montrer alors que

$$0, 0 \dots 0\alpha_{r+1} \dots - 0, 0 \dots 0\beta_{r+1} \dots \geq 2^{-r},$$

mais

$$0, 0 \dots 0\alpha_{r+1} \dots < 2^{-r},$$

ce qui nous mène à une contradiction.

Exercice 4.22. Trouvez le nombre rationnel représenté par les expressions décimales périodiques $1.25137 \dots 137 \dots$ et $37.14653 \dots 653 \dots$.

Exercice 4.23. Trouvez le nombre rationnel représenté par les expressions binaires périodiques $110.0011 \dots 0011 \dots$ et $0.100011000 \dots 11000 \dots$.

Exercice 4.24. Montrer qu'un nombre réel avec une expression décimale périodique est rationnel.

Exercice 4.25. Montrer que les seuls nombres réels qui admettent « deux » développements sont exactement les nombres rationnels « décimaux » $x = \frac{m}{10^n}$.

Exercice 4.26. Combien de bits (chiffres binaires) sont nécessaires pour assurer une précision de quatre chiffres décimaux ?

Chapitre 5

Analyse de la variable réelle

5.1 Généralités sur les fonctions de la variable réelle

5.1.1 Introduction : qu'est ce qu'une fonction ?

Lorsqu'on cherche à utiliser les mathématiques pour modéliser un problème physique, chimique, économique, ou de la vie courante, la modélisation la plus simple est la *modélisation discrète*. Disons qu'on cherche à comprendre l'évolution d'une quantité en fonction du temps, alors la mesure de la quantité à des intervalles de temps réguliers conduit à un tableau de données : on note u_n la valeur obtenue à la n-ième mesure. Cette méthode de modélisation correspond à étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les mesures successives. Cette première approche peut permettre d'avoir une idée du comportement asymptotique. Par exemple si on mesure la quantité de réactifs présents au cours d'une réaction chimique, les mesures successives vont permettre d'avoir une idée des quantités présentes à l'équilibre de la réaction. Ce type de modélisation est également très bien adapté à des processus qui apparaissent naturellement comme discrets ; on peut ainsi penser à mesurer par exemple la hauteur d'une bille roulant dans un escalier, ou le nombre de voitures produites dans une journée par une usine. Dans ce cas l'idée que l'on pourra se faire du processus dépend étroitement de l'intervalle choisi et de la précision de la mesure. On modélise en effet dans ce système la quantité comme étant constante entre la mesure au temps n et la mesure au temps $n+1$. On voit donc l'intérêt à avoir la possibilité de réduire l'intervalle de temps entre deux mesures. Par ailleurs dans de nombreux cas, le processus apparaît plus naturellement comme un processus continu que comme un procédé discret : si on fait tomber une balle du haut de la tour Eiffel, on voit que la modélisation discrète conduit à considérer que la balle descend « en sautant » de la hauteur h_n à la hauteur h_{n+1} ce qui peut être « vrai » si les mesures ne sont pas trop précises et l'intervalle de temps très court, mais ne correspond pas nécessairement à l'intuition que l'on peut avoir du processus. Dans ce cas, on aimerait naturellement avoir une modélisation plus raffinée du processus : on peut l'obtenir en faisant une interpolation linéaire entre les points des mesures. Ceci conduit à ne plus modéliser le processus de façon discrète : on considère que la quantité mesurée évolue continument et linéairement entre deux mesures. Cependant dans l'exemple précédent cette modélisation ne donne pas une approximation de bonne qualité si le nombre de mesures n'est pas très grand. Il existe une meilleure approximation de la hauteur de la balle, qui donne une idée globale du processus à l'aide de deux mesures simplement, si l'on considère que la hauteur de la balle se comporte sous la forme $h(t) = h_0 - at^2$ en fonction du temps, avec a une constante. En fait, on peut même raffiner cette expression en prenant en compte le frottement de la balle dans l'air, ce qui conduit à chercher la hauteur sous la forme $h(t) = h_0 - at^2 + bt$, avec a et b des constantes.

On voit donc que la notion de fonction est une notion apparaissant naturellement dans toute tentative de modélisation d'un processus par les mathématiques : celle d'une quantité réelle qui varie lorsque varie un paramètre réel.
En mathématiques, on définit une fonction de la variable réelle de la façon suivante

Définition 5.1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f\colon A \to \mathbb{R}$ où A est une partie de $\mathbb{R}$.

Les fonctions peuvent être définies de multiples façons :

1. **Par une expression algébrique** : on peut définir l'application f en donnant une expression explicite qui permet de calculer $f(x)$ en fonction de la variable réelle x pour chaque x. Par exemple : $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ou $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. C'est le cas que nous rencontrerons le plus fréquemment dans le cours de mathématiques.
2. **Par un graphe** : on peut prendre le graphique donné par un appareil comme un sismographe, un hygromètre, un électrocardioscope,...
   Dans ce premier cas, par exemple, la courbe produite par le sismographe permet de définir une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui à une valeur du temps compris dans l'intervalle de mesure associe l'accélération verticale du sol.
3. **Par une définition verbale** : on peut définir la fonction qui au rayon d'un disque associe l'aire de ce disque. Cela signifie que l'on considère l'application A de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui à la valeur du rayon r associe l'aire $A(r)$ du disque de rayon r. On peut également considérer la fonction qui au poids d'une lettre associe le prix de son affranchissement.
4. **Par un tableau de valeurs** On peut reprendre l'exemple de la fonction qui au poids d'une lettre associe le prix de son affranchissement et dresser le tableau des valeurs :

Poids jusqu'à	$20g$	$50g$	$100g$	$250g$	$500g$	$1kg$	$2kg$	$3kg$
Tarif en euros	$0,58$	$0,97$	$1,45$	$2,35$	$3,15$	$4,15$	$5,40$	$6,25$

   qui permet d'exprimer la fonction « coût de l'affranchissement » en fonction du poids.

Quand on travaille sur la modélisation d'un problème, ces quatre aspects sont bien souvent complémentaires et permettent, par étapes successives, de construire une modélisation raisonnable du problème. Cependant, dans le cadre de ce cours, nous travaillerons essentiellement sur les deux (ou trois) premiers aspects, et en particulier sur la relation entre la donnée algébrique explicite et le graphe d'une fonction.

5.1.2 Quelques caractéristiques d'une fonction

Domaine de définition Il arrive que l'on donne une fonction par une expression algébrique explicite, sans préciser l'espace de départ de l'application. Dans ce cas on appelle *domaine de définition* de la fonction f l'ensemble, noté $\mathcal{D}_f$, des éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels l'expression algébrique a un sens. Exemples : $f(x) = \sqrt{x-1}$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x+1}$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Plus généralement, le domaine de définition de la fonction f est l'espace de départ de f vue comme une application de $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$.

Graphe d'une fonction On appelle *graphe* d'une fonction $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathcal{D}_f, y = f(x)\}$. On peut représenter graphiquement le graphe d'une fonction en traçant la courbe $y = f(x)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le graphe d'une fonction intersecte toute droite verticale en au plus un point.

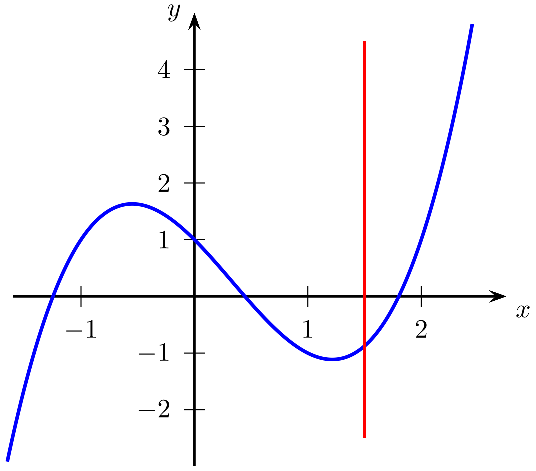


FIGURE 5.1 – Graphe d'une fonction

Parité Si le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f est symétrique par rapport à 0 (c'est à dire que si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $-x \in \mathcal{D}_f$), alors on dit que f est

— *paire* si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = f(x)$;

— *impaire* si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$.

On remarque que le graphe de f est

— invariant par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) si f est paire ;

— invariant par la symétrie centrale de centre O si f est impaire.

On peut donc déterminer le graphe complet de f en le connaissant sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. Exemples : la fonction $f(x) = x^2$ est paire ; la fonction $f(x) = x^3$ est impaire.

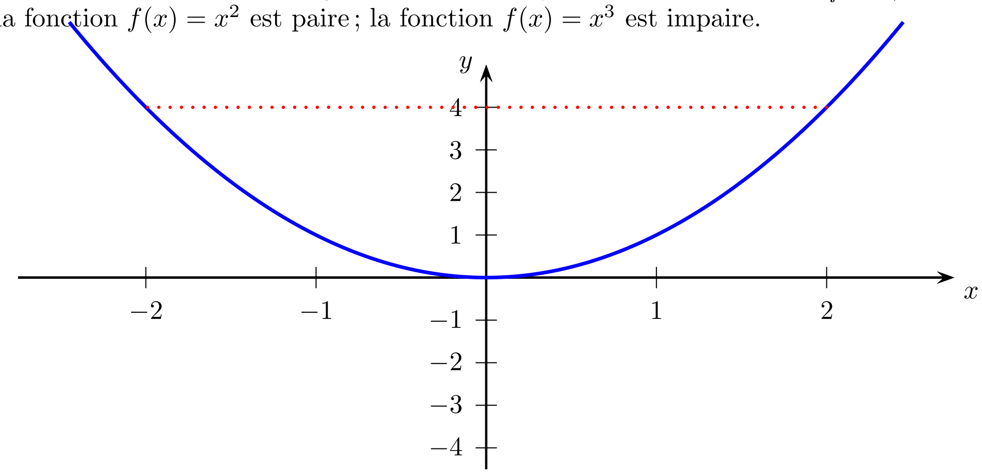


FIGURE 5.2 – Graphe de la fonction x^2

Périodicité On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est *périodique* s'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $x + T \in \mathcal{D}_f$. Un tel nombre T est appelé *une période* de f. On appelle *la période* d'une fonction périodique f le plus petit réel T strictement positif tel

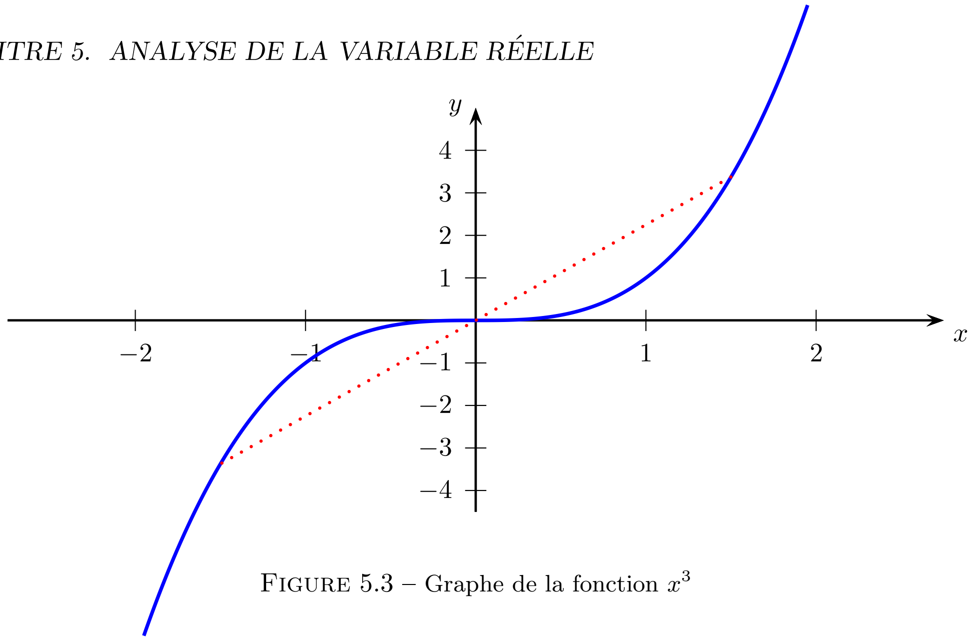


FIGURE 5.3 – Graphe de la fonction x^3

que $f(x+T) = f(x)$, lorsque ce nombre existe. Exemples : $\cos(x)$, $\sin(x)$ sont périodiques, de période 2π, $\tan(x)$ est périodique de périOde π.
On remarque que le graphe d'une fonction f périodique de période T est invariant par toute translation de vecteur $(kT, 0)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ un entier. On peut donc déterminer le graphe complet de f en le connaissant sur une période.

Injectivité, surjectivité, Une fonction $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est injective si $f(x) \neq f(x')$ pour tout couple de points $x \neq x'$ dans le domaine de définition. Une fonction est injective si et seulement si l'intersection de son graphe avec toute droite horizontale est au plus égale à un point. Elle est surjective si et seulement si l'intersection de son graphe avec toute droite horizontale est au moins égale à un point *i.e.* si $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$, et plus généralement la fonction $\tilde{f}\colon \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est surjective.
Si une fonction $f\colon \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ est bijective, alors sa bijection réciproque est la fonction $g : f(\mathcal{D}_f) \to \mathcal{D}_f$ dont le graphe est obtenu en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

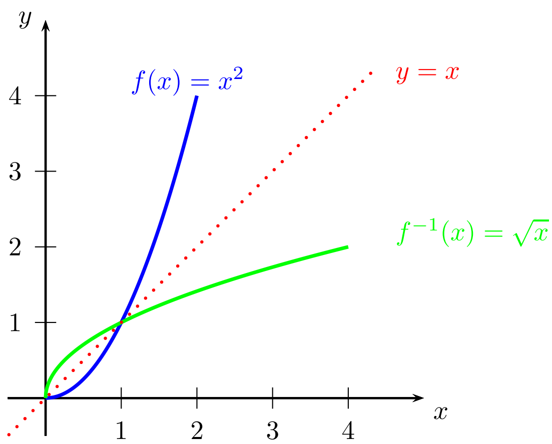


FIGURE 5.4 – Graphe de la fonction x^2 sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction réciproque

Translations, dilatations

Soit $c > 0$. Pour déterminer le graphe de la fonction $g(x)$ dans les cas suivants, il faut effectuer les opérations suivantes sur le graphe de f :

1. Si $g(x) = f(x) + c$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers le haut.
2. Si $g(x) = f(x) - c$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers le bas.

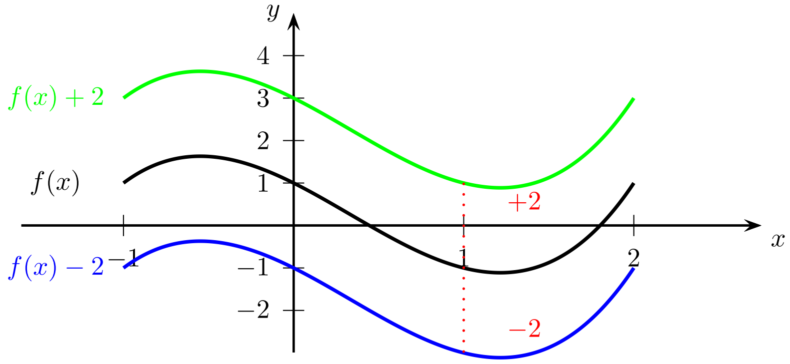


FIGURE 5.5 – Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ et des fonctions $f(x) + 2$ et $f(x) - 2$

3. Si $g(x) = f(x - c)$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers la droite.
4. Si $g(x) = f(x + c)$ il faut translater le graphe de $f(x)$ de c unités vers la gauche.

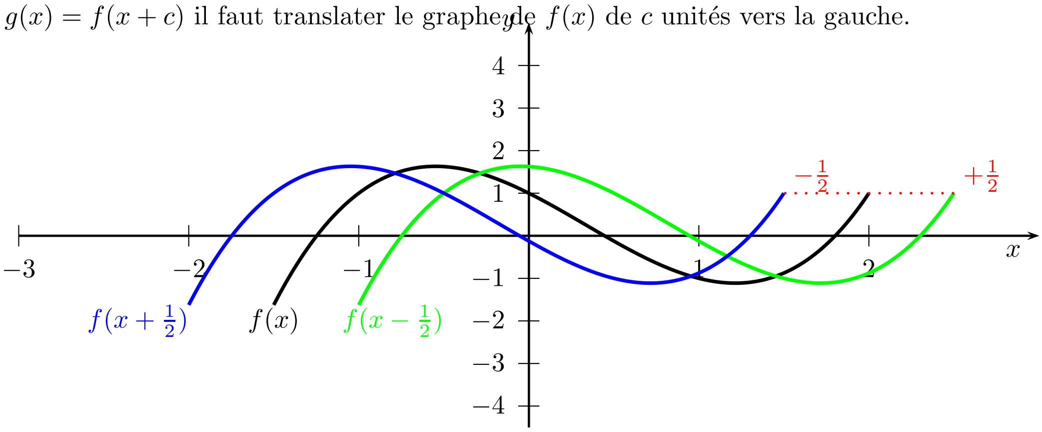


FIGURE 5.6 – Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ et des fonctions $f(x - \frac{1}{2})$ et $f(x - +\frac{1}{2})$

5. Si $g(x) = cf(x)$ il faut dilater (ou contracter) verticalement le graphe de $f(x)$ d'un facteur c.
6. Si $g(x) = f(cx)$ il faut dilater (ou contracter) horizontalement le graphe de $f(x)$ d'un facteur $\frac{1}{c}$.

Monotonie Soit $f \colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $A \subset \mathcal{D}_f$ une partie de $\mathcal{D}_f$.

— On dit que f est *croissante* sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

— On dit que f est *strictement croissante* sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

— On dit que f est *décroissante* sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

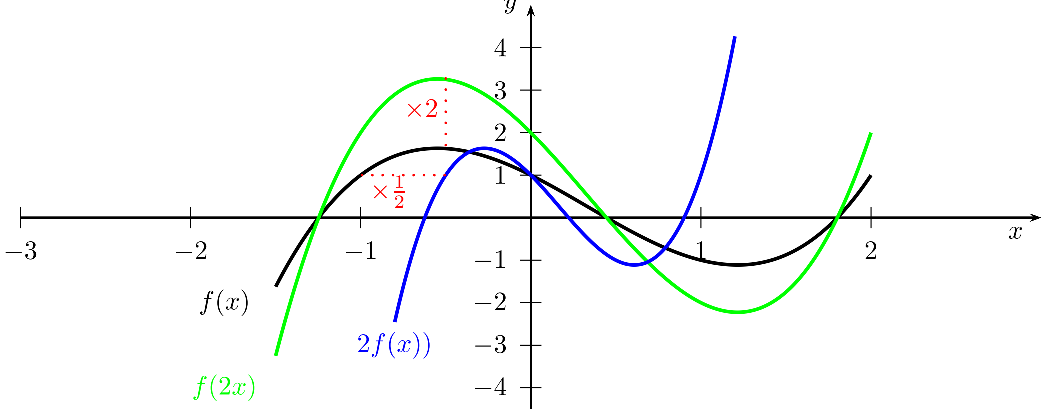


FIGURE 5.7 – Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ et des fonctions $2f(x)$ et $f(2x)$

— On dit que f est *strictement décroissante* sur A si pour tous $(x, y) \in A^2$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

— On dit que f est *monotone* sur A si f est croissante sur A ou décroissante sur A.

— On dit qu'elle est strictement monotone sur A si elle est strictement croissante sur A ou strictement décroissante sur A.

Convexité Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle. On dit que f est *convexe* sur I si les cordes de f sont au-dessus de sa courbe représentative : cela signifie que pour tout couple de points $(x, y) \in I^2$, et tout $t \in [0, 1]$, on a : $f(tx+(1-t)y) \leq t(f(x))+(1-t)f(y)$. On dit que f est *concave* sur I si les cordes de f sont au-dessous de sa courbe représentative : cela signifie que pour tout couple de points $(x, y) \in I^2$, et tout $t \in [0, 1]$, on a : $f(tx + (1 - t)y) \geq t(f(x)) + (1 - t)f(y)$.

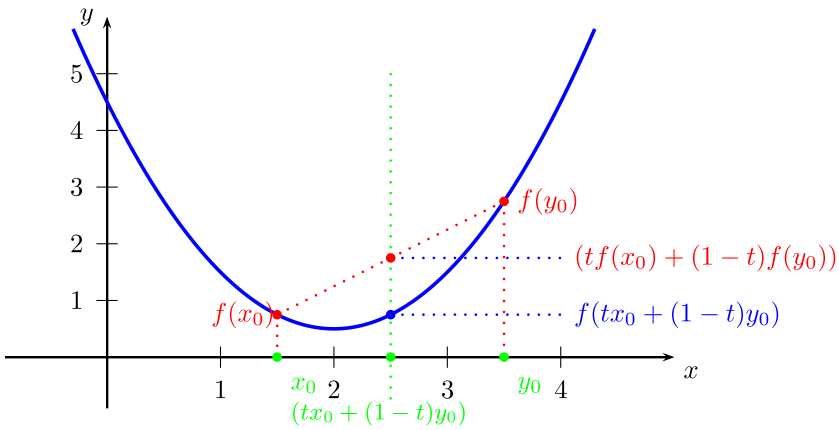


FIGURE 5.8 – Graphe d'une fonction convexe

Extrema

Définition 5.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un *maximum local* en un point $x_0 \in I$ (respectivement un *minimum local*) s'il existe un voisinage de x_0, de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$, avec $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).
2. On dit que f admet un *maximum global sur I* en un point $x_0 \in I$ (respectivement un *minimum global sur I*) si $\forall x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).

Il faut remarquer qu'un extremum local n'est pas nécessairement un extremum global et réciproquement.
Regardons la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.
Cette fonction admet un minimum local en $x_1 = 1$ et un maximum local en $x_0 = 0$. Cependant, sur l'intervalle $[-1, 2]$, f admet un minimum global en -1 et un maximum global en 2, qui ne sont pas des extrema locaux, et les points x_0 et x_1 ne sont pas des extrema globaux sur l'intervalle $[-1, 2]$.

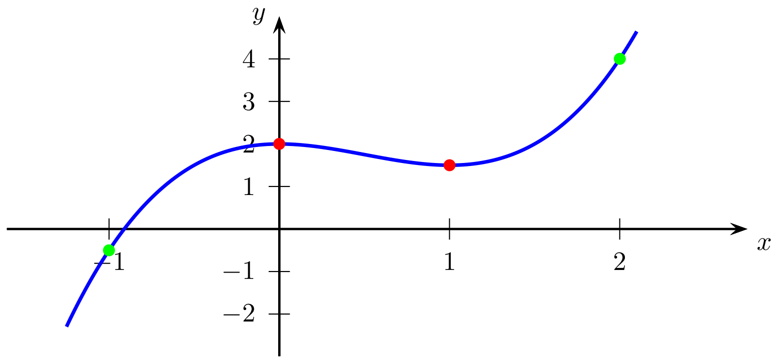


FIGURE 5.9 – Extremas locaux et globaux

Théorème 5.3. *Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur son domaine $\mathcal{D}_f$. Alors si f est strictement monotone, f est une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$ et sa bijection réciproque est également strictement monotone (de même sens de variation que f).*

Démonstration. On sait déjà que, vue comme une application de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$, f est surjective. Si x et y sont deux points distincts de $\mathcal{D}_f$, alors on a $x < y$ ou bien $x > y$, et donc $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$. La fonction f est donc bien injective, et la bijection réciproque est également strictement monotone. □

La réciproque est fausse en général (Voir la Figure 5.10).

5.1.3 Exemples de fonctions

Fonctions constantes Soit $c \in \mathbb{R}$ un nombre réel. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ est dite *constante* car elle attribue à tout réel x la même valeur c. La restriction d'une fonction constante à une partie de $\mathbb{R}$ est encore appelée une fonction constante. (voir Figure 5.11)

Fonctions affines Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est appelée *fonction affine*. Son graphe est représentée par une droite de pente a. La restriction d'une fonction affine à un intervalle I de $\mathbb{R}$ est encore appelée une fonction affine.
Un exemple concret d'une telle fonction peut-être donné par la fonction associant à une quantité

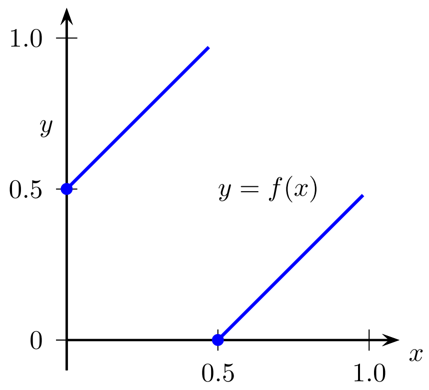


FIGURE 5.10 – Graphe d'une fonction injective et non strictement monotone

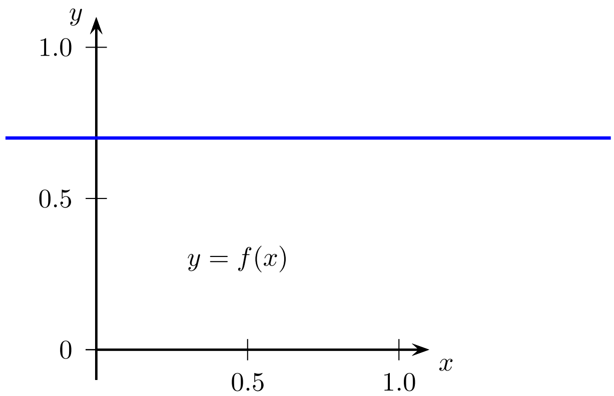


FIGURE 5.11 – Graphe d'une fonction constante

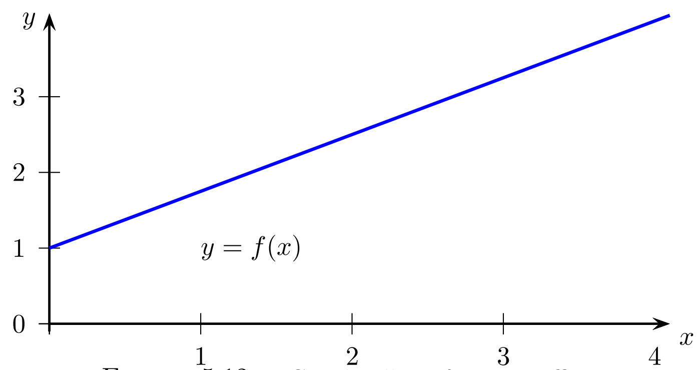


FIGURE 5.12 – Graphe d'une fonction affine

de bois (en stères) le prix à payer, en tenant compte du fait que le marchand facture également un forfait pour la livraison (voir Figure **??**).

Fonctions en escalier Une fonction f définie sur un intervalle borné $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe un entier n et des points a_0, a_1, a_2, ... a_n tels que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots a_{n-1} < a_n = b$ tels que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ est une fonction constante : $f_{|]a_i,a_{i+1}[}(x) = c_i$.
Plus généralement, on dit qu'une fonction $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est en escaliers si sa restriction à tout inter-

valle borné est une fonction en escaliers. Un exemple concret d'une telle fonction peut-être donné par la fonction associant à une lettre le tarif de son affranchissement postal (voir Figure **??**).

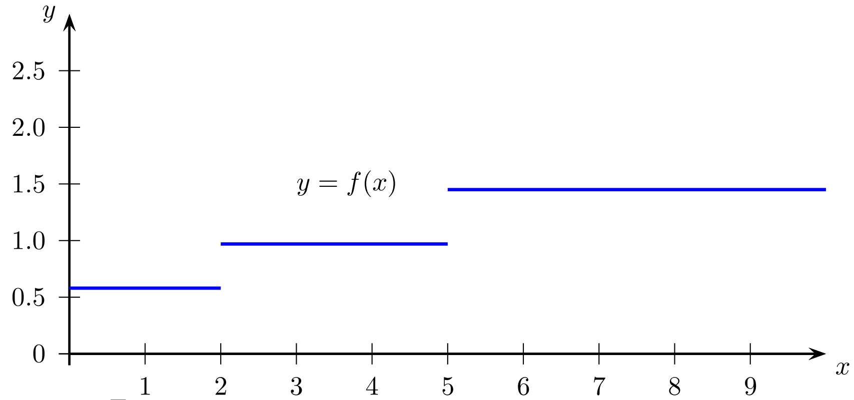


FIGURE 5.13 – Tarif postal en euros par dizaine de grammes

Voici quelques exemples classiques de fonctions en escalier :

1. La fonction de Heaviside (voir Figure 5.14)

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

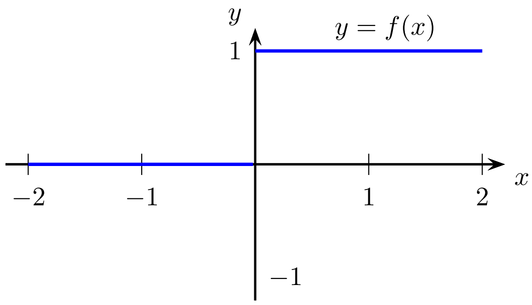


FIGURE 5.14 – Graphe de la fonction de Heaviside

2. La fonction « signe » (voir Figure 5.15)

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Comme on l'a vu dans l'introduction, une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être représentée par une fonction en escaliers : on définit la fonction u correspondante sur $\mathbb{R}_+$ par $u(x) = u_n$ pour tout $x \in [n, n+1[$.

Fonctions affines par morceaux Une fonction f définie sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dite *affine par morceaux* s'il existe un entier n et des points a_0, a_1, a_2, ... a_n tels que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots a_{n-1} < a_n = b$ tels que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ est une fonction affine : $f_{|]a_i,a_{i+1}[}(x) = \alpha_i x + \beta_i$.

Un exemple concret d'une telle fonction peut-être donné par la fonction associant à une quantité de bois (en stères) le prix à payer, en tenant compte du fait que le marchand pratique des prix de gros en fonction de la quantité (voir Figure 5.16).

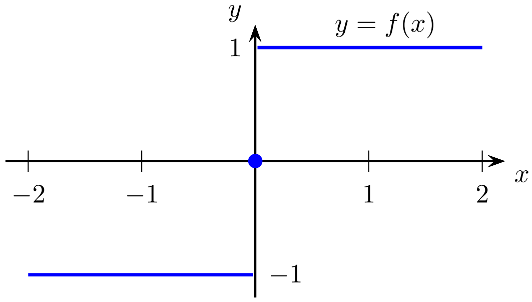


FIGURE 5.15 – Graphe de la fonction « signe »

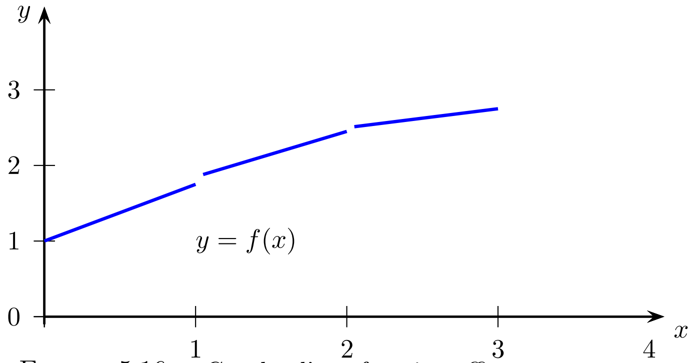


FIGURE 5.16 – Graphe d'une fonction affine par morceaux

Voici quelques exemples classiques de fonctions affines par morceaux :

1. La fonction « triangle » $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

   On notera cette fonction Λ (voir Figure 5.17).

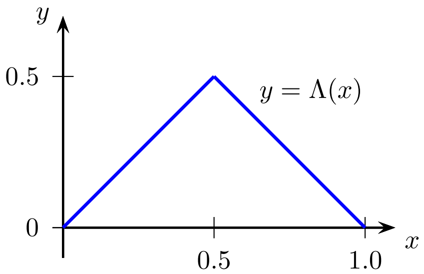


FIGURE 5.17 – Graphe de la fonction Λ

2. La fonction valeur absolue $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = |x|.$$

   (voir Figure 5.18)

Fonctions polynomiales Soient n un entier et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ nombres réels. La fonction $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$$

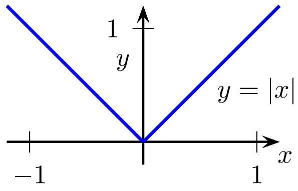


FIGURE 5.18 – Graphe de la fonction $|\cdot|$

est appelée *fonction polynomiale de degré n*.
Si l'on reprend l'exemple d'une balle lancée depuis le haut de la tour Eiffel, la hauteur en mètres de la balle est donnée, expérimentalement par une fonction de la forme $h(t) = 324 + 0,96t - 4,9t^2$.

Fractions rationnelles On appelle *fraction rationnelle* une fonction définie comme le quotient de deux fonctions polynomiales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}\cdot$ Cette fonction n'est définie que sur l'ensemble des points sur lesquels la fonction Q est non nulle ; à condition que l'on ne puisse pas réduire la fraction, on a $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | Q(x) \neq 0\}$

Fonctions exponentielles Nous admettons ici l'existence de la fonction exponentielle, vue en terminale, et qui repose sur un théorème sur l'existence de solutions pour certaines équations différentielles. Les propriétés essentielles de la fonction exponentielle seront revues en exercice. En deuxième année, une définition explicite et intrinsèque de la fonction exponentielle sera expliquée. On appelle fonction *exponentielle* (de base e) l'unique fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est dérivable et égale à sa dérivée partout, et dont la valeur en 0 est 1. C'est une fonction strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$, et donc monotone.

Plus généralement, si a est un nombre réel strictement positif, on appelle fonction *exponentielle de base a* la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ qui est dérivable et égale à $\ln(a)$ fois sa dérivée partout, et dont la valeur en 0 est 1 (pour la définition de ln, voir ci-dessous).
Les fonctions exponentielles interviennent naturellement dans la modélisation de certains phénomènes.

— Si l'on considère, en laboratoire, une population de bactéries dont le nombre est multiplié par 2 à chaque fois qu'on laisse passer un intervalle δ de temps. Si l'on cherche à connaître la population de bactéries à un temps t grand par rapport à δ, alors une bonne approximation de ce nombre $p(t)$ est donnée par la fonction exponentielle : $p(t) = 2^t p(0)$, où $p(0)$ désigne la population initiale.
— La demi-vie ou période d'un élément radiaoactif est le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'une quantité donnée d'un élément radioactif se désintègre naturellement. Ainsi le carbone 14, utilisée pour la datation des éléments organiques, a une période de 5700 ans. Cela signifie que si l'on a une quantité initiale λ de carbone 14, il restera, au bout de x années une quantité approximativement égale à $N(x) = \lambda 2^{-\frac{x}{5700}}$. de carbone 14

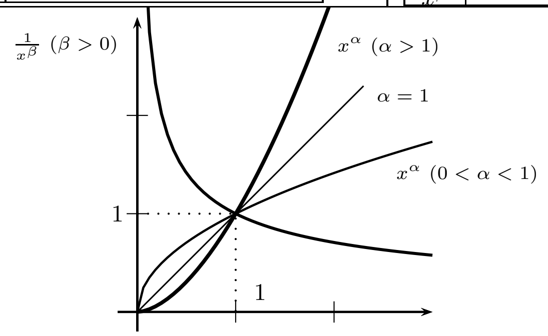
Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et $a > 0$ et $b > 0$, on a

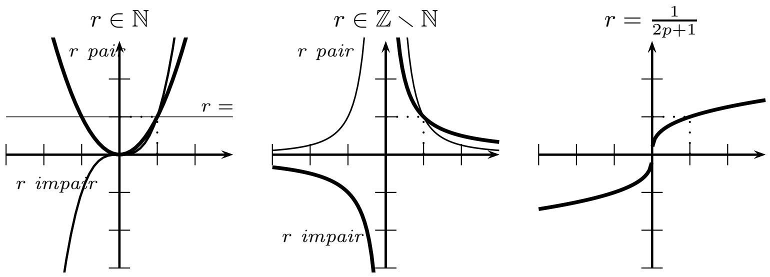
$$a^{x+y} = a^x a^y \quad , (a^x)^y = a^{xy} \quad , (ab)^x = a^x b^x.$$

Fonctions logarithmes On appelle fonction *logarithme népérien* la fonction $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ donnée par la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base e.
Plus généralement, on appelle fonction *logarithme en base a* et on note $\log_a$ la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
On a en fait $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. De plus, on a $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, pour tous a, x, y strictement positifs et $r \in \mathbb{R}$.
Les fonctions logarithmes ont été introduites au début du 17ème siècle sous forme de tableaux de

valeurs, qui permettaient de faire des calculs compliqués bien avant la calculatrice ou l'ordinateur (multiplier deux nombres, prendre la puissance n-ième ou la racine carrée d'un nombre, ...) de manière beaucoup plus rapide.

Fonctions puissances Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction *puissance* la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.
Si α est un nombre entier positif, cette fonction peut être étendue en une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (c'est une fonction polynomiale).
Si α est un nombre entier négatif, cette fonction peut être étendue en une fonction de $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ (c'est une fraction rationnelle).

<table>
<tr><td rowspan="2">fonctions</td><td colspan="2">puissances</td><td>(cas général)</td></tr>
<tr><td>$x^\alpha \quad (\alpha > 1)$</td><td>$x^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$</td><td>$x^\alpha = \dfrac{1}{x^\beta} \quad (\beta > 0)$</td></tr>
<tr><td>domaine</td><td colspan="2">$\mathbb{R}_+$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td>branches infinies</td><td>branche parabolique verticale en $+\infty$</td><td>branche parabolique horizontale en $+\infty$</td><td>deux asymptotes :
- horizontale ($y = 0$) en $+\infty$
- verticale ($x = 0$) en 0^+</td></tr>
<tr><td>concavité</td><td>convexe</td><td>concave</td><td>convexe</td></tr>
<tr><td>dérivée</td><td colspan="2">$\alpha x^{\alpha-1}$</td><td>$-\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}$</td></tr>
<tr><td>variations</td><td colspan="2">x : 0 … 1 … $+\infty$
x^α : 0 ↗ [4] 1 ↗ [4] $+\infty$</td><td>x : 0 … 1 … $+\infty$
$\dfrac{1}{x^\beta}$: $+\infty$ ↘ [3] 1 ↘ [3] 0</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>propriétés alg.</td><td colspan="3">$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$</td></tr>
</table>

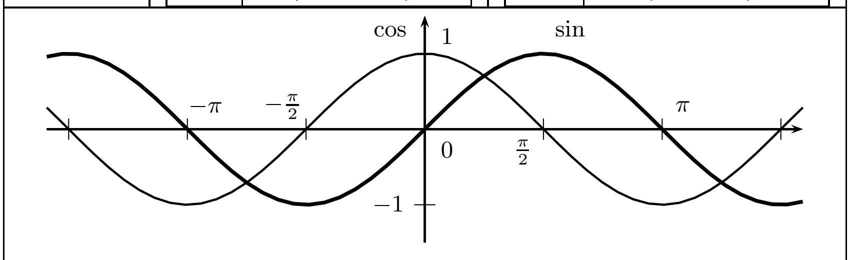


Fonctions trigonométriques
On peut définir sinus, cosinus et tangente à partir de l'exponentielle complexe par :

$$\sin\theta \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}\theta}) \qquad \cos\theta \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\theta}) \text{ et } \tan\theta \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\text{si } \cos\theta \neq 0).$$

z $\lvert z\rvert = 1$	$x + \mathrm{i}y$ $x^2 + y^2 = 1$	$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \quad (x = \cos\theta \text{ et } y = \sin\theta)$ $\lvert e^{\mathrm{i}\theta}\rvert = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad (\Rightarrow \sin\theta, \cos\theta \in [-1, 1])$	
$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$	$\mathrm{Re}(x + \mathrm{i}y) = x$ $\mathrm{Im}(x + iy) = y$	$\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2i} = \sin\theta$ $\boxed{\text{formules d'Euler}}$	
z'	$x' + \mathrm{i}y'$	$e^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$	
zz'	$xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + yx')$	$e^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} = e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\phi}$	$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$ $\boxed{\text{formules d'addition des angles}}$
z^2 $(zz' \text{ avec } z = z')$	$x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$	$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ $\boxed{\text{formules de duplication d'un angle}}$	
z^n	$(x + \mathrm{i}y)^n$	$\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta}$	$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ $\boxed{\text{formule de Moivre}}$
		$e^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)} = e^{\mathrm{i}\theta}$	$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ $\boxed{\sin, \cos \textbf{ sont } 2\pi\textbf{-périodiques}}$
$\bar{z}$	$x - \mathrm{i}y$	$e^{-\mathrm{i}\theta}$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\boxed{\sin \textbf{ est impaire}, \cos \textbf{ est paire}}$
$-z$	$-x - \mathrm{i}y$	$e^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$	$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$
$-\bar{z}$	$-x + \mathrm{i}y$	$e^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
$\mathrm{i}z$	$-y + \mathrm{i}x$	$e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$	$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$
$\mathrm{i}\bar{z}$	$y + \mathrm{i}x$	$e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

fonctions	**sinus**	**cosinus**
notations	sin	cos
domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
symétries	périodiques de période 2π	
	impaire	paire
dérivée	cos	$-\sin$
variations	x: 0, $\frac{\pi}{2}$, π $\sin x$: $0 \nearrow 1 \searrow 0$	x: 0, $\frac{\pi}{2}$, π $\cos x$: $1 \searrow 0 \searrow -1$

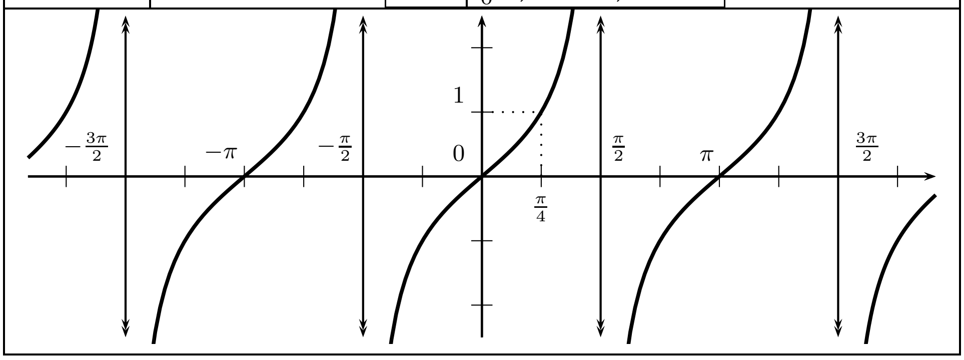


Formulaire pour tangente

$1 + \tan^2 \theta = \dfrac{1}{\cos^2 \theta}$
$\tan(\theta + \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta \tan\phi}$ *formules d'addition des angles*
$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ *si* $t = \tan\frac{\theta}{2}$ *formules de duplication d'un angle*

$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ **paramétrage rationnel du cercle**
$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ tan **est π-périodique** $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ tan **est impaire**

fonction	**tangente**
notation	tan
domaine	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\}$
symétries	période π
	impaire
dérivée	$1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
branches infinies	asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
variations	x : 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ $\tan x$: $0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$



Valeurs particulières

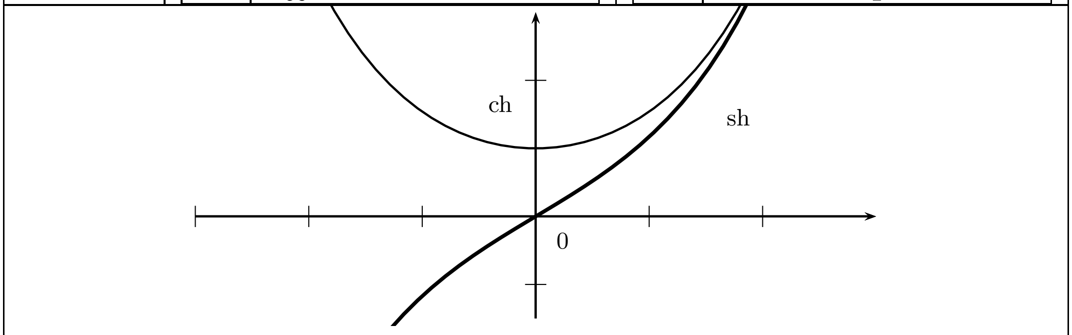
θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$e^{\imath\theta}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}+\imath}{2}$	$\dfrac{1+\imath}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1+\imath\sqrt{3}}{2}$	$\imath$	-1
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*non défini*	0

Fonctions de trigonométrique hyperbolique

Par analogie avec la définition des fonctions trigonométriques à partir de l'exponentielle complexe, on peut définir des fonctions, sh, ch et tanh, appelées *fonctions de trigonométrique hyperbolique* à partir de l'exponentielle réelle, par :

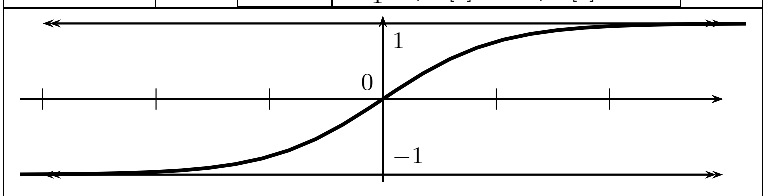
$$\mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

fonctions	**sinus hyperbolique**	**cosinus hyperbolique**
notations	sh	ch
définitions	$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
symétries	impaire	paire
branches infinies	branches paraboliques verticales en $-\infty$ et en $+\infty$	branches paraboliques verticales en $-\infty$ et en $+\infty$
dérivée	ch	sh
variations	x: $-\infty$ 0 $+\infty$; $\operatorname{sh} x$: $-\infty$ $\nearrow$ [3] 0 $\nearrow$ [3] $+\infty$	x: $-\infty$ 0 $+\infty$; $\operatorname{ch} x$: $+\infty$ $\searrow$ [3] 1 $\nearrow$ [3] $+\infty$



propriétés algébriques	$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

fonction	**tangente hyperbolique**
notation	tanh
définitions	$\tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
domaine	$\mathbb{R}$
symétries	impaire
dérivée	$1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$
branches infinies	asymptotes horizontales $y = 1$ en $+\infty$ $y = -1$ en $-\infty$
variations	x: $-\infty$ 0 $+\infty$; $\tanh x$: -1 $\nearrow$ [3] 0 $\nearrow$ [3] 1



Autres exemples

1. La fonction de Dirichlet $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Cette fonction est l'*indicatrice de* $\mathbb{Q}$ ou la *fonction caractéristique de* $\mathbb{Q}$, elle est souvent notée $\chi_{\mathbb{Q}}$, ou $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$.

2. Une fonction de type Dirichlet mais dont les pics sont d'autant plus petits que les dénominateurs sont grands :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

3. La fonction de Cauchy

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

possède une infinité d'oscillations au voisinage de 0.

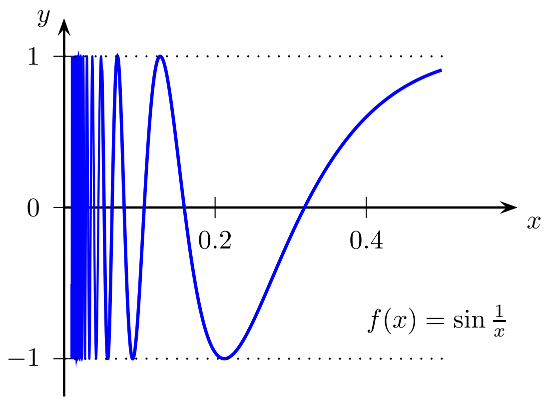


FIGURE 5.19 – Graphe de la fonction de Cauchy

4. La fonction de Weierstrass

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

possède aussi une infinité d'oscillations au voisinage de 0 mais leurs amplitudes sont moins fortes.

5.1.4 Opérations sur les fonctions

Soient $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On peut définir de nouvelles fonctions à partir de f et g en utilisant :

1. Les opérations définies en général sur les applications :
   — Restriction : si $A \subset \mathcal{D}_f$, on définit $f_{|A}$ comme la fonction $f_{|A}\colon A \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in A$ par $f_{|A}(x) = f(x)$.
   — Réunion de fonctions définies sur des domaines disjoints : si $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \emptyset$, on définit $f \cup g$ comme la fonction $f \cup g\colon \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$ par $(f \cup g)(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}_f$ et $(f \cup g)(x) = g(x)$ si $x \in \mathcal{D}_g$ (exemple : fonctions en escalier).
   — Composition : si on a $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$, on définit $g \circ f$ comme la fonction $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (exemple : fonctions puissances).
   Attention : pour définir $g \circ f$, il faut que l'image de f soit incluse dans le domaine de définition de g.

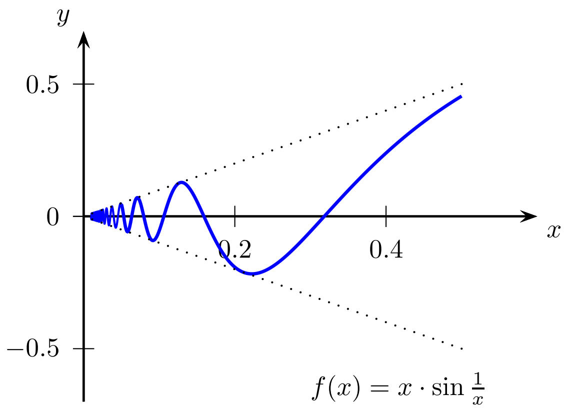


FIGURE 5.20 – Graphe de la fonction de Weierstrass

2. Les opérations vectorielles :
   - Addition : si $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, on définit $f+g$ comme la fonction $f+g\colon \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
   - Multiplication par un scalaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λf comme la fonction $\lambda f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
3. La multiplication de deux fonctions : si $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$, on définit $f \times g$ (également notée $f.g$)comme la fonction $f \times g\colon \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.

5.2 Limites

5.2.1 Introduction : limite d'une suite réelle

La notion de limite a déjà été abordée dans le programme de terminale. Une suite de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ peut être utilisée pour décrire un processus d'évolution, par exemple en prenant des mesures à intervalles de temps réguliers ($n = 1, 2, \ldots$) d'une quantité physique, chimique, géologique, économique, etc
Dans ce cas on s'intéresse naturellement au comportement du système quand le paramètre d'évolution (le temps dans notre exemple) devient arbitrairement grand. Plusieurs situations se présentent :

- Lorsqu'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang N, on dit que la suite *converge vers la limite* ℓ.
  Cela signifie que tous les termes de la suite (la grandeur mesurée dans notre exemple) sont arbitrairement proches de l à condition de ne considérer que les termes de la suite au delà d'un nombre fini de termes bien choisi.
- Lorsque pour toute borne $A > 0$ les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous plus grands que A à partir d'un certain rang N, on dit que la suite *tend (ou diverge) vers* $+\infty$.
  Cela signifie que tous les termes de la suite (la grandeur mesurée dans notre exemple) sont arbitrairement grands, à condition de ne considérer que les termes de la suite au delà d'un nombre fini de termes bien choisi.
- Lorsque pour toute borne $A > 0$ les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous plus petits que $-A$ à partir d'un certain rang N, on dit que la suite *tend (ou diverge) vers* $-\infty$.

Cela signifie que tous les termes de la suite (la grandeur mesurée dans notre exemple) sont arbitrairement grands (en valeur absolue) et négatifs, à condition de ne considérer que les termes de la suite au delà d'un nombre fini de termes bien choisi.

— Si la suite ne vérifie aucune des situations précédentes, on dit qu'elle est *divergente*.
C'est le cas par exemple si ce ne sont pas tous les termes de la suite à partir d'un certain rang qui vérifient la propriété, mais seulement une partie d'entre eux. Pour donner un exemple concret on considère la suite formée par les tirages successifs d'une pièce, à « pile ou face ». On encode la valeur « pile » par 1 et la valeur « face » par -1 et n désigne le numéro du tirage. Si la pièce n'est pas truquée, on sait que l'on obtiendra jamais uniquement l'une des deux valeurs indéfiniment à partir d'un certain tirage. Ainsi cette suite ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ et n'est pas non plus convergente. On peut aller plus loin dans la modélisation en imaginant qu'au delà d'un certain nombre de tirages la valeur du tirage suivant est toujours l'opposée de la valeur du tirage précédent. Cela permet d'écrire qu'à partir d'un certain rang le n-ième terme de la suite, u_n est donné par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est clairement divergente, car elle est donnée par l'alternance de deux suites qui sont convergentes, mais vers des valeurs différentes : la suite des tirages pairs converge vers 1 (« pile »), celle des tirages impairs vers -1 (« face ») de manière évidente puisque ces suites sont constantes à partir d'un certain rang !

On a expliqué précédemment qu'une suite peut-être vue comme un type particulier de fonction. Les concepts de convergence et divergence s'étendent au cadre plus général des fonctions.

5.2.2 Limites finies/infinies d'une fonction en un point

Nous allons étudier la convergence/divergence d'une fonction f au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$. Pour que cela ait un sens, il faut que le domaine de définition de f rencontre le voisinage du point a de manière non triviale.
On dit qu'une fonction f est *définie au voisinage épointé du point* a s'il existe un intervalle ouvert I centré en a de la forme $I =]a-\alpha, a+\alpha[$ où $\alpha > 0$ tel que I privé du point a est inclus dans le domaine de définition de f. Il faut noter que le fait que la fonction f soit définie au point a lui-même n'est pas exigé ; on s'intéresse au comportement de f pour des valeurs de x très proches de a mais strictement à gauche ou à droite de a.
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage épointé du point a.

Définition 5.4. On dit que la fonction f *converge au point* a s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit différent de a et à distance au plus α de a. On dit alors que la fonction f *converge vers la limite* ℓ au point a.
Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[.$$

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$.

Exemples 5.5.
On considère la fonction $f(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{a} f(x) = a$.

On considère la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{a} f(x) = a^2$. En effet, on a $f(x)-a^2 = x^2-a^2 = (x-a)(x+a)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $C > 0$ tel que $C > \max(|2a+\varepsilon|, |2a-\varepsilon|)$. Alors, pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{C}$, et $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$ on a

$$|f(x) - a^2| = |(x-a)(x+a)| \leq C|(x-a)| < C\alpha = \varepsilon.$$

On considère la fonction de Weierstrass $f(x) = x\sin(\dfrac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Alors $\lim\limits_{0} f(x) = 0$. En effet, on sait que la fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée en valeur absolue par 1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant définie sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq |x|$. Cela implique en particulier que $\lim\limits_{0} f(x) = 0$.

La fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ ne converge pas en 0. En effet, pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$, et pour tout $\alpha > 0$, on a $H(\frac{\alpha}{2}) = 1$ et $H(-\frac{\alpha}{2}) = 0$. S'il existait une limite ℓ pour H en 0, on aurait $|\ell| \leq \varepsilon$ et $|1 - \ell| \leq \varepsilon$, or l'intersection de ces deux parties de $\mathbb{R}$ est vide.

Passons à présent à la définition de la limite infinie pour une fonction en un point a. Soit f une fonction définie au voisinage épointé de a.

Définitions 5.6.

On dit que la fonction f *tend vers* $+\infty$ *au point* a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que A, à la condition que x soit différent de a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[- \{a\}, f(x) > A.$$

On note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\to} +\infty$.

On dit que la fonction f *tend vers* $-\infty$ *au point* a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus petites que $-A$, à la condition que x soit différent de a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[- \{a\}, f(x) < -A.$$

On note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$.

Remarquons que f tend vers $-\infty$ au point a si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$ au point a.

Exemples 5.7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors on a $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. En effet, pour tout $A > 0$, si l'on pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$ alors si $x \in]-\alpha, \alpha[$ et $x \neq 0$, on a $f(x) > A$. On a donc bien montré que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors on ne peut pas dire que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, ni que $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$. En effet, pour tout $\alpha > 0$, si $x \in] - \alpha, \alpha[- \{0\}$ alors on a $f(x) > \frac{1}{\alpha}$ si $x > 0$ et $f(x) < -\frac{1}{\alpha}$ si $x < 0$.

5.2.3 Limites à gauche, à droite

Pour traiter le cas de la limite en 0 de la fonction de Heaviside ou de la fonction inverse, on peut remarquer que si ces fonctions n'admettent pas de limite au sens où nous l'avons défini, nous pouvons affiner notre traitement et regarder les valeurs d'une fonction lorsque x varie dans un voisinage du point a mais en restant tout le temps du même coté de a : à gauche ou à droite du point a.

On dit qu'une fonction f est *définie à gauche au voisinage du point* a s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]a - \alpha, a[$ où $\alpha > 0$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f. De même, on dit qu'une fonction f est *définie à droite au voisinage du point* a s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]a, a + \alpha[$ où $\alpha > 0$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f.

Définitions 5.8.

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie à gauche au voisinage du point a. On dit que f *admet une limite finie à gauche au point* a s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus petit que a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha, a[, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^-} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\to} \ell$.

On dit que la fonction f *tend vers* $+\infty$ *à gauche au point* a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que A, à la condition que x soit strictement plus petit a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha, a[, f(x) > A.$$

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f *tend vers* $-\infty$ *à gauche au point* a.

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie à droite au voisinage du point a. On dit que f *admet une limite finie à droite au point* a s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus grand que a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a, a + \alpha[, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^+} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\to} \ell$.

On dit que la fonction f *tend vers* $+\infty$ *à droite au point* a si pour toute borne $A > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif α tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que A, à la condition que x soit strictement plus grand que a et à distance au plus α de a. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a, a + \alpha[, f(x) > A.$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f *tend vers* $-\infty$ *à droite au point* a.

Exemples 5.9.

La fonction de Heaviside a 0 pour limite à gauche en 0 et a pour limite 1 à droite en 0.

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite à gauche ni à droite en 0. On peut remarquer pour commencer que f est une fonction impaire. Il suffit donc d'étudier l'existence d'une limite à droite par exemple. Considérons les suites définies par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$. Ce sont deux suites strictement positives et qui convergent vers 0. Donc tout voisinage à droite de 0 contient tous les termes de ces deux suites, sauf un nombre fini. Or on a $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = 1$. Donc f n'admet aucune limite, finie ou infinie (elle est bornée) à droite en 0.

Proposition 5.10. *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors f admet une limite, finie ou infinie, au point a si et seulement si f admet cette même limite à gauche en a et à droite en a.*

Démonstration. On démontre la proposition dans le cas d'une limite finie. Le même type de raisonnement fonctionne dans le cas d'une limite infinie.

1. Supposons que $\lim_a f(x) = \ell$. Alors, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a - \alpha, a + \alpha[- \{a\}$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En particulier, on a, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ si $x \in]a - \alpha, a[$ ou si $x \in]a, a + \alpha[$, ce qui implique que $\lim_{a^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{a^+} f(x) = \ell$.
2. Réciproquement, supposons que $\lim_{a^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{a^+} f(x) = \ell$. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tel que si $x \in]a - \alpha_1, a[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et si $x \in]a, a + \alpha_2[$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Alors si $x \in]a - \alpha, a + \alpha[- \{a\}$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ donc on a bien $\lim_a f(x) = \ell$.

$\square$

Définition 5.11. On dit que f *tend vers ℓ au voisinage épointé du point a par valeurs supérieures*, et on note $\lim_a f(x) = \ell^+$ si la fonction f tend vers ℓ au point a, en étant toujours strictement supérieure à ℓ dans un voisinage épointé de a. Cela revient à la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \ell < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Cette définition s'étend naturellement aux limites à gauche, à droite et (on le verra plus tard) aux limites au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.
On définit de même le fait que f *tend vers ℓ au voisinage du point a par valeurs inférieures*, et cette définition s'étend naturellement aux limites à gauche, à droite et (on le verra plus tard) aux limites au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Si f n'admet pas de limite finie au point a, on dit que f diverge au point a. Nous avons vu cependant qu'il existe différents comportements au voisinage du point a :

Divergence vers l'infini : On dit que f *diverge vers l'infini au point a* si f admet une limite infinie au point a.

Divergence de première espèce : On dit que f admet une *divergence de première espèce au point a* si elle n'admet pas de limite (finie ou infinie) mais admet une limite (finie ou infinie) à droite et une limite (finie ou infinie) à gauche au point a.

Divergence de seconde espèce : On dit que f admet une *divergence de seconde espèce au point a* si elle n'admet pas de limite (finie ou infinie) à gauche ou à droite.

5.2.4 Limites finies/infinies d'une fonction au voisinage de l'infini

Nous pouvons également tenter de comprendre le comportement d'une fonction au voisinage des bornes infinies de son domaine de définition. On dit qu'une fonction f est *définie au voisinage de $+\infty$* si elle est définie pour tout réel x assez grand c'est à dire s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f. De même, on dit qu'une fonction f est *définie au voisinage de $-\infty$* si elle est définie pour tout réel x assez négatif c'est à dire s'il existe un intervalle ouvert I de la forme $I =]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$ tel que I est inclus dans le domaine de définition de f.

Définitions 5.12.

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f *admet une limite finie en $+\infty$* s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus grand que A. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} \ell$.

On dit que la fonction f *tend vers $+\infty$ en $+\infty$* si pour toute borne $B > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que B, à la condition que x soit strictement plus grand que A. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x > A, f(x) > B.$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f *tend vers $-\infty$ en $+\infty$*.

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$. On dit que f *admet une limite finie en $-\infty$* s'il existe une valeur numérique ℓ telle que pour toute marge d'erreur ε que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction se trouvent entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$, à la condition que x soit strictement plus petit que $-A$. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x < -A, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} \ell$.

On dit que la fonction f *tend vers* $+\infty$ *en* $-\infty$ si pour toute borne $B > 0$ que l'on se fixe, il existe un réel positif A tel que toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus grandes que B, à la condition que x soit strictement plus petit que $-A$. Ceci se traduit de la manière suivante à l'aide de quantificateurs :

$$\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x < -A, f(x) > B.$$

On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\to} +\infty$.
On définit de manière analogue le fait que f *tend vers* $-\infty$ *en* $-\infty$.

Exemples 5.13.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ n'admet pas de limite finie ou infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$. C'est le cas plus généralement pour toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique et non constante.

5.2.5 Limites et interprétation graphique

On peut interpréter graphiquement la notion de limite finie ou infinie en un point $a \in \mathbb{R}$, ou en l'infini.
Exemples

1. Si $\lim\limits_{a} f(x) = \ell$.
   Soit $\varepsilon > 0$, une « marge d'erreur ». Alors, par définition de la limite, il existe un $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Si l'on considère le « tube » horizontal centré en $y = \ell$ et de largeur 2ε, cela signifie qu'il existe un « tube » vertical centré en a et de largeur 2α tel que la portion de graphe de la fonction f déterminée par le « tube » vertical est « coincée » dans l'intersection des deux tubes, pour $x \neq a$.

2. Si $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell$.
   Soit $\varepsilon > 0$, une « marge d'erreur ». Alors, par définition de la limite, il existe un $A > 0$ tel que si $x > A$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Si l'on considère le « tube » horizontal centré en $y = \ell$ et de largeur 2ε, cela signifie qu'il existe un « seuil » vertical en A tel que la portion de graphe de la fonction f au delà de ce seuil vertical est « coincée » dans le tube horizontal.

A l'aide de ces dessins on peut illustrer le théorème suivant (à condition de confondre, ici, ℓ, ℓ^+ et ℓ^-).

Théorème 5.14. *Si f admet une limite (finie ou infinie) au voisinage d'un point ou de l'infini, cette limite est unique.*

5.2.6 Limites et ordre

Nous allons montrer que le passage à la limite respecte l'ordre (supérieur ou égal) sur $\mathbb{R}$. Plutôt que d'étudier les limites suivant que l'on se trouve au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$, de $+\infty$, de 0^+, ..., on exprime les résultats sur les limites en se servant de la notion de « point généralisé » ω. On entend par cela que ω est un élément choisi parmi $\{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ (ici, a désigne un nombre réel). On rappelle que les voisinages épointés de a^+ et a^- sont respectivement de la forme $]a, a+\alpha[$ et $]a-\alpha, a[$ où $\alpha > 0$. On alors la caractérisation synthétique suivante de la notion de limite.

Proposition 5.15. *Soient ω et ω' deux « points généralisés », et f une fonction définie au voisinage épointé de ω. On a alors :*

$\lim\limits_{\omega} f(x) = \omega'$ *si et seulement si*
pour tout voisinage V' du « point généralisé » ω', il existe un voisinage épointé V du « point généralisé » ω tel que $f(V) \subset V'$.

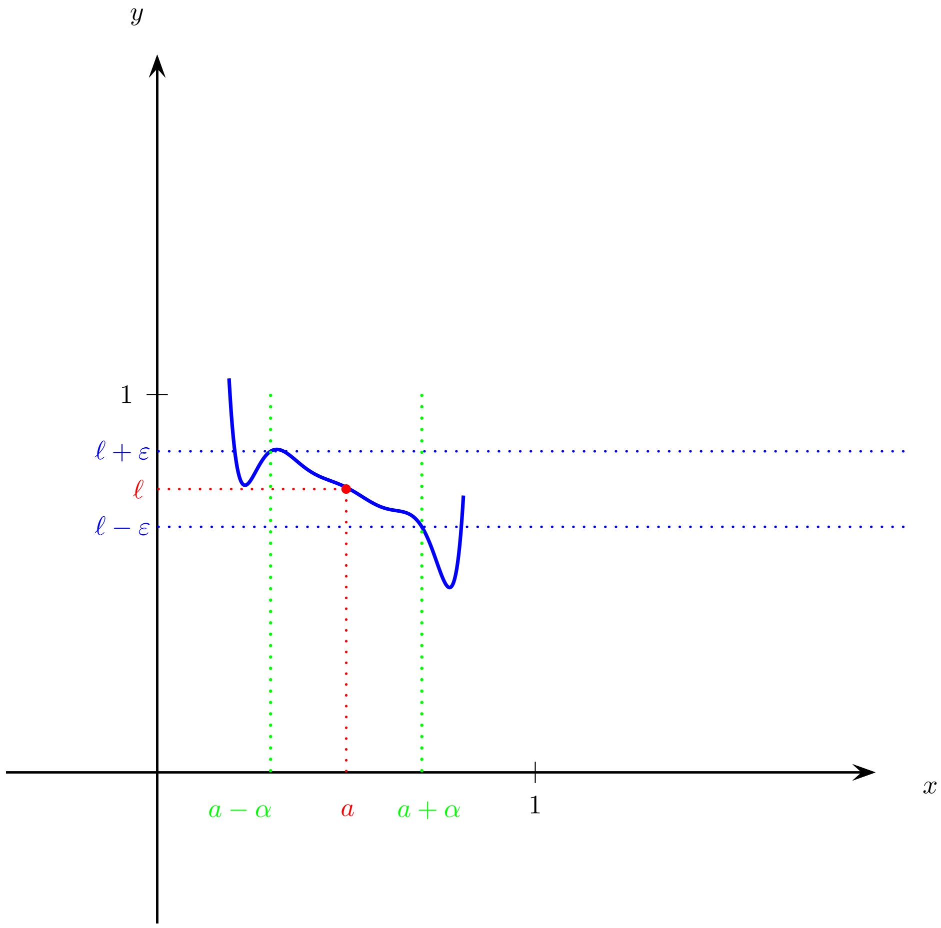


FIGURE 5.21 – Limite finie d'une fonction en un point a

Dans la suite f et g désignent des fonctions définies au voisinage épointé du même « point généralisé » ω.

Proposition 5.16. *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé du « point généralisé » ω et si f et g admettent toutes deux une limite finie en ω, alors on a $\lim_{\omega} f(x) \leq \lim_{\omega} g(x)$.*

Remarque 5.17. Attention, il est **FAUX** en général, que sous les mêmes hypothèses sur f et g, si $f(x) < g(x)$ pour tout x dans un voisinage épointé du « point généralisé » alors on ait $\lim_{\omega} f(x) < \lim_{\omega} g(x)$. Par exemple, la fonction $|x|$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et sur tout voisinage (épointé) de 0, on a $|x| > 0$, et pourtant $\lim_{\omega} 0 = 0 = \lim_{0} |x|$.

Démonstration. Démontrons cette propriété par exemple dans le cas où $\omega = a \in \mathbb{R}$. La démonstration fonctionne de manière identique dans les autres cas. Posons $\lim_{a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{a} g(x) = \ell_2$. Par hypothèse, on sait qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $x \in]a - \alpha_0, a + \alpha_0[- \{a\}$, alors $f(x) \leq g(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a - \alpha_1, a + \alpha_1[- \{a\}$ alors $f(x) \in]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$ et si $x \in]a - \alpha_2, a + \alpha_2[- \{a\}$ alors $g(x) \in]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, alors on obtient, pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[- \{a\}$,

$$\ell_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < \ell_2 + \varepsilon.$$

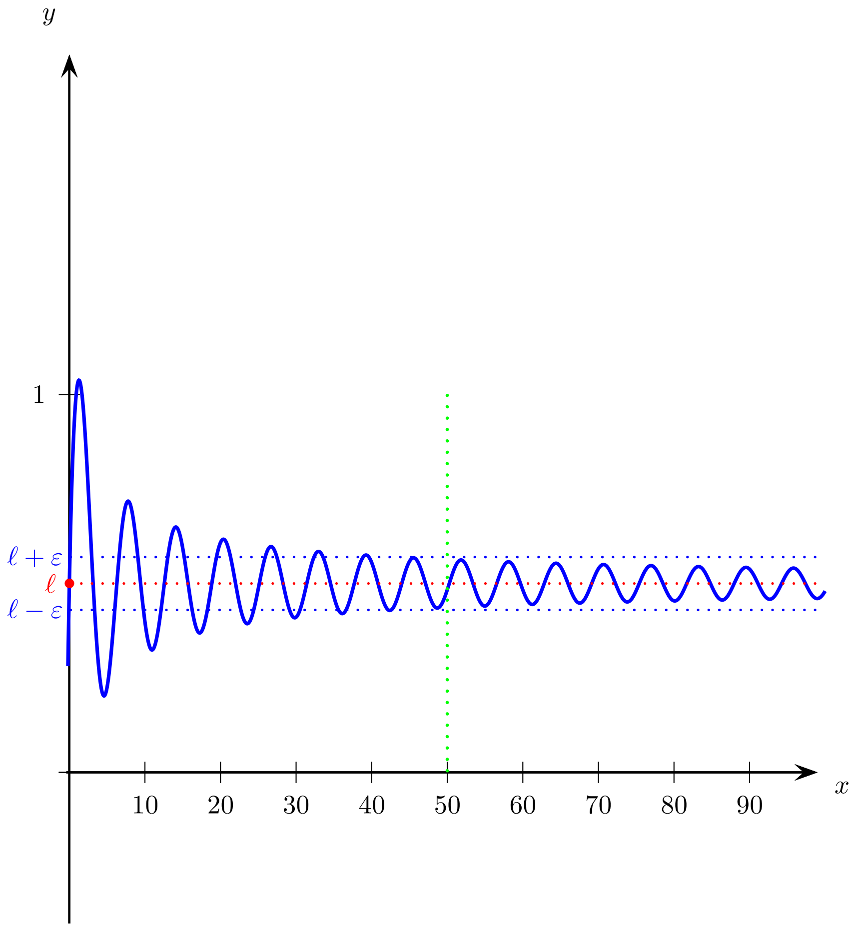


FIGURE 5.22 – Limite finie d'une fonction au voisinage de $+\infty$

Les nombres réels ℓ_1 et ℓ_2 vérifient donc que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2 + 2\varepsilon$. Cette dernière propriété équivaut au fait que $\ell_1 \leq \ell_2$. En effet, si $\ell_1 \leq \ell_2$, alors, évidemment, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2 + 2\varepsilon$. Réciproquement supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2 + 2\varepsilon$ et montrons, par l'absurde, que $\ell_1 \leq \ell_2$. Si l'on avait $\ell_1 > \ell_2$, alors en choisissant $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{4} > 0$, on aurait $\ell_2 + 2\varepsilon < \ell_2 + 4\varepsilon = \ell_1$, ce qui est impossible.
On a donc montré que si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell_1 \leq \ell_2 + 2\varepsilon$, on ne peut avoir $\ell_1 > \ell_2$, et donc on a nécessairement $\ell_1 \leq \ell_2$. □

De cette proposition on peut tirer le théorème suivant (connu sous le nom de théorème des « gendarmes », ou théorème du « sandwich »)

Théorème 5.18. *Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage épointé d'un « point généralisé » ω, et telles que, au voisinage de ce point $f \leq g \leq h$. Si f et h admettent une limite finie ℓ commune au « point généralisé » ω, alors g admet également ℓ comme limite finie au « point généralisé » ω.*

Remarque 5.19. Remarquons que le fait que $f \leq g \leq h$ au voisinage épointé du « point » ω et que f et h admettent chacun une limite finie au « point généralisé » ω ne suffit pas à assurer que g admet une limite en ω.

Par exemple, on sait qu'au voisinage de 0, on a $f(x) = -1 \leq g(x) = \sin(\frac{1}{x}) \leq h(x) = 1$ et que la fonction g n'admet pas de limite en 0.

Démonstration. Démontrons ce théorème par exemple pour $\omega = -\infty$. La démonstration est similaire dans les autres cas. Par hypothèse, il existe $A_0 > 0$ tel que si $x < -A_0$, alors on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x < -A_1$, alors $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et si $x < -A_2$, alors $h(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Posons $A = \max(A_0, A_1, A_2)$, alors pour tout $x < -A$, on a :

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\lim\limits_{-\infty} g(x) = \ell$. □

On a un théorème analogue dans le cas des limites infinies.

Théorème 5.20. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage épointé d'un « point généralisé » ω, et telles que, au voisinage de ce point $f \leq g$.*

— *Si $\lim\limits_{\omega} f(x) = +\infty$, alors $g(x)$ tend également vers $+\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{\omega} g(x) = +\infty$.*

— *Si $\lim\limits_{\omega} g(x) = -\infty$, alors $f(x)$ tend également vers $-\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{\omega} f(x) = -\infty$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer la première affirmation, la seconde s'en déduisant en considérant les fonctions $-f$ et $-g$. Démontrons ce théorème par exemple pour $\omega = a^-$, avec $a \in \mathbb{R}$. La démonstration est similaire dans les autres cas. Par hypothèse, on sait qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $x \in]a - \alpha_0, a[$, alors on a $f(x) \leq g(x)$. Soit $A > 0$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que si $x \in]a - \alpha_1, a[$, alors on a $f(x) > A$. Posons $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1)$. Alors pour tout $x \in]a - \alpha, a[$, on a $A < f(x) \leq g(x)$, ce qui montre bien que $\lim\limits_{a^-} g(x) = +\infty$. □

5.2.7 Caractérisation séquentielle d'une limite

On a le résultat suivant pour toute fonction f définie au voisinage du « point généralisé » ω :

Théorème 5.21. *On a $\lim\limits_{\omega} f(x) = \omega'$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \omega$ et telle que $u_n \neq \omega$ (au moins à partir d'un certain rang) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \omega'$.*

Démonstration. Montrons cette propriété par exemple dans le cas où $\omega = a \in \mathbb{R}$ et $\omega' = \ell \in \mathbb{R}$.

1. *La condition est nécessaire :* en utilisant la définition de la limite de f, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers a, alors pour $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - a| < \alpha.$$

Il existe de plus $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < |u_n - a| < \alpha$ si $n \geqslant N$. Ainsi

$$|f(u_n) - \ell| < \varepsilon \text{ si } n \geqslant N,$$

ce qui démontre que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2. *La condition est suffisante :* par l'absurde supposons que $\lim\limits_{a} f(x) \neq \ell$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha > 0 , \exists x \in \mathbb{R} , 0 < |x - a| < \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, on fait ainsi apparaître une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , 0 < |u_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a mais la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pourtant pas vers ℓ contrairement à l'hypothèse que l'on a faite.

□

5.2.8 Opérations sur les limites

Etudions à présent l'effet des opérations sur les fonctions définies au voisinage épointé d'un ≪ point généralisé ≫ ω. On entend par cela que ω est un choisi parmi $\{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ (ici, a désigne un nombre réel). Dans la suite f et g désignent des fonctions définies au voisinage épointé du même ≪ point généralisé ≫ ω.

Proposition 5.22. Multiplication par un scalaire
Soit λ un nombre réel non nul.

1. *Si f admet une limite finie ℓ au ≪ point généralisé ≫ ω, alors λf tend vers $\lambda\ell$ au ≪ point ≫ ω. On a $\lim\limits_{\omega}(\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{\omega} f(x)$.*
2. *Si f admet une limite infinie au ≪ point généralisé ≫ ω, alors λf admet également une limite infinie au ≪ point généralisé ≫ ω. Le signe de la limite infinie dépend de celui de λ :*
   - *Si $\lambda > 0$, on a $\lim\limits_{\omega}(\lambda f)(x) = \lim\limits_{\omega} f(x)$.*
   - *Si $\lambda < 0$, on a $\lim\limits_{\omega}(\lambda f)(x) = -\lim\limits_{\omega} f(x)$.*

Démonstration. Montrons ceci, par exemple dans le cas ou $\omega = a^+$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $\lim\limits_{a^+} f(x) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon'$. En multipliant par $|\lambda|$ les deux cotés de l'inégalité, on obtient bien que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $|\lambda f(x) - \lambda\ell| < \varepsilon$, ce qui montre que $\lim\limits_{a^+}(\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{a^+} f(x)$.
2. On suppose que $\lim\limits_{a^+} f(x) = +\infty$. Soit $A > 0$. Posons $A' = \frac{A}{|\lambda|}$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $f(x) > A'$. En multipliant par $|\lambda|$ les deux cotés de l'inégalité, on obtient bien que si $x \in]a, a+\alpha[$, alors $|\lambda| f(x) > A$, ce qui montre que $\lim\limits_{a^+}(|\lambda| f)(x) = \lim\limits_{a^+} f(x)$. Si $\lambda > 0$, on a donc $\lim\limits_{a^+}(\lambda f)(x) = \lim\limits_{a^+}(|\lambda| f)(x) = +\infty$ et si $\lambda < 0$, on obtient
   $\lim\limits_{a^+}(\lambda f)(x) = -\lim\limits_{a^+}(|\lambda| f)(x) = -\infty$

□

Proposition 5.23. Addition de deux fonctions

1. *Si f admet une limite finie ℓ_1 au ≪ point généralisé ≫ ω et g admet une limite finie ℓ_2 au ≪ point généralisé ≫ ω, alors $f+g$ tend vers $\ell_1+\ell_2$ au ≪ point ≫ ω. On a $\lim\limits_{\omega}(f+g)(x) = \lim\limits_{\omega} f(x) + \lim\limits_{\omega} g(x)$.*
2. *Si f admet une limite finie ℓ_1 au ≪ point généralisé ≫ ω et g admet une limite infinie $\varepsilon\infty$, avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, au ≪ point généralisé ≫ ω, alors $f+g$ tend vers $\varepsilon\infty$ au ≪ point ≫ ω. On a $\lim\limits_{\omega}(f+g)(x) = \lim\limits_{\omega} g(x)$.*
3. *Si f admet une limite infinie $\varepsilon_1\infty$ au ≪ point généralisé ≫ ω et g admet une limite infinie $\varepsilon_2\infty$ au ≪ point généralisé ≫ ω, avec $\varepsilon_1 \in \{-1, +1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$ on a :*
   - *Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, alors $f+g$ tend vers $\varepsilon_1\infty$ au ≪ point ≫ ω.*
     On a $\lim\limits_{\omega}(f+g)(x) = \lim\limits_{\omega} f(x) = \lim\limits_{\omega} g(x) = \varepsilon_1\infty$.
   - *Si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, alors on ne sait pas si $f+g$ admet une limite au ≪ point ≫ ω, et si celle-ci existe, si elle est finie ou infinie. On parle dans ce cas de* forme indéterminée *et il faut faire une étude particulière pour rechercher la limite éventuelle de la fonction $f+g$ au ≪ point ≫ ω.*

Illustrons ce dernier cas de forme indéterminée avec plusieurs exemples, pris au voisinage du ≪ point généralisé ≫ $+\infty$.

Exemples 5.24.

Si $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, alors $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$. Or $f+g$ est la fonction constante égale à 0, donc admet pour limite 0 en $+\infty$.

Si $f(x) = 2x$ et $g(x) = -x$, alors $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$. Or $(f+g)(x) = x$ donc admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Si $f(x) = x$ et $g(x) = -2x$, alors $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$. Or $(f+g)(x) = -x$ donc admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$.

Si $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = -x$, alors $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$. En effet la fonction $\sin(x)$ est bornée par 1 en valeur absolue, donc pour tout $B > 0$, si $x > B+1$, alors $f(x) > B + 1 + \sin(x) \geq B$ donc on peut en conclure que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$. Or $(f+g)(x) = \sin(x)$ qui n'admet pas de limite en $+\infty$.

Démonstration. Montrons ceci, par exemple dans le cas ou $\omega = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Supposons que f admet une limite finie ℓ_1 au point a et que g admet une limite finie ℓ_2 au point a. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \varepsilon/2$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[-\{a\}$ alors $f(x) \in]\ell_1 - \varepsilon', \ell_1 + \varepsilon'[$ et si $x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[-\{a\}$ alors $g(x) \in]\ell_2 - \varepsilon', \ell_2 + \varepsilon'[$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, alors, en additionnant les inégalités précédentes, on obtient :
$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \quad (f+g)(x) \in]\ell_1 + \ell_2 - 2\varepsilon', \ell_1 + \ell_2 + 2\varepsilon'[=]\ell_1 + \ell_2 - \varepsilon, \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon[.$$
Cela montre bien que $f+g$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$ au point a.
2. Supposons que f admet une limite finie ℓ_1 au point a et que g tend vers $+\infty$ au point a. Soit $A > 0$, posons $A' = A - \ell_1 + 1$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[-\{a\}$ alors $f(x) \in]\ell_1 - 1, \ell_1 + 1[$ et si $x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[-\{a\}$ alors $g(x) > A'$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, alors, en additionnant les inégalités précédentes, on obtient :
$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \quad (f+g)(x) > A.$$
Cela montre bien que $f+g$ tend vers $+\infty$ au point a.
3. Supposons par exemple que f et g tendent vers $-\infty$ au point a. Soit $A > 0$, on sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in]a-\alpha_1, a+\alpha_1[-\{a\}$ alors $f(x) < -A$ et si $x \in]a-\alpha_2, a+\alpha_2[-\{a\}$ alors $g(x) < -A$. Choisissons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, alors, en additionnant les inégalités précédentes, on obtient :
$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[-\{a\}, \quad (f+g)(x) < -2A.$$
Cela montre bien que $f+g$ tend vers $-\infty$ au point a.

□

Proposition 5.25. PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

1. *Si f admet une limite finie ℓ_1 au « point généralisé » ω et g admet une limite finie ℓ_2 au « point généralisé » ω, alors $f \times g$ tend vers $\ell_1 \times \ell_2$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{\omega}(f \times g)(x) = \lim\limits_{\omega} f(x) \times \lim\limits_{\omega} g(x)$.*
2. *Si f admet une limite infinie $\varepsilon_1\infty$ au « point généralisé » ω et g admet une limite infinie $\varepsilon_2\infty$ au « point généralisé » ω, avec $\varepsilon_1 \in \{-1, +1\}$ et $\varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$ alors $f \times g$ tend vers $(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2)\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{\omega}(f \times g)(x) = \lim\limits_{\omega} f(x) \times \lim\limits_{\omega} g(x)$.*
3. *Si f admet une limite finie ℓ au « point généralisé » ω et g admet une limite infinie $\varepsilon\infty$, avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, au « point généralisé » ω, on a :*
   - *Si $\ell > 0$, alors $f \times g$ tend vers $\varepsilon\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{\omega}(f \times g)(x) = \lim\limits_{\omega} g(x)$.*
   - *Si $\ell < 0$, alors $f \times g$ tend vers $-\varepsilon\infty$ au « point » ω. On a $\lim\limits_{\omega}(f \times g)(x) = -\lim\limits_{\omega} g(x)$.*
   - *Si $\ell = 0$, alors on ne sait pas si $f \times g$ admet une limite au « point » ω, et si celle-ci existe, si elle est finie ou infinie. On parle dans ce cas de* forme indéterminée *et il faut faire une étude particulière pour rechercher la limite éventuelle de la fonction $f \times g$ au « point » ω.*

Illustrons ce dernier cas de forme indéterminée avec plusieurs exemples, pris au voisinage du « point généralisé » 0^+.

Exemples 5.26.
Si $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{0^+} g(x) = +\infty$. Or $f \times g$ est la fonction constante égale à 1, donc admet pour limite 1 en 0^+.
Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{0^+} g(x) = +\infty$. Or $(f \times g)(x) = x$ donc admet pour limite 0 en 0^+.
Si $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$, alors $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{0^+} g(x) = +\infty$. Or $(f \times g)(x) = \frac{1}{x}$ donc admet pour limite $+\infty$ en 0^+.
Si $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{0^+} g(x) = +\infty$. Or $(f \times g)(x) = \sin(\frac{1}{x})$ qui n'admet pas de limite en 0^+.

Démonstration. Montrons ceci, par exemple dans le cas ou $\omega = +\infty$.

1. Supposons que f admet une limite finie ℓ_1 en $+\infty$ et que g admet une limite finie ℓ_2 en $+\infty$. Posons $\ell = \max(|\ell_1|; |\ell_2|)$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, posons $\varepsilon' = \varepsilon/2(\ell + 1)$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x > A_1$ alors $f(x) \in]\ell_1 - \varepsilon', \ell_1 + \varepsilon'[$ et si $x > A_2$ alors $g(x) \in]\ell_2 - \varepsilon', \ell_2 + \varepsilon'[$. Choisissons $A = \max(A_1, A_2)$, alors on a, pour $x > A$,
$$\begin{aligned} |(f \times g)(x) - \ell_1 \times \ell_2| &= |f(x) \times g(x) - f(x) \times \ell_2 + f(x) \times \ell_2 - \ell_1 \times \ell_2| \\ &\leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| \\ &\leq (|\ell_1| + \varepsilon')\varepsilon' + (|\ell_2| + \varepsilon')\varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$
Cela montre bien que $f \times g$ tend vers $\ell_1 \times \ell_2$ en $+\infty$.
2. Supposons par exemple que f et g tendent vers $-\infty$ en $+\infty$. Soit $B > 0$, posons $B' = \sqrt{B}$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x > A_1$ alors $f(x) < -B'$ et si $x > A_2$ alors $g(x) < -B'$. Choisissons $A = \max(A_1, A_2)$, alors, en faisant le produit des inégalités précédentes, on obtient :
$$x > A, \quad (f \times g)(x) > B'^2 = B.$$
Cela montre bien que $f \times g$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. Supposons que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
   — On suppose $\ell > 0$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\ell}{2}[$ et $B > 0$. Posons $B' = \frac{2B}{\ell}$. On sait qu'il existe $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que si $x > A_1$ alors $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et si $x > A_2$ alors $g(x) > B'$. Choisissons $A = \max(A_1, A_2)$, alors, en faisant le produit des inégalités précédentes, on obtient, pour tout $x > A$, $(f \times g)(x) > \frac{\ell}{2}B' = B$. Cela montre bien que $f \times g$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
   — On suppose $\ell < 0$. En étudiant $(-f) \times g$, on voit que la limite de $-(f \times g)$ en $+\infty$ est $+\infty$ et donc la limite de $(f \times g)$ en $+\infty$ est $-\infty$

□

Proposition 5.27. Composition de deux fonctions (1) *Supposons à présent que la fonction f définie au voisinage épointé du « point généralisé » ω admet pour limite (finie ou infinie) ω' et que la fonction g définie au voisinage épointé du « point généralisé » ω' admet pour limite (finie ou infinie) ω''. Si f n'atteint jamais la valeur ω' sur un voisinage épointé de ω, alors on a que $g \circ f$ est définie au voisinage de ω et tend vers ω'' lorsque x tend vers ω. Si $\lim_\omega f(x) = \omega'$ et $\lim_{\omega'} g(y) = \omega''$, alors $\lim_\omega(g \circ f) = \omega''$.*

Remarquons que pour appliquer cette proposition, on peut être amené à chercher non seulement la limite de la fonction f, mais également la position des valeurs de f par rapport à cette limite. Par exemple, si l'on cherche la limite en 0 de $\frac{1}{|\sin x|}$. On sait que la fonction $|\sin x|$ tend vers 0 en 0. Mais on a vu que la fonction $\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0. Pour pouvoir néanmoins appliquer la proposition, il faut remarquer qu'en fait $|\sin x|$ tend vers 0^+ c'est à dire qu'elle tend vers 0 en étant toujours supérieure ou égale à 0. Or la fonction $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ en 0^+, donc on peut conclure que $\frac{1}{|\sin x|}$ tend vers $+\infty$ en 0^+.

Démonstration. Traitons par exemple le cas de $\omega = +\infty$, $\omega' = 0$, $\omega'' = -\infty$. La preuve est similaire dans les autres cas. Soit $B > 0$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $y \in]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$ alors $g(y) < -B$. On sait également qu'il existe $A > 0$ tel que si $x > A$, alors $f(x) \in]-\alpha, \alpha[$. On a donc bien, pour tout $x > A$, que $g(f(x)) < -B$ d'où l'on conclut que $\lim_{+\infty}(g \circ f) = -\infty$. □

Remarquons également que cette propriété n'est pas toujours satisfaisante. Ainsi, par exemple, on aimerait montrer que $\lim\limits_{0} e^{x\sin(\frac{1}{x})} = 1$ en utilisant le fait que $\lim\limits_{0} e^{y} = 1$ et que $\lim\limits_{0} x\sin(\dfrac{1}{x}) = 0$.
Il n'est pas possible ici d'utiliser la proposition précédente, car dans tout voisinage épointé de 0, la fonction $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ prend la valeur 0. La proposition suivante permet de remédier à cette situation.

Proposition 5.28. Composition de deux fonctions (2)
Supposons à présent que la fonction f définie au voisinage épointé du ≪ point généralisé ≫ ω admet pour limite finie ℓ et que la fonction g est définie au voisinage du point ℓ (y compris au point lui même) et admet pour limite finie $\ell' = g(\ell)$ en ℓ. Alors on a que $g \circ f$ est définie au voisinage épointé de ω et tend vers ℓ' lorsque x tend vers ω. Si $\lim_{\omega} f(x) = \ell$ et $\lim_{\omega'} g(y) = g(\ell) = \ell'$, alors $\lim_{\omega}(g \circ f) = \ell'$.

Nous pouvons appliquer ce qui précède au quotient de deux fonctions : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage épointé d'un ≪ point généralisé ≫ ω, et telle que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de ω.

Proposition 5.29. Quotient de deux fonctions

1. *Supposons que la fonction f admet pour limite finie ℓ_1 au ≪ point ≫ ω et que la fonction g admet une limite finie ℓ_2 au ≪ point ≫ ω. Alors*
   — *Si $\ell_2 \neq 0$ alors $\lim\limits_{\omega} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{\lim_{\omega} f(x)}{\lim_{\omega} g(x)}$.*
   — *Si $\ell_2 = 0^+$ et $\ell_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{\omega} \dfrac{f}{g}(x) = \operatorname{sign}(\ell_1)\infty$ où $\operatorname{sign}(\ell_1)$ désigne le signe de ℓ_1 (1 si $\ell_1 > 0$ et -1 si $\ell_1 < 0$).*
   — *Si $\ell_2 = 0^-$ et $\ell_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{\omega} \dfrac{f}{g}(x) = -\operatorname{sign}(\ell_1)\infty$ où $\operatorname{sign}(\ell_1)$ désigne le signe de ℓ_1 (1 si $\ell_1 > 0$ et -1 si $\ell_1 < 0$).*
   — *Si $\ell_2 = 0$ ou si ($\ell_2 = 0^+$ et $\ell_1 = 0$) ou si ($\ell_2 = 0^-$ et $\ell_1 = 0$), il s'agit d'une forme indéterminée.*
2. *Supposons que la fonction f admet pour limite finie ℓ_1 au ≪ point ≫ ω et que la fonction g admet une limite infinie $\varepsilon\infty$ au ≪ point ≫ ω. Alors $\dfrac{f}{g}(x)$ tend vers 0 au ≪ point ≫ ω.*
3. *Supposons que la fonction f admet une limite infinie $\varepsilon\infty$ au ≪ point ≫ ω et que la fonction g admet pour limite finie ℓ_2 au ≪ point ≫ ω. Alors $|\dfrac{f}{g}(x)|$ tend vers $+\infty$ au ≪ point ≫ ω. Si $\ell_2 \in \{0^+, 0^-\} \cup \mathbb{R}^*$ $\frac{f}{g}(x)$ admet une limite infinie en ω, dont on peut déterminer le signe.*
4. *Supposons que la fonction f admet une limite infinie $\varepsilon_1\infty$ au ≪ point ≫ ω et que la fonction g admet une limite infinie $\varepsilon_2\infty$ au ≪ point ≫ ω, alors on ne sait pas si le quotient $\frac{f}{g}$ admet une limite en ω : il s'agit d'une forme indéterminée.*

Tableau synthétique Calculs de limites et opérations

$\lim\limits_{\omega}(f+g)$		$\lim\limits_{\omega} f$		
		x_0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{\omega} g$	y_0	$x_0 + y_0$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

$\lim\limits_{\omega} \lambda f$	$\lim\limits_{\omega} f$		
	x_0	$+\infty$	$-\infty$
si $\lambda > 0$	λx_0	$+\infty$	$-\infty$
si $\lambda = 0$	$\lambda x_0 = 0$	0	0
si $\lambda < 0$	λx_0	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{\omega} fg$		$\lim\limits_{\omega} f$				
		$x_0>0$	$x_0=0$	$x_0<0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{\omega} g$	$y_0>0$	x_0y_0			$+\infty$	$-\infty$
	$y_0=0$					
	$y_0<0$				$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

	$\lim\limits_{\omega} f$						
	$y_0\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$	0	$\lim\limits_{\omega} \lvert f\rvert=+\infty$
$\lim\limits_{\omega} \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{y_0}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	$\lim\limits_{\omega} \left\lvert \dfrac{1}{f}\right\rvert=+\infty$	0

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{D}f \underset{f}{\rightarrow} \mathcal{D}g \underset{g}{\rightarrow} \mathbb{R} \\ \phantom{\mathcal{D}f}\ \omega \qquad \beta \qquad \gamma \\ \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\omega} f=\beta \\ \lim\limits_{\beta} g=\gamma\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\omega} g\circ f=\gamma.\end{array}}$$

Remarques 5.30.

Pour un quotient, on utilise les théorèmes pour le produit et l'inverse : $\boxed{\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}.}$

Pour une puissance on utilise les théorèmes pour le produit, la composée et les limites des exp et ln : $\boxed{f^g=\exp(g\ln(f)).}$

On peut composer une suite et une fonction *i.e.* :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\omega \\ \lim\limits_{\omega} f=\beta \\ u_n\neq\omega\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=\beta.$$

Inversement (caractérisation séquentielle de la limite de f) si $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=\beta$ pour toute suite (u_n) qui tend vers ω (et différente de ω à partir d'un certain rang), alors on a $\lim\limits_{\omega} f=\beta$.

Les cases vides signifient que les théorèmes ne permettent pas de déterminer la valeur de la limite ni même si une telle limite existe — il faut alors examiner plus précisément la situation. On parle alors de *forme indéterminée* ; ce sont les cas suivants : $\boxed{\infty-\infty,\ 0\times\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ \infty^0 ou\ 0^0.}$

Corollaire 5.31 ((changement de variable))**.** *Soient trois points ω, β, γ, une fonction f, et une bijection u d'un voisinage épointé de ω sur un voisinage épointé de β telle que $\lim\limits_{\omega} u=\beta$ et $\lim\limits_{\beta} u^{-1}=\omega$. Alors :*

$$\lim_{\beta} f=\gamma \iff \lim_{\omega} f\circ u=\gamma.$$

En particulier pour se ramener à une limite en 0 :

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty} f(u)=\gamma \iff \lim_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\gamma} \textit{ et } \boxed{\lim_{u\to x_0} f(u)=\gamma \iff \lim_{x\to0} f(x+x_0)=\gamma.}$$

5.2.9 Fonctions monotones et limites

Théorème 5.32. Théorème de la limite monotone *Soient I un intervalle ouvert et $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors pour tout $x_0\in I$, les limites $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existent.*

Démonstration. Supposons f croissante. Soit

$$Y=\{f(x)\mid x\in I \text{ et } x>x_0\}.$$

L'ensemble Y n'est pas vide (car $x_0 \in I$ et I est ouvert) et Y est minoré par $f(x_0)$ (car f est supposée croissante). Il admet donc une borne inférieure ; notons-la $u = \inf Y$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_0 = f(x_0 + \alpha) \in Y$ $(\alpha > 0)$ tel que

$$u \leqslant f(x_0 + \alpha) < u + \varepsilon.$$

Quel que soit $x \in]x_0, x_0 + \alpha[$ on a $u \leqslant f(x) \leqslant f(x_0 + \alpha) < u + \varepsilon$. Donc $u = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
On raisonne de même pour montrer l'existence de la limite à gauche. □

On peut préciser ce qui se passe aux bornes de l'intervalle.

Théorème 5.33. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et croissante sur cet intervalle. Posons $\omega = \sup I$. On a alors l'alternative suivante.*

— *Ou bien f est majorée sur I et alors $f(x)$ admet une limite finie à gauche en ω.*

— *Ou bien f n'est pas majorée sur I et alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ à gauche en ω.*

Démonstration. — Supposons que f est majorée sur I. Alors l'ensemble $f(I)$ est non vide est majoré dans $\mathbb{R}$, et admet donc un suprémum. Posons $s = \sup f(I)$, et montrons que $f(x)$ tend vers la limite finie s à gauche en ω. Soit $\varepsilon > 0$, par définition de $\sup f(I)$, on sait qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $s - \varepsilon < f(x_0) \leq s$. Puisque f est croissante, cela signifie que pour tout $x \in [x_0, \omega[$, on a $s \geq f(x) > s - \varepsilon$, et donc $f(x)$ tend vers s à gauche en ω.

— Supposons que f n'est pas majorée sur I. Alors pour tout $A > 0$, il existe $x_A \in I$ tel que $f(x_A) > A$. Puisque f est croissante, cela signifie que pour tout $x \in [x_A, \omega[$, on a $f(x) > A$, et donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ à gauche en ω.

□

On peut de même montrer le théorème similaire sur la borne inférieure de l'intervalle :

Théorème 5.34. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et croissante sur cet intervalle. Posons $\beta = \inf I$. On a alors l'alternative suivante.*

— *Ou bien f est minorée sur I et alors $f(x)$ admet une limite finie à droite en β.*

— *Ou bien f n'est pas minorée sur I et alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ à droite en β.*

5.2.10 Limites des fonctions usuelles, croissances comparées

Limites en un point fini

1. On verra au paragraphe suivant que beaucoup de fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition. Cela signifie que pour tout point a dans le domaine de la fonction f, on a $\lim_{a} f(x) = f(a)$. Cette propriété est vérifiée pour les fonctions suivantes :

   — constantes,
   — affines,
   — polynomiales,
   — fractions rationnelles,
   — exponentielles,
   — logarithmes,
   — puissances,
   — trigonométriques,
   — fonctions de trigonométrie hyperbolique.

2. En revanche, les fonctions en escalier ou affines par morceaux admettent toujours une limite à gauche et à droite en tout point, mais en général pas de limite aux points de raccord.

3. La fonction $x \to 1/x$ tend vers $+\infty$ en 0^+.
4. La fonction $x \to \ln(x)$ tend vers $-\infty$ en 0^+.
5. La fonction de Cauchy $x \to \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite (finie ou infinie) en 0^+.

Limite en un ≪ point ≫ infini

1. On a $\lim\limits_{\varepsilon\infty} x = \varepsilon\infty$, $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$.
   On en déduit les limites au voisinage de l'infini suivantes, en utilisant les opérations sur les limites et les propriétés des fonctions monotones :
   — La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini du terme de plus haut degré (soit $\pm\infty$).
   — La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des termes de plus haut degré.
   — On a $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$.
   — On a $\lim\limits_{+\infty} \ln(x) = +\infty$.
   — On a $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} x^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$.
   — On a $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty = -\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh}(x)$.
   — On a $\lim\limits_{+\infty} \tanh(x) = 1 = -\lim\limits_{+\infty} \tanh(x)$.
2. Les fonctions trigonométriques : cos, sin n'admettent pas de limite à l'infini (mais restent bornées). Plus généralement, une fonction périodique non constante n'admet jamais de limite à l'infini.

Croissances comparées

Théorème 5.35. *On a les limites suivantes (voir la démonstration en exercice) :*

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 0$, on a* $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$.
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 0$, on a* $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^\beta}{\ln(x)^\alpha} = +\infty$.
3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 0$, on a* $\lim\limits_{0^+} x^\beta \ln(x)^\alpha = 0$.

5.3 Fonctions continues

Si l'on considère les graphes des fonctions usuelles que nous avons vues dans les exemples, nous pouvons observer que le graphe de certaines d'entre elles (fonctions constantes, polynomiales, exponentielles, logarithmes, puissances, trigonométriques, de trigonométrie hyperbolique,...) peut se dessiner sans lever le crayon de la feuille, c'est à dire dans un mouvement continu de la pointe du crayon, alors que d'autres fonctions ne vérifient pas cette propriété (fonctions en escalier, affines par morceaux, fraction rationnelles, fonction de Dirichlet, ...).
On appelle continuité de la fonction cette propriété.

5.3.1 Continuité d'une fonction en un point. Continuité à gauche, à droite

Définition 5.36. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage du point a (y compris en a). On dit que la fonction f est *continue au point* a si la fonction f converge vers $f(a)$ au point a c'est à dire si $\lim\limits_{a} f(x) = f(a)$.

Exemples 5.37.

La fonction constante c sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto c$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

La fonction identité sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

La fonction inverse : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}^*$.

La fonction de Heaviside n'est pas continue en 0.

Pour prendre en compte plus précisément le cas de la fonction Heaviside précédente, on peut introduire la notion de continuité à gauche ou à droite en un point.

Définition 5.38.

1. Soit f une fonction définie en a, et au voisinage du ≪ point ≫ a^+. On dit que la fonction f est *continue à droite au point a* si la fonction f converge vers $f(a)$ au ≪ point ≫ a^+ c'est à dire si $\lim\limits_{a^+} f(x) = f(a)$.
2. Soit f une fonction définie en a, et au voisinage du ≪ point ≫ a^-. On dit que la fonction f est *continue à gauche au point a* si la fonction f converge vers $f(a)$ au ≪ point ≫ a^- c'est à dire si $\lim\limits_{a^-} f(x) = f(a)$.

La relation entre limite, limite à gauche et limite à droite en un point a nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 5.39. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Une fonction f définie au voisinage du point a (y compris en a) est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.*

Exemples 5.40.

La fonction de Heaviside n'est pas continue à gauche en 0, mais continue à droite en 0.

La fonction ≪ signe ≫ n'est continue ni à gauche, ni à droite en 0.

La fonction valeur absolue est continue à gauche et à droite en 0, donc continue en 0.

On peut définir la notion de continuité sur un intervalle, ou plus généralement sur une réunion d'intervalles, en adoptant la définition locale suivante.

Définition 5.41. Si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ et A est une partie de $\mathcal{D}_f$ qui est réunion d'intervalles ouverts, on dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

On définit la continuité sur un intervalle non ouvert de la façon suivante :

Définition 5.42. Si f est une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point x de I différent des bornes de l'intervalle et si f est continue à gauche en $b = \sup I$ dans le cas où $b \in I$ (*i.e.* $b = \max(I)$) et à droite en $a = \inf I$ dans le cas où $a \in I$ (*i.e.* $a = \min(I)$).

5.3.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

En utilisant la caractérisation séquentielle des limites, on a la proposition suivante.

Proposition 5.43. *Soit f une fonction définie au point a et au voisinage du point a (respectivement a^+, respectivement a^-), alors f est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{D}_f)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a (respectivement a^+, respectivement a^-), alors $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.*

5.3.3 Opérations sur les fonctions continues

Des opérations vues sur les limites, on déduit facilement les propositions suivantes :

Proposition 5.44. *Soit f une fonction définie au voisinage du point a et continue au point a. Soit g une fonction définie au voisinage du point $f(a)$ et continue au point $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue au point a.*

Proposition 5.45. *Soient f et g deux fonctions définies au point a et au voisinage du point a (respectivement a^+, respectivement a^-), et continues au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche). Alors on a :*

1. *si A est une partie du domaine de définition de f qui contient a et un voisinage du point a (respectivement a^+, respectivement a^-), alors la restriction de f à A, $f_{|A}$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*
2. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*
3. *la fonction $f + g$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*
4. *la fonction $f \times g$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche) ;*
5. *si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue au point a (respectivement à droite, respectivement à gauche).*

Ceci nous permet de construire beaucoup de fonctions continues, à condition de connaître la continuité de fonctions usuelles.

5.3.4 Continuité des fonctions usuelles

1. Les fonctions affines et polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
   Cela découle de la continuité des fonctions constantes et de la fonction identité, ainsi que des règles sur le produit, la multiplication par un scalaire et la somme de fonctions continues en un point.
2. Les fonctions fractions rationnelles sont continues en tout point de leur domaine de définition.
   Cela découle de la continuité du quotient de deux fonctions polynomiales (elles-mêmes continues).
3. Les fonctions en escalier ou affines par morceaux ne sont en général pas continues aux points de raccords.
4. Les fonctions exponentielles et logarithmes sont continues en tout point de leurs domaines de définition, par construction (admise).
5. Les fonctions puissances sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition.
6. Les fonctions trigonométriques sont continues sur leur domaine de définition.

Démonstration. Pour le voir, commençons par montrer que la fonction sinus est continue en 0. On sait que la fonction sinus est impaire, il nous suffit donc de montrer que $\lim_{0^+} \sin(\theta) = \sin(0) = 0$. Pour ce faire on utilise l'observation géométrique suivante : pour $\theta \in]0, \pi/2[$, θ représente, par définition des radians, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ du cercle trigonométrique (de rayon 1) déterminée par deux segments $[OA]$ et $[OB]$ formant au centre du cercle un angle θ. La valeur $\sin\theta$ représente la longueur du segment $[BC]$, qui forme un angle droit en C avec le segment $[OA]$. Le triangle BCA est un triangle rectangle en C, donc son hypoténuse $[AB]$ est plus longue que le segment $[BC]$. Mais le segment AB est une corde, du cercle trigonométrique, donc sa longueur est inférieure à la longueur de l'arc $\widehat{AB}$. On a ainsi obtenu, pour $\theta \in]0, \pi/2[$,

$$0 \leq \sin(\theta) = BC \leq AB \leq \left|\widehat{AB}\right| = \theta.$$

Ceci prouve donc bien que $\lim_{0^+} \sin(\theta) = \sin(0) = 0$ et la fonction sinus est donc bien continue en 0.

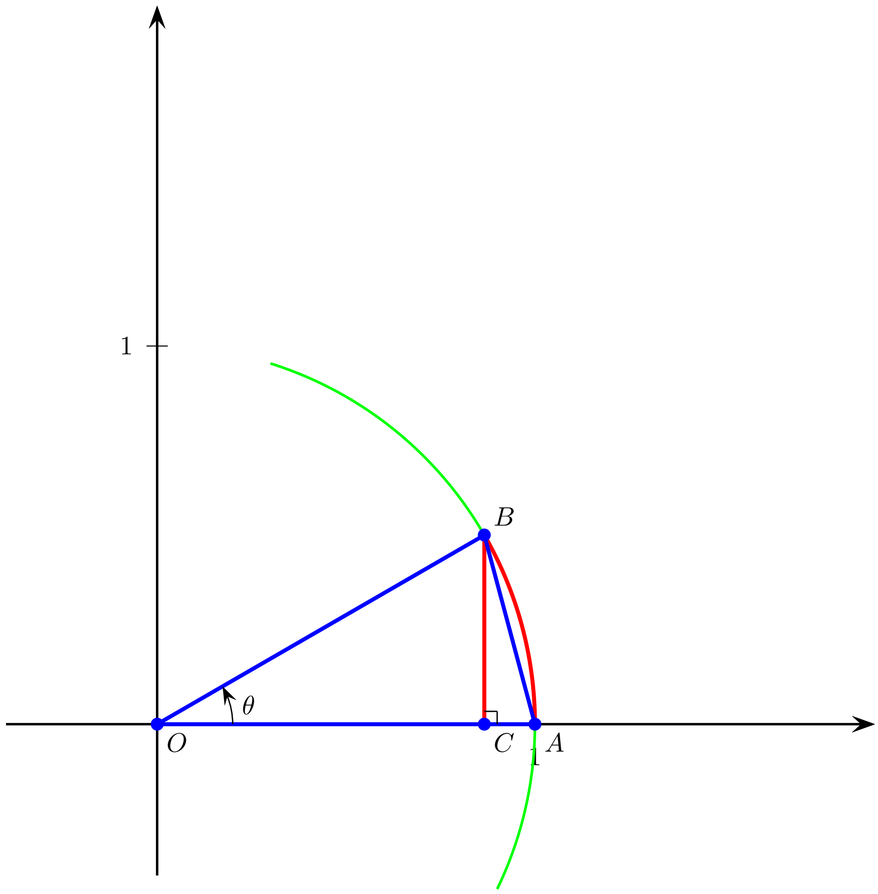


FIGURE 5.23 – Continuité de la fonction sinus en 0

En utilisant le fait que la fonction cosinus est paire et positive pour $\theta \in [0, \pi/2]$, et la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, on peut écrire $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$ pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, ce qui montre (en utilisant les opérations sur les fonctions continues) que la fonction cosinus est continue en 0. Enfin, les formules d'addition des angles, permettent d'étendre la continuité en 0 des fonctions sinus et cosinus à la continuité en tout point. $\square$

7. La fonction de Dirichlet $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
   En effet, soit a un réel quelconque. Si $a \in \mathbb{Q}$ (resp. $a \notin \mathbb{Q}$), alors pour tout $\alpha > 0$ il existe $x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (resp. $x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap \mathbb{Q}$), dans les deux cas $|\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a)| = 1$ ce qui montre que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a.
   Cependant, on peut montrer que la fonction de type Dirichlet définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$
   est continue pour a irrationnel et discontinue pour a rationnel : $\text{Discont}(f) = \mathbb{Q}$ et $\text{Cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8. La fonction de Cauchy $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas continue à droite en 0, mais la fonction de Weierstrass $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ l'est.

5.3.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.46. ***Théorème des valeurs intermédiaires*** (Bolzano)
Soient a et b deux réels, avec $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a) < c$ et $f(b) > c$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi) = c$.

Démonstration. Par translation, en considérant la fonction $x \mapsto f(x) - c$ au lieu de f, on se ramène au cas où $c = 0$.
L'ensemble $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$ est non vide (car $a \in X$) et majoré par b. Il admet donc une borne supérieure : $\xi = \sup X$. Montrons que ξ répond à la question et vérifie $f(\xi) = 0$.
Par l'absurde supposons que $f(\xi) = \kappa > 0$ et prenons $\varepsilon = \frac{\kappa}{2} > 0$. La continuité de f en ξ garantie l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$|f(x) - \kappa| < \frac{\kappa}{2} \text{ si } |x - \xi| < \delta$$

de sorte que

$$f(x) > \frac{\kappa}{2} > 0 \text{ si } \xi - \delta < x < \xi$$

ce qui est impossible puisqu'alors $\xi - \delta$ serait un majorant de X et ξ est le plus petit majorant de X.
Supposons à présent $f(\xi) = \kappa < 0$ et prenons $\varepsilon = -\frac{\kappa}{2} > 0$. La continuité de f en ξ garantie l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$|f(x) - \kappa| < -\frac{\kappa}{2} \text{ si } |x - \xi| < \delta$$

de sorte que

$$f(x) < \frac{\kappa}{2} < 0 \text{ si } \xi < x < \xi + \delta$$

ce qui est impossible par définition de $\xi = \sup X$. □

Exemples & applications.

1. Une *fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler* :

   Corollaire 5.47. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue prend des valeurs positives et et des valeurs négatives sur $[a,b]$, alors f s'annule au moins une fois, i.e. il existe $x_0 \in [a,b]$ satisfaisant l'équation $f(x_0) = 0$.*

2. Existence de solutions d'équations.

   a.

   Proposition 5.48. *Une équation polynomiale de degré n impair*

   $$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0 \text{ (avec } a_n \neq 0)$$

   admet au moins une solution.

   Démonstration. Soit $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $a_n = 1$. Comme n est impair, il vient

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

   Ainsi la fonction polynomiale (donc continue) f prend des valeurs positives et négatives, elle s'annule donc au moins une fois. □

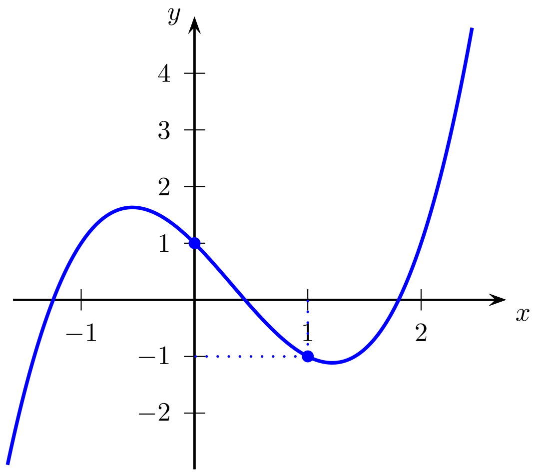


FIGURE 5.24 – Graphe de la fonction $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$

b. Exemple concret. Considérons la fonction polynomiale :

$$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

On constate que $p(0) = 1$ et $p(1) = -1$, grâce au théorème des valeurs intermédiaires on conclut que p s'annule dans $]-\infty, 0[$, dans $]0, 1[$ et dans $]1, +\infty[$ (voir Fig. 5.24).

3. Un théorème de point fixe.

Proposition 5.49. *Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors f possède au moins un point fixe, i.e. il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $f(\xi) = \xi$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$. □

4. Existe-t-il une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?
La réponse est *non*.

Démontrons ceci par l'absurde : supposons qu'une telle fonction f existe. Soit $g\colon x \mapsto f(x) + x$. La fonction g est continue et $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ce qui est impossible si g n'est pas constante, d'après le théorème des valeurs intermédiaires puisqu'entre deux irrationnels il existe toujours un rationnel. On aurait alors $f(x) = -x + c$ avec c une constante irrationnelle. Mais dans ce cas, on obtient $f(2c) = -c \in \mathbb{Q}$ d'après les hypothèses, ce qui est impossible.

5.3.6 Fonctions strictement monotones et continues

On a vu qu'une fonction strictement monotone est toujours injective.
En fait, pour les fonctions *continues* sur un intervalle la réciproque de la propriété précédente est vraie. De plus, on va montrer que dans ce cas, la fonction réciproque f^{-1}, dont on sait déjà qu'elle est strictement monotone, est également continue.
Nous allons commencer pour cela par remarquer plusieurs propriétés caractéristiques des fonctions strictement monotones.

Lemme 5.50. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et injective, alors f est strictement monotone.*

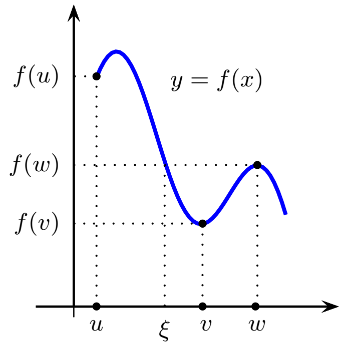


FIGURE 5.25 – Illustration de la démonstration du lemme 5.50

Démonstration. Soient trois points $u < v < w$. Alors $f(v)$ est nécessairement entre $f(u)$ et $f(w)$ par continuité de f. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas (voir Fig. 5.25) et que par exemple on ait $f(u) > f(w) > f(v)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $\xi \in [u, v]$ tel que $f(\xi) = f(w)$ ce qui contredit l'injectivité de f. □

Par ailleurs, si une fonction est monotone, on sait qu'elle ne peut être ≪ trop discontinue ≫.

Proposition 5.51. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Supposons f croissante et utilisons le théorème de la limite monotone (5.32). Pour tout intervalle fermé borné $[a, b]$, considérons, pour un entier $m > 0$

$$D_m = \left\{\xi \in [a, b] \mid \lim_{x\to\xi^+} f(x) - \lim_{x\to\xi^-} f(x) > 1/m\right\}.$$

Si $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une suite strictement croissante de n points de D_m, alors

$$\frac{n}{m} \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\lim_{x\to\xi_j^+} f(x) - \lim_{x\to\xi_j^-} f(x)\right) \leqslant f(b) - f(a),$$

car, en utilisant la propriété vue sur les limites et l'ordre et la croissance de f, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\lim_{x\to\xi_j^+} f(x) - \lim_{x\to\xi_j^-} f(x)\right) &= \lim_{x\to\xi_n^+} f(x) - \lim_{x\to\xi_1^-} f(x) + \sum_{2\leqslant j\leqslant n} \left(\lim_{x\to\xi_{j-1}^+} f(x) - \lim_{x\to\xi_j^-} f(x)\right) \\
&\le \lim_{x\to\xi_n^+} f(x) - \lim_{x\to\xi_1^-} f(x) \\
&\le f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

de sorte que $n \leqslant m(f(b) - f(a))$, donc D_m est nécessairement fini et le nombre de ses éléments n'excède pas $m(f(b) - f(a))$.
Par conséquent, $\mathrm{Discont}(f) \cap [a, b] = \bigcup_{m\geqslant 1} D_m$ est au plus dénombrable. Il en résulte donc que

$$\mathrm{Discont}(f) = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{Discont}(f) \cap [-n, n]$$

est aussi au plus dénombrable. □

On a en fait la caractérisation suivante de la continuité pour les fonctions strictement monotones sur un intervalle.

Proposition 5.52. *Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle $I = [a, b]$. La fonction f est continue sur I si et seulement si elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout c strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(\xi) = c$.*

On a vu que si f est continue, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque est fausse : ceci n'est pas vérifié en général pour des fonctions non strictement monotones. La fonction affine par morceaux sur $[0, 1[$ définie par $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$ est injective et respecte le théorème des valeurs intermédiaires, mais n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

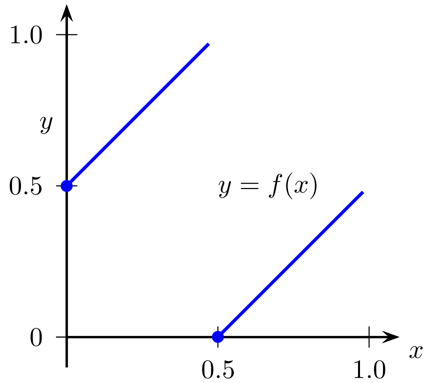


FIGURE 5.26 – Graphe d'une fonction injective et non strictement monotone, qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires

Démonstration. Supposons que f est strictement croissante et respecte la propriété des valeurs intermédiaires. D'après le théorème de la limite monotone (5.32), on a vu que f admet une limite à gauche et à droite en tout point $x_0 \in]a, b[$. Si f était discontinue en x_0, on aurait $\lim_{x_0^-} f(x) \neq \lim_{x_0^+} f(x)$, et donc par croissance de f, :

$$\forall x \in]a, b[, \begin{cases} f(x) \leq \lim_{x_0^-} f(x) & \text{si } x < x_0 \\ f(x) \geq \lim_{x_0^+} f(x) & \text{si } x > x_0 \\ \lim_{x_0^-} f(x) < \lim_{x_0^+} f(x) \end{cases}$$

ce qui contredit la propriété des valeurs intermédiaires pour $c \in]\lim_{x_0^-} f(x), \lim_{x_0^+} f(x)[\subset]f(a), f(b)[$. □

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 5.53. *Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ une fonction continue et bijective. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ existe et est aussi continue.*

Démonstration. On sait que f est strictement monotone (supposons f croissante), que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, et que f^{-1} est strictement croissante elle aussi. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Soit $u \in]a, b[$. Posons $f(u) = y$. Alors, on a : $y \in]c, d[$ et $f^{-1}(y) = u$, donc $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, et est bien continue. □

En utilisant le fait que tout intervalle peut s'écrire comme une réunion croissante de segments, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 5.54. *Soit $f\colon I \to J$ une fonction continue et bijective entre deux intervalles. Alors la fonction réciproque $f^{-1}\colon J \to I$ existe et est aussi continue.*

Exemple 5.55. C'est ainsi que l'on définit la fonction $\ln(x)$, à partir de la fonction e^x (ou réciproquement la fonction exp à partir de la fonction ln).

5.3.7 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et de trigonométrie hyperbolique

Appliquons le théorème précédent aux fonctions trigonométriques :

La fonction Arcsinus. La fonction sinus restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante et continue, et $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, qui à une valeur α du sinus comprise entre -1 et 1, associe l'unique angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = \alpha$.
Puisque la fonction sin est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction arcsin est impaire également.

La fonction Arccosinus. La fonction cosinus restreinte à l'intervalle $[0, \pi]$ est strictement décroissante et continue, et $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement décroissante et continue, notée $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$, qui à une valeur α du cosinus comprise entre -1 et 1, associe l'unique angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \alpha$.

La fonction Arctangente. La fonction tangente restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est strictement croissante et continue, et $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée $\arctan\colon]-\infty, +\infty[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui à une valeur réelle α de la tangente, associe l'unique angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = \alpha$.
Puisque la fonction tan est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction arctan est impaire également.

La fonction Argument sinus hyperbolique. La fonction sinus hyperbolique définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est strictement croissante et continue, et $\mathrm{sh}(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée $\mathrm{argsh}\colon]-\infty, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$, qui à une valeur réelle α du sinus hyperbolique associe l'unique réel θ tel que $\mathrm{sh}(\theta) = \alpha$.
Puisque la fonction sh est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction argsh est impaire également.

La fonction Argument cosinus hyperbolique. La fonction cosinus hyperbolique restreinte à l'intervalle $[0, +\infty[$ est strictement croissante et continue, et $\mathrm{ch}([0, +\infty[) = [1, +\infty[$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée $\mathrm{argch}\colon [1, +\infty[\to [0, +\infty[$, qui à une valeur $\alpha \geq 1$ du cosinus hyperbolique associe l'unique réel positif θ tel que $\mathrm{ch}(\theta) = \alpha$.

La fonction Argument tangente hyperbolique. La fonction tangente hyperbolique définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est strictement croissante et continue, et $\tanh(]-\infty, +\infty[) =]-1, 1[$. D'après le théorème précédent, on peut donc définir une fonction strictement croissante et continue, notée $\mathrm{argth}\colon]-1, 1[\to]-\infty, +\infty[$, qui à une valeur α comprise entre -1 et 1 de la tangente hyperbolique associe l'unique réel θ tel que $\tanh(\theta) = \alpha$.
Puisque la fonction tanh est impaire et définie sur un intervalle symétrique, on en déduit que la fonction argth est impaire également.

5.3.8 Prolongement par continuité

Définition 5.56. 1. Soit $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité (à droite) en a s'il existe une fonction continue $g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ telle que $g_{|]a,b[} = f$.

2. Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité (à gauche) en b s'il existe une fonction continue $g\colon]a,b]\to\mathbb{R}$ telle que $g_{|]a,b[}=f$.
3. Soit $f\colon]a,c[\cup]c,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est prolongeable par continuité en c s'il existe une fonction continue $g\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ telle que $g_{|]a,c[\cup]c,b[}=f$.

Proposition 5.57. *Une fonction f admet un prolongement continu en un point c (respectivement à gauche, respectivement à droite) si et seulement si f admet une limite finie au point c (respectivement à gauche, respectivement à droite). Dans ce cas, l'unique fonction continue g prolongeant f en c (respectivement à gauche, respectivement à droite) est la fonction définie en c par $g(c)=\lim_c f(x)$ (respectivement $g(c)=\lim_{c^+} f(x)$, respectivement $g(c)=\lim_{c^-} f(x)$) .*

Exemples 5.58.
La fonction $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

La fonction $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 (on verra pourquoi plus tard).

La fonction $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{|x|}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

La fonction de Cauchy $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

La fonction de Weierstrass $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$ est prolongeable par continuité en 0.

5.3.9 Continuité sur un segment

Voici deux propriétés importantes vérifiées par les fonctions continues sur un segment, c'est à dire un intervalle fermé et borné que nous admettrons.

Théorème 5.59. Principe du maximum *Soit $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe c et d deux nombres réel tels que $c\le d$ et $f([a,b])=[c,d]$. Cela signifie que f est bornée, et qu'elle admet un maximum et un minimum sur l'intervalle $[a,b]$.*

De plus f possède la propriété d'être *uniformément continue* sur le segment.

Définition 5.60. On dit qu'une fonction $f\colon I\to\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I est *u*niformément continue sur I si
$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall(x,y)\in I^2,|x-y|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Théorème 5.61. *Soit $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

5.4 Fonctions dérivables

Pour comprendre le comportement, local (au voisinage d'un point) ou global d'une fonction, une information importante est celle de la variation de la fonction sur un intervalle donné. Nous souhaitons par exemple comprendre si une fonction est localement ou globalement monotone, c'est à dire, si on reprend l'exemple d'une quantité dépendant du temps, que l'on souhaite savoir si cette quantité s'accroit ou décroit en fonction du temps.
Pour cela on s'intéresse naturellement au taux de variation de la quantité
$$T=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}.$$
Nous allons donner ce qui suit des méthodes pour calculer en pratique ce taux de variation, ou sa limite au voisinage d'un point.
Illustrons par un exemple concret de l'intérêt pratique de ce calcul : la police dispose de deux moyens de contrôler la vitesse des automobiles sur l'autoroute.

— Les radars tronçons permettent de calculer le temps qu'un véhicule met à parcourir la distance entre deux points distants de plusieurs kilomètres. On établit alors que la vitesse moyenne du véhicule sur ce tronçon est égale à :

$$V_{moy} = \frac{\text{Longueur du tronçon}}{\text{Temps de parcours}}$$

et apparait donc naturellement comme un taux de variation, et on peut la comparer à la limite de vitesse en vigueur sur le tronçon.

— Les radars instantanés : ils mesurent la vitesse ≪ instantanée ≫ de la voiture à l'instant où celle-ci passe devant le module automatique. Ce que l'on détermine ici c'est le taux de déplacement à un instant précis, c'est à dire la limite du taux d'accroissement de la position du véhicule.

5.4.1 Taux d'accroissement, tangente, dérivée d'une fonction en un point

Etant donnée une courbe dans le plan, et P un point de la courbe, on appelle *sécantes* passant par P les droites passant par P et un autre point Q de la courbe (la terminologie provient de ce que la droite coupe la courbe en au moins deux points). Lorsque le point Q se rapproche du point P, on peut se demander s'il existe une droite limite. Si une telle droite existe, on voit que l'angle qu'elle forme avec les sécantes tend vers 0. On appelle alors tangente à la courbe au point P cette droite. Géométriquement, on peut y penser comme à la droite qui passe par P et forme avec la courbe un angle qui tend vers 0 lorsque l'on se rapproche du point P.
On peut interpréter cette définition en disant que localement, au point P, la tangente représente la meilleure approximation affine (par une droite) possible de la courbe.

Passons à présent à l'interprétation analytique de cette situation géométrique, dans le cas où la courbe est le graphe d'une fonction f. Appelons $(x_P, f(x_P))$ les coordonnées du point P. Un autre point Q sur la courbe a pour coordonnées $(x_Q, f(x_Q))$ et la sécante passant par P et Q est alors la droite d'équation

$$y = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}(x - x_P) + f(x_P).$$

La pente de cette droite est ainsi exactement donnée par $m_{(P,Q)} = \dfrac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$. La question de savoir si la courbe admet une tangente au point P est donc équivalente, puisque cette droite, si elle existe, passe par P, à la connaissance de sa pente, c'est à dire que la question posée est celle de l'existence de la limite de la pente des sécantes lorsque Q tend vers P.
Ainsi, la courbe $y = f(x)$ admet une tangente au point Q si et seulement si

$$\lim_{Q \to P} m_{(P,Q)} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} \text{ existe.}$$

Ceci nous conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 5.62. (Cauchy)
Soit I un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si la limite :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. La valeur de cette limite est la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.
Si la fonction f est dérivable en chaque point de I, on dit que f est dérivable sur I. Si de plus $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f est continûment dérivable ou de classe C^1.

Nous présentons maintenant deux formulations pratiques équivalentes de la dérivabilité d'une fonction.

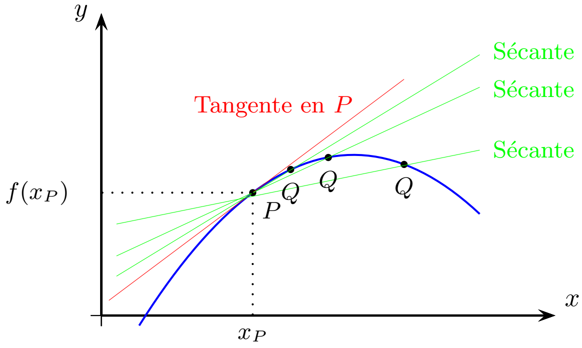


FIGURE 5.27 – La tangente est la droite limite des sécantes

Définition 5.63. Formulation de Weierstrass :
La fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un nombre $f'(x_0)$ et une fonction $r\colon I \to \mathbb{R}$, continue en x_0 et satisfaisant $r(x_0) = 0$, tels que :

$$(\star) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

La formule $(\star)$ a l'avantage de ne pas contenir de limite (remplacée par la condition de continuité de r) et met en évidence l'équation de la tangente au graphe de la courbe $y = f(x)$ au point x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Une formulation alternative est la suivante.

Définition 5.64. La fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si, et seulement si, il existe une fonction $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ continue en x_0 telle que

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

La valeur $\varphi(x_0)$ est la dérivée $f'(x_0)$ de f en x_0.

Exemples 5.65.

Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont manifestement dérivables. En écrivant, $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0)$, on constate (en utilisant la formulation de Weierstrass) que $x \mapsto x^2$ est dérivable.

La dérivabilité est une propriété *locale*.

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable en $x_0 > 0$, et sa dérivée vaut $f'(x_0) = 1$. De même, f est dérivable en $x_0 < 0$ et $f'(x_0) = -1$. Par contre, f n'est pas dérivable en 0, car $f(x)/x = |x|/x$ n'a pas de limite en 0.

La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou entier} \\ \frac{1}{q^2} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ est une fraction irréductible} \end{cases}$$

est discontinue en chaque point rationnel x_0, non entier. Toutefois, f est dérivable en $x_0 = 0$. En effet, on a aisément $|f(x)| \leqslant x^2$ pour tout x, ce qui implique que $\lim_{x\to 0} f(x)/x$ existe et vaut 0.

Remarquons que la dérivabilité **implique** la continuité. Il suffit de considérer la formulation de Weierstrass, par exemple.

Proposition 5.66. *Si une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

La réciproque est évidemment fausse : la fonction valeur absolue est continue en 0, mais pas dérivable en 0.

5.4.2 Dérivée à gauche, à droite

De manière similaire à ce que l'on a vu pour la continuité, on peut définir la dérivée à gauche ou à droite en un point

Définition 5.67.
1. Soit f une fonction définie en x_0, et au voisinage du « point » x_0^+. On dit que la fonction f est *dérivable à droite au point* x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0.
2. Soit f une fonction définie en x_0, et au voisinage du « point » x_0^-. On dit que la fonction f est *dérivable à gauche au point* x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0.

La relation entre limite, limite à gauche et limite à droite en un point a nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 5.68. *Une fonction définie au point x_0 et au voisinage du point x_0 est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0, et que ses dérivées à gauche et à droite sont égales.*

Exemples 5.69.

La fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0, mais pas dérivable en 0.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable à gauche en 0 mais n'est pas dérivable à droite en 0.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et dérivable en 0.

5.4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

De l'action des opérations vues sur la continuité et les limites, on déduit facilement les propositions suivantes :

Proposition 5.70. *Soit f une fonction définie au point x_0 et au voisinage du point x_0 et dérivable au point x_0 . Soit g une fonction définie au point $f(x_0)$ et au voisinage du point $f(x_0)$ et dérivable au point $f(x_0)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable au point x_0, et on a $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.*

Démonstration. Utilisons la formulation de la dérivabilité présentée ci-dessus :

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0), \quad \varphi(x_0) = f'(x_0),$$

$$g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y-y_0), \quad \psi(y_0) = g'(y_0).$$

En remplaçant dans la deuxième équation $y-y_0$ par l'expression $f(x)-f(x_0)$ de la première, on obtient :

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))\varphi(x)(x-x_0).$$

La fonction $x \mapsto \psi(f(x))\varphi(x)$ est continue en x_0 et sa valeur en x_0 est égale à $g'(f(x_0))f'(x_0)$.

□

Proposition 5.71. *Soient f et g deux fonctions définies au point x_0 et au voisinage du point a (respectivement x_0^+, respectivement x_0^-), et dérivables au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche). Alors on a :*

1. *si A est une partie du domaine de définition de f qui contient x_0 et un voisinage du point x_0 (respectivement x_0^+, respectivement x_0^-), alors la restriction de f à A, $f_{|A}$ est dérivable au point x_0 (respectivement à droite, respectivement à gauche) et $f'_{|A}(x_0) = f'(x_0)$;*

2. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, la fonction* λf *est dérivable au point* x_0 *(respectivement à droite, respectivement à gauche) et* $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ *;*
3. *la fonction* $f + g$ *est dérivable au point* x_0 *(respectivement à droite, respectivement à gauche) et* $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ *;*
4. *la fonction* $f \times g$ *est dérivable au point* x_0 *(respectivement à droite, respectivement à gauche) et* $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$ *;*
5. *si* $g(x_0) \neq 0$*, la fonction* $\dfrac{f}{g}$ *est dérivable au point* x_0 *(respectivement à droite, respectivement à gauche) et* $(\dfrac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Démonstration. Démontrons les deux derniers points.

— En utilisant la formulation de Weierstrass, on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x)(x - x_0) \text{ et } g(x) = g(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_2(x)(x - x_0)$$

avec r_1 et r_2 des fonctions continues au voisinage de x_0 et telles que $r_1(x_0) = r_2(x_0) = 0$. En multipliant les deux formules, on obtient :

$$(f \times g)(x) = f(x_0)g(x_0) + [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)](x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

avec

$$r(x) = r_1(x)[g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)] + r_2(x)(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) + r_1(x)r_2(x)(x - x_0)$$

qui est une fonction continue et qui s'annule en x_0.
On en déduit que $f \times g$ est dérivable en x_0 , de dérivée $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$.

— Commençons par calculer la dérivée de la fonction $\iota(x) = \frac{1}{x}$ en un point $x_0 \neq 0$. On peut écrire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{x - x_0}{x x_0^2}(x - x_0)$$

et on en déduit (formulation de Weierstrass) que $\iota(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$ et de dérivée $\iota'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.
Calculons à présent la dérivée de la fonction $h = \frac{1}{g}$. C'est la dérivée de la fonction composée $\iota \circ g$ où $\iota(x) = \frac{1}{x}$. Par le théorème sur la dérivée d'une composée, on sait que si $g(x_0) \neq 0$ la fonction $h = \iota \circ g$ est dérivable en x_0, de dérivée $h'(x_0) = \iota'(g(x_0)) \times g'(x_0)$. En utilisant le fait que $\iota'(x) = -\frac{1}{x^2}$, on obtient $h'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.
Enfin, en écrivant $\frac{f}{g} = f \times h$ et utilisant la formule pour la dérivée du produit de deux fonctions, on obtient bien que si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable au point x_0 et $(\dfrac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

□

5.4.4 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 5.72. *Soient* I *et* J *deux intervalles et* $f : I \to J$ *une fonction continue, bijective et dérivable en* $x_0 \in I$*. Supposons de plus que* $f'(x_0) \neq 0$*. Alors, la fonction inverse* $f^{-1} : J \to I$ *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$ *et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration. Si $y \in J$, on sait qu'il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et on sait que, pour toute fonction T définie sur un voisinage épointé de y_0 dans J, $\lim_{y \to y_0} T(y) = \lim_{x \to x_0} T(f(x))$, par bijectivité et continuité de f.
Alors, on a :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

5.4.5 Dérivées des fonctions usuelles

1. Les fonctions affines et polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car la dérivée d'une fonction constante est nulle, et celle de la fonction identité ($x \mapsto x$) est constante égale à 1. En utilisant les propriétés sur le produit, la somme et la multiplication par un scalaire de fonctions dérivables, on en déduit que toute fonction polynomiale $P(x)$ est dérivable et

$$\text{Si } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ alors } P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

2. Les fonctions fractions rationnelles sont dérivables en tout point de leur domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables, et on a

$$\text{Si } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ alors } f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}.$$

3. Les fonctions en escalier ou affines par morceaux ne sont en général pas continues, donc pas dérivables aux points de raccords.
4. Les fonctions exponentielles et logarithmes sont dérivables en tout point de leurs domaines de définition, par construction (admise), et on a

$$\text{Si } f(x) = e^{\alpha x} \text{ et } g(x) = \ln(x) \text{ alors } f'(x) = \alpha e^{\alpha x} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{x}$$

5. Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, et on a

$$\text{Si } f(x) = x^\alpha \text{ alors } f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

6. Les fonctions trigonométriques sont dérivables sur leur domaine de définition et on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ , } \cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. (a) Commençons par montrer la dérivabilité de la fonction sinus en 0. On a vu dans le paragraphe 5.3.4 que les fonctions sinus et cosinus étaient continues en 0. Plus précisément, on avait vu que pour $\theta \in]0, \pi/2[$, θ représente, par définition des radians, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ du cercle trigonométrique (de rayon 1) déterminée par deux segments $[OA]$ et $[OB]$ formant au centre du cercle un angle θ (voir figure 5.28). On obtient dans ce cas l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sin(\theta) = BC \leq AB \leq \left|\widehat{AB}\right| = \theta.$$

Introduisons les points D, situé à l'intersection de la droite (OB) et de la perpendiculaire à la droite (OA) issue de A, et E situé à l'intersection de la droite (OD) et de la perpendiculaire à la droite (OB) issue de B. D'après le théorème de Pythagore, appliqué dans le triangle rectangle OBE, on voit que l'hypoténuse $[OE]$ est plus grande que la longueur du segment $[OB]$. La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est donc inférieure à la somme des longueurs $AE + BE$. Par ailleurs le triangle EBD étant rectangle en B, on sait que $BE \leq ED$. On obtient donc :

$$\left|\widehat{AB}\right| \leq AE + BE \leq AE + ED = AD = \tan(\theta),$$

cette dernière égalité étant due au théorème de Thalès. On a donc finalement obtenu, pour $\theta \in]0, \pi/2[$,

$$0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta).$$

On en déduit, en inversant cette inégalité, et en la multipliant par le nombre positif $\sin(\theta)$, pour $\theta \in]0, \pi/2[$:

$$0 < \cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1.$$

Nous pouvons à présent utiliser la continuité de cosinus en 0 et le théorème des gendarmes pour montrer que $\lim_{0^+} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos(0) = 1$. La fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ étant paire, ceci implique $\lim_{0} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos(0) = 1$.

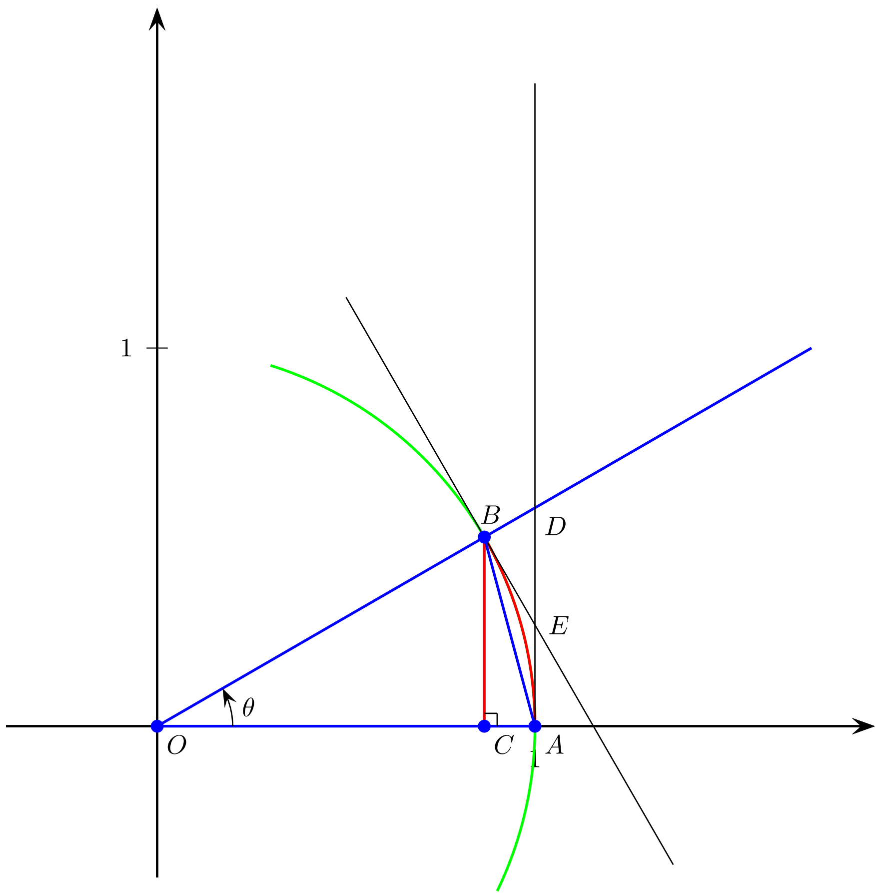


FIGURE 5.28 – Continuité de la fonction sinus en 0

(b) On déduit de ce qui précède la dérivabilité de la fonction cosinus en 0. En effet, si on utilise la formule $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$, on a :

$$\frac{\cos(\theta) - 1}{\theta} = -2\frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\theta} = -\sin(\frac{\theta}{2}) \times \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta}{2}}.$$

Dans le dernier terme, on sait par ce qui précède que $\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta}{2}}$ tend vers 1 lorsque θ tend vers 0 et par ailleurs $\lim_{0} -\sin(\dfrac{\theta}{2}) = 0$. Ce qui montre que la fonction cosinus est dérivable en 0, de dérivée nulle.

(c) Pour montrer la dérivabilité de sinus et cosinus ailleurs qu'en 0, on utilise les règles d'addition des angles : $\sin(x_0+h) = \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)$. Ainsi, on a :

$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h}$$

et on obtient donc, lorsque h tend vers 0, $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)$.
De même, on obtient $\lim\limits_{0} \dfrac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} = -\sin(x_0)$.

(d) Pour la dérivabilité de la fonction tangente, on utilise les propriétés sur les quotients de fonctions dérivables.

□

7. Les fonctions de trigonométrie hyperbolique sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme ou quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)\ ,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \text{ et } \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x).$$

8. les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, ou de trigonométrie hyperbolique sont dérivables en tout point de leur intervalle de définition, sauf aux bornes de l'intervalle, et on a :

$$\begin{array}{lll} \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \end{array}$$

5.4.6 Extrema, TAF, Rolle

Comme indiqué dans l'introduction, la dérivée en un point peut donner une idée du comportement local de la fonction autour de ce point. On a en particulier le théorème suivant.

Théorème 5.73. *Si $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in]a,b[$ et $f'(x_0) > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$f(x) > f(x_0) \text{ pour tout } x \text{ tel que } x_0 < x < x_0 + \delta,$$

$$f(x) < f(x_0) \text{ pour tout } x \text{ tel que } x_0 - \delta < x < x_0.$$

En particulier si la fonction atteint un maximum local (ou un minimum local) en x_0, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. La fonction $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ étant dérivable en x_0, il existe une fonction $\varphi\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ continue en x_0 telle que

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

Si $f'(x_0) > 0$, alors $\varphi(x_0) > 0$; et par continuité de φ, il existe donc $\delta > 0$ pour lequel $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ et les inégalités de l'énoncé suivent sans difficultés.
Si f atteint un maximum en x_0, alors nous avons $f(x) \leqslant f(x_0)$ de part et d'autre de x_0. Ceci n'est possible que si $f'(x_0) = 0$ d'après ce que l'on vient d'établir. □

On rappelle que si une fonction est continue sur un segment, elle vérifie le principe du maximum : elle est bornée et atteint ses bornes. En combinant ceci avec le théorème précédent, on en déduit le théorème de Rolle.

Théorème 5.74. Théorème de Rolle *Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue sur $[a,b]$, d'après le principe du maximum, f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$: plus précisément, il existe $u, U \in [a,b]$ tels que

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(U) \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

Deux cas sont alors possibles :

— Si $f(u) = f(U)$, alors f est constante et par suite sa dérivée est identiquement nulle ;
— Si $f(u) < f(U)$, alors une des deux valeurs au moins est différente de $f(a) = f(b)$. Sans perte de généralité supposons qu'il s'agisse de $f(U)$, alors $f'(U) = 0$ d'après le théorème traitant des extrema ci-dessus.

□

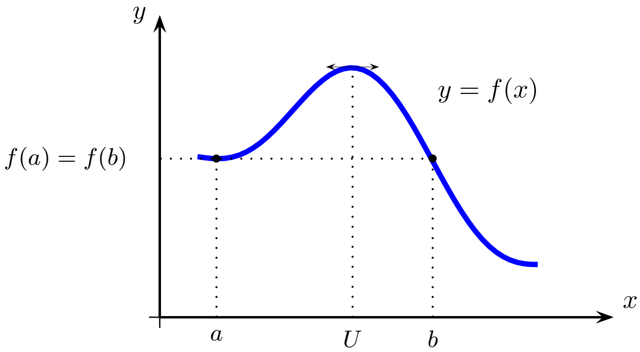


FIGURE 5.29 – Illustration du théorème de Rolle

Du théorème de Rolle, on déduit le théorème des accroissements finis, qui permet d'utiliser les informations sur la dérivée pour donner des informations globales sur le comportement de la fonction f.

Théorème 5.75. Théorème des accroissements finis (Lagrange) *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Démonstration. L'idée de la démonstration est de retrancher à $f(x)$ l'équation de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, qui a pour pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, puis d'appliquer le théorème de Rolle.
Définissons donc

$$\varphi\colon x \mapsto f(x) - \left(f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

Observons que φ est dérivable et que

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

De plus

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$, autrement dit ξ vérifie :

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Remarque 5.76. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont ***faux*** pour des fonctions à valeurs complexes, ou plus généralement à valeurs dans un espace vectoriel.
Par exemple, la fonction $f\colon [0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ est continue sur $[0, 1]$ (son image $f([0, 1]) = \mathbb{S}^1$ est le cercle unité), dérivable sur $]0, 1[$ (et sa dérivée est $f'(t) = 2i\pi e^{2i\pi t}$) et vérifie $f(0) = 1 = f(1)$. Toutefois sa dérivée $f'(t) = 2i\pi e^{2i\pi t}$ *ne s'annule pas* sur $[0, 1]$.

Les assertions suivantes sont des conséquences immédiates du théorème des accroissements finis.

Corollaire 5.77. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Si $f'(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors f est constante.*

Corollaire 5.78. *Soient f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, dérivables sur $]a,b[$. Si $f'(\xi) = g'(\xi)$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors $f(x) = g(x) + C$, pour tout $x \in [a,b]$, avec C constante.*

Corollaire 5.79. *Inégalité des accroissements finis*
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Si $|f'(\xi)| \leqslant M$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors

$$|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'| \text{ pour tous } x, x' \in [a,b].$$

5.4.7 Dérivée et monotonie, tableau de variations

Le théorème des accroissements finis entraîne également, de manière immédiate, le corollaire suivant, qui permet de relier la monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée.

Corollaire 5.80. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors on a*

- *Si $f'(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors f est strictement croissante.*
- *Si $f'(\xi) < 0$ pour tout $\xi \in]a,b[$, alors f est strictement décroissante.*

Ceci permet l'utilisation du tableau de variations dans l'étude d'une fonction définie sur un intervalle. Le tableau de variations d'une fonction dérivable est un tableau construit de la manière suivante.

- Sur la première ligne, on note dans la première colonne la variable dont dépend la fonction.
  On indique ensuite le domaine de définition en faisant apparaître autant de colonnes qu'il y a d'intervalles dans le domaine de définition de la fonction, en écrivant les intervalles dans l'ordre croissant de leur bornes.
- Sur la deuxième ligne, on indique le signe de la fonction $f'(x)$ dans chaque colonne. On divise les colonnes précédentes en autant de sous-colonnes qu'il y a de changements de signes de la dérivée dans chaque intervalle, et on indique le signe de la dérivée dans chacune de ces sous-colonnes (et on indique 0 aux endroits où f' s'annule)
- Sur la troisième ligne : on porte dans chaque colonne une flèche indiquant le sens de variation de la fonction f une flèche orientée vers le haut indique que le signe de la dérivée est positif (et donc que la fonction est croissante) sur l'intervalle considéré, une flèche orientée vers le bas indique que le signe de la dérivée est négatif (et donc que la fonction est décroissante) sur l'intervalle considéré.
- On complète le tableau de variations en faisant apparaître sur le trait de séparation entre chaque colonne la valeur (si elle est définie) ou la limite de la fonction en la borne de l'intervalle considéré.

Le tableau de variations est un outil précieux pour aider à représenter graphiquement l'allure du graphe d'une fonction.

Exemple 5.81. Faisons l'étude de la fonction f définie par $f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

- Domaine de définition.
  La fonction ln n'est pas définie pour $x \leq 0$,et la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0, le domaine de définition de la fonction f est donc, a priori, $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. Par les règles de composition, de multiplication, d'addition et de division sur les fonctions dérivables, on sait que la fonction f est dérivable (et donc continue) sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.
- Etude de la limite au voisinage du point 0.
  Par les règles de composition et de multiplication de fonctions dérivables, on sait que la fonction $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $g'(x) = \ln(x+1) + 1$. Elle l'est en particulier en 0 et sa dérivée en 0 vaut $g'(0) = 1$. Or, par définition, la dérivée de cette fonction en 0 est la limite en 0 du quotient $\frac{g(x)-g(0)}{x}$. Puisque $g(0) = 0$, on obtient que $1 = g'(0) = \lim\limits_{0} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{0} f(x)$.
  Ceci montre que la fonction f est prolongeable par continuité, par la valeur 1, au point $x = 0$.

— Etude de la limite au voisinage du point -1.
Posons $u = x+1$. Etudier la limite de f en $x = -1^+$ revient à étudier la limite de $h(u) = \frac{u\ln(u)}{u-1}$ lorsque u tend vers 0^+. Le dénominateur tend vers -1, tandis que le numérateur $u\ln(u)$ tend vers 0 en vertu des règles de croissance comparée. On obtient donc que $\lim\limits_{-1^+} f(x) = 0$. Ceci montre que la fonction f est prolongeable par continuité, par la valeur 0, au point $x = -1$.

— Etude de la dérivée et de son signe
On sait que sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, la fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \frac{-(x+1)\ln(x+1) + x(\ln(x+1)+1)}{x^2} = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}.$$

Appelons n la fonction $n(x) = x - \ln(x+1)$. La fonction $f'(x)$ est du même signe que $n(x)$. Pour connaitre le signe de cette fonction, nous allons la dériver (elle est dérivable sur $]-1,+\infty[$) . On a $n'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Dressons le tableau de variation de la fonction $n(x)$. Etudions le signe de $n'(x)$.

— Si $-1 < x < 0$, alors $n'(x) < 0$.

— Si $x > 0$, alors $n'(x) > 0$.

Etudions les limites et les valeurs particulières de $n(x)$.

— Si $x \to -1^+$ alors $n(x) \to +\infty$ car $\lim\limits_{0^+} \ln(u) = -\infty$.

— Si $x \to +\infty$ alors $n(x) \to +\infty$ car $n(x) = x(1 - \frac{\ln(x+1)}{x})$ et que par les règles de croissance comparée, on a $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

— Si $x = 0$, alors $n(0) = 0$.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$n'(x)$		$-$	0	$+$	
$n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

— Tableau de variation de la fonction f.
On déduit de ce tableau que la fonction $f'(x)$ est toujours positive ou nulle sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, ce qui permet de dire que f est croissante sur cet intervalle.
Etudions la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$ $f(x) = (1+\frac{1}{x})\ln(x+1)$ donc à l'aide des règles sur les produits de limites, on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$. Pour compléter le tableau de variation, on peut s'interroger sur la dérivabilité de la fonction f au point 0. Pour ce faire, il faut étudier la limite suivante : $\lim\limits_{0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, soit encore $\lim\limits_{0} \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x^2}$. Pour cela, nous utiliserons le fait que la fonction $\ln(x+1) - x$ est dérivable en 0 et dérivée nulle. Ainsi, on sait que $\ln(x+1) - x = xr(x)$ avec $r(x)$ une fonction continue qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Appelons $g(x)$ la fonction $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2}$. On sait que $g(x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et de dérivée $\ln(x+1) - x$. Utilisons l'inégalité des accroissements finis, appliquée à cette fonction g. Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| \leq \delta$, alors $|r(x)| < \varepsilon$. On a donc, pour tout $x \in]-\delta,\delta[$ que

$$\left|g'(x)\right| \leq \varepsilon|x|.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0,x]$, on obtient

$$|g(x) - g(0)| = \left|(x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2}\right| \leq \varepsilon x^2,$$

ce qui montre que la fonction f est dérivable au point 0, de dérivée $\frac{1}{2}$.

On a finalement le tableau de variations suivant.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5.4.8 Applications de la dérivée : recherche d'extrema, calcul de limites

La dérivée peut-être naturellement utilisée pour la recherche des extrema d'une fonction dérivable. On appelle *points critiques* d'une fonction dérivable les points en lesquels la dérivée de la fonction s'annule. On a vu précédemment le théorème :

Théorème 5.82. (Fermat) *Si une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I admet un extremum local en un point $x_0 \in I$, alors x_0 est un point critique de f, c'est à dire que $f'(x_0) = 0$.*

Ainsi le calcul du tableau de variations d'une fonction permet de déterminer ses valeurs maximales et minimales, et les points où ces valeurs sont atteintes.

Une autre application du calcul de dérivées est de permettre le calcul de limites se présentant sous forme indéterminée comme un quotient quand on utilise les règles de calcul des limites : en interprétant la quantité à calculer comme un taux de variations, on en déduit que la limite de cette quantité est donnée par la dérivée d'une certaine fonction en un point.

Exemple 5.83. On souhaite calculer la limite de la fonction $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$ en 0. En utilisant les règles sur les limites on voit que le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0 lorsque x tend vers 0, ce qui indique que la limite du quotient ne peut pas se déduire simplement des limites du numérateur et du dénominateur : il s'agit d'une forme indéterminée.
En notant $f(x) = \sqrt[3]{1+2x}$ la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, on voit que $g(x)$ s'écrit comme $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et apparait donc naturellement comme le taux de variation de la fonction f au point 0. Or, comme composée de la fonction puissance $h\colon u \mapsto u^{\frac{1}{3}}$ et de la fonction affine $u\colon x \mapsto 1+2x$, on sait que la fonction $f = h \circ u$ est dérivable en 0 et de dérivée

$$f'(0) = h'(u(0)) \times u'(0) = \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} \times 2 = \frac{2}{3} = \lim_0 g(x).$$

On peut aller plus loin et utiliser les théorèmes suivants :

Théorème 5.84. (Bernoulli - L'Hospital)
Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Si

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 0 \textit{ et } \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$$

et si

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \textit{ existe et est fini,}$$

alors

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \textit{ existe et } \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration. L'existence de la limite $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se traduit de la façon suivante. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon \text{ pour tout } \xi \in]b-\alpha, b[.$$

Appliquons alors le théorème des accroissements finis : pour $(u, v) \in]b-\alpha, b[^2$ il existe ξ entre u et v tel que

$$\left|\frac{f(u)-f(v)}{g(u)-g(v)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

Il n'y a plus qu'à faire tendre v vers b (à gauche) et puisque $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$, il vient :

$$\left|\frac{f(u)}{g(u)} - \ell\right| < \varepsilon \text{ pour tout } u \in]b-\alpha, b[.$$

□

Théorème 5.85. (Bernoulli - L'Hospital)
Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Si

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$$

et si

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et est fini,}$$

alors

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et } \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 5.86. Les théorèmes sont évidemment vrais pour la limite à droite quand x tend vers a. Les théorèmes précédents restent vrais pour $b = +\infty$ en modifiant un peu la démonstration. Les conclusions sont également vraies si la limite $\lim_{x\to b^-} f'(x)/g'(x)$ est infinie.

Exemples 5.87.
Considérons le quotient $x \mapsto \frac{\sin x}{x^a}$ pour $a > 0$ lorsque x tend vers 0^+ nous avons une forme indéterminée, mais il vient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{a x^{a-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1 \\ 0 & \text{si} \quad a < 1 \end{cases}$$

Pour $a > 0$, considérons le quotient $x \mapsto \frac{\ln x}{x^a}$ lorsque x tend vers l'infini nous avons une forme indéterminée, mais il vient :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{a x^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$

Pour $a > 0$, considérons le quotient $x \mapsto \frac{e^{ax}}{x^n}$ lorsque x tend vers l'infini nous avons une forme indéterminée, mais il vient en appliquant de façon itérée la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a e^{ax}}{n x^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{a^n e^{ax}}{n!} = \infty.$$

5.5 Fonctions exponentielles

Une *équation différentielle* du premier ordre est une équation de la forme

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ pour } x \in I$$

avec f une fonction de deux variables réelles et I un intervalle dans $\mathbb{R}$.
L'inconnue dans cette équation est la fonction dérivable y dont les dérivées vérifient en tout point $x \in I$ l'équation précédente. Sous des hypothèses très larges sur la fonction f, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de caractériser l'existence et l'unicité des fonctions y solutions d'une telle équation.
Un cas très particulier de ce type d'équations est le cas des équations linéaires homogènes du premier ordre. Cela signifie simplement que la fonction f est de la forme $f(x, y(x)) = a(x)y(x)$ avec a une fonction

continue en x.
On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation $y'(x) = \alpha y(x)$ lorsque α est une constante réelle et x parcourt $\mathbb{R}$.
Un cas très particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe au moins (en fait exactement) une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation $y'(x) = \alpha y(x)$ et telle que $y(0) = \gamma$, où γ est une valeur réelle arbitraire.
La fonction exponentielle (de base e) est précisément définie comme « la » solution de l'équation $y' = y$ telle que $y(0) = 1$. Nous admettrons dans la suite l'existence de cette fonction, que l'on notera $\exp(x)$.
Remarque : Une définition alternative de la fonction exponentielle peut être donnée de la manière suivante : Pour tout nombre réel (ou complexe) x, on peut montrer que la suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge. On définit alors $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ comme la limite de cette suite. On peut montrer dans ce cas que $\exp(0) = 1$ et que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable et solution de $y' = y$. Cela fournit un procédé concret de construction de la fonction exponentielle.

Propriétés de base de la fonction exponentielle.

(1) Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, α un nombre réel, et g la fonction définie par $g(x) = f(\alpha x)$. Montrer que g est dérivable et que $g'(x) = \alpha f'(\alpha x)$.

(2) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.
   (a) Montrer que h est dérivable, calculer sa dérivée, et montrer que h est une fonction constante.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
   (c) Montrer que la fonction exponentielle est une fonction strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Unicité de la fonction exponentielle.

(3) On veut montrer l'unicité de la fonction exponentielle. Supposons que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation $y' = y$ et telle que $f(0) = 1$. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times \exp(-x)$. Montrer que h est dérivable et constante et égale à 1. En déduire que nécessairement, on a $f = \exp$

(4) On veut montrer que pour tous nombres réels α et β on a $\exp(\alpha + \beta) = \exp(\alpha)\exp(\beta)$. On considère pour cela la fonction $u(x) = \exp(\alpha + x)\exp(-\alpha)$.
   (a) Montrer que cette fonction est dérivable et solution de $y' = y$.
   (b) Calculer $u(0)$ et en déduire le résultat.

Calcul des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

(5) (a) Montrer que le nombre $e = \exp(1)$ vérifie $e > 1$.
   (b) Montrer que la suite e^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que la fonction exp n'est pas bornée, puis que $\lim\limits_{+\infty} \exp(x) = +\infty$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \exp(x) = 0^+$.
   (e) Dresser le tableau de variations de la fonction exp.

Fonction réciproque.

(6) (a) Montrer qu'il existe une unique fonction, notée $\ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $(\ln \circ \exp)(x) = x$ et pour tout $t > 0$, on ait $(\exp \circ \ln)(t) = t$.
   (b) Montrer que la fonction ln est continue et strictement croissante.
   (c) Montrer que la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (d) Calculer $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

(e) Montrer que pour tous $A > 0$ et $B > 0$, on a $\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$.

(f) En déduire que pour tout $t > 0$, on a $\ln(\frac{1}{t}) = -\ln(t)$.

(g) Calculer $\lim_{0^+} \ln(t)$ et $\lim_{+\infty} \ln(t)$.

(h) Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

Fonctions puissance.

(7) On définit, pour tout nombre réel α, la fonction $f_\alpha \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x))$.

(a) Montrer que pour tout α la fonction f_α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

(b) Déterminer le tableau de variations de f_α en fonction du signe de α.

(c) Montrer que si $\alpha \neq 0$, la fonction f_α est bijective et calculer sa bijection réciproque.

(d) Montrer que si $\alpha = n$ est un entier positif ou nul, la fonction f_n peut se prolonger par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

(e) Montrer que si $\alpha = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel, on a, pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = \sqrt[q]{x^p}$.

(f) Montrer que si x est fixé, on a $\lim_{\alpha \to \alpha_0} f_\alpha(x) = f_{\alpha_0}(x)$.

On notera dorénavant $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Croissances comparées.

(8) Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On souhaite comprendre le comportement de $g_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{\exp(\alpha x)}{x^\beta}$ au voisinage de $+\infty$.

(a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors $\lim_{+\infty} g_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$.

On supposera désormais que $\beta > 0$, et on s'intéresse à la fonction
$g(x) = g_{-1,-1}(x) = x \exp(-x)$.

(b) Calculer $g'(x)$ et montrer que si $x > 1$, alors $g'(x) < 0$.

(c) En déduire que sur $]1, +\infty[$, g est décroissante et strictement positive.

(d) Montrer que g admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

(e) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(2x)}{g(x)} = 0$ et en déduire que $\ell = 0$.

(f) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} g_{1,1}(x) = +\infty$.

(g) En posant $t = \alpha x^\beta$, exprimer $g_{\alpha,\beta}(x)$ en fonction de $g_{1,1}(t)$.

(h) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} g_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$.

(9) En posant $u = \ln(x)$, déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta}$ pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

(10) A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln(x))^\beta = 0.$$

Equations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

(11) Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = ay(x)$ est l'ensemble

$$S_\alpha = \{x \mapsto \lambda \exp(\alpha x) | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

5.6 Exercices

Questions de cours.

(a) Donner les définitions de fonction paire, fonction impaire, fonction périodique.

(b) Donner la définition de maximum local d'une fonction.

(c) Donner la définition de maximum global d'une fonction sur un intervalle.

(d) Enoncer le théorème sur la bijectivité d'une application monotone.

(e) Expliquer comment le graphe de la réciproque f^{-1} d'une fonction bijective se construit à partir du graphe de la fonction f.

(f) Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et en donner une description graphique.

(g) Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

(h) Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et en donner une description graphique.

(i) Soit f une fonction définie dans un voisinage à gauche d'un point $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell^+$ et en donner une description graphique.

(j) Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

(k) Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de limite, finie ou infinie, en 0.

(l) Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$. Expliciter les cas pour lesquels $\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et lister les cas dans lesquels il s'agit d'une forme indéterminée. Faire de même avec $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$.

(m) Enoncer les deux théorèmes sur les compositions de limites en les illustrant par des exemples.

(n) Enoncer un théorème sur la limite d'une fonction strictement monotone sur un intervalle.

(o) Enoncer le ≪ théorème des gendarmes ≫.

(p) Enoncer le théorème sur les croissances comparées.

Exercice 5.1. Déterminer le domaine de définition, discuter de la parité de la fonction f dans les exemples suivants.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$,

(b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$,

(c) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(e) $f(x) = x - |x|$,

(f) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,

(g) $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$,

(h) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$,

(i) $f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$,

(j) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 5.2. On vous offre un emploi en CDD d'un mois. A la signature du contrat, vous avez le choix entre deux formules pour être payé(e) :

(a) Recevoir 1 million d'euros à la fin du mois.

(b) Recevoir 1 centime le premier jour, et chaque jour, le double du salaire de la veille.

Laquelle choisissez vous ?

Exercice 5.3. Représentez graphiquement, dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

(a) $\lim_{0^-} f(x) = -1$, $\lim_{0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.

(b) $\lim_{0^-} f(x) = 2^+$, $\lim_{0^+} f(x) = 0^-$, $\lim_{4^-} f(x) = 3$, $\lim_{4^+} f(x) = +\infty$, $f(5) = 1$, $f(0) = 2$.

Exercice 5.4. Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

(a) $\operatorname{ch}(\alpha+\beta) = \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) + \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta)$,

(b) $\operatorname{sh}(\alpha+\beta) = \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) + \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta)$,

(c) $\operatorname{th}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{th}(\alpha)+\operatorname{th}(\beta)}{1+\operatorname{th}(\alpha)\operatorname{th}(\beta)}$,

(d) $\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha-\beta)$,

(e) $\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha-\beta)$,

(f) $\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\alpha-\beta)$,

(g) $\operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$,

(h) $\operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})$,

(i) $\operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$,

(j) $\operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$.

Exercice 5.5. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x\to 0} x^2 - 2x$,

(b) $\lim_{x\to 1} x^2 - 4x + 3$,

(c) $\lim_{x\to 2} x^2 - 2x$,

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-3}$,

(e) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1}$,

(f) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3}$,

(g) $\lim_{x\to +\infty} 1 + x + \ln x$,

(h) $\lim_{x\to +\infty} x^4 e^x \ln^2 x$,

(i) $\lim_{x\to +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$,

(j) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^4-1}$,

(k) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(l) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$,

(m) $\lim_{x\to 1} \cos\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$,

(n) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1+\tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}$,

(o) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} + x}{\sin x}$,

(q) $\lim_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$,

(r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(s) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$,

(t) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$,

(u) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$,

(v) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x}{x-1}$,

Exercice 5.6. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 \sin x}{x^2+1}$,

(b) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{3x-2}{\sqrt[3]{x}}\right)$,

(c) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-x}{x+2}}$,

(d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{\ln x - 1}$,

(e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(xe^x)}{x}$,

(f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x - 2\ln x}{x + \ln x}$,

(g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$,

(h) $\lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$,

(i) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$,

(j) $\lim_{x\to 0^+} x \ln\left(x^2 e^x\right)$,

(k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{x-1}$,

(m) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$,

(n) $\lim_{x\to 0^+} (\ln x) e^{-\frac{1}{x}}$,

(o) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$,

(q) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^2 x$,

(r) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{5x-1} \dfrac{2x^2+1}{x^2+2x-1}$,

(s) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3}}$,

(t) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2}$,

Exercice 5.7. Vrai-Faux

Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

(a) Si f est une fonction, alors $f(s+t) = f(s) + f(t)$.

(b) Si f est une fonction alors si $f(s) = f(t)$, on a $s = t$.

(c) Si f est une fonction, $f(2x) = 2f(x)$.

(d) Si $x_1 < x_2$ et f est une fonction strictement décroissante, alors $f(x_1) > f(x_2)$.

(e) Une droite verticale coupe le graphe d'une fonction en au plus un point.

(f) Si f et g sont des fonctions, alors $f \circ g = g \circ f$.

(g) Si f est injective et ne s'annule pas, f est de signe constant.

(h) Si f est injective et ne s'annule pas, alors $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(i) Si $x > 0$, alors $(\ln(x))^6 = 6\ln(x)$.

(j) Si $x > 0$ et $a > 1$, alors $\log_\alpha(x) = \ln(\frac{x}{\alpha})$.

Questions de cours.

(a) Donner les définitions de continuité d'une fonction en un point, sur un intervalle.

(b) Pour les fonctions usuelles, décrire les intervalles où elles sont continues.

(c) Décrire les opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composition, multiplication par un scalaire).

(d) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires

(e) Enoncer le théorème de bijectivité pour une fonction continue sur un intervalle.

(f) Décrire le domaine de définition et les propriétés des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et de trigonométrie hyperbolique.

(g) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un voisinage épointé d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ soit prolongeable par continuité en x_0.

(h) Enoncer le principe du maximum.

(i) Donner des définitions équivalentes de l'affirmation : la fonction f est dérivable au point x_0.

(j) Montrer qu'une fonction dérivable en un point est toujours continue en ce point. Donner un exemple d'une fonction quei soit continue en un point mais pas dérivable en ce point.

(k) Donner les formules de dérivation de la composée, de la somme, du produit, du quotient, de deux fonctions dérivables.

(l) Enoncer le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque d'une bijection dérivable sur un intervalle.

(m) Expliciter les dérivées des fonctions usuelles.

(n) Expliciter les dérivées des fonctions réciproques $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $\operatorname{argch}(x)$, $\operatorname{argsh}(x)$, $\operatorname{argth}(x)$.

(o) Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction dérivable en un extremum local ?

(p) Enoncer le théorème de Rolle.

(q) Enoncer le théorème des accroissements finis, et l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 5.8. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer en utilisant la définition que $|f|$ est continue.

(b) La réciproque est-elle vraie, *i.e.* si $|f|$ est continue, alors f est-elle continue ?

(c) Montrer en utilisant la définition que $\sup(f, g)$ est continue.

Exercice 5.9. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est identiquement nulle. Décrire f.

Exercice 5.10. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 5.11. Étudier les fonctions $f(x) = x^2 - x^{3/2}$ et $g(x) = 3^x - 2^x$ et dessiner leur graphe.

Exercice 5.12. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty, 1[, \\ x^2 & \text{si } x \in [1, 4], \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x \in]4, +\infty[. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est strictement croissante.

(b) Tracer le graphe de la fonction f.

(c) f est-elle continue ?

(d) Montrer que f est bijective.

(e) Caractériser la bijection réciproque f^{-1} de f via une formule.

Exercice 5.13. (a) Existe-t-il une application $f\colon\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[\,?$$

(b) Existe-t-il une application $f\colon [0,1] \to [0,+\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 5.14. Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante ; puis montrer que pour tout $y \in]-1,1[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 5.15. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des points pour lesquels la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

(a) $3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$, (b) $\frac{e^x}{1+x}$, (c) $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$,
(d) $\frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$, (e) $\frac{(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3}$, (f) x^x,
(g) $e^{\alpha\tan(x)}$, (h) $\sin(\sin(\sin x))$, (i) $\cos(\sin(\tan(\pi x)))$,
(j) $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$, (k) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, (l) x^{x^x}.

Exercice 5.16.

1. Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition et la valeur de la fonction.

   (a) $\cos(\arccos(x))$, (b) $\sin(\arcsin(x))$, (c) $\tan(\arctan(x))$,
   (d) $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))$, (e) $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))$, (f) $\mathrm{th}(\mathrm{argth}(x))$,
   (g) $\arccos(\cos(x))$, (h) $\arcsin(\sin(x))$, (i) $\arctan(\tan(x))$,
   (j) $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x))$, (k) $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))$, (l) $\mathrm{argth}(\mathrm{th}(x))$.

2. Calculer les dérivées des fonctions $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $\mathrm{argch}(x)$, $\mathrm{argsh}(x)$, $\mathrm{argth}(x)$.
3. Calculer, pour tout $x \neq 0$ la valeur de la fonction $\arctan(x) + \arctan(\dfrac{1}{x})$.

Exercice 5.17. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes.

(a) $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x) = \sqrt{x^2+1}$, (b) $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}\, x) = \sqrt{x^2-1}$,
(c) $\mathrm{argsh}\, x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, (d) $\mathrm{argch}\, x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Exercice 5.18. Considérons la fonction f définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
(b) Calculer la dérivée de f puis montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 5.19. Fonctions circulaires réciproques.

(a) Rappeler la définition des fonctions réciproques arctan, arcsin et arccos. En utilisant le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable, calculer les fonctions dérivées de arctan, arcsin et arccos.
(b) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

(c) Calculer

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 5.20. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

(a) Etudier la continuité de f.

(b) Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 1$ mais n'est pas dérivable en 1.

(c) Montrer que f' a une limite finie quand x tend vers 1.

(d) Montrer que
$$\forall x > 1, \quad \arctan \frac{1+x}{1-x} = -\frac{3\pi}{4} + \arctan x.$$

Exercice 5.21. Déterminer les extrema locaux et globaux sur l'intervalle I pour la fonction f dans les cas suivants :

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ et $I = [2, 4]$,

(b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ et $I = [-1, 1]$,

(c) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$ et $I = [-2, 2]$,

(d) $f(x) = (x^2 + 2x)^3$ et $I = [-2, 1]$,

(e) $f(x) = x + \sin(2x)$ et $I = [0, \pi]$,

(f) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $I = [1, 3]$.

Exercice 5.22. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{1} \dfrac{x^\beta - 1}{x^\alpha - 1}$,
(b) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$,
(c) $\lim\limits_{0} \dfrac{\mathrm{sh}(4x)}{\mathrm{th}(5x)}$,

(d) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$,
(e) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1}{x^3}$,
(f) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$,

(g) $\lim\limits_{0} \dfrac{5^x - 3^x}{x}$,
(h) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$,
(i) $\lim\limits_{1} \dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)}$,

(j) $\lim\limits_{1} \dfrac{\cos(x)\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)}$,
(k) $\lim\limits_{0} \dfrac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$,
(l) $\lim\limits_{0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^3}$,

(m) $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$,
(n) $\lim\limits_{1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$,
(o) $\lim\limits_{+\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$.

Exercice 5.23 (Examen 2008)**.** Soit f la fonction de variable réelle définie par
$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(b) Montrer que f se prolonge par continuité au point 0 en une fonction φ que l'on précisera.

(c) Montrer que φ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de φ.

(d) Étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

Exercice 5.24 (Examen 2010)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + e^x$.

(a) Montrer que f est bijective.

(b) On note g la bijection réciproque de f. Donner le tableau de variations de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?

(d) Déterminer $g'(1)$.

Exercice 5.25 (Examen 2014)**.** On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} - e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Rappeler soigneusement la définition exacte de la formule : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]\gamma, +\infty[\quad f(x) \leqslant 1.$$

(c) Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si } \ x > 0 \end{array}\right.$$

où y_0 est un réel que l'on précisera.

(d) À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, \gamma]$ tel que : $\forall x \in [0, \gamma] \quad g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.

(e) Montrer que $f(1) < 0$ et que $f(2) > 0$.
(Indication : on rappelle que $e > 2$).

(f) À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, déduire de la question précédente que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]1, 2[$.

Exercice 5.26. Vrai-Faux
Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

(a) Si $f(-1) = f(1)$ alors il existe γ qui vérifie $f'(\gamma) = 0$ et $|\gamma| < 1$.

(b) Si $f'(x) < 0$ sur $]1, 6[$, alors f est strictement décroissante sur $]1, 6[$.

(c) Si $f(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim_0 f(x) = \ell$, alors $\ell > 1$.

(d) Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I, alors $f + g$ est croissante sur I.

(e) Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I, alors $f - g$ est monotone sur I.

(f) Si f est continue en α, alors f est dérivable en α.

(g) Si $f'(\gamma) = 0$ alors f admet un extrémum local au point γ.

(h) Si f admet un extrémum local au point γ, alors $f'(\gamma) = 0$.

(i) Si f est continue sur $]\alpha, \beta[$ alors f admet un minimum et un maximum globaux dans $]\alpha, \beta[$.

(j) On a, gr âce à la règle de l'Hospital, $\lim_{\pi^-} \dfrac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{\pi^-} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\infty$.

Exercice 5.27 (Examen 2008)**.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $F_n(x) = \exp(-nx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Dessiner approximativement, dans un même repère, les graphes de F_1 et de F_2.

(b) On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} G_n\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F_n(x) - x. \end{array}$$

Montrer qu'elle est bijective.

(c) Montrer que l'équation $x = \exp(-nx)$ a une unique solution x_n.
Montrer que : $x_n > 0$.

Exercice 5.28 (Examen 2008)**.** On pose : $f(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 1}{(\ln x)^2}$ quand $x > 0$ avec $x \neq 1$.

(a) Montrer que f se prolonge par continuité au point 1 en une fonction $\widetilde{f}$; que vaut $\widetilde{f}(1)$?

(b) La fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable au point 1 ? Si oui, que vaut $\widetilde{f}'(1)$?

Exercice 5.29. On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = \dfrac{(\sin x)\sqrt[5]{x^2+1}}{\sqrt{x}}$.

(a) Préciser l'ensemble de définition I de f et montrer que f est continue sur I.

(b) Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.

(c) Démontrer que f est bornée sur I et atteint ses bornes.

Exercice 5.30 (Examen 2010)**.** Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2})$.

(b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-2x-3}$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 5.31 (Examen 2010)**.** On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x$.

(a) Étudier les variations de f en justifiant les résultats obtenus. Calculer les valeurs prises par f en 1, 2 et 3. Dessiner l'allure de son graphe.

(b) On note g la restriction de f à $[1,+\infty[$. Montrer que $g([1,+\infty[)$ est un intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$ où α est un réel que l'on précisera.

(c) Montrer que g est bijective de $[1,+\infty[$ sur $[\alpha,+\infty[$ et que l'application réciproque

$$g^{-1}\colon [\alpha,+\infty[\to[1,+\infty[$$

est continue et strictement monotone.

(d) Montrer que l'application g^{-1} est dérivable sur $]\alpha,+\infty[$ est-elle dérivable en α ?

(e) Déterminer les valeurs de la dérivée de g^{-1} en 2 et en 18.

Exercice 5.32 (Examen 2010)**.** Justifier les réponses aux questions suivantes :

(a) Existe-t-il une application $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ continue et telle que $f([0,1])=[0,1]\cup[2,3]$?

(b) Existe-t-il une application $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ continue et surjective ?

(c) Existe-t-il une application $f\colon]0,1[\to\mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(]0,1[)=[0,1]$?

Exercice 5.33 (Examen 2011)**.** (a) Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, donner la définition exacte (à l'aide d'un réel $\varepsilon>0$) de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(b) Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=x^2\ln(x^2) \quad \text{pour tout réel } x\neq 0. \end{cases}$$

(c) On considère la fonction $f\colon[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=2x+\frac{\pi}{4}-\arctan x.$$

- Étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$; puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$.
- Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur l'intervalle I que l'on déterminera ; puis vérifier que l'application réciproque f^{-1} est continue sur I.
- Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur I et calculer sa dérivée en tout point $y=f(x)\in I$, où $x\in[0,+\infty[$.

Exercice 5.34 (Examen 2011)**.** (a) Donner la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, où $\ell\in\mathbb{R}$.

(b) Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

(a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-8}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)$.

(c) Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour tout } x\neq 0. \end{cases}$$

Puis calculer sa dérivée f' et étudier la continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.35 (Examen 2011)**.** (a) Rappeler les énoncés du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème du maximum.

(b) Existe-t-il une application $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0,+\infty[) = [-1,0]\cup[1,+\infty[$?

(c) Existe-t-il une application $f\colon [0,1]\to[0,+\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 5.36 (Partiel 2011)**.** Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^x}{3x^3+1}$.

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$.

(c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

Exercice 5.37 (Examen 2011)**.** On considère la fonction $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x)=e^x+e^{-x}+2.$$

(a) La fonction F est-elle paire ou impaire ? Justifier votre réponse.

(b) Après avoir justifié la continuité et la dérivabilité de F, étudier ses variations. Puis, déterminer $\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.
On note f la restriction de F à l'intervalle $[0,+\infty[$.

(c) Montrer que l'application f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[4,+\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1}\colon [4,+\infty[\to[0,+\infty[$ est continue.

(d) Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur $]4,+\infty[$. Est-elle dérivable en 4 ?

(e) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)=\sqrt{f(x)\,(f(x)-4)}$.

(f) En déduire que la dérivée $\left(f^{-1}\right)'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y>4$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}.$$

Exercice 5.38 (Partiel 2011)**.** On considère l'application $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :
$f(0)=0$ et $f(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

(a) Étudier $\lim_{x\to 0} f(x)$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(b) Donner, en le justifiant, un tableau des variations de f.

(c) Déterminer, en le justifiant, si f est injective.

(d) Déterminer, en le justifiant, si f est surjective.

(e) Soit $A=[-1,2]$. Calculer $f(A)$ puis $f^{-1}f(A)$ et comparer les ensembles A et $f^{-1}\left(f(A)\right)$.

(f) Donner un exemple d'application $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ (N.B. l'ensemble d'arrivée) telle que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $g^{-1}\left(g(A)\right)=A$ (sans démonstration).

Exercice 5.39 (Examen 2012)**.** On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

(a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f. Calculer sa dérivée.

(b) Étudier la limite de f en 0 puis définir $f(0)$ pour obtenir un prolongement par continuité de f en 0.

(c) Étudier alors la dérivabilité de f en 0.

(d) Calculer $I = f(\mathbb{R}_+)$. Pourquoi I est-il nécessairement un intervalle ?

(e) On note g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser le domaine de définition de g^{-1}.

(f) Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} ; g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? (justifier votre réponse).

(g) Calculer $g(1)$ puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\frac{1}{e}$.

Exercice 5.40 (Examen 2012)**.** On considère la fonction $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} - e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Rappeler la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$.
En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :
$\forall\, x \in]\gamma, +\infty[\ f(x) \leq 1$.

(c) Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

où y_0 est un réel que l'on précisera.

(d) À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, \gamma[$ tel que :

$$\forall\, x \in [0, \gamma] \quad g(x) \leq g(x_0).$$

En déduire en utilisant (b) que f est majorée sur $]0, +\infty[$.

(e) Montrer que $f(2) > 0$. à l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0, 2]$.

Exercice 5.41 (Examen 2013)**.** Soient α et β deux réels. On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2\alpha x, & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{\beta^2}{1+x^2}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de α et β, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de α et β, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.42 (Examen 2014)**.** On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) La fonction f est-elle continue en 0 ?

(b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui déterminer $f^{'}(0)$.

(c) Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Calculer $f^{'}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Index