Вопрос №1

1.Пространство решений, вероятностная модель и постулируемое соотношение между ними.

Пусть D – пространство решений d относительно наблюдаемого малого объекта и ρ=hP_0, Θ∈H, ξ-семейство возможных р1ешений X. Принятие решения –d об исследуемом объекте соотносится с проблемой утверждения по значению Θ вероятностной модели. Если значение Θ известно, то принимается правильное безошибочное решение d. Это соотношение сводит проблему принятия решения к точкам заданной мат. стат-ки, как параметрическая оценка, проверка гипотез.

2.Случайная выборка и выборочные данные.

Случайная выборка $X^{(n)}$=(X_1,…,X_n) объёма n – есть случайный вектор, состоящий из независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих некоторое общее распределение P_θ из вероятноотносительной модели. X_k = X(ω_k). Значение X-это значение при некотором исходе.
Выбор данных $X^{(n)}$=(X_1,…,X_n) – результат наблюдений случайных величин X.

3.Распределение случайной выборки (статическая модель).

Если f(X|Θ) - функция плотности наблюдений случайных в. X, то n-мерная функция плотности случайной выборки $X^{(n)}$:$f_n(x_1 \ldots\ x_n$|Θ)=$\prod_{k=1}^{n} f(x_k|\theta)$. Это так , потому что выборка состоит из независимых случайно распределённых величин.

4.Статистика и ее распределение

Статистикой $T = T(X^{(n)})$ называется любая измеримая функция от случайной выборки $X^{(n)}$.Пусть $(\mathfrak{I}, \mathcal{B})$ − некоторое измеримое пространство. $\forall \mathrm{B} \in \mathcal{B}$: $\mathrm{P}_\theta(\mathrm{T} \in \mathrm{B}) = \int_{\mathrm{B}} f_n\left(X^{(n)}(\theta)\right) d\mu_n\,(X^{(in)})$

5. Функция потерь.

Функция $\mathrm{L}(\theta, \mathrm{d})$ определяет потери в определенных единицах измерения, которая несет статистику о принятии решения d, когда θ представляет истинное значение параметра.

6. Решающая функция и функция риска.

Каждое из решений d статистик принимает на основе результата $\mathrm{x}^{(\mathrm{n})} = \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ наблюдений над независимыми копиями $\mathrm{X}^{(\mathrm{n})} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ случайной величины X. Строится измеримое отображение $\delta = \delta(\cdot)$ пространства возможных значений $\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}$ в пространстве решений $\mathcal{D}$, с помощью которого принимается решение $\mathrm{d} = \delta\left(\mathrm{x}^{(\mathrm{n})}\right)$. Это отображение называется решающей функцией.

Функция $\mathrm{R}(\theta, \delta) = \mathrm{E}_\theta \mathrm{L}\left(\theta, \delta\left(\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}\right)\right)$ называется функцией риска.

7. Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – случайный вектор, заданный на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, с независимыми одинаково распределенными с плотностью $f(x)$ по мере Лебега компонентами. Вектор $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$, полученный из исходного вектора упорядочиванием его компонент при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$, называется вариационным рядом.

Таким образом, при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ компоненты вариационного ряда удовлетворяют неравенствам $X_{(1)}(\omega) \leq \cdots \leq X_{(n)}(\omega)$, и если $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_n = X_n(\omega)$, то $x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_{(2)}$ второй по величине, и т.д., $x_{(n)}$= $\max\{x_1, \dots, x_n\}$

Вариационному ряду соответствуют упорядоченные выборочные данные $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$, по которым строится эмпирическая функция распределения $F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i<x)}{n}$.

Таким образом $F_n(x)$ – ступенчатая функция, возрастающая скачками величины $\frac{1}{n}$.

8. Выборочные аналоги сред.значения и дисперсии наблюдаемой случ.величины.

Аналог EX-выборочное среднее: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_k$

Аналог DX-выборочная дисперсия: S^2=$\frac{1}{n}\sum_1^n (x_k - \bar{x})^2$

9. Выборочные аналоги центральных моментов для распределения наблюдаемой случайной величины

$$\mu_i = E(x - EX)^i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^i \;\; i = 2{,}3..$$

$\bar{X} -$ выборочное среднее.

10. Выборочный коэффициент корреляции

Пусть $(x_1, y_1, \dots x_n, y_n)$ случайная выборка из распределения двумерного вектора (X,Y). Выборочный коэффициент корреляции есть выборочный аналог коэффициента корреляции $\rho = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$ между случайными величинами X и Y.

Аналог определяется как:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2}}$$

11. Выборочные квантиль и медиана

Пусть случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, p-квантиль распределения.

F определяется как корень x_p решения уравнения $F(x) = p$.

Квантиль $X_{0,5} = m$ называется медианой распределения F. $\widehat{x_p} = X_{([np])}$, где $X_{(k)} -$ k-ый член вариационного ряда k=[np], т.е. $\widehat{m} = X_{[\frac{1}{2}]}$.

12.Распределение эмпирической функции распределения при каждом фикс.значении ее аргумента

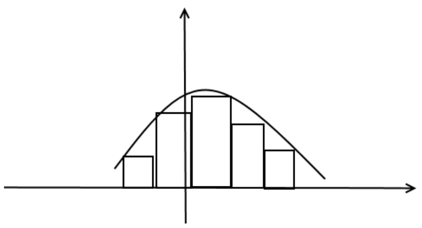
n$F_n(x)$ имеет бином. распределение $\mathcal{B}(n, F(x))$ с n испытаниями и вероятностью $p = F(x)$, где $F(x)$ – ф-я распределения наблюдаемой случ. величины.

13) Гистограмма как оценка функции плотности наблюдаемой случайной величины

Гистограмма состоит из r >= 2 разбиений пространства X наблюдения с.в. x – есть реализация случ. вектора ν = (ν_1, …, ν_r), где наблюдаемое значение ν_i – кол-во выбор. данных попавших в i-ый интервал разбиения x , i = 1 … n

Т.о. гистограмма g(x), x ∈ X - принимает значения при x ∈ A_i, как $\frac{n_i}{n}$ т.е. оценки вер-ей попадания с.в. x в интервал A_i. Т.о. статистика $\frac{\nu_i}{n}$ есть оценка вероятностей $\int_{A_i} f(x) d(\mu(x))$.

При увеличении числа разбиения r и сужение интервала разбиения гистогр. g(x) служит оценкой ф-ии пл-ти f(x)



14. Совместное распределение частот попаданий выборочных данных в интервалы разбиений области значений наблюдаемой с.в., когда строится гистограмма

Совместное распределение частот ν = (ν_1, …, ν_r) мультиномиальное распределение M(r , n , $\bar{p}$). p = (p_1, …, p_r)

p_i – вер-ть того, что с.в. X принадлежит i интервалу

15) Опр. достаточной статистики для семейства распределения случайной выборки. Теорема факторизации

Достаточная статистика для параметра *Ө* ϵ Ө определяющая некоторое семейство F_θ распределений вероятности - статистика T=T(X) такая, что условная вероятность выборки X = X1, X2, … , Xn при данном значении не зависит от параметра Ө. То есть выполняется равенство:

$$\mathbb{P}(X \in \bar{X} | \mathrm{T}(X) = t, \theta) = \mathbb{P}(X \in \bar{X} | \mathrm{T}(X) = t),$$

Теорема факторизации:

Пусть T(X) — некоторая статистика, а f_θ(x) — условная функция плотности или функция вероятности (в зависимости от вида распределения) для вектора наблюдений *X*. Тогда T(X) является достаточной статистикой для параметра *Ө* ϵ Ө, если и только если существуют такие измеримые функции *h* и *g*, что можно записать:

$$f_\theta(x) = h(x)\, g(\theta, \mathrm{T}(x))$$

16) Достаточная статистика и ее распределение, когда выбор идет в схеме испытаний Бернули

Пусть X1, X2, … ,Xn - последовательность случайных величин, что равны 1 с вероятностью *p* и равны 0 с вероятностью *1-p* (то есть, имеют распределение Бернулли). Тогда

$$\mathbb{P}(x_1,\dots x_n|p) = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i} = p^{\mathrm{T}(x)}(1-p)^{n-\mathrm{T}(x)},$$

если взять T(X) = X1 + … + Xn

Тогда данная статистика является достаточной согласно теореме факторизации, если обозначить

$$g(p,\mathrm{T}(x_1,\dots x_n)) = p^{\mathrm{T}(x_1,\dots x_n)}(1-p)^{n-\mathrm{T}(x_1,\dots x_n)},$$
$$h(x_1,\dots x_n) = 1.$$

17. Достаточная статистика и ее распределение в случае выбора из распределение Пуассона.

$X^n = (X_1 \dots X_n)$- случ. Выбор из распределения с ф-ей плотности $P(X|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{\propto!}, x = 0,1,2 \dots$, то достаточной статистикой явл-ся $T = \sum_i^n X_k$. Статистика T имеет также распред. Пуассона только с подм. n λ.

$$\boldsymbol{g(t|\lambda) = \frac{(n\lambda)^t e^{-n\lambda}}{t!}, t = 0,1,2} \dots$$

18. Достаточная статистика в случае выбора из гамма-распределения.

Если $X^n = (X_1 \dots X_n)$-выборка из Гамма-распределения $f(X|\theta) = \frac{1}{r(\lambda)a\lambda}X^{\lambda-1}e^{-\frac{x}{a}}, x > 0, a, \lambda > 0$, то достаточная статистика для парам. Вектора $\theta = (a, \lambda)$ случайная статистика $(\sum_i^n X_k; \sum_i^n \ln X_k)$

19. Достаточная статистика и ее распределение в случае выбора из равномерного на интервале (0,θ) распределения.

Если $X^n = (X_1 \dots X_n)$-выборка из равномерного-распределения $n(0, \theta)$ на (0, θ), то достаточная статистика явл-ся крайний член вариац. ряда.

$X_{(n)} = \max_{1 \le k \le n} X_k$; Статистика $X_{(n)}$ имеет распределение $F(\propto) = \frac{X^n}{\theta^n}$,

20. Достаточная статистика и ее распределение в случае выбора из нормального распределения ее распределения.

Если $X_{(n)}$ – выборка из норм распределения $M(\mu, \delta^2)$, то статистика $T = T(\overline{X}, S^2)$

2 вопрос

1. Пространство решений при оценки параметра вероятностной модели наблюдаемой случайной величины

Пусть распределение $X^{(n)} \in \mathbb{P}$={$\mathbb{P}_{\theta}$, θ ∈ n}

Задачи оценивания значения параметра θ по наблюдению случайной вероятности $\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}$={$\mathrm{X}_{1}$, ... , X_{n}}

совпадает с Д=Θ

2. Определение правила оценивания

Оценки значения параметра θ вероят модели по случайной выборке $X^{(n)}$={X_{1}, ... , X_{n}} определяется заданием статистики T=$\widehat{\theta_n}(X^{(n)})$, которая принимает значения в параметр пространстве Θ

3.Несмещенность оценки

Оценка $\widehat{\theta_n}$=$\widehat{\theta_n}(X^{(n)})$ значения параметра θ называется несмещенной ,если среднее значение T_{θ} $\widehat{\theta_n}(X^{(n)})$= θ , θ ∈ Θ то есть тождественно

4.Состоятельность оценки

Оценка $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(\mathrm{X}^{(\mathrm{n})})$ называется состоятельной оценкой параметра θ,

если $\hat{\theta}_n(\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}) \underset{P_\theta}{\to} \theta$, $\forall\, \theta \in \Theta$, т.е. $\forall\, \varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|\hat{\theta}_n\left(\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}\right) - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0.$

5) Метод моментов для оценки параметров вероятностной модели.

Пусть $\boldsymbol{\mathcal{P}}$={$P_\theta, \theta \in \Theta$}- семейство возможных распределений наблюдаемой случайной величины X, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$- n-мерные параметр. Для построения векторной оценки $\widehat{\theta_\text{т}}\left(X^{(n)}\right) = (\widehat{\theta_{1n}}, \dots, \widehat{\theta_{mn}})$ вычисляется m- теоретических моментов случайной величины X: $\alpha_k = \alpha_k(\theta) = E_\theta X^k, \theta \in \Theta$ и соответствующие им выборочные моменты : $\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k$, $k = \overline{1,m}$. Оценкой параметра θпо методу моментов называется любое решение системы уравнений $\alpha_k(\theta) = \alpha_k, k = \overline{1,m}$ относительно параметра θ.

6)Оценка по методу моментов для вероятности успеха в схеме испытаний Бернулли и ее распределение.

Оценка по методу моментов для вероятности успеха в схеме испытаний Бернулли : $\widehat{p_n}\left(X^{(n)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$

И ее распределение: $n\widehat{p_n}\left(X^{(n)}\right) \sim B(n,p)$

7)Оценка по методу моментов для параметра распределения Пуассона и ее распределение.

Оценка по методу моментов для параметра распределения Пуассона: $\widehat{\lambda_n}\left(X^{(n)}\right) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ и ее распределение : $n\widehat{\lambda_n} \sim P(n,\lambda)$.

9. Несмещенные оценки среднего значения и дисперсии наблюдаемой случайной величины.

Пусть X-случайная величина с распределением P. Пусть$\mu = \mathrm{EX}, \sigma^2 = \mathrm{DX}$.

Тогда: $\overline{\mathrm{X}} = \hat{\mu}\mathrm{n}$ – несмещенная оценка μ,

$\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\mathrm{S}^2 = \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_1^{\mathrm{n}}(\mathrm{X_k} - \overline{\mathrm{X}})^2 = \widehat{\sigma_{\mathrm{n}}^2}$ – несмещенная оценка σ^2

10. Оценки по методы моментов для параметров нормального распределения и их совместное распределение.

Если $\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}$ – выборка из нормального распределения $\mu(\mu, \sigma^2)$. Тогда выборочное среднее $\overline{\mathrm{X}}$ и выборочная дисперсия σ^2 есть выборочные оценки μ, σ^2по методу моментов. Эти оценки – независимые статистики $\overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}})$

$$\frac{\mathrm{nS}^2}{\sigma^2} \sim \mathrm{X}_{\mathrm{n}-1}^2$$

12.Функция правдоподобия и ее интерпретация в терминах выборочных данных

Пусть $\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}$ случайная выборка из распределения с функцией плотности $f(x|\theta)$ зависящая от параметра θ, тогда функция правдоподобия:

$L\big(\theta|x^{(n)}\big) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k|\theta), \theta \in \Theta$

Если x^n результат выборки X^n, то $L\big(\theta, \mathrm{X}^{(\mathrm{n})}\big)$ при каждом фиксированном θ, есть правдоподобия значения θ для данных X^n.

В случае дискретного распределения $L\big(\theta|x^{(n)}\big) = P_\theta(X^{(n)} = x^{(n)})$.

13.**Метод максимального правдоподобия в оценке параметров вероятностной модели.**

Оценка $\hat{\theta}(X^{(n)})$ по методу максимального правдоподобия определяется точкой достижения максимума у функции плотности случайной выборки, то есть $\hat{\theta}(X^{(n)})$= arg $\max_{\theta\in\Theta} f_n\ (X^{(n)}|\theta)$.

14.Параметры асимптотической нормальности оценки максимального правдоподобия.

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X^{(n)})$ со среднем θ и дисперсией $\frac{1}{ni(\theta)}$, i(θ)=$E_\theta(\frac{\partial \ln f_n(X^{(n)}|\theta)}{\partial\theta})^2$, то есть $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_\theta(\big(\hat{\theta}_n - \theta\big)\sqrt{\mathrm{ni}(\theta)} < \mathrm{x})$= Φ(x).

15.Оценка максимального правдоподобия для вероятности успеха в схеме испытаний Бернулли и ее распределение.

$\bar{x}$ наблюд. двухточесная величина

X=$\begin{cases} 1, p \\ 0. 1-p \end{cases}$, объем выборки $X^{(n)}$=$(X_1, \dots, X_n)$ L(P|$X^{(n)}$)=$p^{\sum_1^n X_k}(1-p)^{n-\sum_1^n X_k}$

$\hat{\theta}_n$ =$\frac{1}{n}\sum_1^n X_k$, n$\hat{\theta}_n$=B(n,p)

16. Оценка максимального правдоподобия для параметра распределения Пуассона и ее распределение.

Пусть $X_1, \dots, X_n$*— выборка объема n из распределения Пуассона* Π_λ*,*

где $\lambda > 0$ *Найдем ОМП* $\hat{\lambda}$ *неизвестного параметра* λ*.*

$$P_\lambda(X_1 = y) = \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}, y = 0,1,2, \dots$$

$$f(X, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{X_i!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda \sum X_i}{\prod X_i!}e^{-n\lambda} = \frac{\lambda n\bar{X}}{\prod X_i!}e^{-n\lambda}.$$

Поскольку эта функция при всех $\lambda > 0$ *непрерывно дифференцируема по* λ*, можно искать точки экстремума, приравняв к нулю частную производную по* λ *. Но удобнее это делать для логарифмической функции правдоподобия:*

$$L(X, \lambda) = lnf(X, \lambda) = \ln\left(\frac{\lambda^{n\bar{X}}}{\prod X_i!}e^{-n\lambda}\right) = n\bar{X}ln\lambda - ln\prod_{i=1}^{n} X_i! - n\lambda$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathrm{L}(\mathrm{X}, \lambda) = \frac{\mathrm{n}\bar{\mathrm{X}}}{\lambda} - \mathrm{n},$$

и точка экстремума $\hat{\lambda}$— решение уравнения: $\frac{\mathrm{n}\bar{\mathrm{X}}}{\lambda} - \mathrm{n} = 0$, то есть $\hat{\lambda} = \bar{\mathrm{X}}$.

17.Оценка максимального правдоподобия для параметра Θ равномерного на интервале (0, Θ) распределения.

Оценка параметра положения равномерного распределения $\boldsymbol{U(0, \theta)}$***.***

Равномерное на отрезке$[0; \theta]$ *распределение имеет функцию плотности*

$f(x|\theta) = \theta^{-1}$, *если*$0 \le x \le \theta$, *и* $f(x|\theta) = 0$ *вне этого отрезка. Следовательно, функция* $L(\theta|X^n)$*отлична от нуля и равна* θ^{-n} *только в области* $\theta \ge X_n = \max_{1 \le k \le n} X_k$

Ее максимум по θ *достигается в граничной точке* $\theta = X_n$ *, так что наибольшее значение* X_n *выборки* X^n *есть оценка максимального правдоподобия параметра* θ*.*

18.Оценки максимального правдоподобия для параметров нормального распределения и их совместное распределение и их совместное распределение.

$\bar{x}, s^2, \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \frac{ns^2}{\sigma^2} \sim x^2_{n-1,} L\left(\theta|x^{(n)}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma}\sum_1^n (x-\mu)^2\right]$

19.Оценки параметров структурированного среднего в случае выбора из нормального распределения (метод наименьших квадратов).

Наблюдаемая случайная величина y ,которая связана с объяснительной переменной x в виде соотношения $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2), \mathrm{y} \sim \mathrm{N}(\mathrm{bx} + \mathrm{a}, \sigma^2)$

$(\mathrm{y}_1, \mathrm{x}_1) \dots (\mathrm{y}_\mathrm{n}, \mathrm{x}_\mathrm{n})$

Оценка параметров в нормальном распределении проводится по методу максимального правдоподобия. Выберем:

$$\frac{y - \bar{y}}{s_y} = \rho \frac{x - \bar{x}}{s_x}$$

Можно описать метод наименьших квадратов

$$\sum_1^{\mathrm{n}} (\mathrm{y_i} - \mathrm{ax_i} - \mathrm{b})^2$$

20.Оценка параметров наилучшего в среднем квадратическом прогноза в случае выбора из двумерного нормального распределения

Наблюдаемая выборка $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$ из двумерного нормального распределения: $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

Наилучший прогноз Y на X, обе величины являются случайными

$Y = aX + b,$ где a и b $-$ оценки по методу максимального правдоподобия. Для того, чтобы решить задачу нужно найти параметры a и b по методу макс. правдоподобия.

$\frac{Y - \bar{Y}}{s_Y} = r \frac{X - \bar{X}}{s_X}$ – оценка параметров.

В случае нормального распределения линейный прогноз обладает свойством оптимальности с точки зрения малости средней квадратичной ошибки и совпадает с кривой средней квадратичной регрессии.

3 вопрос

1 Понятие оптимальной оценки.

Опр. Оценка $\hat{\theta}_n(X^{(n)})$- называется оптимальной, если на ней достигается минимум среднеквадратической оценки $E_\theta\left(\hat{\theta}_n\left(X^{(n)}\right) - \theta\right)^2$.

Если оценка несмещенная, то оптимальная оценка – это оценка имеющая минимальную дисперсию $E_\theta\hat{\theta}_n\left(\lambda^{(n)}\right) = \theta, \forall\theta \in \Theta$

2 Нижняя граница для квадратичного риска оценки.

$\frac{\left[\frac{1}{d_0}E_\theta\hat{\theta}\quad\left(X^{(n)}\right)\right]^2}{ni(\theta)}$, где $i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial hf(\alpha|\theta)}{\partial\theta}\right)^2 -$ информация по Фишеру.

3 Нижняя граница для дисперсии несмещенной оценки параметрической функции.

Если $f(\theta) -$ функция параметра θ и необходимо оценить $\hat{\theta}_n(X^{(n)})$, тогда ее среднеквадратичный риск $E_\theta(\hat{\theta}_n\left(X^{(n)}\right) - \theta)^2 \geq D_\theta\hat{\theta}_n\left(X^{(n)}\right) = \frac{[d\gamma(\theta)/d\theta]^2}{nI(\theta)}$

4 Эффективность оценки по отношению к нижней границе квадратичного риска

Оценка $\theta_n(X^{(n)})$ называется эффективной, если её среднеквадратичный риск равен нижней границе $\frac{\left[\frac{d}{d\theta}E_\theta(\theta^n\left(X^{(n)}\right))\right]^n}{n_i(\theta)}$

5) Эффективная оценка параметра показательного распределения.

Выборка X1…Xn, $f(x|\theta)= \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x \geqslant 0$, $\theta>0$ - функция плотности показательного распределения. Выборочное среднее $\overline{X}$ есть эффективная оценка параметра θ, на ней достигается нижняя (достижимая) граница квадратичного риска оценки.

6) Эффективность оценки метода максимального правдоподобия.

Т-ма. Если существует эффективная оценка (её квадратичный риск достигает нижней границы), то она почти наверное достигает оценки максимального правдоподобия.

7) Определение доверительного множества

Подмножество $\Delta_n = \Delta_n\left(X^{(n)}\right)$ параметрического пространства Θ, размеры у конфигурации которого определяются по выборочным данным, называется $(1-\alpha)$ – доверительной областью, если оно с вероятностью не меньше, чем $(1-\alpha)$ накрывает истинное неизвестное значение параметра θ, т.е. $P_\theta\left(\Delta_n\left(X^{(n)}\right) \ni \theta\right) \geq (1-\alpha), \ \forall\,\theta \in \Theta$

8 Доверительный коэффициент и доверительный уровень

Доверительный коэффициент-наибольшее значение вероятности доверительного множества $sup_n\,P_\theta\left(\Delta_n\left(X^{(n)}\right) \ni \theta\right) = Q$

Доверительный уровень $(1-\alpha)$ есть заданная ограниченная снизу на доверительный коэффициент. Множество Δ_n называется $(1-\alpha)$ доверительным, если $Q \geq 1-\alpha$ (т.е. коэффициент Q).

9. Определение верхней доверительной границы.

Статистика $\bar{\theta}(X^{(n)})$ называется верхней $(1-\alpha)$ доверительной границей, если $P_\theta\big(\bar{\theta}\big(X^{(n)}\big) \geq \theta\big) \geq 1-\ \alpha, \forall\, \theta\ \in\ \Theta$ (большое тетта).

10. Доверительный интервал для среднего значения нормального распределения при известном значении дисперсии.

Пусть $\mathrm{X}^{(\mathrm{n})}$ выборка из $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, где σ^2 известно. Интервал с концами $\overline{\mathrm{X}} \pm \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}$, где $\lambda_\alpha = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$. Является $(1-\alpha)$ доверительным интервалом дляμ, т.е. $\mathrm{P}_\mu(\overline{\mathrm{X}} - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \leq \mu \leq \overline{\mathrm{X}} + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} = 1-\alpha)$.

11. Верхняя доверительная граница для дисперсии нормального распределения при известном среднем значении.

При выборе из $N(\mu, \sigma^2)$ распределения с известным средним значением μ метод максимального правдоподобия приводит к несмещенной оценке $\widetilde{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2$ параметра $\overline{\sigma^2}\big(X^{(n)}\big)$. И значение верхней доверительной границы соответственно равно:

$$P\left(\frac{\widetilde{\sigma_n^2}}{\sigma^2} > \lambda\right) = P\left(\frac{\sum_1^n\left(\frac{x_k-\mu}{\sigma}\right)^2}{n} > \lambda\right) = 1-K_n(n\lambda) = 1-\alpha, \text{ где } \lambda = \frac{1}{n}K_n^{-1}(\alpha).$$

12 Совместное распределение выборочного среднего и выборочной дисперсии при выборе из нормального распределения

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ $\qquad$ $\dfrac{nS^2}{\sigma} \sim \mathcal{X}_{n-1}^2$

13) Распределение выборочного среднего при выборе из нормального распределения

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

14) Распределение выборочной дисперсии при выборе из нормального распределения

$$\frac{\mathbf{nS^2}}{\boldsymbol{\sigma}} \sim \mathbf{X_{n-1}^2}$$

15) Верхняя доверительная граница для дисперсии нормального распределения при неизвестном среднем значении

Распределение опорной функции

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_1^n (X_k - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_k - \mu}{\sigma} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{1}^{n} (Y_k - \bar{Y})^2$$

есть хи-квадрат распределение с n-1 степенью свободы. Следовательно , верхняя (1-α) доверительная граница определяется квантилью $\lambda_\alpha = K_{n-1}^{-1}(\alpha)$ хи-квадрат распределения – корнем уравнения

$$P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \geq \lambda\right) = 1 - K_{n-1}(\lambda) = 1 - \alpha,$$

и доверительное утверждение $\sigma^2 \leq \bar{\sigma}_n^2 = nS^2 / K_{n-1}^{-1}(\alpha)$ выполняется с заданной вероятностью 1-α.

16) Доверительный интервал для среднего значения нормального распределения при неизвестном значении дисперсии

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2), \bar{X} + t_\alpha * \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{X}$ - выборочное среднее,

$S^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_k - \bar{X})^2,\ \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_k$, $t_\alpha = S_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$.

17. Асимптотически доверительный интервал для вероятности успеха в испытаниях Бернулли.

Оптимальной несмещенной оценкой p для испытаний Бернулли является выборочное среднее $\bar{X} = n^{-1} \sum_1^n X_k$. Статистика $n\bar{X}$ имеет биномиальное распределение B(n,p), и это позволяет насчитать таблицы доверительных пределов для p при различных значениях доверительного уровня 1-α, объёма выборки n и числа успешных исходов $n\bar{x}$.

Выборочное среднее асимптотически нормально со средним p и дисперсией p(1-n)/n. Следовательно, (1-α) – доверительная область $\triangle_n = \{p: 0 \leq p \leq 1, |\bar{X} - p| \leq \lambda_\alpha \sqrt{p(1-p)/n}\}$.

Получаем доверительный интервал $\frac{n}{n+\lambda_\alpha^2}\left(\bar{X} + \frac{\lambda_\alpha^2}{2n} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \frac{\lambda_\alpha^2}{4n^4}}\right)$,

который при больших объёмах испытаний n мало отличается от доверительного интервала

$\bar{X} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$, полученного заменой $\sigma^2(p) = p(1-p)$ на её оценку $\bar{X}(1-\bar{X})$.

18. Асимптотически доверительный интервал для параметра распределения Пуассона.

Распределение Пуассона P(Θ) с функцией плотности

$f(x|\theta) = P_\theta(X = x) = \theta^x e^\theta / x!$, x=0,1,2...

индексируется положительным параметром Θ и определяется выборочным средним $\overline{X}$.

Оценка $\overline{X}$ асимптотически нормальна (Θ,Θ/n), что позволяет определить асимптотически доверительную область $\Delta_n = \{\theta: \theta \geq 0, |\overline{X} - \theta| \leq \lambda_\alpha \sqrt{\theta/n}\}$.

Решение неравенств в фигурных скобках относительно Θ даёт асимптотически доверительный интервал $\overline{X} + \frac{\lambda_\alpha^2}{2n} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X}}{n} + \frac{\lambda_\alpha^2}{4n^2}}$.

Наконец, заменяя $\sigma^2(\theta) = \theta$ её оценкой $\overline{X}$, получаем также асимптотический доверительный, но, как показывают числовые расчеты, менее точный интервал $\overline{X} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X}}{n}}$.

19. Общий подход к построению асимптотически доверительных областей на основе оценки значения параметра.

Θ φ={P_θ, Θ ϵ ⓝ}

$\widehat{\theta_n}(x^{(n)})$ состоятельная, асимптотически нормальны $N(\theta, \frac{\sigma^2(\theta)}{n})$ довер. интерв. $\frac{\widehat{\theta_n}(x^{(n)}) - \theta}{\sigma(\widehat{\theta_n}(x^{(n)}))}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$\widehat{\theta_n}\left(x^{(n)}\right) \pm \frac{\sigma(\widehat{\theta_n}(x^{(n)}))}{\sqrt{n}}$.

20. Распределение Стьюдента и его использование в задачах математической статистики.

ξ ~ N(0,1) , η - X_n^2, Тогда с.в. τ = $\frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n}$

имеют распределение Стьюдента с S_n – степенью свободы.

Используется в построении доверительных интервалов и крит. значимости, проверки гипотез среднего значения нормального распределения при неизвестной дисперсии

Стьюдента $T = \frac{\overline{X} - M}{S}\sqrt{n-1}$, когда каждое значение параметра имеет распределение Стьюдента с n-1 степенями свободы.

4 вопрос

1. **Двухточечное пространство решений и его соотношение с параметрическим простанством верятностной модели. Нулевая и альтернативная гипотезы.**
   Исслед-ся некот. объем относительно которого по наблюдению характеристик следует принять 1 или 2 решения : d_0, d_1 . Эти решения … D=(d_0, d_1). Пусть X наблюд. Св-во и P={$P_0, \theta \in \Theta$ } сем-во ее возможных распределений. Пространство Θ раз-ся на два мно-ва $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$.
   Если известно, что , $\theta \in \Theta_i$, то принятие решения d_i , $i = \overline{1, n}$ считается безошибочным. Т.е задача принятия одного из решения сводится к задаче проверки гипотезы. $\Theta_0 : \theta \in \Theta_0$ при альтернативе $\Theta_1 : \theta \in \Theta_1$. Проверка пров-ся с точностью наблюд. Сл. Выб. $X^{(n)}$.
2. **Критерий и способ его задания.**
   Критерий есть правило по которому принимается или отвергается нулевая гипотеза. Это правило задается с помощью крит. Области S-подмн-во $X^{(n)}$ – пространство значений случ. выборки $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$.
   Критерий как правило гласит, если результат $X^{(n)}$ попадает в область S ($X^{(n)} \in S$), то гипотеза H_0 отвергается , принимается H_1.

3.Критическая область и область принятия нулевой гипотезы.
Крит. обл. S- подоб. Выборочного пр-ва $X^{(n)}$, если X попадает в область, то H_0 отвергается.
A=$X^{(n)} \backslash S = S^c$

4.Уровень значимости $\propto \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$.
Есть требуемое ограничение на критерий ограничений вер-ть отклонить гипотезу, когда она верна.

5. Функция мощности критерия.

m(θ) = вероятности отклонить нулевую гипотезу H_0 , когда θ истинное значение параметра.

$$m(\theta) = P_\theta(X^{(n)} \in S \mid \theta \in \Theta)$$

6. Размер критерия.

Наибольшее значение вероятности ошибки 1–го рода, вероятность α(θ) отклонения нулевой гипотезы H_0, когда гипотеза верна $\bar{\alpha} = \sup P_\theta (X^{(n)} \in S) = \sup \alpha(\theta)$

7. Вероятность ошибки первого рода.

Вероятность ошибки 1-го рода α(θ), θ ∈ Θ – вероятность отвергнуть нулевую гипотезу H_0, если на самом деле она верна.

$$\alpha(\theta) = P_\theta(X^{(n)} \in S),\ \theta \in \Theta_0$$

8. Вероятность ошибки второго рода.

Вероятность ошибки 2-го рода β (θ) – вероятность принять нулевую гипотезу H_0, если на самом деле верна альтернатива H_1.

$$\beta(\theta) = P_\theta(X^{(n)} \in A),\ \theta \in \Theta_0$$

9)Построение критерия заданного уровня значимости с помощью оценки парамета

Пусть $\widehat{\theta_n}(x^{(n)})$ – состоятельная оценка параметра θ, $P = \{\quad\}$ - вероятностные модели. Известно распределение статистики или асимптотическое распределение, тогда критерий заданного уровня значимости строится с помощью статистики $\widehat{\theta_n}(x^{(n)}) - \theta_0$ граничная точка. $H_0: \theta \le \theta_0, H_1: \theta > \theta_0$Тогда $\widehat{\theta_n}(x^{(n)}) - \theta_0 > C$,

критическая const $C = \sup_{\theta\le\theta_0} P_\theta(\widehat{\theta_n}(x^{(n)}) - \theta_0 > C) \le \alpha$

10) Проверка гипотезы о величине среднего значения нормального распределения при известной дисперсии

Пусть $x^{(n)}$выборка из нормального распределения N(μ, σ^2)

H_0: $\mu \le \mu_0$ H_1: $\mu > \mu_1$, критическая область $S = \{x^{(n)}: \bar{x} > C\}$. C определена из соотношения $P_\mu(\bar{x} > C) = 1 - \Phi\left(\frac{C-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \alpha$

Т.е. $C_{\alpha=}\mu_0 + \Phi^{-1}(1-\alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

11)Минимальный объем выборки из нормального (μ, σ^2) распредления (значение σ^2 известно), необходимый для различения гипотез H_0 : $\mu \le \mu_0$ и H_1 : $\mu \ge \mu_1$с заданными отграничениями на вероятности ошибок первого и второго рода.

$\mu_1 > \mu_0, \alpha, \beta$ $n \ge \frac{[\Phi^{-1}(1-\alpha)+\Phi^{-1}(1-\beta)]^2}{(\mu_1-\mu_0)^2}$

12) проверка гипотез о величине дисперсии нормального распределения при неизвестном среднем значении.

$S^2 = n^{-1}\sum_1^n (X_k - \bar{X})^2$ есть состоятельная оценка σ^2, распределение не зависит от μ. $\frac{nS^2}{\sigma^2}\sim$хи $-$ квадрат с N-1 степенями свободы. Критерий с критической областью $nS^2 < C$, $C = \sigma_0^2 K_{n-1}^{-1}(\alpha)$, следующей из соотношения $P_{\mu,\sigma}\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} \le \frac{C}{\sigma^2}\right) = \alpha$

13.Проверка гипотезы о величине среднего значения нормального распределения при неизвестной дисперсии (одновыборочный критерий Стьюдента).

Условия применения t- критерия: случайная выборка $X_1,\ldots,X_n$ получена из нормального распределения с неизвестным средним μ и неизвестной дисперсией σ^2.

H_0: $\mu \le \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$($H1$: $\mu < \mu_0$) или H_1: $\mu \ne \mu_0$

Уровень значимости:α

Так как $\overline{X}$ состоятельная оценка значения μ; то статистика Стьюдента

T= $\frac{\overline{X} - \mu 0}{S}$ $*\sqrt{n-1}$,где $\overline{X}$ – выборочное среднее, S^2– выборочная дисперсия (смещенная оценка), n – объем выборки.

статистика T имеет распределение Стьюдента $S_{n-1}(C)$ с $(n-1)$-ой степенью свободы.Распределение Стьюдента симметрично – $S_{n-1}(-C) = 1 - S_{n-1}(C)$. C=C(α)-критическая константа. Для критерия T > C,свободного от неизвестного значения σ, C=S_{n-1}^{-1} (1-α).Для двусторонней альтернативы с критической областью |T|>C C=S_{n-1}^{-1} (1-α/2).

Альтернатива	Размер критерия	Функция мощности m(μ; σ)
$\mathbf{H}_1 : \mu - \mu_0 > 0$	$= 1 - S_{n-1}(C)$	$= \mathbf{P}\{T > C\}$
$\mathbf{H}_1 : \mu \ - \mu_0 < 0$	$= S_{n-1}(C)$	$= \mathbf{P}\{T < C\}$
$\mathbf{H}_1 : \mu - \mu_0 \ne 0$	$= 2(1 - S_{n-1}(C))$	$= \mathbf{P}\{\lvert T \rvert > C\}$

14.Проверка гипотез о средних значениях двух нормальных распределений с общей неизвестной дисперсией (двухвыборочный критерий Стьюдента).

Условия применения критерия: случайные выборки $X_1,\ldots,X_n$ и $Y_1,\ldots,Y_m$ имеют нормальное распределение с неизвестными средними μ_1 и μ_2 и общей неизвестной дисперсией σ^2. H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 \ne \mu_2$ или H_1: $\mu_1 > \mu_2$($\mu_1 < \mu_2$)

Уровень значимости:α; Вычисляется статистика Стьюдента.

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{n s_x^2 + m\ s_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n\ + m\ - 2)}{n + m}}\ ,$$

статистика T имеет распределение $S_{n_1+n_2-2}(t)$ с (n+m-2) степенями свободы. C(α)=S_{n+m-2}^{-1} (1-α).При альтернативе H_1: $\mu_1 \ne \mu_2$ критическая константа C(α)=S_{n+m-2}^{-1} (1-α/2).

15. Проверка гипотез о значениях дисперсий двух нормальных распределений при неизвестных средних (критерий Фишера).

Условия применения критерия: две независимые случайные выборки $X_1,\dots,X_n$ и $Y_1,\dots,Y_m$ из нормальных распределений с неизвестными средними μ_1 и μ_2 и с дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ или H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.
Уровень значимости:α
Значения несмещенных выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2.
Рассмотреть критерий, основанный на статистике F = nS_x^2/mS_y^2,которая распределена как $(\mathcal{X}_{n-1}^2/\mathcal{X}_{m-1}^2)$*(σ_1^2 / σ_2^2)
Функция мощности критерия F > C (который называется критерием Фишера или F - критерием)
$m(\sigma_1^2 / \sigma_2^2)= P_{\mu1,\mu2,\sigma1,\sigma2}(F > C) = P((\mathcal{X}_{n-1}^2/\mathcal{X}_{m-1}^2)>C*(\sigma_2^2/\sigma_1^2))$

есть монотонно возрастающая функция отношения дисперсий σ_1^2 / σ_2^2.

Для ее вычисления необходимо знать распределение отношения двух независимых случайных величин, распределенных по закону хи-квадрат с n-1
и m -1 степенями свободы. Это распределение Фишера
$F_{n-1;m-1}$, плотность которого
$f_{n-1;m-1}(x) =\frac{\Gamma(\frac{n+m-2}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(\frac{m-1}{2})} * \frac{x^{\frac{n-1}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{n+m-2}{2}}}$, x > 0
Критическая константа C критерия Фишера заданного размера определяется как квантиль этого распределения: $C(\alpha)=F_{n-1,m-1}^{-1}(1-\alpha)$.

16.Проверка гипотез о вероятности успеха в испытаниях Бернулли.

Обозначим через T=числу успехов в n независимых наблюдениях. По т.Муавра-Лапласа статистика T в пределе при $n \to \infty$ имеет нормальное распределение со средним np и дисперсией $np(1-p)$. Таким образом,

$$\mathbf{P}_\theta\left\{\frac{T-np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right\} \to \Phi(x).$$

Положив в последнем соотношении $x = t^\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ и разрешив неравенство под знаком вероятности относительно p, получим нижнюю границу для p.

17.Проверка гипотез о вероятности успеха в испытаниях Бернулли (асимптотический критерий значимости)

При больших объемах выборки n используют нормальные аппроксимации биномиального распределения, получая таким образом критерий, размер которого асимптотически ($n \to \infty$) равен α. Статистика T асимптотически нормальна со средним np и дисперсией $np(1-p)$, поэтому для определения критической константы имеем асимптотический аналог

$$\Phi\left(\frac{C - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \leqslant \alpha,$$

откуда $C(\alpha) \approx np_0 - \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{np_0(1-p_0)}$. Такой метод построения критериев асимптотического уровня α применим для любой критической области, в задании которой используется асимптотически нормальная оценка тестируемого параметра.

18.Соотношение между задачами доверительного оценивания и проверки гипотез.

Если имеется состоятельный критерий проверки гипотезы $\theta = \theta_0$ при двусторонней альтернативе $\theta \neq \theta_0$, то его области принятия соответствует двусторонний доверительный интервал. Если же альтернативная гипотеза носит односторонний характер, то при альтернативе $\theta < \theta_0$ мы получаем верхнюю доверительную границу, а при $\theta > \theta_0$ – нижнюю.
Принцип двойственности применим и к доверительным интервалам, как статистическим правилам проверки гипотез: гипотеза $\theta \in \Theta_0$ отвергается тогда. и только тогда, когда $(1-\alpha)$-доверительная область принадлежит подмножеству Θ_1, и такое статистическое правило (критерий) гарантирует заданное ограничение α на вероятность ошибки первого рода.

19.Как построить $(1-\alpha)$-доверительную область для параметра θ , имея семейство критериев заданного уровня α для проверки простой гипотезы $\theta = \theta_0$ $\theta \in \Theta$

Пусть $A(\theta_0)$ -обл. принятия некот. критерия уровня α и пусть для $\forall\ \theta_0 \in \Theta$ определена

$$P_{\theta_0}\left(x^{(n)} \in A(\theta_0)\right) = \alpha.$$

Тогда подобласть параметра пр-ва $A_\theta\left(x^{(n)}\right) = \left\{\theta : x^{(n)} \in A(\theta)\right\}$ яв-ся $(1-\alpha)$ довер. областью.

20.Как проверить гипотезу $\theta \epsilon \theta_0$ с заданным уровнем значимости α , располагая (1- α)-доверительной областью.

Если имеется обл. $bn\left(x^{(n)}\right)$ и $x^{(n)} = X^{(n)}$, то гипотеза H_0 отв-ся только в том случае если $x^{(n)}$ лежит в области альтернативной.

5 вопрос

1.Наиболее мощный критерий заданного уровня для проверки простой гипотезы при простой альтернативе

Пусть X – случайная величина. Гипотеза $H_0 : \varphi_0(x)$, $H_1 : \varphi_1(x)$.

Критерий проверки H_0 при альтернативе H_1 основан на статистике правдоподобия (при выборке $X^{(n)}$). $\mathrm{L}(X^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\varphi_1(X_k)}{\varphi_0(X_k)}$

Гипотеза H_0 отвергается, если $\mathrm{L}\left(X^{(n)}\right) > C$, где критическая константа С определяется как корень уравнения $P_\theta(L\left(\alpha^{(n)}\right) > C) \leq \alpha$

Этот критерий имеет наибольшую мощность, когда выборка из распред. φ из всех критериев, размер которых не превосходит размер критерия отношения правдоподобия.

2.Понятие равномерно наиболее мощного критерия

Критерий φ называется равномерно наиболее мощным среди заданных критериев условия α, если есть вероятность отклонен. гипотезу H_0 не больше, чем у всех других критериев

3.Постановка задачи о тестировании надежности в рамках модели "отсутствие последействия" для распределения долговечности изделий.

Пусть X – долговечность изделия, t_0 – срок службы. $P_\theta(X > t_0)$ – изделие считается надёжным, если эта вероятность больше заданного P_0 $P_\theta(X > t_0) > P_0$. Если X имеет показат. распределение $F(X(\theta) = \varphi - e^{\frac{-x}{\theta}})$, то утверждение о надёжности изделия эквивалентны

4.Критическая область равномерно наиболее мощного критерия тестирования надежности в случае показательном распределении долговечности

Критическая область $\sum X_k > C$, где $C = G_n^{-1}(1-\alpha)$, где G_n^{-1} – квантиль гамма-распределения с параметром формы n

5. Функция мощности равномерно наиболее мощного критерия при проверке гипотезы надежности при показательном распределении долговечности

Функции мощности критерия φ^* как критерия различения исходных сложных гипотез $H_0 : \theta < \theta_0$ и $H_1 : \theta \geq \theta_0$, равна

$$m(\theta) = E_\theta \varphi^*\left(X^{(n)}\right) = P_\theta\left(T_n > C(\alpha)\right) = 1 - G_n\left(\frac{G_n^{-1}(1-\alpha)\theta_0}{\theta}\right), \theta > 0$$

6. Определение равномерно наиболее точной верхней доверительной границы

Верхняя $(1-\alpha) -$ доверительная граница $\overline{\theta_n}$ называется равномерно наиболее точной, если она равномерно по всем θ и θ' , удовлетворяющим неравенству $\theta' > \theta$, минимизирует вероятность

$$P_\theta(\,\overline{\theta_n}(X^{(n)}) \geq \theta')$$

7. Критерий хи-квадрат для проверки простой гипотезы о распределении наблюдаемой случайной величины

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

где ν_i – количество в i-ой области разбиения, p_i – теоретическая вероятность попадания в эту область. Гипотеза H отвергается, если $x^2 \geq C$, C – критическая константа.

8. Критерий хи-квадрат для проверки гипотезы о распределении наблюдаемой случайной величины, когда распределение зависит от параметров с неизвестными значениями

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i(\theta))^2}{np_i(\theta)} > C, \text{где ищется минимум}$$

$\theta(\nu_1 \dots \nu_n)$ есть r-s-1 распределение

10 Критерий хи-квадрат независимости признаков (критерий сопряженности)

Наблюдается n объектов и объект имеет два признака.
1й признак имеет s уровней, а 2й объект n уровней.
s>=2, n>=2 Пусть p_{ij} вероятность того, что объект имеет i-й признак по 1 и j-q признак по 2.
Проверяется гипотеза $p_{ij}=p_i*p_j$

11 Критерий однородности хи-квадрат

Имеется s популяция M(n_i, $\dot{p}_i$, r), i=1,s с r исходами вектора вероятности $\dot{p}_i$=($\dot{p}_{i1}$, … $\dot{p}_{r1}$) и количество n_i наблюдений
Проверяется гипотеза совпадения вероятности исходов $\dot{p}_1$ = … $\dot{p}_n$