

# Auto-encoders y variational auto-encoders

---

Auto-encoders y variational auto-encoders

---

## Introducción

# Introducción

## Aprendizaje no supervisado

Hasta ahora hemos estado hablando siempre de **aprendizaje profundo supervisado**, pero también podemos resolver problemas **no supervisados**.

### Objetivo:

- Extraer patrones directamente de los datos “sin etiquetar”, solo tenemos  $x$  y no  $y$ .

### Tareas comunes:

- Modelos generativos: Entender la distribución de  $x$  y generar nuevas muestras.
- Autoencoders: “Comprimir”  $x$  proyectándolo en un espacio de menor dimensión.

# Introducción

## Aprendizaje no supervisado



*The brain has about  $10^{14}$  synapses and we only live for about  $10^9$  seconds. So we have a lot more parameters than data. This motivates the idea that we must do a lot of **unsupervised learning** since the perceptual input (including proprioception) is the only place we can get  $10^5$  dimensions of constraint per second.*

Geoffrey Hinton, 2014

# Introducción

## Aprendizaje no supervisado



*We need tremendous amount of information to build machines that have common sense and generalize.*

Yann LeCun, 2016

### ■ "Pure" Reinforcement Learning (cherry)

- ▶ The machine predicts a scalar reward given once in a while.
- ▶ **A few bits for some samples**



### ■ Supervised Learning (icing)

- ▶ The machine predicts a category or a few numbers for each input
- ▶ Predicting human-supplied data
- ▶ **10→10,000 bits per sample**

### ■ Unsupervised/Predictive Learning (cake)

- ▶ The machine predicts any part of its input for any observed part.
- ▶ Predicts future frames in videos
- ▶ **Millions of bits per sample**

■ (Yes, I know, this picture is slightly offensive to RL folks. But I'll make it up)

# Introducción

## Modelos generativos

Un **modelo generativo** es un modelo probabilístico  $p$  que puede ser utilizado como un “simulador de datos”.

Su propósito es generar datos sintéticos pero realistas de alta dimensión

$$\mathbf{x} \sim p_{\theta}(\mathbf{x}),$$

que se asemejen lo más posible a la distribución desconocida de datos  $p(\mathbf{x})$ .

# Introducción

## Modelos generativos

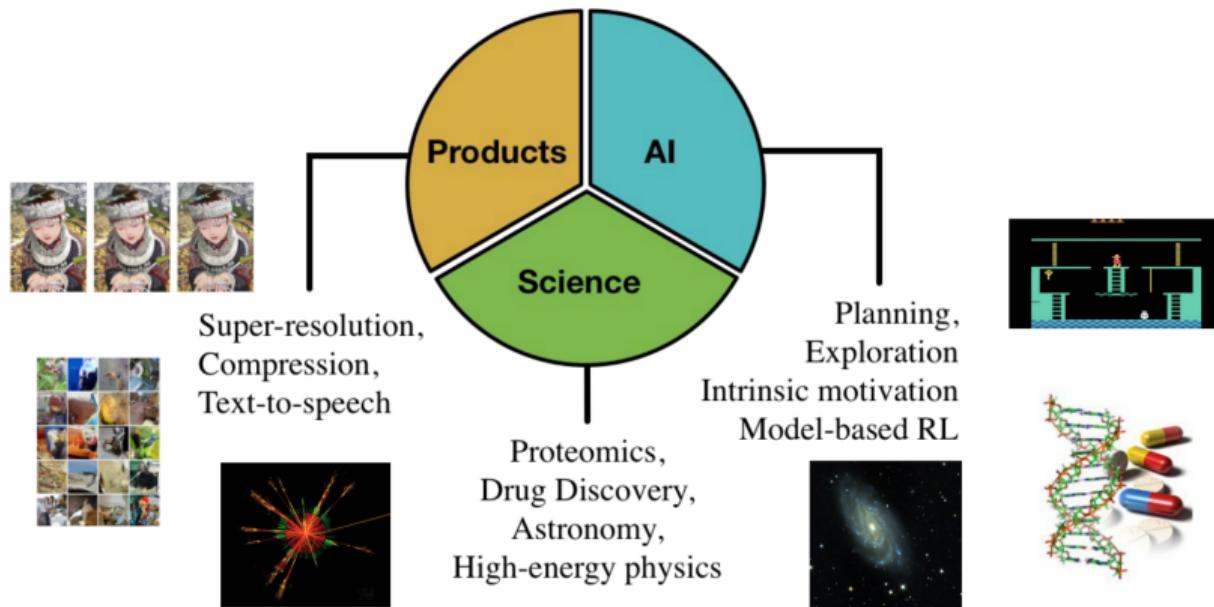


Ley de Moore de los modelos generativos de imágenes

# Introducción

## Modelos generativos

Algunas aplicaciones:



Los modelos generativos tienen un rol muy importante en muchos problemas actuales

Auto-encoders y variational auto-encoders

---

## Auto-encoders

# Auto-encoders

Espacio original  $\mathcal{X}$



# Auto-encoders



# Auto-encoders



# Auto-encoders



# Auto-encoders

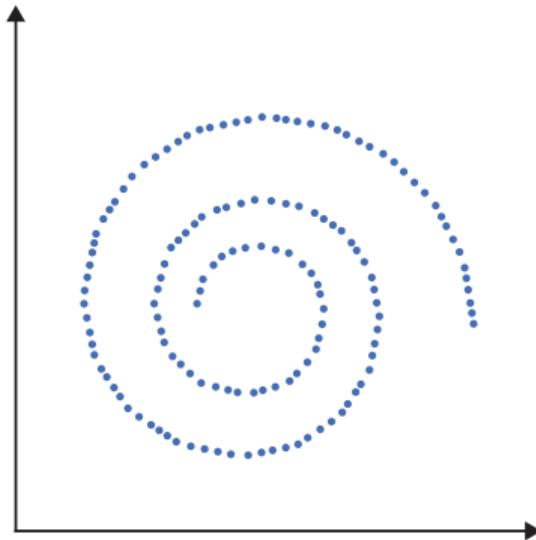


# Auto-encoders



# Auto-encoders

Espacio original  $\mathcal{X}$

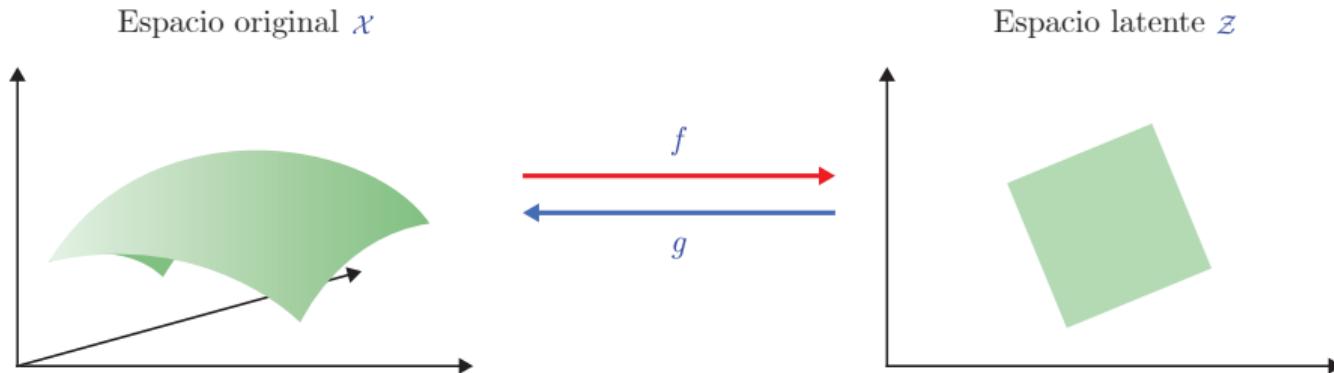


# Auto-encoders

Un **auto-encoder** es una función compuesta a partir de:

- Un **encoder**  $f$  que proyecta del espacio original  $\mathcal{X}$  al espacio latente  $\mathcal{Z}$ .
- Un **decoder**  $g$  que proyecta de vuelta al espacio original.

El objetivo es que  $g \circ f$ , es decir, que la composición de funciones se aproxime lo máximo posible a los datos originales o función identidad.



## Auto-encoders

Siendo  $p(\mathbf{x})$  la distribución de los datos en  $\mathcal{X}$ , un buen auto-encoder puede caracterizarse con la *reconstruction loss*:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p(\mathbf{x})} [||\mathbf{x} - g \circ f(\mathbf{x})||^2] \approx 0.$$

Esta función de pérdida mide como de bien el auto-encoder puede reconstruir los datos originales.

Dadas dos funciones de proyección con parámetros  $f(\cdot; \theta_f)$  and  $g(\cdot; \theta_g)$ , el entrenamiento consiste aprender los parámetros que minimicen dicha loss:

$$\theta_f, \theta_g = \arg \min_{\theta_f, \theta_g} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ||\mathbf{x}_i - g(f(\mathbf{x}_i, \theta_f), \theta_g)||^2.$$

# Auto-encoders

## Ejemplo

Imaginemos, por ejemplo, un auto-encoder lineal con

$$f : \mathbf{z} = \mathbf{U}^T \mathbf{x}$$

$$g : \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{U}\mathbf{z},$$

con  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{p \times d}$ , el *reconstruction loss* se reduce a

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p(\mathbf{x})} \left[ \|\mathbf{x} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T \mathbf{x}\|^2 \right].$$

Auto-encoders y variational auto-encoders

---

## Deep Auto-encoders

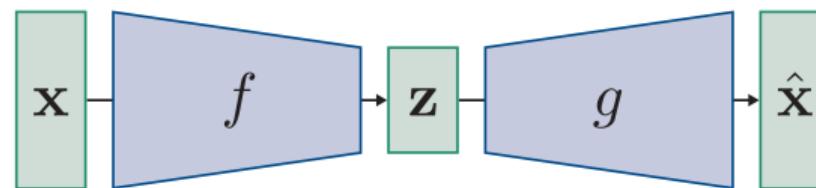
# Deep Auto-encoders

## Mayor profundidad

Para obtener mejores resultados, en vez de proyecciones lineales se suelen utilizar redes neuronales profundas en  $f$  y  $g$ .

Algunos ejemplos:

- Combinando un MLP encoder  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  con un MLP decoder  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ .
- Combinando un CNN encoder  $f : \mathbb{R}^{w \times h \times c} \rightarrow \mathbb{R}^d$  con un decoder  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{w \times h \times c}$  compuesto de capas convolucionales reciprocas.



# Deep Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales  $\mathbf{x}$  con  $d = 784$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 3 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de CNN con  $d = 2$ .

7 2 1 0 9 1 9 9 8 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 5 9 9 6 6 5  
9 0 7 9 0 1 5 1 5 9 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de PCA con  $d = 2$ .

9 3 1 0 9 1 9 9 0 9 0 0  
9 0 1 3 9 9 3 9 9 0 9 0  
9 0 9 9 0 1 3 1 3 0 9 0

# Deep Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales  $\mathbf{x}$  con  $d = 784$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 3 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de CNN con  $d = 4$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 9 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 3 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 0 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de PCA con  $d = 4$ .

9 2 7 0 9 1 9 9 0 9 0 0  
9 0 1 3 9 9 3 9 9 0 6 5  
9 0 9 9 0 1 3 1 3 0 9 0

# Deep Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales  $\mathbf{x}$  con  $d = 784$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 3 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de CNN con  $d = 8$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 3 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de PCA con  $d = 8$ .

7 3 1 0 4 1 9 9 0 7 0 0  
9 0 1 0 9 7 3 4 9 6 0 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 0

# Deep Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales  $\mathbf{x}$  con  $d = 784$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de CNN con  $d = 16$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de PCA con  $d = 16$ .

7 2 1 0 9 1 4 9 6 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

# Deep Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales  $\mathbf{x}$  con  $d = 784$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de CNN con  $d = 32$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Resultado de auto-encoder  $g \circ f$  creado a partir de PCA con  $d = 32$ .

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

# Deep Auto-encoders

## Interpolación

### Interpolación de puntos

Para comprender la representación latente aprendida, podemos elegir dos muestras  $x$  y  $x'$  al azar e interpolar muestras a lo largo de la línea en el espacio latente.

Espacio original  $\mathcal{X}$



Espacio latente  $\mathcal{Z}$



# Deep Auto-encoders

## Interpolación

### Interpolación de puntos

Para comprender la representación latente aprendida, podemos elegir dos muestras  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  al azar e interpolar muestras a lo largo de la línea en el espacio latente.



# Deep Auto-encoders

## Interpolación

### Interpolación de puntos

Para comprender la representación latente aprendida, podemos elegir dos muestras  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  al azar e interpolar muestras a lo largo de la línea en el espacio latente.

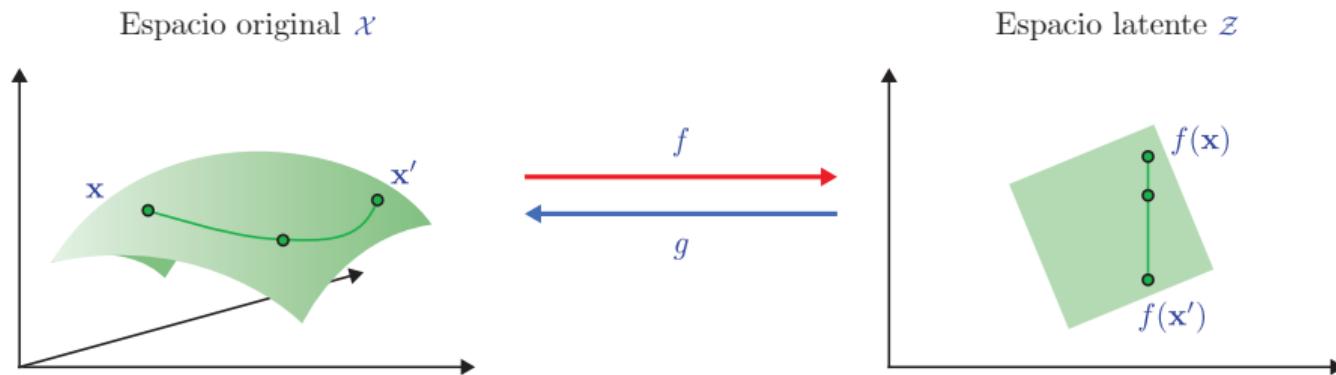


# Deep Auto-encoders

## Interpolación

### Interpolación de puntos

Para comprender la representación latente aprendida, podemos elegir dos muestras  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  al azar e interpolar muestras a lo largo de la línea en el espacio latente.



# Deep Auto-encoders

## Interpolación

Interpolación de PCA ( $d = 32$ ).



# Deep Auto-encoders

## Interpolación

Interpolación de Auto-encoder ( $d = 32$ ).

5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6

8 8 8 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 9

6 6 6 6 6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

6 6 6 6 6 6 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

3 3 3 3 3 3 3 7 7 7 7 7 7 7 7 7

2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

# Deep Auto-encoders

## Generación

### Generar nuevos datos

Además de generar valores intermedios entre dos datos existentes, también podemos utilizar el decoder para obtener la representación en  $\mathcal{X}$  de valores desconocidos en  $\mathcal{Z}$ .

Se introduce un modelo de densidad  $q$  en  $\mathcal{Z}$  y se utiliza  $g$  para mapear en  $\mathcal{X}$ .



# Deep Auto-encoders

## Generación

### Generar nuevos datos

Además de generar valores intermedios entre dos datos existentes, también podemos utilizar el decoder para obtener la representación en  $\mathcal{X}$  de valores desconocidos en  $\mathcal{Z}$ .

Se introduce un modelo de densidad  $q$  en  $\mathcal{Z}$  y se utiliza  $g$  para mapear en  $\mathcal{X}$ .



# Deep Auto-encoders

## Generación

### Generar nuevos datos

Además de generar valores intermedios entre dos datos existentes, también podemos utilizar el decoder para obtener la representación en  $\mathcal{X}$  de valores desconocidos en  $\mathcal{Z}$ .

Se introduce un modelo de densidad  $q$  en  $\mathcal{Z}$  y se utiliza  $g$  para mapear en  $\mathcal{X}$ .



# Deep Auto-encoders

## Generación

### Generar nuevos datos

Además de generar valores intermedios entre dos datos existentes, también podemos utilizar el decoder para obtener la representación en  $\mathcal{X}$  de valores desconocidos en  $\mathcal{Z}$ .

Se introduce un modelo de densidad  $q$  en  $\mathcal{Z}$  y se utiliza  $g$  para mapear en  $\mathcal{X}$ .



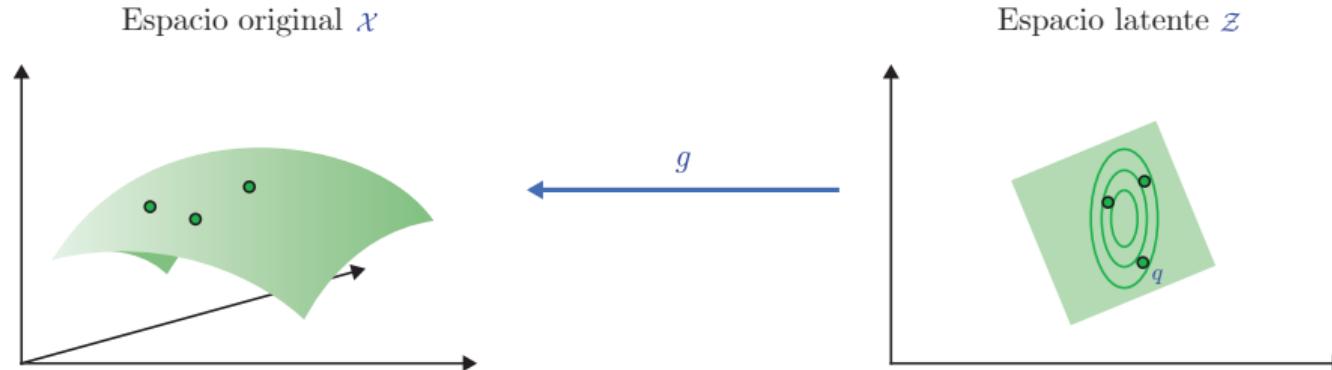
# Deep Auto-encoders

## Generación

### Generar nuevos datos

Además de generar valores intermedios entre dos datos existentes, también podemos utilizar el decoder para obtener la representación en  $\mathcal{X}$  de valores desconocidos en  $\mathcal{Z}$ .

Se introduce un modelo de densidad  $q$  en  $\mathcal{Z}$  y se utiliza  $g$  para mapear en  $\mathcal{X}$ .



# Deep Auto-encoders

## Generación

Por ejemplo, si utilizamos una distribución gaussiana  $q(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$ , donde  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\Sigma}$  se estiman a partir de los datos de entrenamiento:

Generación de datos con auto-encoder ( $d = 16$ ).

Three rows of handwritten digits generated by a 16-dimensional auto-encoder. The digits are somewhat blurry and lack fine detail.

Row 1: 4 8 8 3 2 7 3 4 3 6 5 4  
Row 2: 0 9 3 4 8 5 8 5 3 1 6  
Row 3: 3 5 8 4 9 2 3 4 8 3 3 3

Generación de datos con auto-encoder ( $d = 32$ ).

Three rows of handwritten digits generated by a 32-dimensional auto-encoder. These digits appear more distinct and closer to the original training data than those from the 16-dimensional model.

Row 1: 2 7 3 5 8 4 7 8 4 5 3 8 3  
Row 2: 4 5 8 2 0 4 9 3 6 2 8 0 7  
Row 3: 1 4 5 3 6 5 4 7 8 5 6 3 8

Los resultados son malos porque la distribución seleccionada es **simple e inadecuada**.

Auto-encoders y variational auto-encoders

---

## Denoising Auto-encoders

# Denoising Auto-encoders

## Eliminar ruido

Además de la ya mencionada reducción de dimensión, los auto-encoders también son capaces de **restaurar datos dañados o con ruido**.

En este caso particular podemos ignorar la estructura encoder/decoder, lo que nos dejaría con:

$$h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

Esta expresión hace referencia a un **denoising auto-encoder**.

El objetivo es optimizar  $h$  de tal forma que, cualquier perturbación  $\tilde{\mathbf{x}}$  de la señal  $\mathbf{x}$  sea restaurada a  $\mathbf{x}$  de nuevo, por tanto

$$h(\tilde{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{x}.$$

# Denoising Auto-encoders

## Ejemplo 2D

Podemos ilustrar este comportamiento con datos en 2D, añadiendo ruido Gaussiano y utilizando la MSE:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|x_n - h(x_n + \epsilon_n; \theta)\|^2$$

donde  $x_n$  son los datos originales y  $\epsilon_n$  el ruido Gaussiano.

# Denoising Auto-encoders

Ejemplo 2D



Conjunto de datos original  $\mathbf{x}$ .

# Denoising Auto-encoders

Ejemplo 2D



Datos con ruido adicional  $\tilde{x} = x + \epsilon$ .

# Denoising Auto-encoders

## Ejemplo 2D



Distribución aprendida por el denoising auto-encoder.

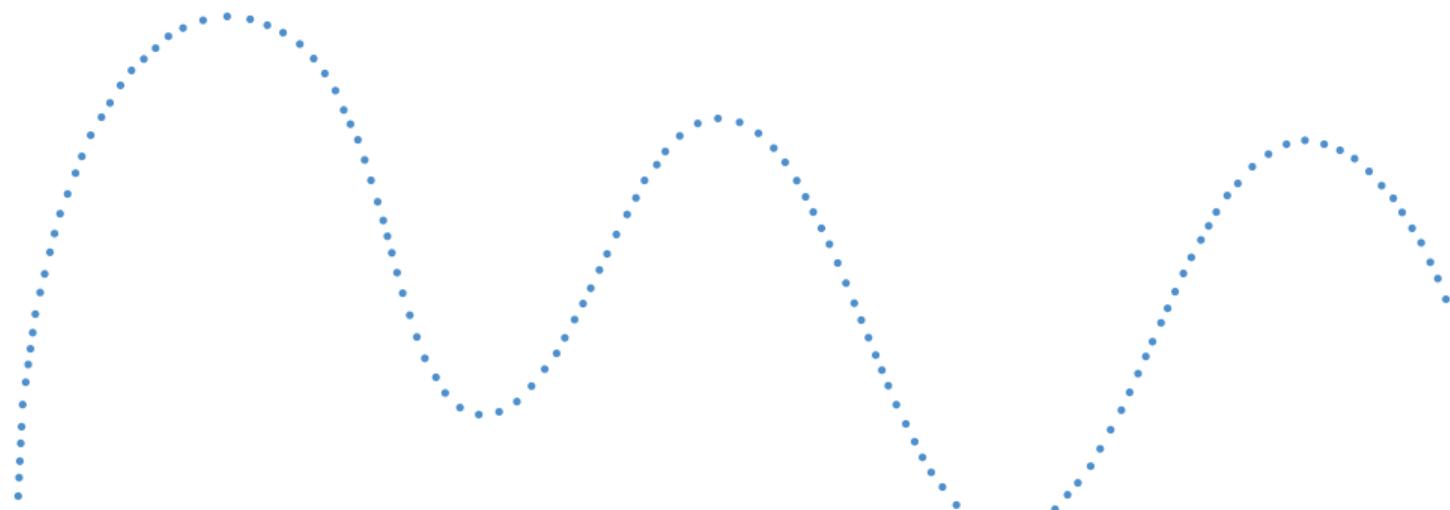
# Denoising Auto-encoders

Ejemplo 2D



# Denoising Auto-encoders

Ejemplo 2D



Resultado  $h(\tilde{x})$  del decoder.

# Denoising Auto-encoders

## Ejemplo MNIST

Podemos hacer lo mismo con datos más complejos, por ejemplo el conjunto MNIST.

Cuando trabajamos con imágenes, los tipos de *ruido* que podemos aplicar son más variados.

Original



Eliminar pixels



Desenfoque



Máscara de bloqueo



# Denoising Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales.

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Datos con el 50% de los pixels eliminados.

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Datos reconstruidos.

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

# Denoising Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales.

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 4 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Datos con el 90% de los pixels eliminados.

7 3 1 0 4 1 4 9 4 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 4 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Datos reconstruidos.

7 3 1 0 4 1 4 9 4 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 4 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

# Denoising Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales.

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Datos con desenfoque ( $\sigma = 4$ ).

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Datos reconstruidos.

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

# Denoising Auto-encoders

Ejemplo MNIST

Datos originales.

7 2 1 0 4 1 4 9 5 9 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 0 1 3 1 3 4 7 2

Datos con máscara de bloqueo de tamaño  $16 \times 16$  pixels.



Datos reconstruidos.

7 2 1 0 4 1 4 9 6 7 0 6  
9 0 1 5 9 7 8 4 9 6 6 5  
4 0 7 4 3 1 3 1 3 4 7 2

# Denoising Auto-encoders

## Ejemplo MNIST

### Multiples soluciones

La distribución previa  $p(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{x}})$  (probabilidad de obtener  $\mathbf{x}$  dado  $\tilde{\mathbf{x}}$ ), **puede ser multimodal**, es decir, puede tener **múltiples soluciones posibles**.

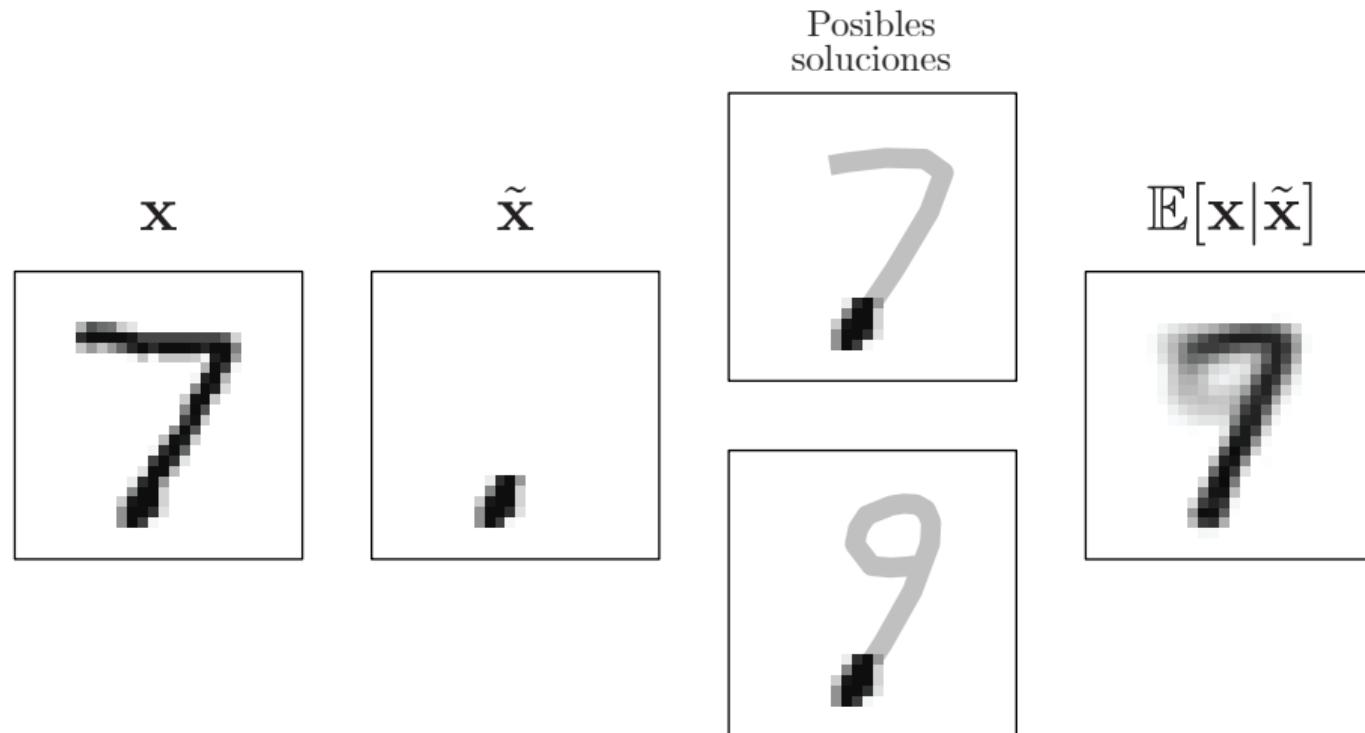
Si entrenamos un autoencoder utilizando MSE entonces la mejor reconstrucción que podemos esperar es el “promedio” de las posibles soluciones

$$h(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{E}[\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{x}}],$$

lo que es improbable que coincida con  $p(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{x}})$ .

# Denoising Auto-encoders

Ejemplo MNIST



Auto-encoders y variational auto-encoders

---

## Variational Auto-encoders

# Variational Auto-encoders

## Motivación

Como veíamos anteriormente, si intentamos **generar nuevos datos** en  $\mathcal{X}$  a partir de unos puntos en  $\mathcal{Z}$  asumiendo que siguen una distribución  $q$ , los resultados no son prometedores.



# Variational Auto-encoders

## Motivación

Este problema proviene de la distribución  $q$  seleccionada. Esta es **muy simple e inadecuada**, los datos en  $\mathcal{Z}$  se comportan de manera diferente.



El espacio latente tiene discontinuidades y al tomar una muestra en estas zonas intermedias el decodificador produce salidas poco realistas.

# Variational Auto-encoders

## Motivación

Si conociesemos  $p(z|x)$ , es decir, cómo se distribuyen las posibles codificaciones latentes  $z$  para cada dato observado  $x$ , no tendríamos este problema.

Esta distribución:

- Nos permitiría entender que regiones del espacio latente son válidas para una  $x$  dada.
- **No es un punto único:** para una  $x$  pueden existir varias codificaciones latentes.
- **No se puede calcular:** Requiere conocer  $p(x)$  (teorema de Bayes), y eso implica integrar sobre todas las posibles combinaciones de  $z$ .

# Variational Auto-encoders

## Motivación

Si conociesemos  $p(z|x)$ , es decir, cómo se distribuyen las posibles codificaciones latentes  $z$  para cada dato observado  $x$ , no tendríamos este problema.

Esta distribución:

- Nos permitiría entender que regiones del espacio latente son válidas para una  $x$  dada.
- **No es un punto único:** para una  $x$  pueden existir varias codificaciones latentes.
- **No se puede calcular:** Requiere conocer  $p(x)$  (teorema de Bayes), y eso implica integrar sobre todas las posibles combinaciones de  $z$ .

## Ejemplo MNIST

Para una imagen de un '7', tendríamos que considerar **todas** las codificaciones posibles  $z$  que podrían generarla (decoder). Esto es inviable, el número de posibles  $z$  es infinito

# Variational Auto-encoders

## Motivación

### Solución

Forzar al encoder del auto-encoder para que aprenda una codificación latente que se aproxime a una distribución simple y conocida, por ejemplo:  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .

¿Cómo?:

- El encoder generará una distribución gaussiana para cada entrada  $\mathbf{x}$ .
- Para ello produce dos vectores: uno de medias  $\mu$  y otro de desviaciones  $\sigma$ .
- Estos definen una distribución normal multivariante.

# Variational Auto-encoders

## Motivación

### Solución

Forzar al encoder del auto-encoder para que aprenda una codificación latente que se aproxime a una distribución simple y conocida, por ejemplo:  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .

### ¿Cómo?:

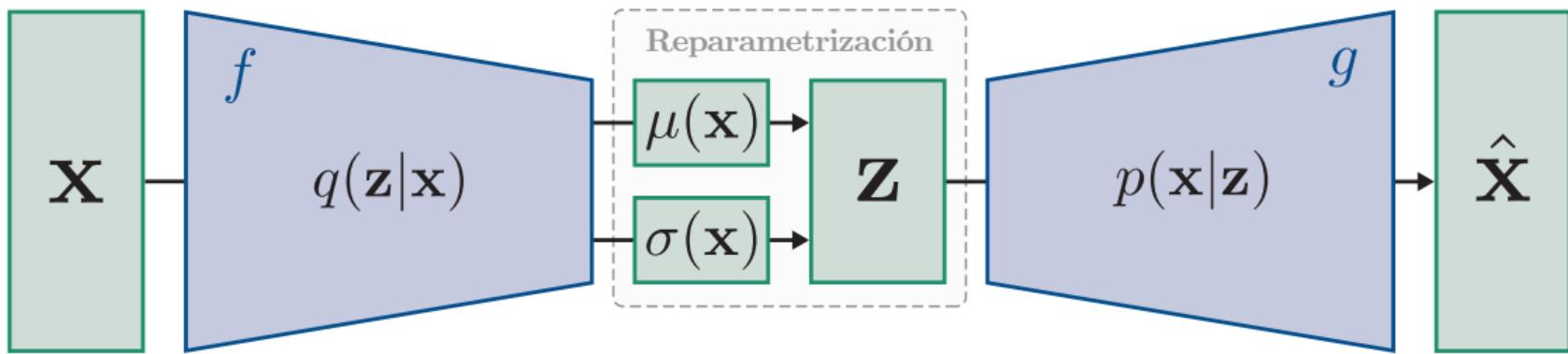
- El encoder generará una distribución gaussiana para cada entrada  $\mathbf{x}$ .
- Para ello produce dos vectores: uno de medias  $\mu$  y otro de desviaciones  $\sigma$ .
- Estos definen una distribución normal multivariante.

### Ejemplo

Si  $\mathbf{z}$  sigue una  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , sabremos que la mayoría de las codificaciones útiles estarán cerca del origen, y por tanto bastará con muestrear alrededor para generar ejemplos válidos.

# Variational Auto-encoders

Arquitectura de un VAE:

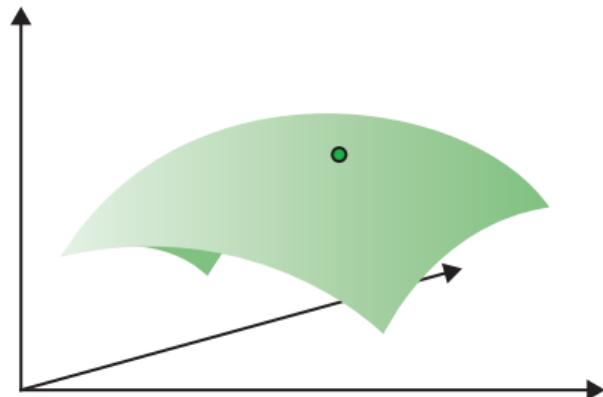


## Truco de la reparametrización

El decoder necesita de un vector para generar una salida, pero  $\mathbf{z}$  ahora es una distribución. Esto se soluciona muestreando aleatoriamente de  $\mathbf{z}$  de una forma diferenciable.

# Variational Auto-encoders

Espacio original  $\mathcal{X}$

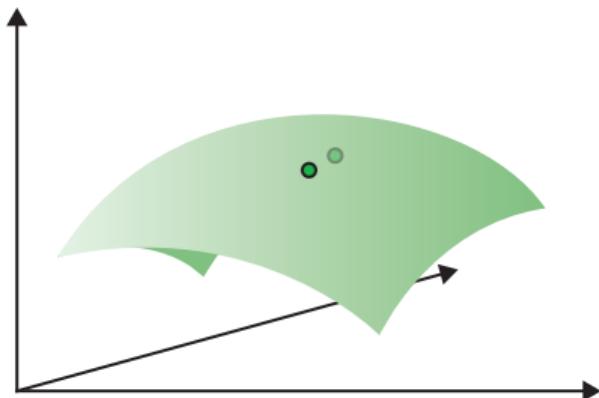


Espacio latente  $\mathcal{Z}$



# Variational Auto-encoders

Espacio original  $\mathcal{X}$



$g$

Espacio latente  $\mathcal{Z}$



# Variational Auto-encoders

## Evidence Lower Bound (ELBO)

Estos cambios **no garantizan** que se aprenda una distribución normal, el encoder puede acabar aprendiendo cualquier distribución. Tendremos que modificar también la función de pérdida.

Esta loss se denomina ELBO y está formada por:

$$\log p(\mathbf{x}) \geq \underbrace{\mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})}[\log p_\theta(\mathbf{x}|\mathbf{z})]}_{\text{Error de reconstrucción}} - \underbrace{D_{\text{KL}}(q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x}) || \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}))}_{\text{KL Divergence}}$$

- ① **Error reconstrucción:** Mide la calidad de reconstrucción de  $\mathbf{x}$  a partir de muestras de  $\mathbf{z}$ .
- ② **KL divergence:** Diferencia entre la distribución aprendida  $q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  y la deseada  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .

# Variational Auto-encoders

## Evidence Lower Bound (ELBO)

Estos cambios **no garantizan** que se aprenda una distribución normal, el encoder puede acabar aprendiendo cualquier distribución. Tendremos que modificar también la función de pérdida.

Esta loss se denomina ELBO y está formada por:

$$\log p(\mathbf{x}) \geq \underbrace{\mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})}[\log p_\theta(\mathbf{x}|\mathbf{z})]}_{\text{Error de reconstrucción}} - \underbrace{D_{\text{KL}}(q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x}) || \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}))}_{\text{KL Divergence}}$$

- ① **Error reconstrucción:** Mide la calidad de reconstrucción de  $\mathbf{x}$  a partir de muestras de  $\mathbf{z}$ .
- ② **KL divergence:** Diferencia entre la distribución aprendida  $q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  y la deseada  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .

## Ejemplo MNIST

Si el encoder para un '4' produce una gaussiana (2D) con media [2, 2] y desviación [0.1, 0.1] (muy alejado de  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ), el término de la divergencia KL penalizará al modelo.

# Variational Auto-encoders

## Ejemplo

Consideremos como datos  $\mathbf{d}$  el conjunto MNIST:

A 10x10 grid of handwritten digits from the MNIST dataset. The digits are arranged in a 10x10 pattern. Some digits are bolded or have specific features, such as the bolded '2' at position (9, 9) and the bolded '3' at position (4, 5). The digits are rendered in a black font on a white background.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

# Variational Auto-encoders

Ejemplo



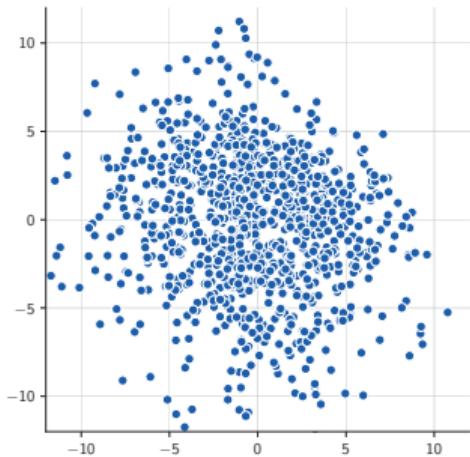
Figure 5: Random samples from learned generative models of MNIST for different dimensionalities of latent space.

(Kingma and Welling, 2013)

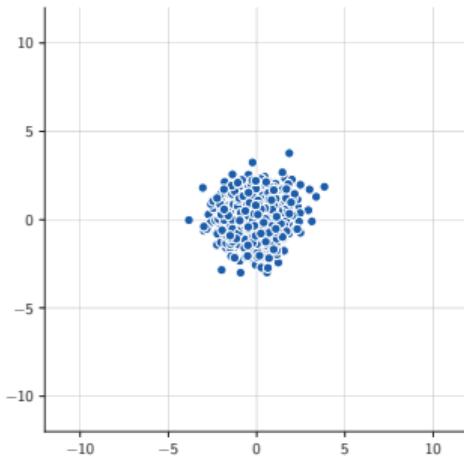
# Variational Auto-encoders

Ejemplo

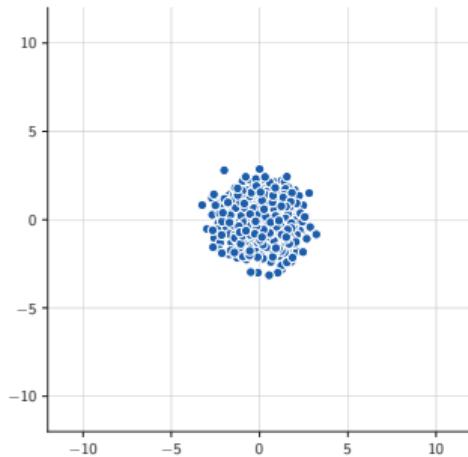
Auto-encoder



Variational auto-encoder



$\mathcal{N}(0, 1)$



# Variational Auto-encoders

## Ejemplo



Figure 4: Visualisations of learned data manifold for generative models with two-dimensional latent space, learned with AEVB. Since the prior of the latent space is Gaussian, linearly spaced coordinates on the unit square were transformed through the inverse CDF of the Gaussian to produce values of the latent variables  $\mathbf{z}$ . For each of these values  $\mathbf{z}$ , we plotted the corresponding generative  $p_{\theta}(\mathbf{x}|\mathbf{z})$  with the learned parameters  $\theta$ .

(Kingma and Welling, 2013)

# Variational Auto-encoders

## Aplicaciones

Original images



Compression rate: 0.2bits/dimension

JPEG



JPEG-2000

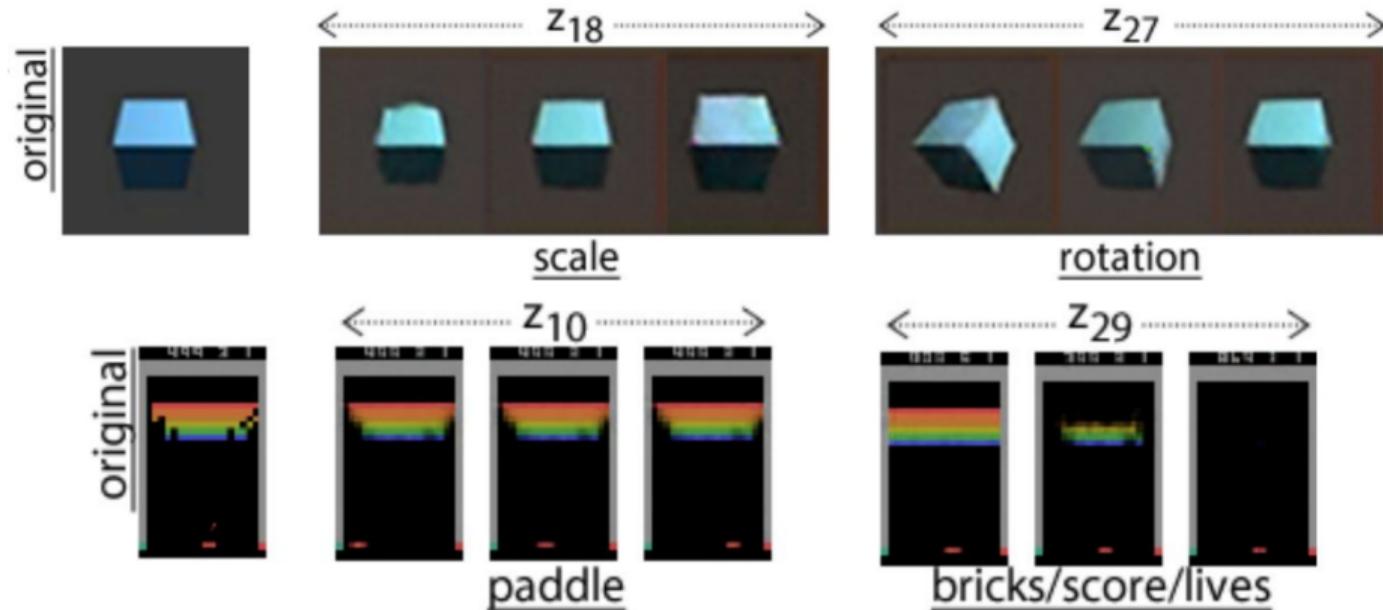
RVAE v1

RVAE v2

Compresión jerárquica de imágenes y otros datos, por ejemplo, en sistemas de videoconferencia (Gregor et al, 2016).

# Variational Auto-encoders

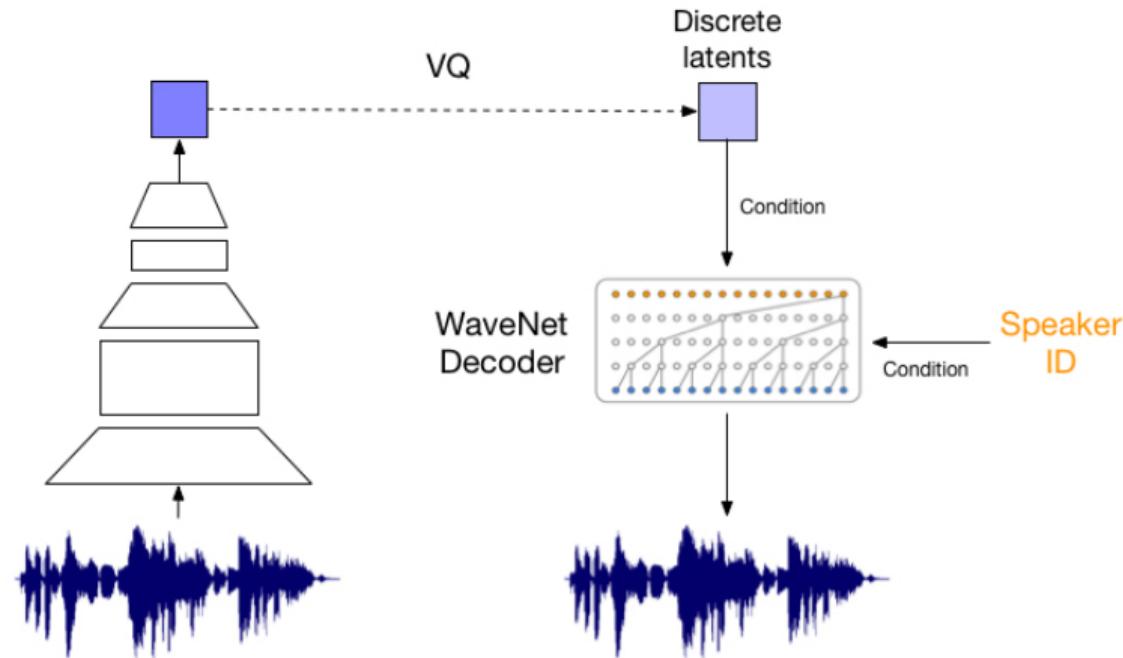
## Aplicaciones



Comprender los factores de variación y las invarianzas (Higgins et al, 2017).

# Variational Auto-encoders

## Aplicaciones



Transferencia de estilo de voz (van den Oord et al, 2017).

Auto-encoders y variational auto-encoders

---

## Referencias

# Referencias

- ① **Lecture 11: Auto-encoders and variational auto-encoders**
- ② **Deep Learning Course**
- ③ **Variational autoencoders**