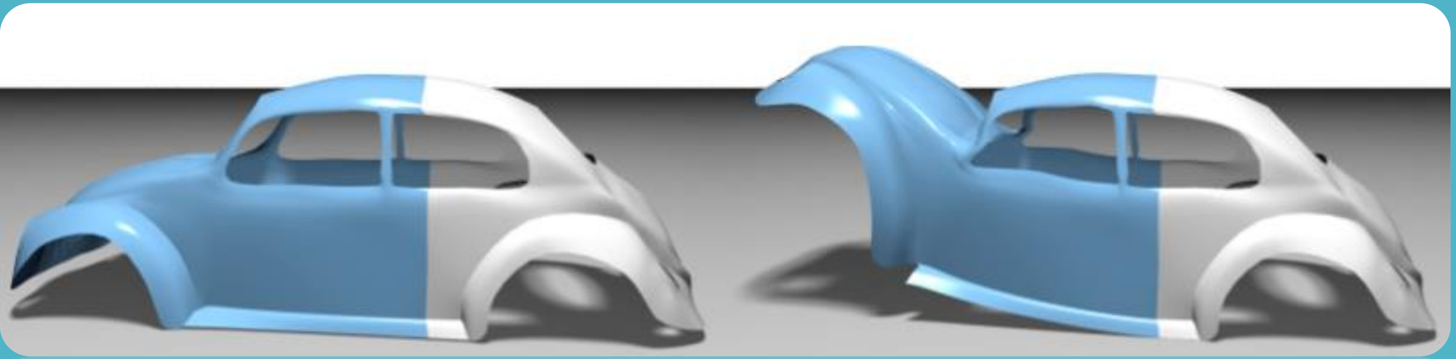
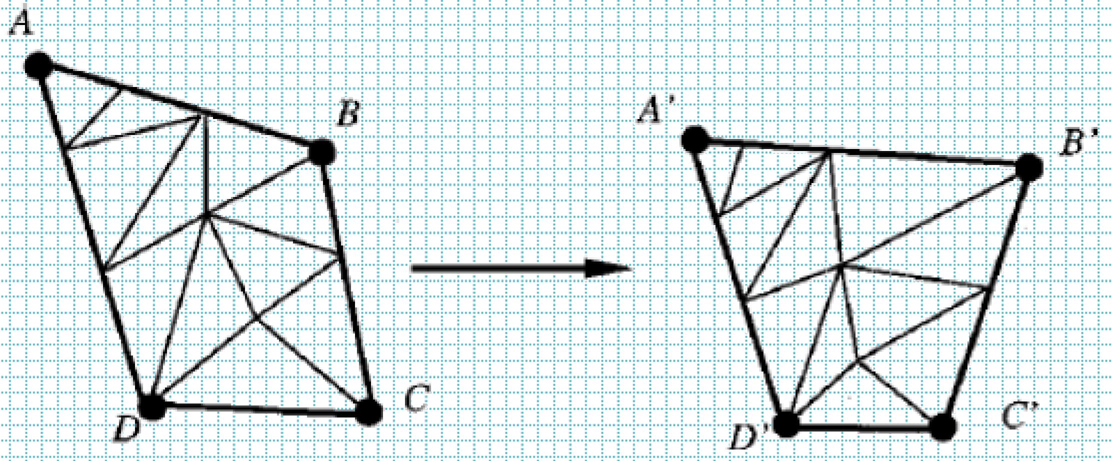


Imagen de: graphics.uni-bielefeld.de/research/deformation/

Deformación

Ricardo Salazar Ramírez



Contenido

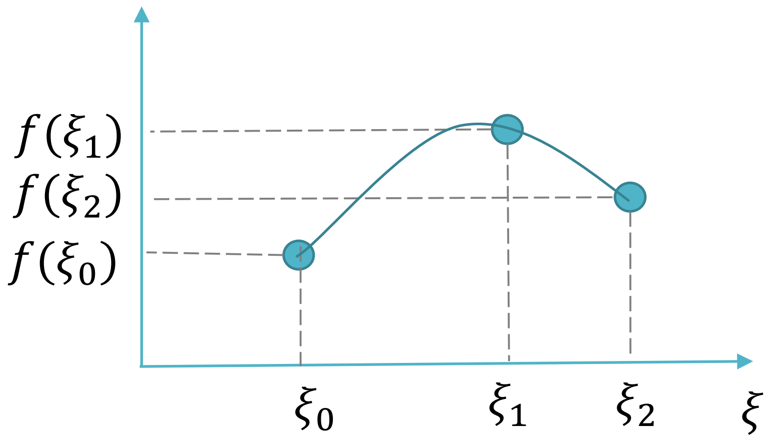
Repaso: Interpolación

Deformación: general

Métodos de deformación del espacio

$$\{X'\} = f(\{X\})$$

Interpolación

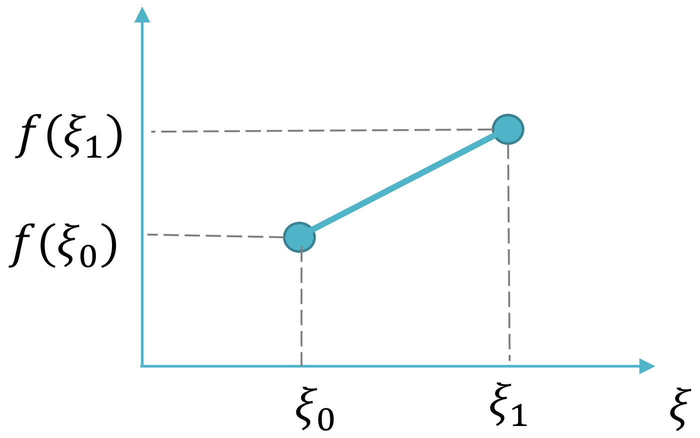


Dado un conjunto de puntos, ¿que curva pasa por ellos?

Interpolación de Lagrange: Lineal

Dado un par de puntos, $\{(\xi_0, f(\xi_0)), (\xi_1, f(\xi_1))\}$, hallar el polinomio que pasa por los puntos.

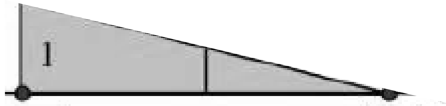
$$P(\xi) = l_0(\xi) f(\xi_0) + l_1(\xi) f(\xi_1)$$

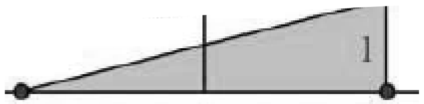


$l_0(\xi)$ y $l_1(\xi)$?

$$l_0(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \qquad l_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0}$$

Funciones base





Notación común parámetros → $\xi, \eta, \zeta, \mathrm{u}, \mathrm{t}, s$

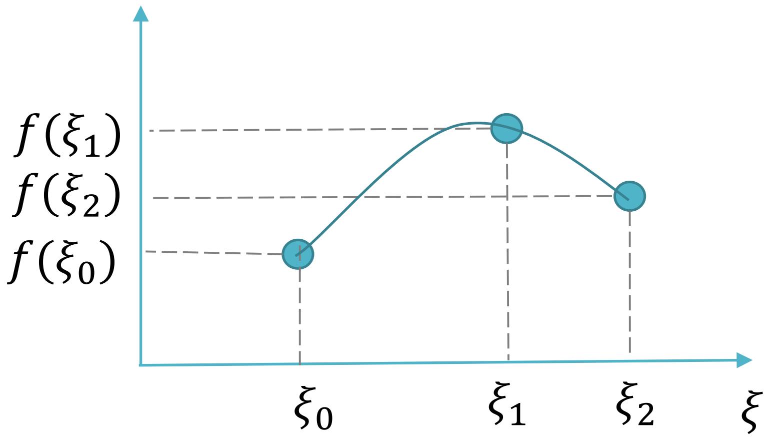
E.g.

Dados, $\{(2,2)\ y\ (4,1))\}$ hallar las funciones base y el polinomio interpolante

Interpolación de Lagrange: Cuadrática

Dados un tres puntos, $\{(\xi_0, f(\xi_0)), (\xi_1, f(\xi_1)), (\xi_2, f(\xi_2))\}$, hallar el polinomio que pasa por los puntos.

$$P(\xi) = l_0(\xi) f(\xi_0) + l_1(\xi) f(\xi_1) + l_2(\xi) f(\xi_2)$$



$l_0(\xi)$, $l_1(\xi)$ y $l_2(\xi)$?

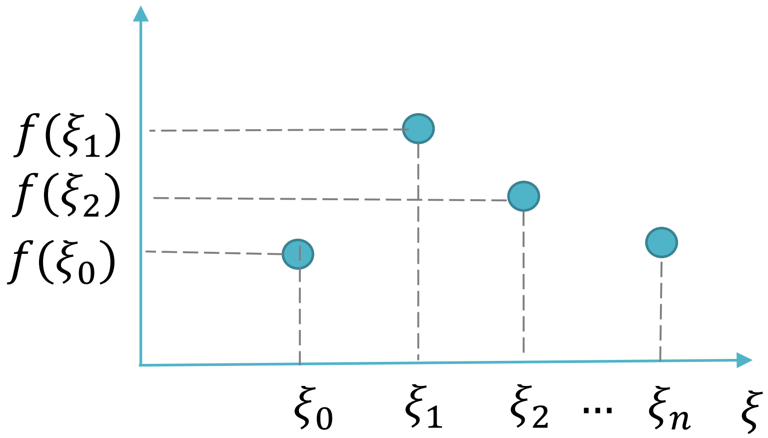
Funciones base

$$l_0(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_0 - \xi_2} \qquad l_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \qquad l_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_2 - \xi_0} \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

Interpolación de Lagrange: grado N

Dado un conjunto de n+1 puntos, $\{(t_0, f(t_0)), (t_1, f(t_1)), \ldots, (t_n, f(t_n))\}$, hallar el polinomio que pasa por los puntos.

$$l_i^{\,n}(\xi) = \frac{\xi-\xi_0}{\xi_i-\xi_0}\frac{\xi-\xi_1}{\xi_i-\xi_1}\frac{\cdots}{\cdots}\frac{\xi-\xi_{i-1}}{\xi_i-\xi_{i-1}}\frac{\xi-\xi_{i+1}}{\xi_i-\xi_{i+1}}\frac{\cdots}{\cdots}\frac{\xi-\xi_n}{\xi_i-\xi_n} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(\xi-\xi_j)}{(\xi_i-\xi_j)}$$



Notar que:

$$l_i^{\,n}(\xi_j) = \begin{cases} 1 & si \quad j = i \\ 0 & si \quad j \neq i \end{cases}$$

E.g.

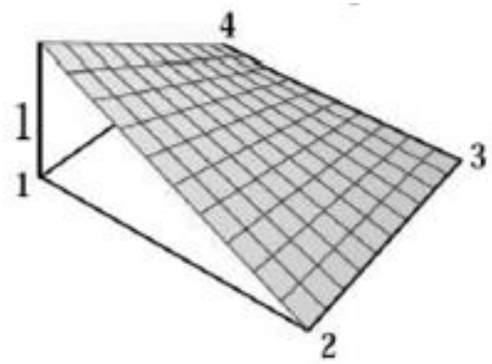
Dados, $\{(-1,3), (0,2)\ y\ (2,0))\}$ hallar las funciones base y el polinomio interpolante

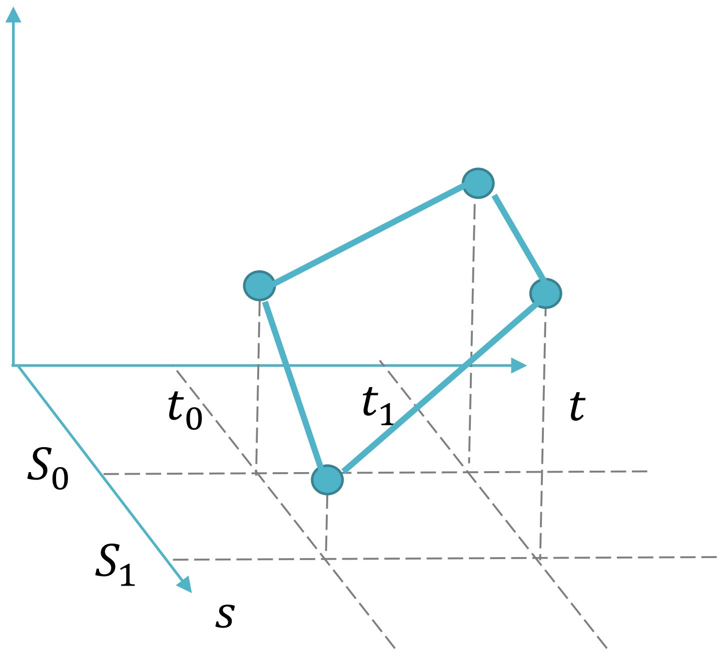
Interpolación de Lagrange: 2D – Bilineal

Dados, $\{(\xi_0, s_0, f(t_0, s_0)), (t_1, s_0, f(t_1, s_0)), (t_0, s_1, f(t_0, s_1)), (t_1, s_1, f(t_1, s_1))\}$, hallar la superficie polinómica que pasa por los puntos.

$$P(t,s) = l_0(t)l_0(s)\, f(t_0, s_0) + l_1(t)l_0(s)\, f(t_1, s_0)$$

$$+l_0(t)l_1(s)\, f(t_0, s_1) + l_1(t)l_1(s)\, f(t_1, s_1)$$





E.g.

Dados los tonos en escala de grises en 4 puntos en el plano x-y (C=0 -> Negro; C=1-> (Blanco)) $\{(0,0,C=0.8),(0,1,C=0),(1,0,C=0)\ y\ (1,1,C=1)\}$, interpolar la distribución de tonos dentro del cuadrado definido por dichos puntos.

Deformación: General

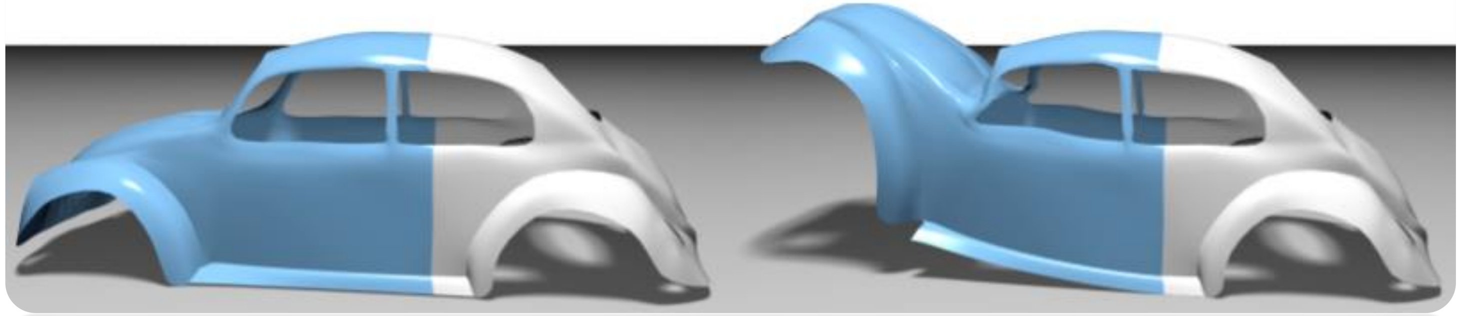


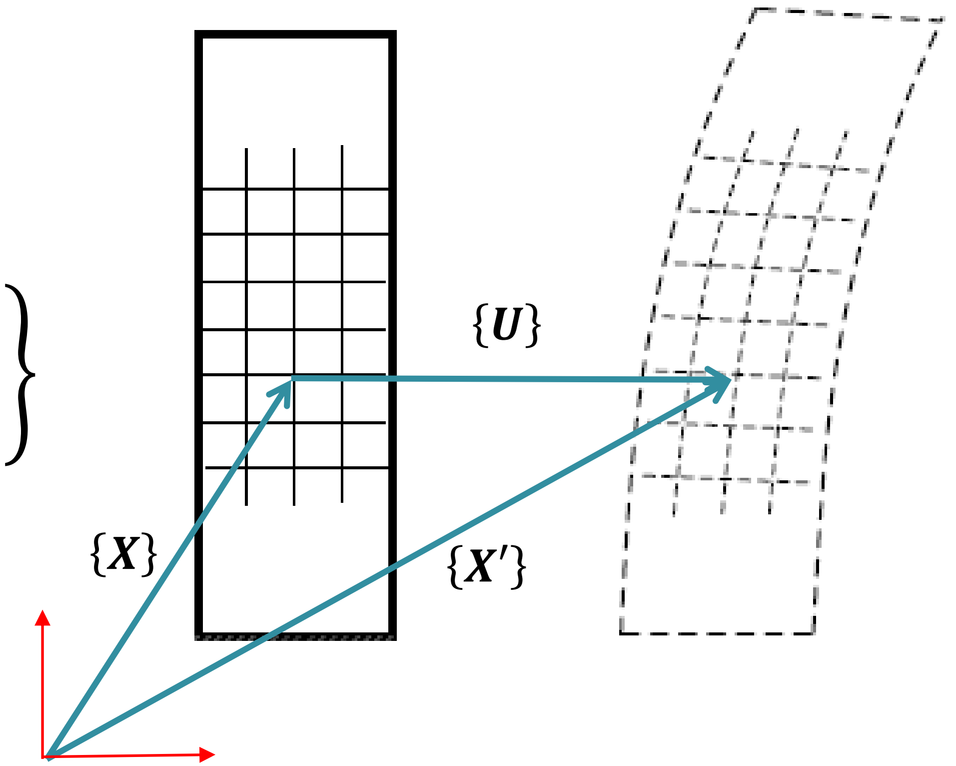
Imagen de: graphics.uni-bielefeld.de/research/deformation/

Deformación: General

$$\{\boldsymbol{X'}\} = f(\{\boldsymbol{X}\})$$

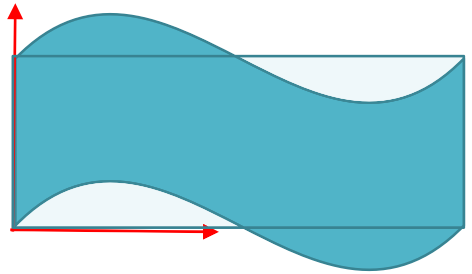
$$\begin{Bmatrix} X'_x \\ X'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(X'_x, X'_y) \\ f_2(X'_x, X'_y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_x(X_x, X_y) \\ u_y(X_x, X_y) \end{Bmatrix}$$

funciones (normalmente NO lineales)
! la imaginación es el límite !



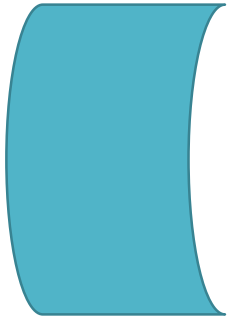
E.g.

Onda

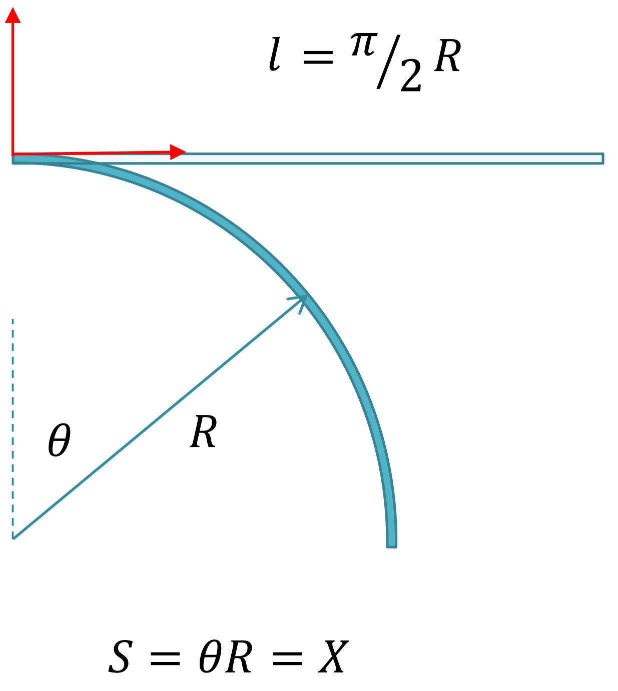


$$\begin{Bmatrix} X'_x \\ X'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y + sen(X_x) \end{Bmatrix}$$

Cuadrática?



E.g.

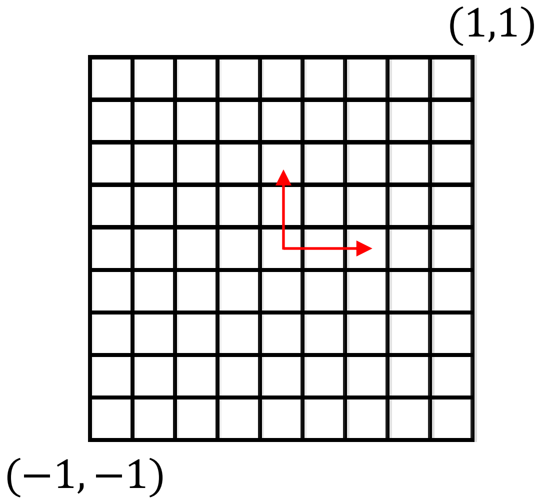


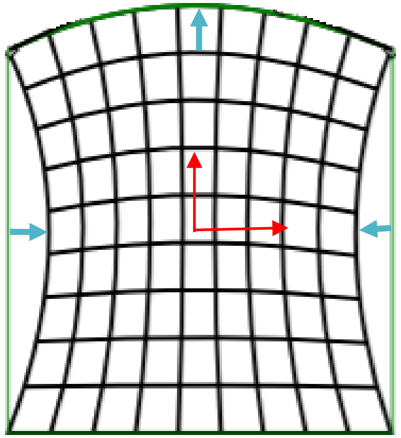
$$\begin{Bmatrix} X'_x \\ X'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Rsen(\theta) \\ Rsen(\theta) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X'_x \\ X'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Rsen\left({}^{X_x}/_{R}\right) \\ Rcos\left({}^{X_x}/_{R}\right) \end{Bmatrix}$$

E.g.

Como utilizamos lo que aprendimos en interpolación para representar la siguiente deformación?

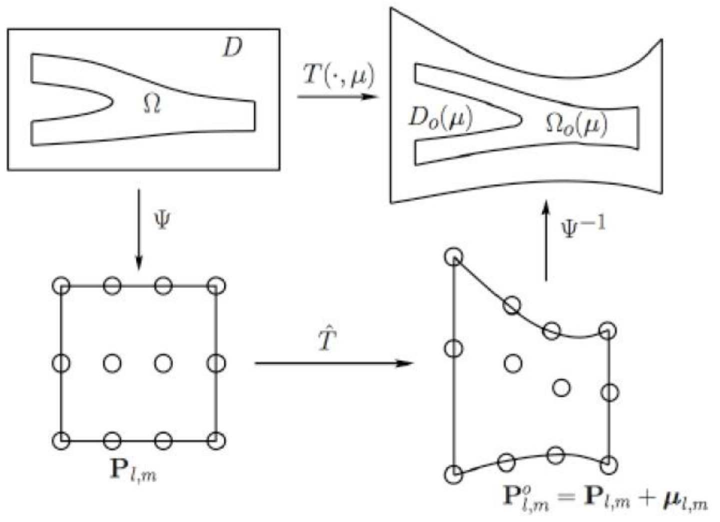




$$\begin{Bmatrix} X'_x \\ X'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}$$

Deformación: “Morphing boxes”

https://www.youtube.com/watch?v=nTGSYKf0m1c



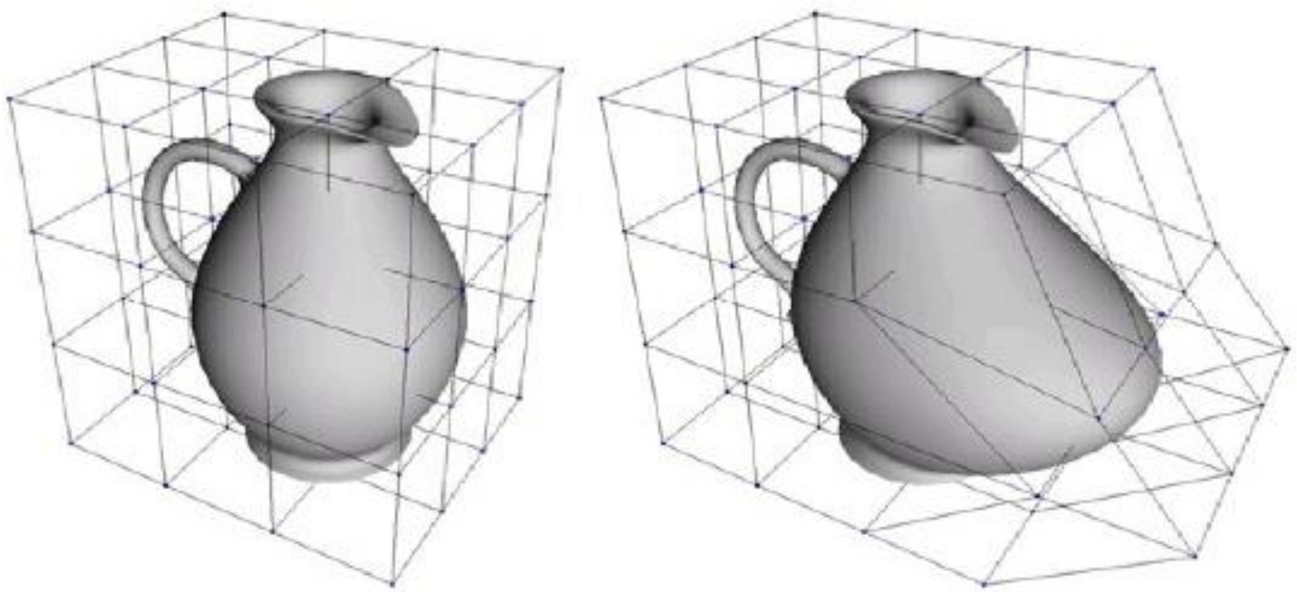
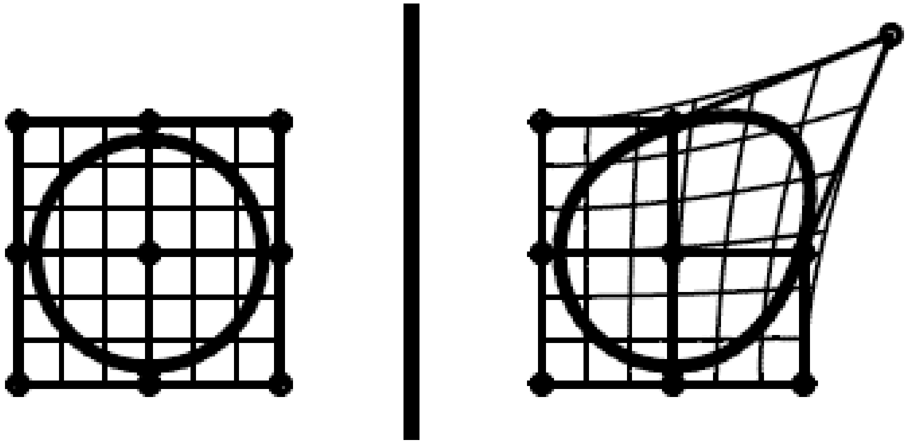


Imagen de: softimage.wiki.softimage.com/xsidocs/deforms_Lattices.htm

Métodos de deformación del espacio

Sinonimos: Morphing, FFD, Lattices, Morphing boxes



X_x

$$\begin{Bmatrix} X'_x \\ X'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_x(X_x, X_y) \\ u_y(X_x, X_y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_x(\xi, \eta) \\ u_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix}$$

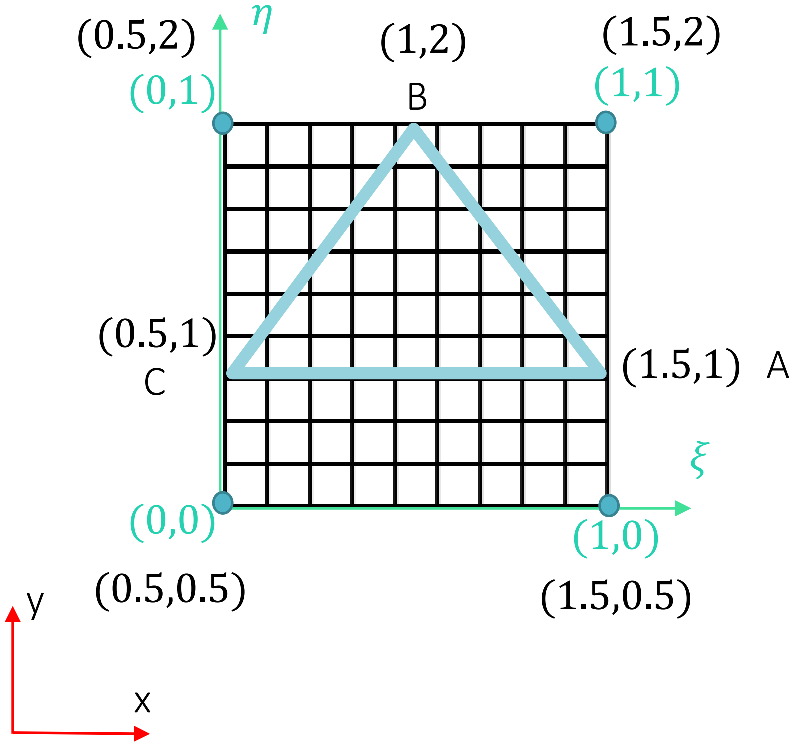
$$\begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} fn1\,(\xi, \eta) \\ fn2(\xi, \eta) \end{Bmatrix}$$

- Crear una “Morphing box” que incorpora la parte de la figura que deseo deformar

- Deformar la “Morphing box” moviendo los puntos que la definen (“Handles”) o puntos de control

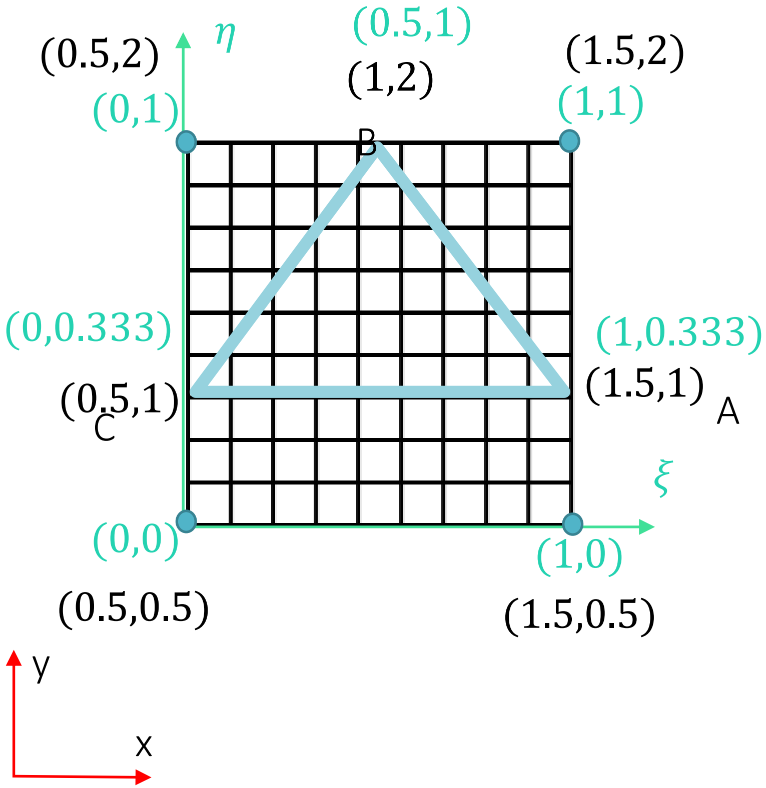
- La geometría embebida se deforma según la “Morphing box”

Métodos de deformación del espacio



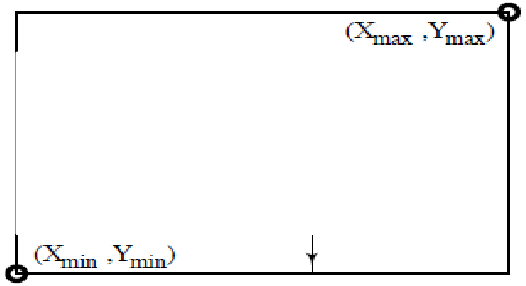
1) Defino la ubicación de la “morphing box”, sus “handles”, y el espacio paramétrico.

Métodos de deformación del espacio



2) Calculo las coordenadas (ξ, η) de cada punto, que deseo deformar, en el espacio paramétrico.

Nota: Para un punto en una región paramétrica rectangular de 0 a 1, ξ y η son igual a:

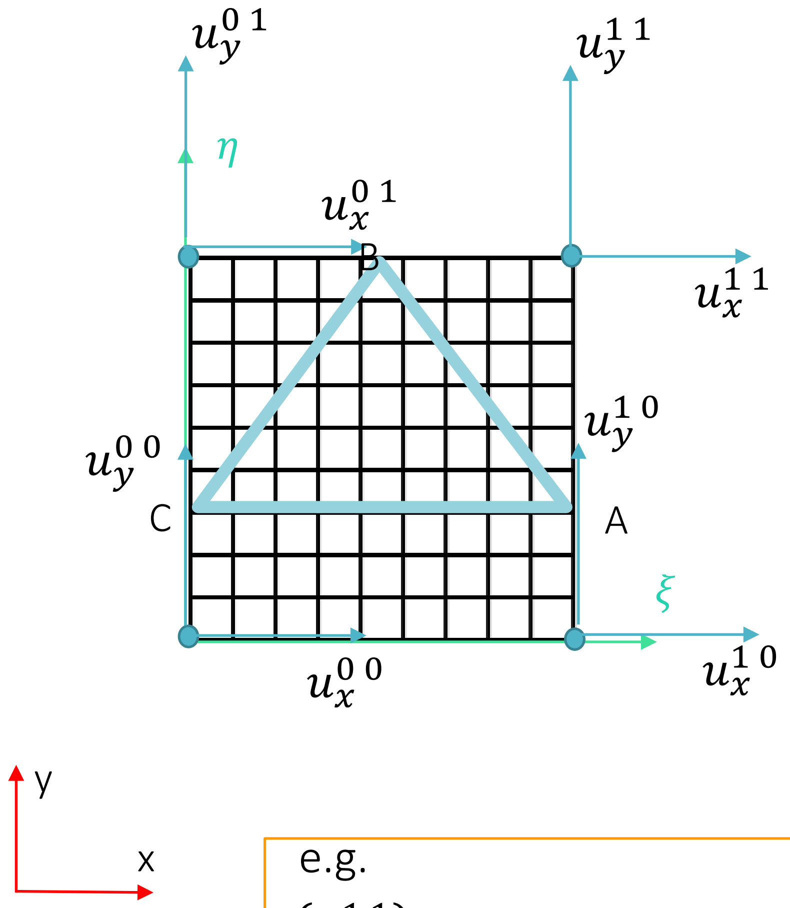


e.g.

$$\xi_A = \frac{2.5 - 0.5}{2.5 - 0.5} = 1 \quad \eta_A = \frac{1 - 0.5}{2 - 0.5} = 0.333$$

$$\xi = \frac{x - X_{min}}{X_{max} - X_{min}} \qquad \eta = \frac{y - Y_{min}}{Y_{max} - Y_{min}}$$

Métodos de deformación del espacio



3) Deformo la "morphing box" desplazando las "handles" o puntos de control. Obtengo la función de deformación:

$$\begin{Bmatrix} X'_x \\ X'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_x(\xi,\eta) \\ u_y(\xi,\eta) \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow$$

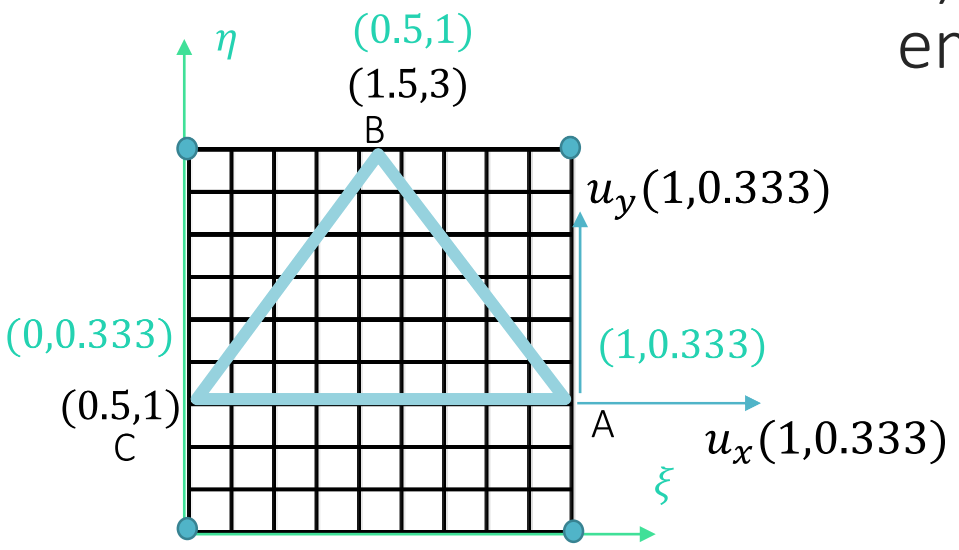
$$\begin{Bmatrix} u_x(\xi,\eta) \\ u_y(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = l_0(\xi)l_0(\eta)\begin{Bmatrix} u_x^{0\,0} \\ u_y^{0\,0} \end{Bmatrix} + l_1(\xi)l_0(\eta)\begin{Bmatrix} u_x^{1\,0} \\ u_y^{1\,0} \end{Bmatrix}$$

$$+ l_0(\xi)l_1(\eta)\begin{Bmatrix} u_x^{0\,1} \\ u_y^{0\,1} \end{Bmatrix} + l_1(\xi)l_1(\eta)\begin{Bmatrix} u_x^{1\,1} \\ u_y^{1\,1} \end{Bmatrix}$$

e.g.

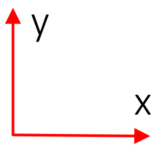
$\begin{Bmatrix} u_x^{1\,1} \\ u_y^{1\,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$;el resto $= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$; ->> $\begin{Bmatrix} u_x(\xi,\eta) \\ u_y(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = l_1(\xi)l_1(\eta)\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$

Métodos de deformación del espacio



4) Calculo el desplazamiento de cada punto embebido.

$$\begin{Bmatrix} X'^{\,1}_x \\ X'^{\,1}_y \\ X'^{\,2}_x \\ X'^{\,2}_y \\ \vdots \\ X'^{\,n}_x \\ X'^{\,n}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X^1_x \\ X^1_y \\ X^2_x \\ X^2_y \\ \vdots \\ X^n_x \\ X^n_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_x(\xi_1,\eta_1) \\ u_y(\xi_1,\eta_1) \\ u_x(\xi_2,\eta_2) \\ u_y(\xi_2,\eta_2) \\ \vdots \\ u_x(\xi_n,\eta_n) \\ u_y(\xi_n,\eta_n) \end{Bmatrix}$$

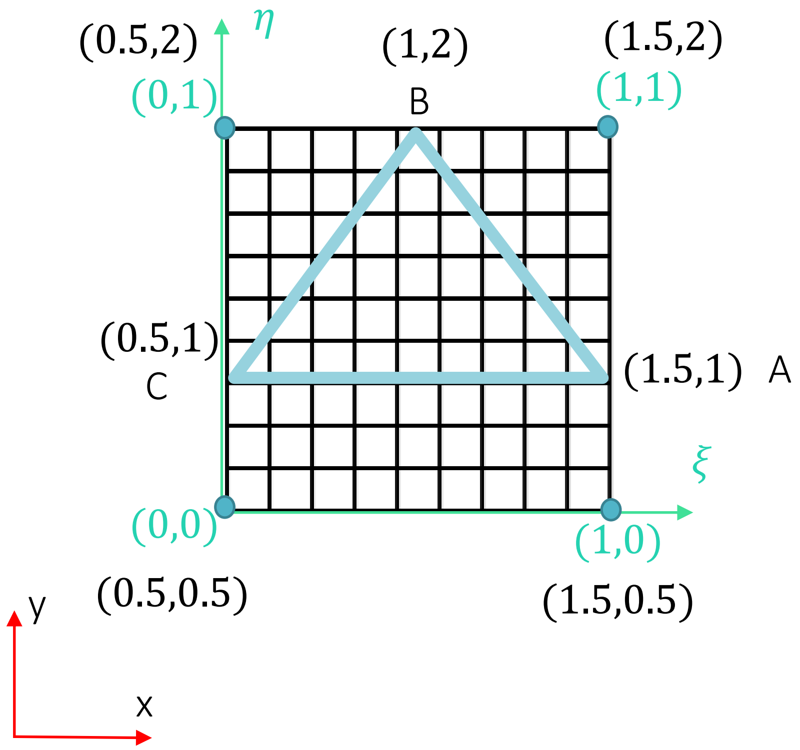


e.g.

$$\begin{Bmatrix} X'^{\,A}_x \\ X'^{\,A}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_x(1{,}0.333) \\ u_y(1{,}0.333) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix} + l_1(1)l_1(0/333)\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$$

E.g.

EL punto superior izquierdo de la morphing box se desplaza 0.3 en x. Calcular donde quedan los puntos A,B y C



Métodos de deformación del espacio

Mayor control sobre las deformaciones: B-Splines y funciones base radiales RBF.

Ver :http://graphics.uni-bielefeld.de/research/deformation/

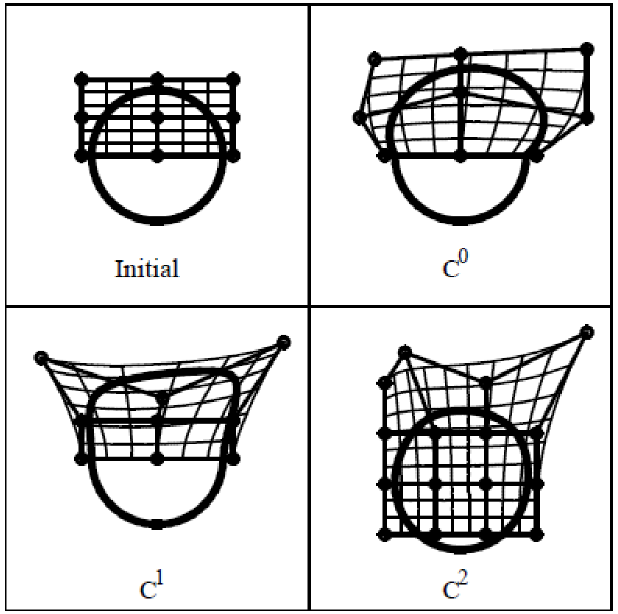
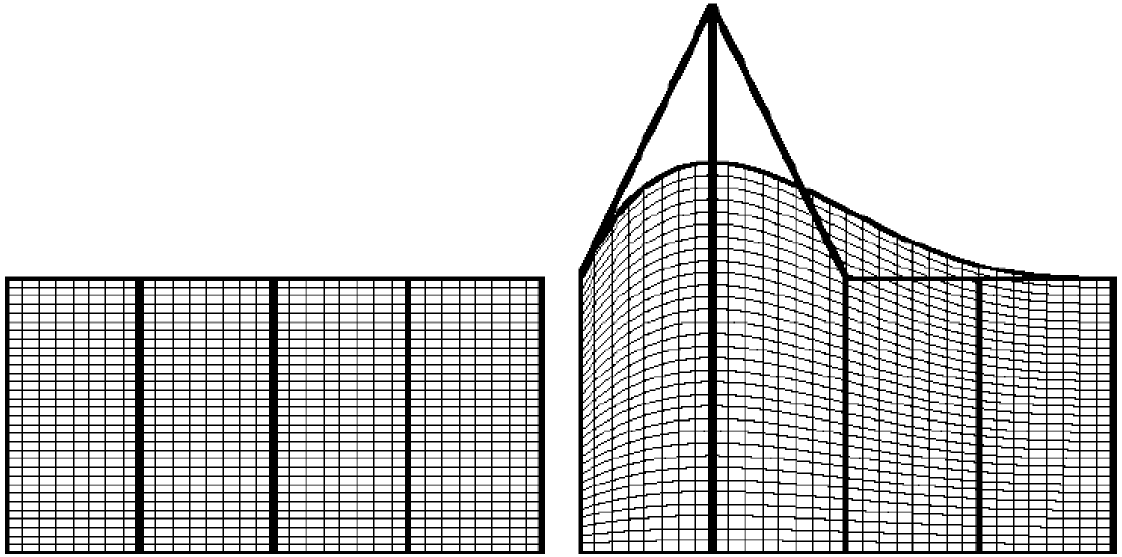


Figure 14.5: Continuity control



Referencias y fuentes

1. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. Duncan, Marsh. Springer 2005
2. COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN. Thomas W. Sederberg
3. softimage.wiki.softimage.com/xsidocs/deforms_Lattices.htm

Muchas Gracias