Coleção
SCHAUM

Problema Resolvido

Matemática Discreta

Terceira edição

Mais de 450 problemas resolvidos

- Explicações claras e concisas de todos os conceitos
- Inclui conjuntos, teoria dos grafos, álgebra Booleana, cálculo proposicional, máquinas de Turing e muito mais!

A AJUDA PERFEITA PARA SEUS ESTUDOS!

Seymour Lipschutz e Marc Lipson

bookman

SEYMOUR LIPSCHUTZ é docente do Departamento de Matemática da Temple University e lecionou no Polytechnic Institute of Brooklyn. Obteve seu Ph.D. no Courant Institute of Mathematical Sciences da New York University, em 1960. É um dos autores mais prolíficos da Coleção Schaum e escreveu também *Probability*: *Finite Mathematics*, 2.ed.; *Beginning Linear Algebra*; *Set Theory*; *Essential Computer Mathematics* e *Álgebra Linear*, 2.ed. (publicado pela Bookman Editora).

MARC LARS LIPSON é docente do Departamento de Matemática da University of Virginia e lecionou na University of Georgia. Obteve seu Ph.D. em finanças na University of Michigan, em 1994. É também coautor com Seymour Lipschutz de *2000 Solved Problems in Discrete Mathematics* e de *Álgebra Linear*, 3.ed. (publicado pela Bookman Editora).

L767m Lipschutz, Seymour.
Matemática discreta [recurso eletrônico] / Seymour Lipschutz, Marc Lars Lipson ; tradução técnica: Adonai Schlup Sant'anna. – 3. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2013.
(Coleção Schaum)

Editado também como livro impresso em 2013.
ISBN 978-85-65837-78-1

1. Matemática. 2. Matemática discreta. I. Lipson, Marc Lars. II. Título.

CDU 51

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

Capítulo 5

Técnicas de Contagem

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo desenvolve algumas técnicas para determinar, sem enumeração direta, o número de resultados possíveis de um evento em particular ou o número de elementos de um conjunto. Tal contagem sofisticada é, às vezes, chamada de *análise combinatória*. Ela inclui o estudo de permutações e combinações.

5.2 PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM

Há dois princípios básicos de contagem usados ao longo deste capítulo. O primeiro envolve adição e, o segundo, multiplicação.

Princípio da Regra da Soma:
Suponha que algum evento E possa ocorrer de m maneiras e um segundo evento F possa ocorrer de n maneiras. Suponha também que ambos os eventos não podem acontecer simultaneamente. Então E ou F podem ocorrer de $m + n$ maneiras.

Princípio da Regra do Produto:
Suponha que existe um evento E que possa ocorrer de m maneiras e, independente deste, há um segundo evento F que pode ocorrer de n maneiras. Então, combinações de E e F podem ocorrer de mn maneiras.

Os princípios acima podem ser estendidos para três ou mais eventos. Ou seja, suponha que um evento E_1 possa ocorrer de n_1 maneiras, um segundo evento E_2 possa ocorrer de n_2 maneiras e, seguindo E_2, um terceiro evento E_3 possa ocorrer de n_3 maneiras e assim por diante. Então:

Regra da Soma: Se nenhum par de eventos pode ocorrer ao mesmo tempo, logo um dos eventos pode ocorrer de:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots \text{ maneiras.}$$

Regra do Produto: Se os eventos ocorrem um após o outro, então todos os eventos podem ocorrer na ordem indicada de:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \text{ maneiras.}$$

Exemplo 5.1 Suponha que uma faculdade tenha três disciplinas diferentes de história, quatro disciplinas diferentes de literatura e duas disciplinas diferentes de sociologia.

(a) O número m de maneiras que um estudante pode escolher uma de cada tipo de disciplina é:

$$m = 3(4)(2) = 24$$

(b) O número n de maneiras que um estudante pode escolher apenas uma disciplina é:

$$n = 3 + 4 + 2 = 9$$

Há uma interpretação conjuntista dos dois princípios recém-vistos. Especificamente, suponha que $n(A)$ denota o número de elementos em um conjunto A. Então:

(1) ***Princípio da Regra da Soma*:** Suponha que A e B são conjuntos disjuntos. Logo,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

(2) ***Princípio da Regra do Produto*:** Seja $A \times B$ o produto cartesiano dos conjuntos A e B. Logo,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

5.3 FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Discutimos duas funções matemáticas importantes frequentemente empregadas em combinatória.

Função fatorial

O produto dos inteiros positivos de 1 a n, inclusive, é denotado por $n!$ e se lê "n fatorial" ou "fatorial de n". Logo,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Consequentemente, $1! = 1$ e $n! = n(n - l)!$. É também conveniente definir $0! = 1$.

Exemplo 5.2

(a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $5 = 5 \cdot 4! = 5(24) = 120$.

(b) $\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9!} = \dfrac{12!}{3!\,9!}$ e, em termos mais gerais,

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(c) Para valores grandes de n, usa-se a aproximação de Stirling (onde $e = 2{,}7128\ldots$):

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

Coeficientes binomiais

O símbolo $\binom{n}{r}$, que se lê "nCr" ou "combinação de n por r", onde r e n são inteiros positivos com $r \leq n$, é definido como se segue:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Observe que $n - (n - r) = r$. Isso nos leva à importante relação a seguir:

Lema 5.1: $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$ ou, equivalentemente, $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$, onde $a + b = n$.

Motivados por esse fato, definimos $0! = 1$. Afinal,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \qquad \text{e} \qquad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

Exemplo 5.3

(a) $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$; $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$; $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$.

Observe que $\binom{n}{r}$ tem exatamente r fatores tanto no numerador quanto no denominador.

(b) Suponha que queremos computar $\binom{10}{7}$. Haverá sete fatores em ambos numerador e denominador. Contudo, $10 - 7 = 3$. Logo, usamos o Lema 5.1 para calcular:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Coeficientes binomiais e triângulo de Pascal

Os números $\binom{n}{r}$ são chamados de *coeficientes binomiais*, uma vez que eles aparecem como coeficientes na expansão $(a + b)^n$. Especificamente:

Teorema (Binomial) 5.2: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-k} b^k$

Os coeficientes das potências sucessivas de $a + b$ podem ser arranjados em uma disposição triangular de números, chamada de triângulo de Pascal, como representado na Fig. 5-1. Os números no triângulo de Pascal têm as seguintes propriedades interessantes:

(i) O primeiro e o último número em cada linha é 1.

(ii) Todos os demais números podem ser obtidos, adicionando os dois números que aparecem acima deles. Por exemplo:

$$10 = 4 + 6, \; 15 = 5 + 10, \; 20 = 10 + 10.$$

Uma vez que esses números são coeficientes binomiais, estabelecemos formalmente a propriedade acima.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}$$

Figura 5-1 Triângulo de Pascal.

Teorema 5.3: $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.

5.4 PERMUTAÇÕES

Qualquer disposição de um conjunto de n objetos em uma dada ordem é chamada de *permutação* dos objetos (tomados todos de uma vez). Uma disposição de quaisquer $r \leq n$ desses objetos em uma dada ordem é chamada de "r-permutação" ou "permutação de n objetos tomados r por vez". Considere, por exemplo, o conjunto de letras A, B, C, D. Então:

(i) $BDCA$, $DCBA$ e $ACDB$ são permutações das quatro letras (tomadas todas de uma vez).
(ii) BAD, ACB e DBC são permutações das quatro letras tomadas três por vez.
(iii) AD, BC e CA são permutações das quatro letras tomadas duas por vez.

Geralmente, estamos interessados na quantia de tais permutações sem listá-las.
O número de permutações de n objetos tomados r por vez é denotado por

$$P(n, r) \quad \text{(outros textos podem usar } {}_nP_r,\ P_{n,r} \text{ ou } (n)_r\text{).}$$

O teorema a seguir se aplica.

Teorema 5.4: $P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Enfatizamos que existem r fatores em $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

Exemplo 5.4 Encontre o número m de permutações de seis objetos, digamos, A, B, C, D, E, F, tomados três por vez. Em outras palavras, determine a quantia de "palavras de três letras" usando apenas as seis letras dadas sem repetição.

Representemos a palavra genérica de três letras pelas três posições seguintes:

$$\underline{\quad\quad}, \underline{\quad\quad}, \underline{\quad\quad}$$

A primeira letra pode ser escolhida de 6 maneiras; seguindo esta, a segunda letra pode ser escolhida de 5 maneiras; e, finalmente, a terceira letra pode escolhida de 4 maneiras. Escrevemos cada número em sua posição apropriada como se segue:

$$\underline{\ 6\ }, \underline{\ 5\ }, \underline{\ 4\ }$$

Pela Regra do Produto, há $m = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ possíveis palavras de três letras sem repetição, a partir das seis letras. Logo, existem 120 permutações de 6 objetos tomados 3 por vez. Isso está de acordo com a fórmula do Teorema 5.4:

$$P(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

De fato, o Teorema 5.4 é demonstrado da mesma maneira como fizemos neste caso em particular.

Considere agora o caso especial de $P(n, r)$, quando $r = n$. Obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.5: Existem $n!$ permutações de n objetos (tomados todos de uma vez).

Por exemplo, há $3! = 6$ permutações das três letras A, B, C. Elas são

$$ABC, \quad ACB, \quad BAC, \quad BCA, \quad CAB, \quad CBA.$$

Permutações com repetições

Frequentemente, queremos saber o número de permutações de um multiconjunto, ou seja, um conjunto de objetos tais que alguns são repetidos. Denotamos por

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_r)$$

o número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são repetidos, n_2 são repetidos, . . ., n_r são repetidos. A fórmula geral é a seguinte:

Teorema 5.6: $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$

Indicamos a demonstração do teorema acima com um exemplo específico. Suponha que queremos formar todas as possíveis "palavras" com cinco letras, usando os caracteres da palavra "*BABBY*". Existem $5! = 120$ permutações dos objetos B_1, A, B_2, B_3, Y, onde os três Bs são distinguidos. Observe que as seis permutações a seguir

$$B_1\, B_2\, B_3AY, \quad B_2\, B_1\, B_3AY, \quad B_3\, B_1\, B_2AY, \quad B_1\, B_3\, B_2AY, \quad B_2\, B_3\, B_1AY, \quad B_3\, B_2\, B_1AY$$

produzem a mesma palavra quando os subscritos são removidos. O 6 vem do fato de que há $3! = 3{\cdot}2{\cdot}1 = 6$ maneiras distintas para colocar os três B's nas três primeiras posições da permutação. Isso é verdade para cada conjunto de três posições nas quais os B's podem aparecer. Consequentemente, o número de palavras diferentes de cinco letras que podem ser formadas, usando as letras da palavra "*BABBY*" é:

$$P(5; 3) = \frac{5!}{3!} = 20$$

Exemplo 5.5 Encontre o número m de palavras de sete letras que podem ser formadas, usando as letras da palavra "*BENZENE*".

Buscamos o número de permutações de 7 objetos, dos quais 3 são indistinguíveis (os três E's), e 2 são indistinguíveis (os dois N's). Pelo Teorema 5.6,

$$m = P(7;\ 3,\ 2) = \frac{7!}{3!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 420$$

Amostras ordenadas

Muitos problemas se referem à escolha de um elemento a partir de um conjunto S, digamos, com n elementos. Quando escolhemos um elemento após o outro, digamos, r vezes, chamamos a escolha de *amostra ordenada* de tamanho r. Consideramos dois casos.

(1) Amostragem com reposição

Aqui o elemento é devolvido ao conjunto S antes que o próximo objeto seja escolhido. Assim, em cada vez existem n maneiras para escolher um elemento (repetições são permitidas). A Regra do Produto nos diz que o número de tais amostras é:

$$n \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n(r \text{ fatores}) = n^r$$

(2) Amostragem sem reposição

Aqui o elemento não é devolvido ao conjunto S antes que o próximo seja escolhido. Logo, não há repetição na amostra ordenada. Tal amostra é simplesmente uma r-permutação. Assim, o número de tais amostras é:

$$P(n, r) = n(n-1)\,(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo 5.6 Três cartas são escolhidas uma após a outra em uma baralho de 52 cartas. Encontre o número m de maneiras que isso pode ser feito: (a) com reposição; (b) sem reposição.

(a) Cada carta pode ser escolhida de 52 maneiras. Logo, $m = 52(52)(52) = 140\,608$.

(b) Aqui não há devolução. Portanto, a primeira carta pode ser escolhida de 52 maneiras, a segunda de 51, e a terceira de 50 maneiras. Logo,

$$m = P(52,3) = 52(51)(50) = 132\,600$$

5.5 COMBINAÇÕES

Seja S um conjunto com n elementos. Uma *combinação* desses n elementos tomados r por vez é qualquer seleção de r dos elementos, onde a ordem não interessa. Tal seleção é chamada de *r-combinação*; é simplesmente um subconjunto de S com r elementos. O número de tais combinações é denotado por

$$C(n, r) \qquad \text{(outros textos podem usar } {}_nC_r,\ C_{n,r} \text{ ou } C_r^n\text{).}$$

Antes de apresentarmos a fórmula geral para $C(n, r)$, consideraremos um caso especial.

Exemplo 5.7 Encontre o número de combinações de 4 objetos A, B, C, D, tomados 3 por vez.

Cada combinação de três objetos determina $3! = 6$ permutações dos objetos como se segue:

$$\begin{array}{lllllll} ABC: & ABC, & ACB, & BAC, & BCA, & CAB, & CBA \\ ABD: & ABD, & ADB, & BAD, & BDA, & DAB, & DBA \\ ACD: & ACD, & ADC, & CAD, & CDA, & DAC, & DCA \\ BCD: & BDC, & BDC, & CBD, & CDB, & DBC, & DCB \end{array}$$

Assim, o número de combinações multiplicado por 3! nos dá o número de permutações; ou seja,

$$C(4, 3) \cdot 3! = P(4, 3) \quad \text{ou} \quad C(4, 3) = \frac{P(4, 3)}{3!}$$

Mas $P(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ e $3! = 6$; logo, $C(4, 3) = 4$, como observado acima.

Como indicado, qualquer combinação de n objetos, tomados r por vez, determina $r!$ permutações dos objetos na combinação; isto é,

$$P(n, r) = r!\, C(n, r)$$

Consequentemente, obtemos a seguinte fórmula para $C(n, r)$, que formalmente estabelecemos como um teorema.

Teorema 5.7: $C(n, r) = \dfrac{P(n, r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Lembre que o coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ foi definido como $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$; logo,

$$\boxed{C(r, n) = \binom{n}{r}}$$

Devemos usar $C(n, r)$ e $\binom{n}{r}$ como sinônimos.

Exemplo 5.8 Um fazendeiro compra 3 vacas, 2 porcos e 4 galinhas de um homem que tem 6 vacas, 5 porcos e 8 galinhas. Encontre o número m de escolhas que o fazendeiro tem.

O fazendeiro pode escolher as vacas de $C(6, 3)$ maneiras, os porcos de $C(5, 2)$ e as galinhas de $C(8, 4)$. Assim, o número m de escolhas é o seguinte:

$$m = \binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \cdot 10 \cdot 70 = 14\,000$$

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.