FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

Mariana Sacrini Ayres Ferraz

Combinações

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Reconhecer os princípios da contagem.
- Aplicar a fórmula para cálculo de combinação.
- Solucionar problemas de combinação.

Introdução

A análise combinatória é muito utilizada em diversas áreas da ciência, seja para resolver simples problemas matemáticos, seja para problemas avançados, como o da teoria da informação. Ela é muito útil na escolha de objetos de um conjunto, assim como na decisão da quantidade de jogos em um torneio.

Neste capítulo, você aprenderá sobre o conceito de combinação e aplicações e a resolver diversos problemas que envolvem combinatória.

Princípios da contagem

O estudo das possibilidades de um evento, ou também do número de elementos em um certo conjunto, é o que conhecemos como combinatória ou análise combinatória. Pode-se dizer, então, que a análise combinatória utiliza técnicas de contagem, dentre as quais estão a permutação e a combinação.

Existem dois princípios básicos da contagem: o princípio da soma e o da multiplicação.

Princípio fundamental da contagem I: regra da multiplicação

Suponha que um evento A tenha m possíveis maneiras de ocorrer e outro evento independente B tenha n maneiras possíveis de acontecer. Ao se realizar o primeiro evento, seguido pelo segundo, o número de maneiras possíveis dessa ocorrência é dado por $m \times n$.

Ou seja, realizar um evento **e** outro evento significa que temos que **multiplicar** o número possível de cada operação, conforme esquema da Figura 1.

$$\begin{array}{ccc} \text{[1º evento]} & \text{e} & \text{[2º evento]} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ m & \times & n \end{array}$$

"e" é entendido como multiplicação

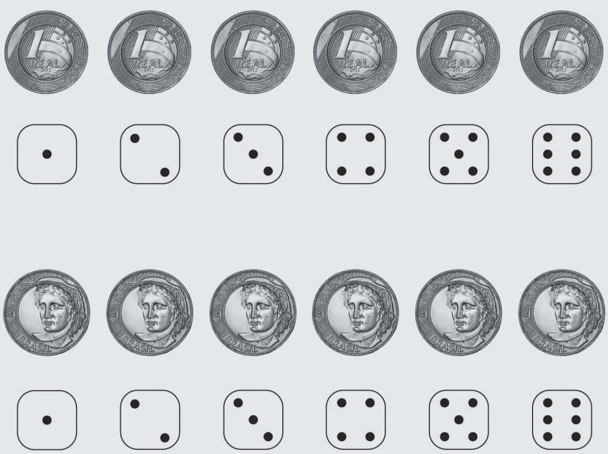
Figura 1. Quadro da regra da multiplicação.

Exemplo

Se jogarmos um dado e uma moeda, quantas possibilidades podem ocorrer?

Sabemos que um dado tem 6 faces. Assim, ao jogá-lo, teremos 6 possíveis cenários: sair o número 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Já a moeda tem duas opções possíveis: cara ou coroa.

Jogando, então, os dois, teremos $6 \times 2 = 12$ cenários possíveis. A seguir, está a lista de todas as possibilidades.



Fonte: Adaptada de Alice Menezes/Shutterstock.com; art-sonik/Shutterstock.com.

Princípio fundamental da contagem II: regra da soma

Suponha que um evento A tenha *m* possíveis maneiras de ocorrer e outro evento B tenha *n* maneiras possíveis de acontecer. Se os eventos não puderem ocorrer ao mesmo tempo, o número de possibilidades de termos um evento A ou um evento B é dado por $m + n$.

Assim, ao realizar um evento ou outro, o número de maneiras possíveis é a soma do número possível de cada um, conforme a Figura 2.

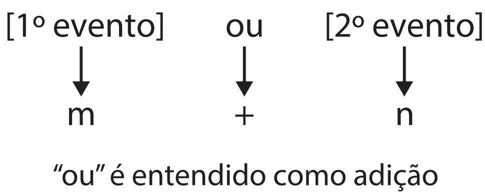


Figura 2. Quadro da regra da soma.

Exemplo

Pensaremos no dado e na moeda novamente. Suponha que, em uma brincadeira, você tenha a possibilidade de usar um dado ou uma moeda em uma jogada. Qual é o número de possibilidades para essa jogada?

Como sabemos, existem seis possíveis saídas para o dado e duas para a moeda. Assim, o número total de saídas possíveis será $6 + 2 = 8$.

Cálculo de combinação

A combinação é a seleção de um número de objetos de um dado conjunto, sem que a ordem importe. Por exemplo, suponha A e B elementos de um conjunto, a seleção AB é igual à seleção BA. A combinação é representada por C (n, r), ou C^n_r, e significa a combinação de *n* elementos em *r* elementos. Por exemplo, *C* (10,2) que é a combinação de 10 elementos de um conjunto, de 2 em 2. A definição de combinação é dada por:

$$C\,(n,\,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Por exemplo, qual é a combinação das letras A, B, C e D tomadas 3 por vez? Como na combinação não importa a ordem, temos que as combinações possíveis serão:

ABC, ABD, ADC e DBC.

Utilizando a definição acima, encontramos que:

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!\;1!} = 4$$

Fique atento

O símbolo !, na definição da combinação, significa fatorial. O fatorial de um número inteiro *n* é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1.$$

Por exemplo:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Exemplo

No campeonato mirim de xadrez da sua escola, inscreveram-se 9 alunos. Sabendo que todos devem jogar com todos na primeira etapa, o torneio se iniciará com quantos jogos?

Nesse caso, os 9 alunos devem ser combinados em 2 por vez. Assim, temos que:

$$C(9,2) = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 9 \times 4 = 36$$

Ou seja, o torneio iniciará com 36 jogos.

Além da combinação, temos outros tipos de seleção, como o arranjo e a permutação. Para saber mais sobre esses assuntos, veja o livro de Lipschutz e Lipson (2013).

Problemas de combinação

A combinação pode ser utilizada para a resolução de muitos problemas. Nessa seção, exploraremos alguns deles. Lembre-se de que as regras da multiplicação e da soma devem ser aplicadas em conjunto com a combinação para a solução de alguns casos.

Problema 1: Uma lojista, preparando cestas de presente, tinha que escolher 3 cookies, 2 muffins e 4 trufas. No total, ela tinha 6 sabores de cookies, 5 de muffins e 8 de trufas. Quantas possíveis cestas ela conseguirá montar?

A lojista pode escolher os cookies de C (6,3) maneiras, os muffins de C (5,2) e as trufas de C (8,4). Assim, o número total N de possibilidades será:

$$N = C(6,3) \times C(5,2) \times C(8,4)$$

$$N = \frac{6!}{3!\,3!} \times \frac{8!}{2!\,3!} \times \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2}$$

$$= 20 \times 10 \times 70 = 14.000$$

Por fim, a lojista terá 14.000 tipos de cestas diferentes.

Problema 2: Era dia dos namorados, e Jorge queria montar um buquê de flores para sua namorada Ana. Na floricultura, ele estava indeciso entre rosas ou gardênias. Como opções, tinham gardênias brancas e amarelas e rosas vermelhas, roxas, brancas e amarelas. Jorge decidiu, então, que queria duas cores, mas de rosas ou gardênias. Quantos possíveis buquês ele poderá formar?

Os buquês terão duas cores. Assim, o número de possibilidades para as gardênias será de C (2,2), e o número de possibilidades para as rosas será C (4,2). Como ele quer gardênia ou rosas, o número total de possibilidades N será:

$$N = C(2,2) + C(4,2) = \frac{2!}{2!0!} x \frac{4!}{2!2!} = +\frac{1}{1} + \frac{4x3}{2} = 1 + 6 = 7$$

Assim, Jorge terá que escolher entre 7 possíveis buquês de flores para Ana.

Problema 3: Um clube estava interessado em criar uma gincana para seus sócios. Os times tinham que ter 4 pessoas. No total, 5 mulheres (M) e 4 homens (H) participariam da gincana. Quantos times diferentes poderiam ser formados se cada time tivesse que ter exatamente uma ou duas mulheres?

Um time consiste em 4 pessoas, e existem dois tipos de times possíveis. O primeiro tipo de time possível é aquele que tem uma mulher e 3 homens, 1M + 3H, e o segundo tipo tem 2 mulheres e 2 homens, 2M+2H. A Figura 3, a seguir, mostra como podemos descobrir a quantidade de times que podemos montar para a gincana desse clube.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1M & e & 3H & ou & 2M & e & 2H \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & C(5,1) & \times & C(4,3) & + & C(5,2) & \times & C(4,2) \\
= & 5 & \times & 4 & + & 10 & \times & 6 \\
= & & 20 & & + & & 60 & \\
= & & 80 & & & & &
\end{array}
$$

Figura 3. Quadro da solução do problema 3.

Ou seja, será possível montar 80 times diferentes para a gincana do clube.

Link

Você já ouviu falar do projeto chamado M³ Matemática Multimídia? Nele, você encontrará diversos recursos educacionais abertos, como experimentos, vídeos e softwares. Dentre os recursos, diversos envolvem conteúdo de combinatória. Dê uma investigada no link a seguir:

https://goo.gl/ztESh

Referência

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Matemática discreta*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. (Coleção Schaum).

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.