FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

Tiago Loyo Silveira

Regra de três: simples e composta

Objetivos de aprendizagem

- Explicar as regras de três simples e composta.
- Classificar em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais duas grandezas envolvidas em um problema.
- Resolver problemas envolvendo regras de três simples e composta.

Introdução

Nesta unidade de aprendizagem, você conhecerá a regra de três, considerada uma das técnicas mais úteis da Matemática.

O uso da regra de três vai desde simples cálculos de porcentagem até complexos esquemas com diversas grandezas na Engenharia. As aplicações, quase sempre contextualizadas, apresentam-se de maneiras bem próximas ao que se pode encontrar no dia a dia.

Veremos que as grandezas têm relações entre si, de modo que o incremento de uma poderá levar ao aumento ou à redução proporcional de outra grandeza.

Dessa forma, a regra de três está ligada ao crescimento ou ao decrescimento linear e proporcional, portanto precisaremos entender o conceito de proporções.

Por fim, veremos diversos exemplos da regra de três em situações práticas.

Regras de três simples e composta

Regra de três é o nome dado ao processo prático de resolução de problemas entre grandezas, no qual se pode determinar um valor desconhecido dado três conhecidos.

Grandezas

Refere-se a tudo o que se pode medir ou contar, como comprimento, área, volume, temperatura, massa, tempo, velocidade, quantidade.

Razões

Normalmente, as razões, que compreendem comparações entre grandezas, se apresentam na forma de quociente.

Exemplo: uma receita de bolo usa dois ovos para três xícaras de farinha de trigo. Dessa forma, podemos expressar a razão entre ovos e farinha de trigo como:

$$2 \text{ para } 3 \qquad = \qquad 2 : 3 \qquad = \frac{2}{3}$$

Observação: ao modelar um problema na forma de razão, devemos levar em conta a ordem na qual foi descrito. No exemplo, o que se lê primeiro na frase são os ovos, ou seja, o quociente deverá ser expresso de modo que a quantidade de ovos venha expressa como numerador, e nunca o contrário.

Proporção

Uma igualdade entre duas razões forma uma relação de proporcionalidade.

Exemplo: imaginemos que, ao receber alguns primos em casa, sua mãe precise triplicar a receita do bolo. Se na receita original a razão entre ovos e farinha de trigo era 2 para 3, essa proporção deverá ser conservada para que a receita dê certo.

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

Na proporção dada, lemos: 2 está para 3, assim como 6 está para 9.

As proporções têm uma propriedade importante: os produtos "cruzados" entre numerador e denominador serão equivalentes.

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$$

Essa propriedade também é conhecida como equivalência entre produto dos extremos e dos meios. Como consequência da sua forma linear:

$$\underbrace{2 : \overbrace{3 = 6}^{\text{Meios}} : 9}_{\text{Extremos}}$$

$$3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$$

Regra de três

Dada uma proporção entre duas razões, conhecidos três de seus valores, será possível obter um quarto valor (quarta proporcional).

Exemplo: uma marca de balas vende pacotes com sabores sortidos. Sabe-se que a razão de balas de morango e de uva é de 5:3. Qual será a quantidade de balas de uva se existem 45 balas de morango no pacote?

$$\begin{matrix} \text{morango} \rightarrow \\ \text{uva} \rightarrow \end{matrix} \quad \frac{5}{3} = \frac{45}{x}$$

Fazendo o produto cruzado, temos:

$$5x = 3 \cdot 45$$

$$x = \frac{3 \cdot 45}{5} \Rightarrow x = 27$$

Dessa forma, o pacote terá 27 balas de uva.

As regras de três podem ser classificadas em simples ou compostas:

a) Simples — quando envolve apenas duas grandezas.

Exemplo: Com R$ 1,00, é possível comprar 4 pães. Quanto será necessário para comprar 28 pães?

$$\begin{array}{ccc} \text{Reais} & & \text{Pães} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{4}{28} \end{array}$$

$$4x = 28 \Rightarrow x = 7$$

b) Composta — quando envolve três ou mais grandezas.

Exemplo: 10 homens constroem 5 metros de muro, dando um lucro de R$ 2.500,00 para a empreiteira. Se a mesma empreiteira contratar outros 5 homens e quiser lucrar R$ 7.500,00 no mesmo período, quantos metros de muro deverá construir?

Homens	**Muro (m)**	**Lucro (R$)**
10	5	2.500
15	x	7.500

Para resolver regras de três compostas, isolaremos a razão com a incógnita e faremos o produto das demais razões.

$$\frac{5}{x} = \frac{10}{15} \cdot \frac{2500}{7500}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{25.000}{112.500}$$

$$25.000x = 5 \cdot 112.500$$

$$x = \frac{5 \cdot 112.500}{25.000} \Rightarrow x = 22{,}5m$$

Observação: mesmo que haja três ou mais grandezas, somente deverá existir uma incógnita para resolver por meio da regra de três. Do contrário, será necessário o uso de sistemas de equação.

Classificar em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais duas grandezas envolvidas em um problema

Até aqui, todos os exemplos abordados apresentavam a seguinte propriedade: se uma grandeza aumenta, a sua proporcional também aumenta. Mas essa situação não será sempre assim.

Grandezas diretamente proporcionais

Dizemos que duas grandezas são diretamente proporcionais quando o aumento de uma implica o aumento da outra na mesma razão, ou seja, se uma grandeza é dobrada, a outra também o será. Se uma grandeza sofre uma redução em um terço, a outra grandeza sofrerá a mesma redução.

Grandezas inversamente proporcionais

Dizemos que duas grandezas são inversamente proporcionais quando o aumento de uma implica a redução da outra, na razão inversa, ou seja, se uma grandeza é dobrada, a outra é reduzida à metade. Se uma grandeza é reduzida em um terço, a outra será triplicada.

Veja a seguir uma dica de análise das grandezas.

Quando estamos diante de um problema, é comum nos prendermos aos valores propostos no julgamento das grandezas diretas ou inversamente proporcionais. Porém, isso é um erro.

Para analisarmos se duas grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, basta analisarmos a grandeza em si, e não os valores do problema em específico. Se duas grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, elas o serão independentemente dos valores apresentados em diferentes problemas.

Exemplos:

- Mão de obra × produção — as grandezas mão de obra e produção são diretamente proporcionais. Observe que, independentemente dos valores atribuídos, ao aumentarmos a mão de obra, o produto final do serviço também aumentará.

- Mão de obra × tempo — as grandezas mão de obra e tempo são inversamente proporcionais. Ao investir no incremento da mão de obra, espera-se que o tempo que se leva para realizar determinado serviço seja reduzido.
- Velocidade × tempo — as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais. Essas são grandezas clássicas em problemas de Física. Aumentando-se a velocidade em determinado trajeto, o tempo de viagem será reduzido na proporção inversa.

Entre os exemplos citados, podemos citar diversas grandezas que são basicamente sinônimos. Qualquer quantidade de operários será uma mão de obra, qualquer trabalho será uma produção, e a grandeza tempo poderá ter diversas medidas (horas, dias, semanas, ...).

Saiba mais

As grandezas são conceitos importantes, muitas vezes de maneira mais abstrata do que deveriam. Entender o que são grandezas, além de sua importância e análise, representa um processo fundamental para o desenvolvimento da regra de três. No *link* a seguir, você pode saber mais sobre grandezas físicas:

https://goo.gl/FnSd18

Nas regras de três simples, a análise será somente entre duas grandezas, tendo-se, dessa forma, uma comparação simples.

Porém, nas regras de três compostas, será necessário um cuidado adicional: as grandezas podem apresentar resultados comparativos confusos. Para evitar esse erro, deveremos sempre analisar grandeza que tem a incógnita com as demais, uma a uma.

Exemplo 1:

Em determinada fábrica, trabalham 20 operários com turnos de 8 horas por dia, produzindo, assim, 100 peças por dia. Quantas peças serão produzidas se 24 operários trabalharem em turnos de 10 horas diárias?

Operários	Horas/dia	Peças
20	8	100
24	10	x

Vamos analisar as comparações entre a grandeza que contém a incógnita e as demais:

- Peças × operários?

Ora, caso se deseje aumentar o número de peças produzidas, será necessário aumentar o quadro de operário na fábrica. Portanto, as grandezas são diretamente proporcionais.

- Peças × horas/dia?

Para que a produção de peças aumente, será necessário ampliar a jornada de trabalho. Portanto, as grandezas são diretamente proporcionais.

Observe que, caso fosse feita erroneamente, a análise entre operários e horas/dia, o resultado seria que essas grandezas são inversamente proporcionais.

Para facilitar a assimilação, usaremos um esquema de setas para indicar que o aumento de uma grandeza implica o aumento da outra.

Operários	Horas/dia	Peças
20	8	100
24	10	x

Agora, basta resolver a proporção:

$$\frac{20}{24} \cdot \frac{8}{10} = \frac{100}{x}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{300}{2} = 150$$

Logo, serão produzidas 150 peças/dia.

Atenção: as setas não representam o aumento ou a redução da grandeza ou dos valores no problema, mas apenas um meio de orientação visual para que representemos as grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo 2:

Dada a mesma situação inicial do exemplo anterior, determinaremos quantas horas por dia serão necessárias para que os 24 operários produzam 120 peças:

Operários	Horas/dia	Peças
20	8	100
24	x	120

Vamos analisar as comparações entre a grandeza que contém a incógnita e as demais:

- Horas/dia × peças

Caso a fábrica viesse a reduzir a jornada de trabalho, isso implicaria a redução da produção. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

- Horas/dia × operários

Se a fábrica reduzir a jornada de trabalho, necessitará de mais operários para desempenhar determinada tarefa. Logo, são grandezas inversamente proporcionais.

Com o esquema de setas, temos:

Operários	Horas/dia	Peças
20	8	100
24	x	120

Observação: tanto nos casos de regra de três simples quanto composta, quando se obtém uma grandeza inversamente proporcional, a regra de equivalência do produto cruzado não será válida. Para retomar a equivalência, encontraremos a fração inversa da grandeza inversa.

No exemplo, temos:

$$\frac{20}{24} \rightarrow \frac{24}{20}$$

Além disso, isolaremos a grandeza com a incógnita, obtendo-se a proporção:

$$\frac{8}{x} = \frac{100}{120} \cdot \frac{24}{20}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{10 \cdot 2}{20}$$

$$x = 8$$

Logo, a empresa poderá manter a jornada de 8 horas/dia.

Resolver problemas envolvendo regras de três simples e composta

As regras de três apresentam uma variedade enorme de aplicações. Destacamos aqui exemplos contextualizados que mostram muitas situações práticas.

Podemos determinar o quantitativo de operários ou dias em algumas atividades, calcular o tempo de viagem com o devido aumento da velocidade ou, ainda, realizar cálculos de porcentagem, tão comuns no dia a dia.

1. Trabalhando 6 dias, 5 operários produzem 400 peças. Quantas peças semelhantes são produzidas por 9 operários que trabalham por 10 dias?

Dias	Operários	Peças
6	5	400
10	9	x

Solução: se a produção de peças aumentar, serão necessários mais operários; se houver aumento na produção de peças, serão necessários mais dias de trabalho. Logo, as duas comparações são diretamente proporcionais.

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{400}{x}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{400}{x}$$

$$x = \frac{400 \cdot 9}{3} \Rightarrow x = 1200$$

Logo, serão produzidas 1.200 peças.

2. Se 8 homens levam 12 dias montando 16 computadores em uma empresa, então 15 homens levarão quantos dias para montar 50 desses mesmos computadores?

Homens	Dias	Computadores
8	12	16
15	x	50

Solução: se hipoteticamente decidirmos reduzir a quantidade de dias trabalhados, e atribuirmos uma seta para baixo, serão necessários mais homens para que o serviço seja cumprido, ou seja, grandezas inversamente proporcionais. Com a mesma redução nos dias de trabalho, serão montados menos computadores, portanto grandezas diretamente proporcionais.

Invertendo a grandeza “homens” e isolando a grandeza da incógnita, temos:

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{16}{50} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{x}$$

$$x = \frac{12 \cdot 5}{3} \Rightarrow x = 20$$

Dessa forma, para montar o quantitativo de computadores com essa mão de obra, serão necessários 20 dias.

3. O preço da passagem de ônibus em determinada cidade passou de R$ 4,50 para R$ 4,75. Qual foi o percentual de reajuste?

Solução: uma das maneiras de realizar cálculos percentuais se dá por meio de regras de três. Para isso, basta estabelecer o valor inicial como 100% e descobrir de quanto foi o aumento. Nesse caso, as grandezas são diretamente proporcionais, já que, aumentando ou diminuindo determinado valor, a porcentagem aumenta ou diminui na mesma proporção.

R$	**%**
4,5	100
4,75	x

$$\frac{4{,}5}{4{,}75} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{475}{4{,}5} \Rightarrow x = \frac{4750}{45} \Rightarrow x = 105{,}55\ ...$$

Como se adotou que R$ 4,50 era equivalente a 100%, então o excedente de 100% é o aumento percentual.

Portanto, um aumento de 5,5% no valor das passagens.

4. Em um canteiro de obras, 6 trabalhadores trabalhando 8 horas por dia constroem um muro de 50 metros de comprimento em 12 dias. Se o número de horas trabalhadas por dia for reduzido para 6 horas e o número de trabalhadores aumentado para 10, qual será o comprimento do muro construído em 15 dias?

Solução: compararemos cada grandeza com a grandeza comprimento do muro:

- Comprimento × trabalhadores — quanto mais metros a serem construídos, mais trabalhadores são necessários;

- Comprimento × horas/dia — quanto mais metros de muro a serem construídos, mais horas precisão ser trabalhadas;
- Comprimento × dias — quanto mais metros de muro a serem construídos, mais dias de serviço.

Portanto, todas as grandezas são diretamente proporcionais ao comprimento.

Trabalhadores	Horas/dia	Muro (m)	Dias
6	8	50	12
10	6	x	15

Isolando a grandeza da incógnita e fazendo o produto das demais, temos:

$$\frac{50}{x} = \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{15}$$

$$\frac{50}{x} = \frac{16}{25}$$

$$x = \frac{50 \cdot 25}{16} \Rightarrow x = 78{,}125$$

Portanto, serão construídos aproximadamente 78 metros de muro.

5. Um grupo de 16 digitadores trabalhando 6 horas por dia, durante 20 dias, escrevem 700 páginas de um livro. Se passados 10 dias o grupo for reduzido para 12 digitadores, trabalhando 8 horas por dia, sendo necessário totalizar 900 páginas, quantos dias ainda precisarão trabalhar?

Solução:

Digitadores	Horas/dia	Páginas	Dias
16	6	700	20

Passada metade do tempo, haverá metade da produção. Portanto, após 10 dias, os 16 digitadores terão escrito 350 páginas, faltando ainda 550 páginas a serem escritas.

Compararemos cada grandeza com a grandeza comprimento do muro:

- Dias × digitadores — quanto mais dias a trabalhar, menos digitadores são necessários;
- Dias × horas/dia — quanto mais dias a trabalhar, menos horas/dia são necessárias;
- Dias × páginas — quanto mais dias a trabalhar, mais páginas são produzidas.

Digitadores	Horas/dia	Páginas	Dias
16	6	350	10
12	8	550	x

Como há duas setas em cada sentido, podemos inverter qualquer dupla de grandezas entre as que tenham setas no mesmo sentido.

Obtemos a proporção:

$$\frac{16}{12} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{550}{350} = \frac{x}{10}$$

$$\frac{11}{7} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{110}{7} \Rightarrow x \cong 15{,}7$$

Portanto, serão necessários ao menos 16 dias para concluir as 900 páginas.

6. Se três torneiras conseguem encher um tanque em 2 horas, quanto tempo levará para encher o mesmo tanque se apenas duas torneiras estiverem abertas?

Solução:

Torneira (vazão)	Tempo (horas)	Tanque
3	2	Constante
2	x	Constante

Ora, a redução na quantidade de torneiras implica diretamente o aumento do tempo para encher o tanque. Portanto, grandezas inversamente proporcionais.

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x = 3$$

Logo, o tanque levará 3 horas para ser enchido.

Saiba mais

A vazão de torneiras é um problema clássico, porém ainda guarda diversas peculiaridades que podem confundir e levar ao erro. No vídeo a seguir, veremos dicas de como abordar esses cálculos de uma maneira mais simples:

https://goo.gl/9xYnJb

Leituras recomendadas

ANDRINI, Á.; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando matemática*. 3. ed. renov. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. v. 7.

COLA NA WEB. *Grandezas físicas*. c2018. Disponível em: <https://www.coladaweb.com/fisica/fisica-geral/grandezas-fisicas>. Acesso em: 29 nov. 2018.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo:

SOLUÇÕES
EDUCACIONAIS
INTEGRADAS