LMECA1901 - Mécanique des milieux continus
Examen

Nom:
Prénom:
NOMA:

Signature:

Durée: 3h15

Consignes:
- Pas de calculatrice, uniquement de quoi écrire
- Le formulaire doit être signé et retourné
- Nom et NOMA sur chaque feuille
- Répondre à chaque question sur une feuille différente (elles seront séparées pour la correction)
- Les feuilles de brouillon vous sont fournies et doivent être remises en fin d'examen
- A la fin de l'examen, plier le questionnaire en 2 et y glisser vos réponses (Nom et NOMA visibles)
- Le non-respect des consignes annule l'examen

13 janvier 2014

1 Théorie

1. Interpréter le terme D_{23} du tenseur des taux de déformation. Utiliser un dessin pour votre explication.
2. **Etablir** l'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{v}$ en coordonnées-composantes cylindriques.
3. Interprétez les termes du théorème de Reynolds écrit pour un volume matériel $\Omega(t)$, dans ces deux expressions

$$\frac{D}{Dt}\mathcal{I}(t) = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \, dv \tag{1}$$

$$= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dv + \oint_{\partial\Omega(t)} \phi \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \tag{2}$$

   Comment passe-t-on de l'une à l'autre?

4. Quelle est la plus grande contrainte normale principale dans un tube mince soumis à une pression interne?
5. Donner les 4 idées/hypothèses qui mènent à l'établissement du modèle de fluide visqueux newtonien. Faire le lien avec l'expression de la loi des contraintes de ce fluide.

2 On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible et indilatable dans une conduite entre deux plaques (située en $x_2 = h$ et $x_2 = -h$) de longueur $L >>> h$. Le fluide colle aux deux parois. La température à la paroi inférieure (en $x_2 = -h$) vaut T_1 alors que la température à la paroi supérieure ($x_2 = h$) vaut T_2. On considère le cas où le moteur de l'écoulement est l'imposition d'une différence de pression de telle sorte que $p = p_0$ en $x_1 = 0$ et $p = p_L$ en $x_1 = L$ avec $p_0 > p_L$. La masse volumique ρ, la viscosité dynamique μ et la conductivité thermique κ du fluide sont supposées constantes.

1. Poser des hypothèses semi-inverses sur l'écoulement (champ de pression, champ de vitesse et champ de température).
2. Ecrire soigneusement les conditions frontières qui s'appliquent au problème.
3. Donner l'expression du champ de pression et du champ de vitesse.
4. Donner l'expression du champ de température.
5. Utiliser un volume de contrôle s'étendant de $x_1 = 0$ à $x_1 = L$ et $x_2 = -h$ à $x_2 = h$ (il s'étend à l'infini dans la direction $\hat{\mathbf{e}}_3$) pour vérifier le bilan de l'énergie totale à l'intérieur de la conduite. (Vous devez démontrer l'égalité entre puissance des forces de pression et déperditions thermiques)
6. Déterminer sous forme paramétrique les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission.

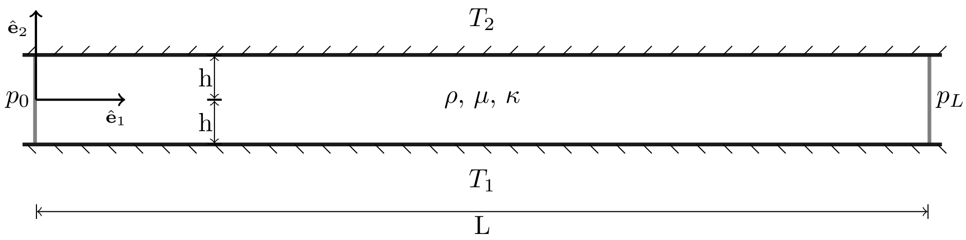

Figure 1: Exercice 2

Solution:

1. *Pour le champ de vitesse:*
$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_2)\hat{\mathbf{e}}_1$$
Pour le champ de pression:
$$p = p(x_1, x_2)$$
Pour le champ de température:
$$T(x_2)$$
2.
   - *En* $x_2 = h$*:* $v_1(x_2 = h) = 0$ *et* $T(x_2 = h) = T_2$
   - *En* $x_2 = -h$*:* $v_1(x_2 = -h) = 0$ *et* $T(x_2 = -h) = T_1$
   - *En* $x_1 = 0$*:* $p(0, x_2) = p_0$
   - *En* $x_1 = L$*:* $p(L, x_2) = p_L$
3. *On résout les équations d'équilibre:*
$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

On en déduite que p ne dépend pas de x_2 et que

$$\mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial p}{\partial x_1} = C^{te}$$

En imposant les conditions frontières sur la pression on obtient:

$$p(x_1) = (p_L - p_0)\frac{x_1}{L} + p_0$$

On a donc pour le champ de vitesse que:

$$\mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{(p_L - p_0)}{L}$$

Une expression que l'on peut intégrer afin d'obtenir v_1:

$$v_1(x_2) = \frac{(p_L - p_0)}{2\mu L}x_2^2 + Ax_2 + B$$

En imposant les conditions frontières sur la vitesse on obtient

$$v_1(x_2) = \frac{(p_L - p_0)}{2\mu L}x_2^2 - \frac{(p_L - p_0)}{2\mu L}h^2 = \frac{(p_0 - p_L)}{2\mu L}(h^2 - x_2^2)$$

4. *Pour le champ de température on doit utiliser la forme locale de la conservation de l'énergie. En simplifiant les termes adéquats on obtient que:*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} \quad = \quad \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$$

Ce qui après application de la loi de Fourrier et l'insertion de la loi de constitution d'un fluide visqueux newtonien:

$$-k\Delta T \quad = \quad 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$$

Ce qui peut être simplifié:

$$-k\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{(p_0 - p_L)^2}{\mu L^2}x_2^2$$

On intègre cette expression pour obtenir:

$$T(x_2) = -\frac{(p_0 - p_L)^2}{k\mu L^2}\frac{x_2^4}{12} + Ex_2 + F$$

Après imposition des conditions frontières on obtient:

$$T(x_2) = \frac{(p_0 - p_L)^2}{12k\mu L^2}(h^4 - x_2^4) + \frac{T_2 - T_1}{2h}x_2 + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

5. *La conservation de l'énergie pour un volume de contrôle s'écrit comme suit:*

$$W^d + W^c + H^d + H^c \quad = \quad \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2} + e\right)dv + \oint_{\partial\Omega}\rho\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2} + e\right)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)\cdot\hat{\mathbf{n}}ds$$

Après simplifications on a que:

$$\begin{aligned} W^c + H^c &= 0 \\ \oint_{\partial\Omega}\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{v}ds + \oint_{\partial\Omega}h(\hat{\mathbf{n}})ds &= 0 \\ \oint_{\partial\Omega}\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{v}ds - \oint_{\partial\Omega}\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds &= 0 \end{aligned}$$

On développe les intégrales:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{v} ds &= (p_0 - p_L) \int_{-h}^{h} \frac{(p_0 - p_L)}{2\mu L}(h^2 - x_2^2) dx_2 \\
&= \frac{(p_L - p_0)^2}{2\mu L} \int_{-h}^{h} (h^2 - x_2^2) dx_2 \\
&= \frac{(p_L - p_0)^2}{2\mu L} \left[h^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right]_{-h}^{h} \\
&= \frac{2(p_L - p_0)^2}{3\mu L} h^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds &= \int_{\partial\Omega} -k \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_1 \\
&= 2k \frac{(p_L - p_0)^2}{12 k \mu L^2} (4h^3) \int_0^L dx_1 \\
&= \frac{2(p_L - p_0)^2}{3\mu L} h^3
\end{aligned}$$

On a donc bien que

$$W^c + H^c = 0$$

6. *Comme le problème est stationnaire, les trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission sont confondues. On doit résoudre le problème de Cauchy suivant:*

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v} \\
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{X}
\end{aligned}$$

Ce qui donne pour notre problème:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= X_1 + \frac{(p_0 - p_L)}{2\mu L}(h^2 + X_2^2) t \\
x_2(t) &= X_2 \\
x_3(t) &= X_3
\end{aligned}$$

3 On considère une plaque circulaire de rayon R et d'épaisseur $2h$ ($h << R$) constitué d'un matériau thermo-élastique (voir figure 2). Les extrêmités supérieure et inférieure de la plaque sont en contact avec deux parois fixes (situées en $z = h$ et $z = -h$) mais peuvent glisser SANS frotter sur ces parois. La surface latérale de la plaque circulaire est libre et est isolée thermiquement de l'extérieur. La surface supérieure de la plaque est portée à la température T_2 et la surface inférieure est elle portée à la température T_1 (T_1 et T_2 sont plus grandes que T_0). On considère qu'on est en thermo-élasticité linéaire isotrope et que le problème est stationnaire.
On fait l'hypothèse que le déplacement selon l'axe z ne dépend pas de r. En outre, on suppose que la composante selon $\hat{\mathbf{e}}_r$ du champ de déplacements est de la forme $u_r(r, z) = rf$ où f est tout au plus une fonction de z.

1. Problème thermique
   (a) Ecrire l'équation à résoudre pour obtenir le champ de température dans la plaque.
   (b) Ecrire les conditions frontières du problème thermique.
   (c) Poser des hypothèses semi-inverses sur le champ de température.
   (d) Pourquoi peut-on déjà résoudre le champ de température?
   (e) Donner l'expression du champ de température dans la plaque.
2. Problème élastique
   (a) Compléter et justifier les hypothèses semi-inverses sur le champ de déplacement (en partie fournies dans l'énoncé).
   (b) Donner l'expression correspondante du tenseur des contraintes.
   (c) Ecrire les équations à résoudre pour obtenir le champ de déplacement dans la plaque.
   (d) Ecrire les conditions frontières du problème élastique (Attention : la condition de glissement implique une ou plusieurs composante(s) du champ de déplacement **ET** une ou plusieurs composante(s) du tenseur des contraintes)
   (e) Donner l'expression du champ de déplacements dans le cylindre sans encore imposer la condition frontière en $r = R$
   (f) Pour déterminer la valeur du/des coefficient(s) de f, on utilise la relation suivante:

$$\int_{-h}^{h} \sigma_{rr}|_{r=R}\, dz = 0$$

   Qu'avons-nous imposé au travers de cette condition? Discuter les conséquences pour notre solution.
   (g) Interpréter la solution obtenue pour $T_1 > T_2$ et $T_1 = T_2$.

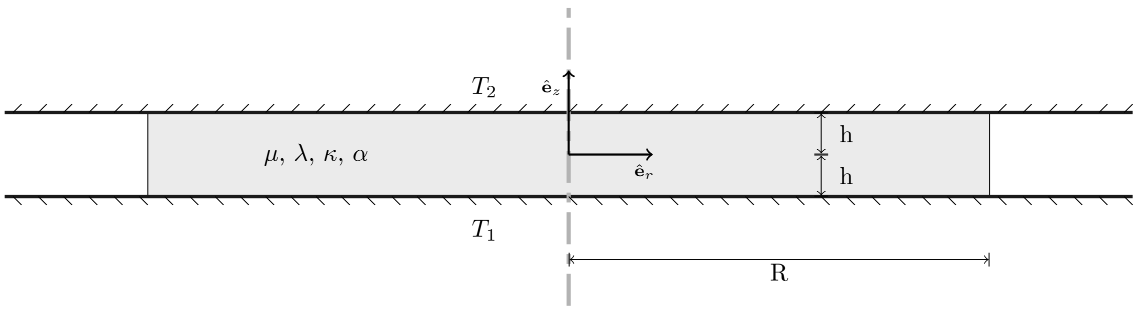

Figure 2: Exercice 3

Solution:

1. *Problème thermique*

   (a) *l'équation de conservation de l'énergie donne*

   $$\Delta T = 0$$

   (b) • *En* $r = R$ *: la composante du flux de chaleur normale à la paroi est nul* $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0$
   • *En* $z = h$*,* $T = T_2$
   • *En* $z = -h$*,* $T = T_1$

   (c) *Pour un problème stationnaire, la forme générale du champ de température en coordonnées cylindrique est la suivante:*

   $$T = T(r, \theta, z)$$

   Dans notre cas, T *est indépendante de* r *(car parois adiabatiques en r=R) et de* θ *(par axisymétrie). On a donc:*

   $$T = T(\cancel{r}, \cancel{\theta}, z) = T(z)$$

   (d) *On résoud pour la température car ce problème est découplé du problème élastique.*

   (e) *L'équation devient*

   $$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

   T *est donc une fonction linéaire en z. En appliquant les CF, on trouve*

   $$T(z) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{z}{2h}(T_2 - T_1)$$

2. *Problème élastique*

   (a) *Pour rappel, la forme générale du champ de déplacement en coordonnées cylindriques (pour un problème stationnaire) est la suivante:*

   $$\mathbf{u} = u_r(r, \theta, z)\hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta(r, \theta, z)\hat{\mathbf{e}}_\theta + u_z(r, \theta, z)\hat{\mathbf{e}}_z$$

   Il n'y a pas de dépendance suivant θ *par axisymétrie, et pas de déplacement suivant* θ *(aucune sollicitation dans ce sens) :* $u_\theta = 0$*. L'énoncé nous dit également que :*
   • $u_r(r, z) = rf(z)$
   • $u_z = u_z(z)$
   Dès lors, on suppose que le champ de déplacement est de la forme:

   $$\mathbf{u} = rf(z)\hat{\mathbf{e}}_r + u_z(z)\hat{\mathbf{e}}_z$$

   (b) *On trouve*

   $$[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} u_r(r, z) \\ 0 \\ u_z(z) \end{bmatrix}$$

   $$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

   $\boldsymbol{\epsilon}$ *est la partie symétrique de* $\nabla \mathbf{u}$

   $$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Par la loi de constitution, on trouve

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda tr(\epsilon)\boldsymbol{\delta} - 3K\alpha(T - T_0)\boldsymbol{\delta}$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - 3K\alpha(T - T_0)\right)$$

Compte tenu des hypothèses faites précédemment, et en posant $u_z = g(z)$:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = 2\mu \begin{bmatrix} f & 0 & \frac{rf'}{2} \\ 0 & f & 0 \\ \frac{rf'}{2} & 0 & g' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\lambda(2f + g') - 3K\alpha(T - T_0)\right)$$

(c) *On utilise l'équation de conservation de quantité de mouvement, qui donne, pour une accélération et des forces de volume nulles :*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

On trouve donc

$$\begin{bmatrix} \mu r f'' + \frac{f}{r}(2\mu + \lambda) - \frac{f}{r}(2\mu + \lambda) \\ 0 \\ f'(\mu + \lambda) + g''(2\mu + \lambda) + f'(\mu + \lambda) - 3K\alpha\frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) *Les conditions frontières sont :*
- *en $z = h$ et $z = -h$: $u_z(h) = u_z(-h) = 0$*
- *en $z = h$ et $z = -h$: $\sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0$ (facettes de normale sortante z glissent suivant r et $\theta \to$ pas de contrainte de cisaillement)*[1]
- *en $r = R$: $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_r) = \mathbf{0} \to \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ (surface libre)*

(e) *La première équation nous donne $\mu r f'' = 0$. f est donc une fonction linéaire suivant z :*

$$f = Az + B$$

La deuxième équation non triviale nous donne

$$f'(\mu+\lambda)+g''(2\mu+\lambda)+f'(\mu+\lambda)-3K\alpha\frac{\partial T}{\partial z} = 2A(\mu+\lambda)+g''(2\mu+\lambda)-3K\alpha\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Et

$$g'' = \frac{3K\alpha\frac{\partial T}{\partial z} - 2A(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} = C$$

g s'exprime donc comme $g = C\frac{z^2}{2} + Dz + E$, où C est une constante connue.
La condition $\sigma_{zr} = 0$ en $z = h$ donne $2\mu r f' = 0 \to f' = 0 \to A = 0$, et $f = B$
De plus, $u_z(h) = u_z(-h)$ implique que $D = 0$, et $u_z(h) = 0$ implique $E = -C\frac{h^2}{2}$

On a finalement :

$$u_r = rB$$
$$u_z = \frac{z^2 - h^2}{2}\frac{3K\alpha}{2\mu + \lambda}\frac{T_2 - T_1}{2h}$$

[1] $\mathbf{t}(\pm\hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \pm\sigma_{zr} = 0$ et $\mathbf{t}(\pm\hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = \pm\sigma_{z\theta} = 0$

(f) La constante B est déterminée à l'aide de la relation

$$\int_{-h}^{h} \sigma_{rr}|_{r=R}\, dz = 0$$

qui exprime le remplacement de la distribution réelle de forces de contact sur la frontière par une distribution statiquement équivalente (Saint-Venant). Cela donne:

$$= \int_{-h}^{h} 2\mu B + \lambda(2B + Cz) - 3K\alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{z}{h}(T_2 - T_1) - T_0 \right) dz = 0$$

$$2h \left(2B(\mu + \lambda) - 3K\alpha(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0) \right) = 0$$

$$B = \frac{3K\alpha(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0)}{2(\mu + \lambda)}$$

(g) • *Pour $T_1 > T_2$, les déplacements verticaux sont positifs (le déplacement va du chaud vers le froid). Le maximum se situe au centre.*
• *Pour $T_1 = T_2$, le déplacement vertical est nul.*