

# LMECA1901 - Mécanique des milieux continus

## Examen

Nom:  
Prénom:  
NOMA:

Signature:

Durée: 3h15

Consignes:

- Pas de calculatrice, uniquement de quoi écrire
- Le formulaire doit être signé et retourné
- Nom et NOMA sur chaque feuille
- Répondre à chaque question sur une feuille différente (elles seront séparées pour la correction)
- Les feuilles de brouillon vous sont fournies et doivent être remises en fin d'examen
- A la fin de l'examen, plier le questionnaire en 2 et y glisser vos réponses (Nom et NOMA visibles)
- Le non-respect des consignes annule l'examen

3 janvier 2014

1. Interpréter le terme  $\varepsilon_{12}$  du tenseur des déformations. Utiliser un dessin pour votre explication.
2. En traction simple de valeur  $\sigma$ , que vaut la contrainte tangentielle maximale? Pour répondre à la question, construisez le cercle de Mohr. Indiquez également la facette pour laquelle la contrainte tangentielle est maximale.
3. Expliquer la décomposition sphérique et déviatoire d'un tenseur. Illustrer son utilité.
4. Utiliser la loi de comportement d'un matériau hyper-élastique pour illustrer **deux** principes d'établissement de lois de constitution.
5. Montrer que dans le cas d'un fluide visqueux newtonien incompressible et indatale, une condition nécessaire sur l'écoulement est que son champ de vitesse soit à divergence nulle? Pour ce cas, simplifier l'expression de la loi de constitution des contraintes.

2

On considère l'écoulement incompressible de deux fluides dans une conduite cylindrique de rayon  $R$ . Le fluide 1 occupe le centre de la conduite jusqu'à  $r = \alpha R$ ; le fluide 2 en occupe la périphérie, entre  $r = \alpha R$  et  $r = R$ . Les parois de la conduite sont immobiles. Les fluides ne subissent que l'effet d'une force de volume, la gravité, alignée avec l'axe de la conduite. Les fluides sont décrits par des masses volumiques  $\rho^1$  et  $\rho^2$ , des viscosités dynamiques de cisaillement  $\mu^1$  et  $\mu^2$ , et des conductivités  $\kappa^1$  et  $\kappa^2$ .

1. Poser des hypothèses semi-inverses sur l'écoulement
2. Montrer que les équations de Navier-Stokes se simplifient à

$$\mu^f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z^f}{\partial r} \right) - \frac{\partial p^f}{\partial z} + \rho^f g = 0$$

où l'exposant  $f$  indique le fluide 1 ou 2.

3. Que doit-on garantir à l'interface entre les deux fluides?
4. Trouver les champs de vitesse  $\mathbf{v}^1$  et  $\mathbf{v}^2$  et de pression  $p^1$  et  $p^2$  pour cet écoulement.
5. Esquisser, aussi précisément que possible, le profil de vitesse des deux fluides dans la conduite. Distinguer les cas  $\mu^1 > \mu^2$ ,  $\mu^1 < \mu^2$  et  $\mu^1 = \mu^2$ .

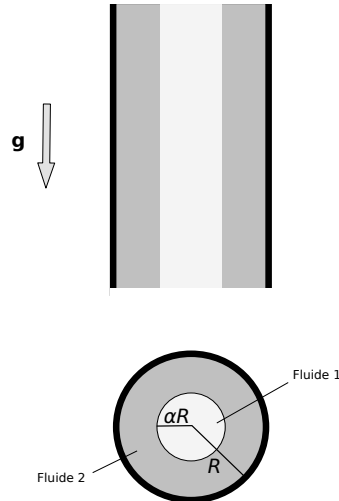


Figure 1: Exercice 2

*Solution:*

1. Décidons de travailler dans un système de coordonnées cylindriques. En toute généralité, le champ de vitesse de chacun des deux fluides peut s'exprimer comme:

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta, z)\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta(r, \theta, z)\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z(r, \theta, z)\hat{\mathbf{e}}_z$$

On suppose premièrement que l'écoulement est axisymétrique (i.e. pas de dépendance en  $\theta$  des différentes composantes de vitesses). On suppose en outre que l'écoulement est purement axial (i.e.  $v_\theta = 0 = v_r$ ) et qu'il est établi (i.e. pas de dépendance en  $z$  de  $v_z$ ). Sous ces hypothèses, les champs de vitesse se résument à :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 &= v_{z,1}(r)\hat{\mathbf{e}}_z & 0 \leq r < \alpha R \\ \mathbf{v}_2 &= v_{z,2}(r)\hat{\mathbf{e}}_z & \alpha R < r \leq R \end{cases}$$

Pour la suite, on notera par simplicité  $v_{z,1} = v_1$  et  $v_{z,2} = v_2$ .

Pour le champ de pression, on considère uniquement l'hypothèse d'axisymétrie pour le champ de pression. Dès lors, le champ de pression s'exprime comme:

$$\begin{cases} p_1 &= p_1(r, z) & 0 \leq r < \alpha R \\ p_2 &= p_2(r, z) & \alpha R < r \leq R \end{cases}$$

2. Les équations de Navier-Stokes exprimées dans un système de coordonnées cylindriques se simplifient dans notre cas pour donner les trois égalités suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial r} &= 0 \implies p_1 \perp r \\ 0 &= 0 \\ \mu_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial p_1}{\partial z} + \rho_1 g &= 0 \end{cases}$$

Les équations pour le fluide 2 sont similaires, vu que nos hypothèses sur les champs de vitesse et pression sont identiques pour les deux fluides.

3. A l'interface entre les deux fluides, on a:

(a) Continuité du champ de vitesse:

$$v_1(\alpha R) = v_2(\alpha R)$$

(b) Continuité de la densité des forces de contact s'exerçant sur l'interface:

$$\mathbf{t}_1(\hat{\mathbf{n}})|_{r=\alpha R} = \mathbf{t}_2(\hat{\mathbf{n}})|_{r=\alpha R}$$

4. L'équation en  $z$  donne:

$$\underbrace{\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho g}_{f(r)} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{g(z)} = C$$

La pression est donc, au plus, une fonction linéaire de  $z$ :

$$p(z) = Cz + D$$

Compte tenu des conditions frontières suivantes:

$$\begin{cases} p(0) &= p_0 \\ p(L) &= p_0 \end{cases}$$

on trouve:

$$p = p_0$$

dans chacun des deux fluides.

Pour trouver les champs de vitesse, il nous reste à résoudre l'équation suivante pour chaque fluide:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\rho g}{\mu} r = -Kr$$

avec  $K = \frac{\rho g}{\mu}$ , une constante différente pour chacun des deux fluides. L'intégration donne:

$$v = -\frac{K}{4}r^2 + A \log r + B$$

Les conditions frontières sont les suivantes:

(a) En  $r = 0$ , le fluide a une vitesse finie, ce qui impose:

$$A_1 = 0$$

(b) En  $r = R$ , le fluide 2 colle à la paroi:

$$v_2(R) = 0 \implies B_2 = \frac{K_2}{4}R^2 - A_2 \log R$$

Le champ de vitesse du fluide 2 peut donc s'écrire:

$$v_2(r) = \frac{K_2}{4}(R^2 - r^2) + A_2 \log \frac{r}{R}$$

A ces deux conditions se rajoutent les deux conditions à l'interface déjà mentionnées ci-dessus:

(a) la continuité du champ de vitesse donne:

$$-\frac{K_1}{4}(\alpha R)^2 + B_1 = \frac{K_2}{4}R^2(1 - \alpha^2) + A_2 \log \alpha$$

(b) la deuxième condition nécessite le calcul du tenseur des contraintes:

$$\sigma = 2\mu \mathbf{D} - p\mathbf{I}$$

Dans notre cas, on a, pour les deux fluides:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et donc:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial v}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu \frac{\partial v}{\partial r} & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Le vecteur  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_r)$  vaut donc:

$$[\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_r)] = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial v}{\partial r} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu \frac{\partial v}{\partial r} & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ 0 \\ \mu \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix}$$

La condition d'égalité qui porte sur la composante en  $z$  du vecteur  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_r)$  en  $r = \alpha R$  se traduit donc par:

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} \Big|_{r=\alpha R} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} \Big|_{r=\alpha R}$$

ou encore:

$$-\mu_1 \frac{K_1}{2} \alpha R = -\mu_2 \frac{K_2}{2} \alpha R + \mu_2 \frac{A_2}{\alpha R}$$

ce qui fournit la valeur de la constante  $A_2$ :

$$A_2 = \frac{(\alpha R)^2}{2\mu_2} (\mu_2 K_2 - \mu_1 K_1) = \frac{(\alpha R)^2}{2\mu_2} g (\rho_2 - \rho_1)$$

La constante  $B_1$  est enfin obtenue:

$$B_1 = \frac{K_2}{4} R^2 (1 - \alpha^2) + \frac{K_1}{4} (\alpha R)^2 + \frac{(\alpha R)^2}{2\mu_2} g (\rho_2 - \rho_1) \log \alpha$$

Le champ de vitesse dans le fluide 1 prend alors la forme:

$$v_1(r) = -\frac{K_1}{4}r^2 + \frac{K_2}{4}R^2(1 - \alpha^2) + \frac{K_1}{4}(\alpha R)^2 + \frac{(\alpha R)^2}{2\mu_2}g(\rho_2 - \rho_1)\log \alpha$$

que l'on peut réécrire comme:

$$v_1(r) = \frac{\rho_1 g}{4\mu_1}((\alpha R)^2 - r^2) + \frac{\rho_2 g}{4\mu_2}R^2(1 - \alpha^2) + \frac{(\alpha R)^2}{2\mu_2}g(\rho_2 - \rho_1)\log \alpha$$

Le champ de vitesse dans le fluide 2 s'écrit:

$$v_2(r) = \frac{\rho_2 g}{4\mu_2}(R^2 - r^2) + \frac{(\alpha R)^2}{2\mu_2}g(\rho_2 - \rho_1)\log \frac{r}{R}$$

5. Les figures 2a, 2b et 2c représentent le champ de vitesse dans la conduite pour les différents cas de figure.

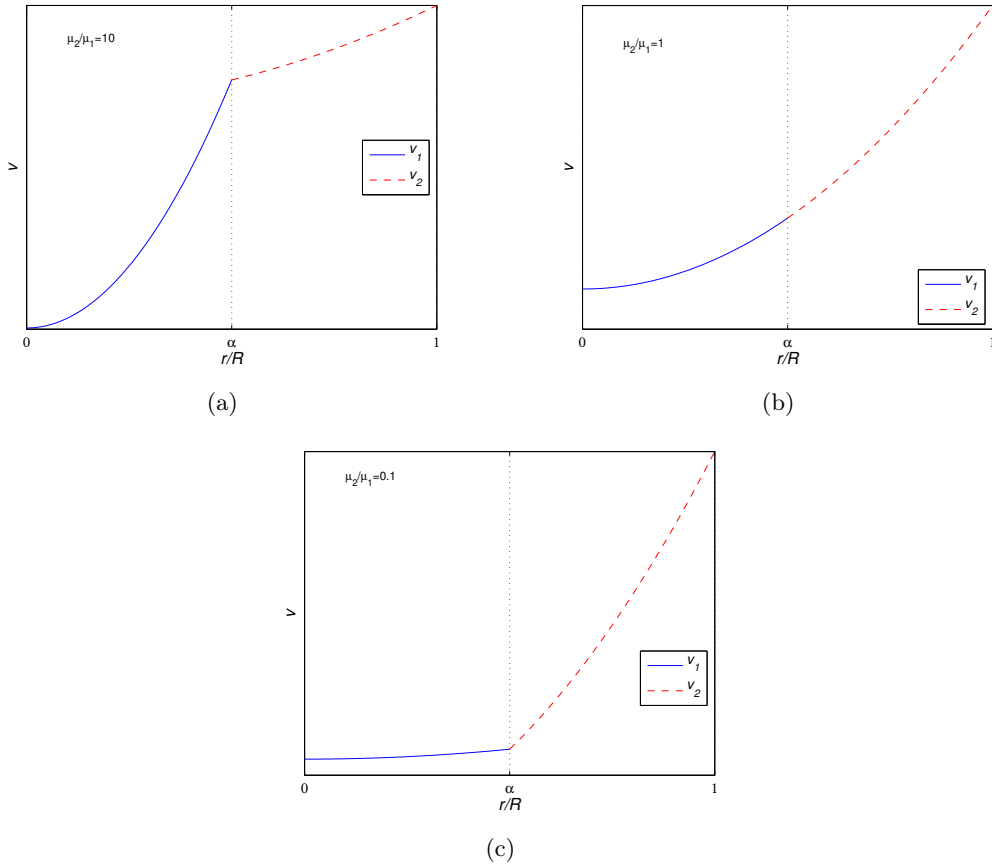


Figure 2: Ecoulement dans la conduite cylindrique pour différents rapports de viscosité  $\mu_2/\mu_1$

3

On étudie la déformation d'un cylindre de section elliptique solide immobile de longueur  $L$  et dont les bases sont des ellipses de demi-grand axe  $a$  et demi-petit axe  $b$ . On travaille dans un repère cartésien  $(O, \hat{e}_i)$ . La configuration de référence (sans tensions) est précisée sur la figure 2. Il s'agit d'un problème de petits déplacements. Le matériau est caractérisé par un module de cisaillement  $\mu$ . Le tenseur des déformations infinitésimales a l'expression suivante:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2}\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & -\frac{1}{2}\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)$$

et

$$\phi = C^{te}$$

1. Etablir le tenseur des contraintes.
2. Donner l'expression analytique des contraintes principales dans tout le cylindre. Esquisser les cercles de Mohrs correspondants. Commenter.
3. Déterminer la position et la valeur de la contrainte normale de traction maximale. Si cette contrainte dépasse la contrainte de rupture pour un matériau fragile, déterminer la surface de propagation de la rupture.
4. Déterminer dans quelle région du domaine une petite fibre matérielle de direction  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  s'est allongée ou rétrécie par l'effet de la mise sous contrainte.
5. Bonus: la mise sous contrainte est une torsion d'un angle  $\phi$  par unité de longueur ( $\text{rad } m^{-1}$ ) sous un couple  $L$ . Evaluer ce couple en fonction de  $\mu$ ,  $\phi$ ,  $a$  et  $b$ .

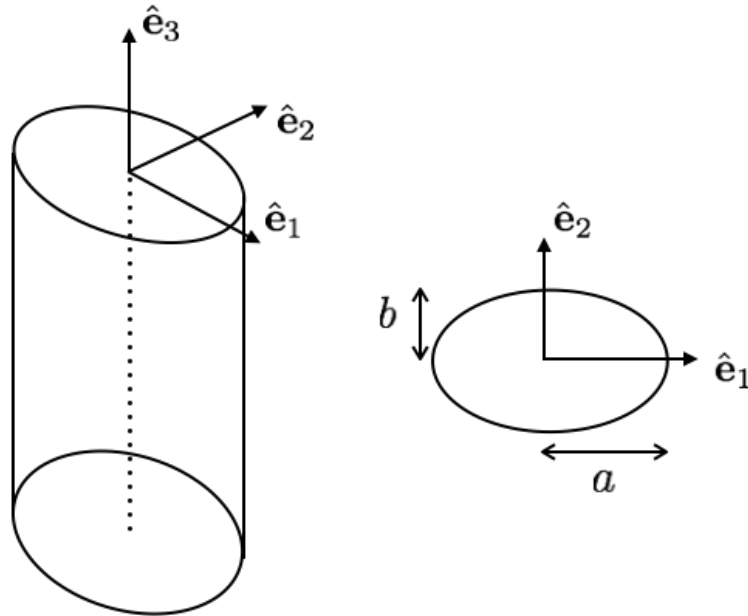


Figure 3: Exercice 3

*Solution:*

1.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\delta} - 3K\alpha(T - T_0)\boldsymbol{\delta}$$

avec  $\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$  et  $T = T_0$ , on trouve :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu\phi \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -\mu\phi \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \mu\phi \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & -\mu\phi \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} &= \frac{-2x_1b^2}{a^2 + b^2} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} &= \frac{-2x_2a^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

2. On cherche les valeurs propres de  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\mu\phi \frac{2x_2a^2}{a^2+b^2} \\ 0 & -\lambda & \mu\phi \frac{2x_1b^2}{a^2+b^2} \\ -\mu\phi \frac{2x_2a^2}{a^2+b^2} & \mu\phi \frac{2x_1b^2}{a^2+b^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda \left( \mu\phi \frac{2x_1b^2}{a^2+b^2} \right)^2 + \lambda \left( -\mu\phi \frac{2x_2a^2}{a^2+b^2} \right)^2 \\ &= \lambda \left( (\mu\phi)^2 \frac{4}{(a^2+b^2)^2} (x_1^2b^4 + x_2^2a^4) - \lambda^2 \right) \\ \sigma_1 &= 2\mu\phi \frac{\sqrt{x_1^2b^4 + x_2^2a^4}}{a^2 + b^2} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -2\mu\phi \frac{\sqrt{x_1^2b^4 + x_2^2a^4}}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

3. On cherche  $\max(\sigma_1) \rightarrow \max(x_1^2b^4 + x_2^2a^4) \rightarrow$  On trouve  $x_1 = 0$  et  $x_2 = b$   
En ces points  $\sigma_1$  vaut

$$\sigma_1 = 2\mu\phi \frac{a^2b}{a^2 + b^2}$$

On cherche le vecteur propre correspondant à  $\sigma_1$  en  $(0, b)$  :

$$\begin{bmatrix} -2\mu\phi \frac{a^2b}{a^2+b^2} & 0 & -\mu\phi \frac{2ba^2}{a^2+b^2} \\ 0 & -2\mu\phi \frac{a^2b}{a^2+b^2} & 0 \\ -\mu\phi \frac{2ba^2}{a^2+b^2} & 0 & -2\mu\phi \frac{a^2b}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On trouve donc  $n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $n_2 = 0$ ,  $n_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , avec  $n_i$  les composantes du vecteur normal à la surface de propagation de la rupture.



4. On effectue une rotation autour de l'axe 2 afin d'aligner l'axe 1 sur la direction donnée.

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{A}^T$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

On trouve

$$\epsilon'_{11} = \frac{1}{2}\phi \frac{-2x_2a^2}{a^2 + b^2}$$

On en conclut qu'il y a allongement pour  $x_2 < 0$ , rétrécissement pour  $x_2 > 0$ .

5.

$$\begin{aligned} L &= \int_S x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31} ds \\ &= \mu \phi \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} 2 \int_S \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} dS \end{aligned}$$