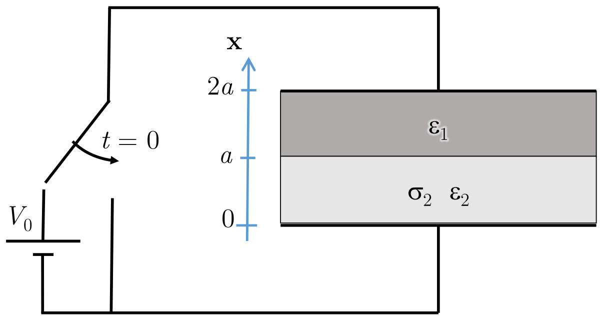
Question 1

Soit le condensateur à plaques parallèles carrées illustré ci-dessous, raccordé depuis un temps infini à une source de tension continue V_0. Les plaques sont séparées par deux diélectriques différents de conductivités $\sigma_1 = 0$ et σ_2 et de permittivités ε_1 et ε_2. Au temps $t = 0$, on débranche la source et on court-circuite la capacité par un fil de résistance négligeable.



1. Pour $t = 0^-$ et $t \to \infty$, déterminez l'expression des champs électriques $\overrightarrow{E}_1$, $\overrightarrow{D}_1$, $\overrightarrow{E}_2$ et $\overrightarrow{D}_2$ dans les deux diélectriques, ainsi que de la charge de surface en $x = 0$, $x = a$ et $x = 2a$. Expliquez clairement les hypothèses posées.

2. Pour $t \geq 0$, déterminez l'expression, **en fonction du temps**, des champs électriques $\overrightarrow{E}_1$, $\overrightarrow{D}_1$, $\overrightarrow{E}_2$ et $\overrightarrow{D}_2$ dans les deux diélectriques, ainsi que de la charge de surface en $x = 0$, $x = a$ et $x = 2a$. Expliquez clairement les hypothèses posées.

Solution

Pour tout l'exercice, on néglige les effets de bord, donc les champs sont dirigés selon **x** et ne dépendent que de x. Par ailleurs, il n'y a pas de charges libres. Ces deux points impliquent $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D}_1 = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D}_2 = 0$, et donc, en toute généralité, $\overrightarrow{D}_1(x,t) = D_1(t)\hat{x}$ et $\overrightarrow{D}_2(x,t) = D_2(t)\hat{x}$. Enfin, on se rappelle de l'équation de conservation du courant en $x = a$:

$$\hat{n} \cdot \left[\overrightarrow{J}_1 - \overrightarrow{J}_2\right] = \hat{n} \cdot \left[\sigma_1 \overrightarrow{E}_1 - \sigma_2 \overrightarrow{E}_2\right] = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \tag{1}$$

de la condition aux frontières sur le déplacement:

$$\hat{n} \cdot \left[\overrightarrow{D}_1 - \overrightarrow{D}_2\right] = \hat{n} \cdot \left[\epsilon_1 \overrightarrow{E}_1 - \epsilon_2 \overrightarrow{E}_2\right] = \rho_s, \tag{2}$$

et de la définition de la différence de potentiel sur les électrodes:

$$\Delta V = -\int \overrightarrow{E} \cdot d\hat{x} = -\left(E_1 + E_2\right) a. \tag{3}$$

1. Pour $t = 0^-$, on est en régime (puisque la source est branchée depuis un temps infini), donc rien ne dépend du temps.
   - L'équation (1) devient $\overrightarrow{J}_1 = \overrightarrow{J}_2$. Comme le milieu 1 a une conductivité nulle ($\sigma_1 = 0$), $\overrightarrow{J}_1 = \sigma_1 \overrightarrow{E}_1 = 0$, et donc $\overrightarrow{J}_2 = 0$, et donc (comme $\sigma_2 \neq 0$), $\overrightarrow{E}_2 = \overrightarrow{D}_2 = 0$.
   - L'équation (3) devient
   $$V_0 = -E_1\, a \Rightarrow \overrightarrow{E}_1 = -V_0/a\, \hat{x} \tag{4}$$
   - On trouve la charge en $x = 0$, $x = a$ et $x = 2a$ de manière assez directe,
   $$\rho_s(x=0) = 0 \;\text{ et }\; \rho_s(x=a) = \epsilon_1 E_1 = -\epsilon_1 V_0/a = -\rho_s(x=2a) \tag{5}$$

   Pour $t \to \infty$ (oublié par certains ...), rien ne dépend à nouveau plus du temps.
   - L'équation (1) devient $\overrightarrow{J}_1 = \overrightarrow{J}_2$. Comme le milieu 1 a une conductivité nulle ($\sigma_1 = 0$), $\overrightarrow{J}_1 = \sigma_1 \overrightarrow{E}_1 = 0$, et donc $\overrightarrow{J}_2 = 0$, et donc (comme $\sigma_2 \neq 0$), $\overrightarrow{E}_2 = \overrightarrow{D}_2 = 0$.
   - L'équation (3) devient $E_1 + E_2 = 0$ et donc $\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{D}_1 = 0$.
   - Toutes les charges de surface sont nulles (c'est logique, la capacité est totalement déchargée).

2. Pour $t \geq 0$, on se rend compte que la capacité va se décharger dans le milieu conducteur. On peut (oui, c'est permis) en fait tout résoudre sur base d'une équivalence circuit, avec une capacité $C_1 = \epsilon_1 S/a$, en série avec la mise en parallèle d'une capacité $C_2 = \epsilon_2 S/a$ et d'une résistance $R_2 = a/(\sigma_2 S)$, où S est la surface des électrodes; la constante de temps devrait (si on résout correctement) être égale $\tau = R_2(C_1 + C_2)$. Evidemment, résoudre sur base des équations de l'électromagnétisme revient au même.
   - L'équation (3) devient $E_1 + E_2 = 0$, donc $E_1 = -E_2$.
   - L'équation (1) devient
   $$J_1 - J_2 = \sigma_1 E_1 - \sigma_2 E_2 = \underbrace{\sigma_1}_{=0} E_1 + \sigma_2 E_1 = \sigma_2 E_1 = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}. \tag{6}$$
   - L'équation (2) devient
   $$D_1 - D_2 = \epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) E_1 = \rho_s. \tag{7}$$

   En combinant ces deux dernières équations, on trouve l'équation à résoudre
   $$\sigma_2 E_1 = -\frac{\partial (\epsilon_1 + \epsilon_2) E_1}{\partial t} \tag{8}$$
   dont la solution (en prenant en compte la condition pour $t \to \infty$) est
   $$E_1 = -\frac{V_0}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{t\sigma_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \tag{9}$$
   On trouve facilement les solutions pour les autres champs et les charges de surface. Une remarque: on trouve par cette solution que $E_2 = V_0/a\, \mathrm{e}^{-\frac{t\sigma_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}}$, et donc que $E_2(t=0) = V_0/a$, alors que $E_2(t = 0^-) = 0$. C'est normal (et ça n'est pas une erreur): on a bien un pic de tension sur C_2 en $t = 0$.

PS: Il est utile d'essayer de le résoudre par Kirchhoff, et de montrer qu'on arrive à la même solution.