Twierdzenie Lovasza

lemat Graf jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy każdy indukowany podgraf H ma zbiór niezależny, który przecina każdą klikę w H o maksymalnym rzędzie (tj. rzędzie $\omega(H)$). Innymi słowy, dla dowolnego podgrafu H, istnieje zbiór niezależny I taki, że

$$\omega(H - I) < \omega(H).$$

Dowód. Rozważmy doskonały graf G. Z definicji, każdy indukowany podgraf G jest również doskonały. Naszym celem jest znalezienie zbioru I takiego, że $\omega(G - I) < \omega(G)$. Możemy to osiągnąć, wybierając dowolne $\chi(G) = \omega(G)$ kolorowanie G i definiując I jako jedną z klas kolorów użytych w tym kolorowaniu. Ten zbiór jest niezależny z definicji. Ponadto, ponieważ usunęliśmy jeden kolor, $G-I$ spełnia warunek $\omega(G-I) = \chi(G-I) < \chi(G) = \omega(G)$. To potwierdza pierwszą część naszego twierdzenia.

Następnie rozważmy graf G, w którym każdy indukowany podgraf $H \subset G$ ma zbiór niezależny I_H, który przecina każda klika w H o maksymalnym rzędzie. Naszym celem jest pokazanie, że taki graf jest doskonały, co udowodnimy przez indukcję na $\omega(G)$. Dla grafów, gdzie $\omega(G) = 1$, które są grafami bez krawędzi, nie ma potrzeby dowodu. Dlatego zakładamy, że $\omega(G) = n$ i że udowodniliśmy nasz wynik dla wszystkich wartości $n' < n$.

Niech H będzie dowolnym indukowanym podgrafem G, a I niezależnym zbiorem wierzchołków w H takim, że $\omega(H-I) < \omega(H)$. Zgodnie z naszą hipotezą indukcyjną, $H-I$ jest doskonały, a zatem $\chi(H-I) = \omega(H-I)$. To pozwala nam pokolorować $H-I$ za pomocą $\omega(H-I)$ kolorów. Wybieramy dowolne takie kolorowanie i rozszerzamy je na kolorowanie H poprzez pokolorowanie I nowym kolorem. Otrzymujemy w ten sposób kolorowanie H za pomocą $\omega(H-I)+1$ kolorów. Ponieważ $\omega(H-I) < \omega(H)$, nasze kolorowanie H używa $\leqslant \omega(H)$ kolorów, tj. $\omega(H) \leqslant \chi(H)$. To sugeruje, że $\omega(H) = \chi(H)$. Ponieważ jest to prawda dla każdego podgrafu H grafu G, udowodniliśmy, że G jest doskonały, jak twierdziliśmy. □

Twierdzenie 0.1. *Graf uzyskany z grafu doskonałego poprzez zastąpienie dowolnego z jego wierzchołków innym grafem doskonałym jest nadal doskonały.*

Dowód. Niech G_1, G_2 będą parą grafów doskonałych, a α wierzchołkiem w G_1. Niech G^* będzie grafem utworzonym poprzez zastąpienie α przez G_2. Rozważmy dowolny podgraf indukowany H z G_1, o zbiorze wierzchołków $V_1 \cup V_2$, gdzie $V_1 \subset V(G_1)$, a $V_2 \subseteq V(G_2)$. Zarówno podgrafy indukowane na zbiorach V_1 jak i V_2 są doskonałe z definicji. Dlatego H jest również grafem utworzonym poprzez zastąpienie wierzchołka w grafie doskonałym innym grafem doskonałym.

Naszym celem jest udowodnienie, że dla dowolnego takiego grafu G^*, możemy znaleźć zbiór niezależny I o $\omega(G^*)$ wierzchołkach, który przecina każdą maksymalną klike G^*. Aby skonstruować ten zbiór, najpierw bierzemy $\omega(G_1)$-kolorowanie G_1, a J jest klasą kolorów G_1 zawierającą nasz wierzchołek α. Następnie usuwamy element α z J. Następnie znajdujemy zbiór niezależny K w grafie G_2, który przecina niebanalnie każdą klikę w G_2 o rzędzie $\omega(G_2)$. Definiujemy $I = J \cup K$.

Ten zbiór jest oczywiście niezależny w G^*. Nie ma krawędzi między elementami J ani elementami K z definicji, ponieważ oba są zbiorami niezależnymi. Ponadto, nie ma krawędzi między elementami J i K, ponieważ α był kolorowany tym samym kolorem co elementy w J, a my zastąpiliśmy α przez G_2, aby utworzyć G^*.

Teraz niech L będzie dowolną kliką w G^* o maksymalnym rozmiarze $\omega(G^*)$. Musimy pokazać, że L i I przecinają się niebanalnie. Jeśli L jest całkowicie zawarte w $G_1 \setminus \{\alpha\}$, to L musi zawierać co najmniej jeden wierzchołek z każdej klasy kolorów w $G_1 \setminus \{\alpha\}$. Jest tak, ponieważ L jest kliką i nie może zawierać dwóch elementów tego samego koloru pod żadnym właściwym kolorowaniem. W konsekwencji, L i J mają wspólny element, a L przecina I niebanalnie.

Jeśli istnieją wierzchołki L, które leżą w G_2, to $|L \cap V(G_2)| = \omega(G_2)$. Z definicji, K musi przecinać tę klikę. Dlatego $I = J \cup K$ musi również przecinać tę klikę, która jest częścią L.

W obu przypadkach, każda maksymalna klika przecina nasz zbiór niezależny. To sugeruje, że G^* jest doskonały. □

Twierdzenie 0.2. *(Lovasz) Graf G jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest doskonałe.*

Dowód. Rozpoczynamy dowód od podejścia indukcyjnego, opartego na liczbie wierzchołków w grafie G. Przypadek, w którym liczba wierzchołków wynosi 1, jest trywialny i nie wymaga dalszej analizy. To pozwala na przejście do kroku indukcyjnego, gdzie zakładamy, że $|V(G)| = n$ i że G jest doskonały.

Celem jest wykazanie, że dopełnienie $\bar{G}$ jest doskonałe, co wymaga pokazania, że $\bar{G}$ zawiera zbiór niezależny I, który przecina każda klika w $\bar{G}$. Ten warunek jest wystarczający, ponieważ każdy indukowany podgraf G jest doskonały, a zatem każdy indukowany podgraf $\bar{G}$ jest dopełnieniem doskonałego grafu.

Ze względu na złożoność pracy z dopełnieniem grafu, warunek ten jest przekształcany na właściwości G. W G, zbiór niezależny w $\bar{G}$ odpowiada klice i przecina każdy maksymalny zbiór niezależny wierzchołków, jeśli przecina każda maksymalna klika w $\bar{G}$. To znaczy, jeśli istnieje zbiór niezależny wierzchołków J, taki że $|J| = \alpha(G)$, to I przecina J w sposób niebanalny.

Dowód kontynuujemy przez sprzeczność: zakładamy, że taki zbiór nie istnieje. Wtedy, dla każdego pełnego podgrafu K zawartego w G, musi istnieć jakiś zbiór niezależny J, taki że K i J nie przecinają się. Niech $L_1, \ldots L_r$ oznacza wszystkie możliwe podgrafy G izomorficzne do pełnych grafów, a $I_1, \ldots I_r$ oznacza odpowiadające im zbiory niezależne.

Celem jest osiągnięcie sprzeczności, biorąc pod uwagę centralne założenie, że $\omega(G) = \chi(G)$. Prawdopodobnie będzie to miało formę $\chi(G) > \omega(G)$. Istotne jest następujące ograniczenie:

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}.$$

Ponieważ każde k-kolorowanie wierzchołków G indukuje podział G na k zbiorów niezależnych; ponieważ żaden z nich nie może być większy niż $\alpha(G)$, uzyskujemy powyższe ograniczenie.

W tym momencie nie mamy dobrego związku między $|V(G)|$ a $\omega(G)$. Jednak możemy go stworzyć! Konkretnie: użyjmy naszego twierdzenia o podstawieniu doskonałego grafu, które mieliśmy wcześniej!

To twierdzenie pozwala nam zastąpić wierzchołki w G doskonałymi grafami. Dla ułatwienia obliczeń, prawdopodobnie chcemy upewnić się, że ten graf ma taki sam numer niezależności jak G. Ogólnie rzecz biorąc, jedyne grafy, które można dodać, które nie zwiększą numeru niezależności, to pełne grafy (które pokazaliśmy, że są doskonałe); więc spróbujmy dodać te! Konkretnie: zastąpmy każdy wierzchołek $v_1, \ldots v_n$ w G pełnym grafem K_{v_i} na $i(v_j)$-wielu wierzchołkach (gdzie zdecydujemy, jakie są te wartości $i(v_j)$ później,) i nazwijmy wynikowy graf G^*.

Co możemy teraz powiedzieć o $\omega(G^*)$? Cóż, każdy pełny podgraf G^* jest uzyskiwany poprzez najpierw wzięcie pełnego podgrafu G, a następnie dodanie co najwyżej $i(v)$-wielu wierzchołków dla każdego wierzchołka w pełnym podgrafie. Więc, jeśli spojrzymy na naszą listę $L_1, \ldots L_t$ naszych pełnych podgrafów G i wybierzemy jeden (powiedzmy L_r) o maksymalnym rzędzie $= \omega(G)$, to mamy, że

$$\omega(G^*) = \sum_{v \in L_r} i(v)$$

Również, jeśli teraz zwrócimy uwagę na liczbę chromatyczną, stosując nasze wcześniejsze ograniczenie (plus obserwację, że $\alpha(G^*) = \alpha(G)$), mamy również

$$\chi(G^*) \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} i(v_j)}{\alpha(G)}.$$

Możemy powiązać te sumy, z których pierwsza odnosi się do elementów w pełnym podgrafie, a druga do numeru niezależności naszego grafu, za pomocą inteligentnego wyboru naszych wartości $i(v_i)$. Po pewnym myśleniu, pojawia się obiecujący pomysł: ustaw $i(v_j)$ jako liczbę zbiorów niezależnych I_k zawierających v_j! Jednym z natychmiastowych powodów, dla których to lubimy, jest to, że ładnie upraszcza naszą sumę powyżej: rzeczywiście, ponieważ $\sum_{j=1}^{n} i(v_j) = \sum_{j=1}^{t} |I_j| = t \cdot \alpha(G)$, mamy, że tak naprawdę

$$\chi(G^*) \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} i(v_j)}{\alpha(G)} = t.$$

Co to oznacza dla naszego ograniczenia na $\omega(G^*)$? Cóż, możemy przepisać

$$\omega(G^*) = \sum_{v \in L_r} i(v) = \sum_{v \in L_r} \left(\sum_{j : v \in I_j} 1 \right) = \sum_{j=1}^{t} |L_r \cap I_j|.$$

Ale L_r przecina każde I_j co najwyżej raz (ponieważ L_r jest kliką) i nigdy nie przecina I_r wcale: dlatego mamy, że ta suma jest co najwyżej liczba I_j 's minus 1 ; tzn. $t-1$.

Więc, pokazaliśmy, że $\omega(G^*) \leqslant t-1$, a że $\chi(G^*) \geqslant t$. Ale G^* jest doskonały, ponieważ doszliśmy do niego poprzez zastąpienie wierzchołków pełnymi grafami! To jest sprzeczność.

Dlatego udowodniliśmy, że G ma klikę, które przecina każdy maksymalny zbiór niezależny; tzn. że $\bar{G}$ ma zbiór niezależny, który przecina każdą maksymalną klikę, co oznacza, że (za pomocą naszej propozycji i wcześniejszej dyskusji) $\bar{G}$ jest doskonały. □