

Algorytmy i Struktury Danych

30 maja 2021

Ćwiczenia 10: Ciąg dalszy najkrótszych ścieżek oraz zadania różne

Zadania obowiązkowe

Zadanie 1. (malejące krawędzie, c.d.) Dany jest graf $G = (V, E)$, gdzie każda krawędź ma wagę ze zbioru $\{1, \dots, |E|\}$ (wagi krawędzi są parami różne). Proszę zaproponować algorytm, który dla danych wierzchołków x i y oblicza ścieżkę o najmniejszej sumie wag, która prowadzi z x do y po krawędziach o malejących wagach (jeśli ścieżki nie ma to zwracamy ∞).

Zadanie 2. (domknięcie przechodnie) Proszę zaimplementować algorytm obliczający domknięcie przechodnie grafu reprezentowanego w postaci macierzowej (domknięcie przechodnie grafu G , to graf nad tym samym zbiorem wierzchołków, który dla każdych dwóch wierzchołków u i v ma krawędź z u do v wtedy i tylko wtedy, gdy w G istnieje ścieżka z u do v).

Zadania standardowe

Zadanie 1. (SAT-2CNF) Dana jest formuła logiczna w postaci 2CNF. To znaczy, że formuła jest koniunkcją klauzuli, gdzie każda klauzula to alternatywa dwóch literalów, a każdy literal to zmienna lub jej negacja. Przykładem formuły w postaci 2CNF nad zmiennymi x, y, z jest:

$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (\bar{z} \vee \bar{y}).$$

Proszę podać algorytm, który w czasie wielomianowym stwierdza, czy istnieje wartościowanie spełniające formułę.

Zadanie 2. (wyścigi) Król Bitocji postanowił zorganizować serię wyścigów samochodowych. Wyścigi mają się odbywać po trasach zamkniętych, składających się z odcinków autostrady łączących miasta Bitocji. Król chce, żeby każde miasto było zaangażowane w dokładnie jeden wyścig. W tym celu należy sprawdzić, czy da się wyznaczyć odpowiednie odcinki autostad. Należy jednak pamiętać o następujących ograniczeniach:

1. w Bitocji wszystkie autostrady są jednokierunkowe,
2. z każdego miasta wychodzą co najwyżej dwa odcinki autostrady, którymi można dojechać do innych miast,
3. do każdego miasta dochodzą co najwyżej dwa odcinki autostrady, którymi można przyjechać z innych miast,

Proszę zaproponować algorytm, który mając na wejściu opis sieci autostrad Bitocji sprawdza czy da się zorganizować serię wyścigów tak, żeby przez każde miasto przebiegała trasa dokładnie jednego.

Utrudnienie: Każdy odcinek autostrady ma przedział dopuszczalnych cen i należy wybrać wspólną cenę dla wszystkich wynajętych odcinków.

Zadanie 3. (wymiana walut) Dana jest tabela kursów walut. Dla każdych dwóch walut x oraz y wpis $K[x][y]$ oznacza ile trzeba zapłacić waluty x żeby otrzymać jednostkę waluty y . Proszę zaproponować algorytm, który sprawdza czy istnieje taka waluta z , że za jednostkę z można uzyskać więcej niż jednostkę z przez serię wymian walut.

Zadanie 4. (szachuję) Algocja leży na wielkiej pustyni i składa się z miast oraz oaz połączonych drogami. Każde miasto jest otoczone murem i ma tylko dwie bramy—północną i południową. Z każdej bramy prowadzi dokładnie jedna droga do jednej oazy (ale do danej oazy może dochodzić dowolnie wiele dróg; oazy mogą też być połączone drogami między sobą). Prawo Algocji wymaga, że jeśli ktoś wjechał do miasta jedną bramą, to musi go opuścić drugą. Szach Algocji postanowił wysłać gońca, który w każdym mieście kraju odczyta zakaz formułowania zadań “o szachownicy” (obraza majestatu). Szach chce, żeby goniec odwiedził każde miasto dokładnie raz (ale nie ma ograniczeń na to ile razy odwiedzi każdą z oaz). Goniec wyjeżdża ze stolicy Algocji, miasta x , i po odwiedzeniu wszystkich miast ma do niej wrócić. Proszę przedstawić algorytm, który stwierdza czy odpowiednia trasa gońca istnieje

Zadanie 5. (autostrady) W pewnym państwie, w którym znajduje się N miast, postanowiono połączyć wszystkie miasta siecią autostrad, tak aby możliwe było dotarcie autostradą do każdego miasta. Ponieważ kontynent, na którym leży państwo jest płaski położenie każdego z miast opisują dwie liczby x, y , a odległość w linii prostej pomiędzy miastami liczona w kilometrach wyraża się wzorem $len = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Z uwagi na oszczędności materiałów autostrada łączy dwa miasta w linii prostej.

Ponieważ zbliżają się wybory prezydenta, wszystkie autostrady zaczęto budować równocześnie i jako cel postanowiono zminimalizować czas pomiędzy otwarciem pierwszej i ostatniej autostrady. Czas budowy autostrady wyrażony w dniach wynosi $\lceil len \rceil$ (sufit z długości autostrady wyrażonej w km). Proszę zaproponować algorytm wyznaczający minimalną liczbę dni dzielącą otwarcie pierwszej i ostatniej autostrady.

Zadanie 6. (najlepszy korzeń) Dany jest acykliczny, spójny nieskierowany, ważony graf T (czyli T jest tak naprawdę ważonym drzewem). Proszę wskazać algorytm, który znajduje taki wierzchołek T , z którego odległość do najdalszego wierzchołka jest minimalna.