

# Algorytmy i Struktury Danych

16 kwietnia 2021

## Ćwiczenia 6: Programowanie dynamiczne (część 2)

**Zadanie 1. (Black Forest)** Black Forest to las rosnący na osi liczbowej gdzieś w południowej Anglii. Las składa się z  $n$  drzew rosnących na pozycjach  $0, \dots, n-1$ . Dla każdego  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  znany jest zysk  $c_i$ , jaki można osiągnąć ścinając drzewo z pozycji  $i$ . John Lovenoses chce uzyskać maksymalny zysk ze ścinanych drzew, ale prawo zabrania ścinania dwóch drzew pod rząd. Proszę zaproponować algorytm, dzięki któremu John znajdzie optymalny plan wycinki.

**Zadanie 2. (spadające klocki)** Każdy klocek to przedział postaci  $[a, b]$ . Dany jest ciąg klocków  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ . Klocki spadają na oś liczbową w kolejności podanej w ciągu. Proszę zaproponować algorytm, który oblicza ile klocków należy usunąć z listy tak, żeby każdy kolejny spadający klocek mieścił się w całości w tam, który spadł tuż przed nim.

**Zadanie 3. (ładowanie promu)** Dana jest tablica  $A[n]$  z długościami samochodów, które stoją w kolejce, żeby wjechać na prom. Prom ma dwa pasy (lewy i prawy), oba długości  $L$ . Proszę napisać program, który wyznacza, które samochody powinny pojechać na który pas, żeby na promie zmieściło się jak najwięcej aut.auta muszą wjeżdżać w takiej kolejności, w jakiej są podane w tablicy  $A$ .

**Zadanie 4. (Głodna żaba)** Pewna żaba skacze po osi liczbowej. Ma się dostać z zera do  $n-1$ , skacząc wyłącznie w kierunku większych liczb. Skok z liczby  $i$  do liczby  $j$  ( $j > i$ ) kosztuje ją  $j-i$  jednostek energii, a jej energia nigdy nie może spaść poniżej zera. Na początku żaba ma 0 jednostek energii, ale na szczęście na niektórych liczbach—także na zerze—leżą przekąski o określonej wartości energetycznej (wartość przekąski dodaje się do aktualnej energii Zbigniewa). Proszę zaproponować algorytm, który oblicza minimalną liczbę skoków potrzebną na dotarcie z 0 do  $n-1$  mając daną tablicę  $A$  z wartościami energetycznymi przekąsek na każdej z liczb.

**Zadanie 5 (dwuwymiarowy problem plecakowy)** Proszę zaproponować algorytm dla dwuwymiarowej wersji dyskretnego problemu plecakowego. Mamy dany zbiór  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  przedmiotów i dla każdego przedmiotu  $p_i$  dane są następujące trzy liczby:

1.  $v(p_i)$  – wartość przedmiotu,
2.  $w(p_i)$  – waga przedmiotu, oraz
3.  $h(p_i)$  – wysokość przedmiotu.

Złodziej chce wybrać przedmioty o maksymalnej wartości, których łączna waga nie przekracza danej liczby  $W$  oraz których łączna wysokość nie przekracza danej liczby  $H$  (przedmioty zapakowane są w kartony, które złodziej układa jeden na drugim). Proszę oszacować złożoność czasową swojego algorytmu oraz uzasadnić jego poprawność.

**Zadanie 6 (ścieżka w drzewie)** Dane jest drzewo ukorzenione  $T$ , gdzie każdy wierzchołek  $v$  ma—potencjalnie ujemną—wartość  $\text{value}(v)$ . Proszę zaproponować algorytm, który znajduje wartość najbardziej wartościowej ścieżki w drzewie  $T$ .

**Zadanie 7. (sklejanie odcinków)** Dany jest ciąg przedziałów postaci  $[a_i, b_i]$ . Dwa przedziały można skleić jeśli mają dokładnie jeden punkt wspólny. Proszę wskazać algorytmy dla następujących problemów:

1. Problem stwierdzenia, czy da się uzyskać przedział  $[a, b]$  przez sklejanie odcinków.
2. Zadanie jak wyżej, ale każdy odcinek ma koszt i pytamy o minimalny koszt uzyskania odcinka  $[a, b]$ .
3. Problem stwierdzenia jaki najdłuższy odcinek można uzyskać sklejając najwyżej  $k$  odcinków.