Tema 3
ALGORITMIA

Parte III. *Recurrencia* .

Irene Martínez Masegosa

Depto. de Informática

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

3.3-1

Contents

3.3-2

- El concepto de recurrencia es fundamental en matemáticas y en computación
- Un programa "recursivo" es un programa que se llama a sí mismo del mismo modo que una función matemática se define en términos de sí misma.

Motivación

Resolver un problema mediante recursión significa que la solución depende de soluciones más pequeñas del mismo problema.

↓

Método recursivo

↓

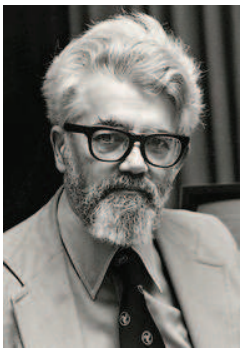
Herramienta de programación potente

↓

algoritmos cortos y sencillos
(aunque no siempre son eficientes)

3.3-3

Un poco de Historia...



https://www.nytimes.com/2011/10/26/science/26mccarthy.html?_r=0

- *El profesor John McCarthy del Massachusetts Institute of Technology, MIT, fue el primero en considerar el uso de la recursión en los lenguajes de programación.*
- *Defendió que se incluyese en el diseño del lenguaje Algol60, que fue precursor de lenguajes como Pascal, PL/I y C.*
- *Además desarrolló el lenguaje Lisp, que introdujo estructuras de datos recursivas junto a procedimientos y funciones recursivos.*
- *El valor de la recursión fue muy apreciado durante el intenso periodo de desarrollo de algoritmos en los años 70.*
- *Actualmente todos los lenguajes de programación soportan recursión (Java, C++,...)*

3.3-4

1 Algoritmos con recurrencia

¿Qué es la recurrencia?

Recursive Algorithm
Un **algoritmo recursivo** es aquel que resuelve un problema resolviendo una o más instancias **más pequeñas del mismo problema.**

Ejemplo: Sucesión de Fibonacci

$$f(n) = \begin{cases} 0; & \text{si } n = 0 \\ 1; & \text{si } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

```
funcion FibREC(n)
    IF n < 2 devolver n
    ELSE
     devolver FibREC(n-1) + FibREC(n-2)
```

$$\begin{aligned} FibREC(6) &= FibREC(5) + FibREC(4) \\ &= \ldots\ldots \\ &= \ldots\ FibREC(1) + FibREC(0) \end{aligned}$$

Números de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Construcción de un algoritmo recursivo

- *Método recursivo*: se define en términos de una instancia más pequeña de sí mismo: ⇒ Debe haber algún **caso base** que se pueda resolver **sin llamadas recursivas**.

Un algoritmo recursivo consta de:

- **Caso base**: (sin llamadas recursivas) implementación para valores específicos de los argumentos.
- **Etapa de reducción**: (llamadas recursivas) asume que el método funciona para valores más pequeños de sus argumentos y lo utiliza para implementar otros valores.
  - **Las llamadas recursivas deben progresar hacia un caso base**.

    (Un fallo en el progreso hacia el caso base hace que el programa no funcione)

Ejemplo. Máximo Común Divisor Algoritmo de *Euclides*

$$GCD(p,q) = \begin{cases} p; & \text{si } q = 0 \quad \leftarrow \text{Caso base} \\ GCD(q, p\%q) & \text{otro caso} \quad \leftarrow \text{Reducción (converge c. base)} \end{cases}$$

```
funcion GCD(p,q)
    IF q == 0 devolver p;      ← caso base
    ELSE
     devolver GCD(q, p%q);
```

$$\begin{aligned} GCD(4032,1272) &= GCD(1272,216) \quad \leftarrow 4032 = 3 \times 1272 + 216 \\ &= GCD(216,192) \\ &= GCD(192,24) \\ &= GCD(24,0) \\ &= 24 \end{aligned}$$

Algoritmos recursivos conocidos

Ejemplo: Cálculo del Factorial

$$Factorial(n) = \begin{cases} 1; & \text{si } n = 0 \\ n \times Factorial(n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

```
funcion Factorial(n)
    IF n == 0 devolver 1;        ← caso base
    ELSE
     devolver n×Factorial(n − 1);
```

$$\begin{aligned} Factorial(5) &= 5 \times Factorial(4) \\ &= 4 \times Factorial(3) \\ &= 3 \times Factorial(2) \\ &= 2 \times Factorial(1) \\ &= 1 \times Factorial(0) \qquad \leftarrow \text{caso base} \\ &\quad \text{return } 1 \\ &\quad \text{return } 2 \times 1 = 2 \\ &\quad \text{return } 3 \times 2 = 6 \\ &\quad \text{return } 4 \times 6 = 24 \\ &\quad \text{return } 5 \times 24 = 120 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Algoritmos recursivos conocidos

Ejemplo: Suma de los n primeros enteros

$$suma(n) = \begin{cases} 1; & \text{si } n = 1 \\ n + suma(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

```
funcion SUMAenteros(n)
    IF n == 1 devolver 1
    ELSE
     devolver SUMAenteros(n − 1) + n
```

$$\begin{aligned} SUMA(5) &= 5 + SUMA(4) \\ &= 4 + SUMA(3) \\ &= 3 + SUMA(2) \\ &= 2 + SUMA(1) \\ &= 1 \qquad \leftarrow \text{caso base} \\ &\quad \text{return } 1 \\ &\quad \text{return } 2 + 1 = 3 \\ &\quad \text{return } 3 + 3 = 6 \\ &\quad \text{return } 4 + 6 = 10 \\ &\quad \text{return } 5 + 10 = 15 \\ &= 15 \end{aligned}$$

¿Cómo funciona?

- Es necesario entender cómo funciona la recursión en un ordenador.
- Las llamadas recursivas a métodos se implementan mediante **activation frames**.

Activation frame
Es la unidad básica de **almacenamiento** en una invocación de un método durante la ejecución. En el *frame* se almacenan:

  - las **variables locales** del método
  - los **parámetros actuales**
  - **variables temporales** del compilador incluida la variable de la instrucción `return()`
  - **Dirección de retorno**: es la instrucción que debe ejecutarse cuando "vuelva" de la llamada recursiva

3.3-10

Pila de LLamadas Recursivas

- Cuando se produce una llamada a un método recursivo el compilador genera código para ocupar espacio de una zona de almacenamiento llamada **pila** (memoria de pila)
- A esta zona de memoria se accede a través de un registro especial llamado ***frame pointer***.
- Al ejecutar una invocación del método recursivo, a través de ese puntero se sabe dónde están almacenadas sus *variables locales, parámetros de entrada, y el valor de* ***`return`***.
- Cada invocación de método tiene asociado un **único** *frame*.
- Se producen varias llamadas recursivas:
  - se genera un *frame* para cada llamada y
  - se van guardando como una pila.
- Cuando la rutina "vuelve" de la llamada: recupera su *frame*, y con él sus variables locales, etc.

3.3-11

Ejemplos. Algoritmos GCD y Factorial.

Traza de llamadas recursivas y *frames* en los algoritmos:

GCD: http://introcs.cs.princeton.edu/lectures/23demo-gcd.pps
Factorial: http://introcs.cs.princeton.edu/lectures/23demo-factorial.pps
Nota: Pueden descargarse del aula virtual, carpeta 3.3 Recurrencia.

3.3-12

Ejemplo: Cálculo del Factorial

`Factorial(3)`

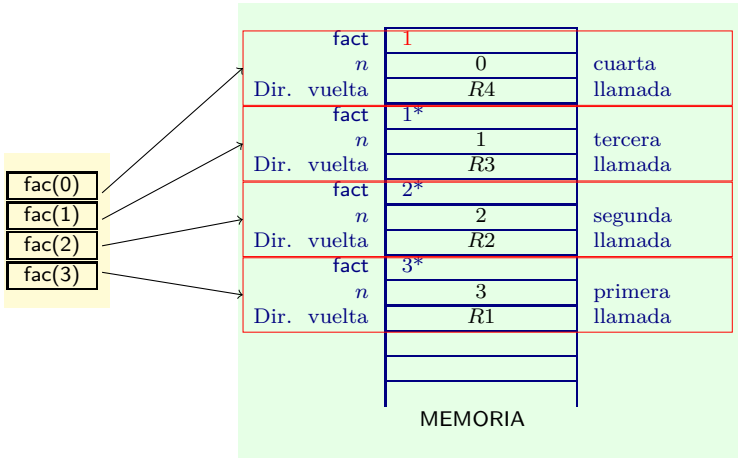
```
pubic class Factorial {
   public static int fact(int n) {
      if (n == 0) return 1;
      else return n * fact(n-1);
   }

   public static void main(String[] args) {
      System.out.println(fact(3));
   }
}
```

http://introcs.cs.princeton.edu/

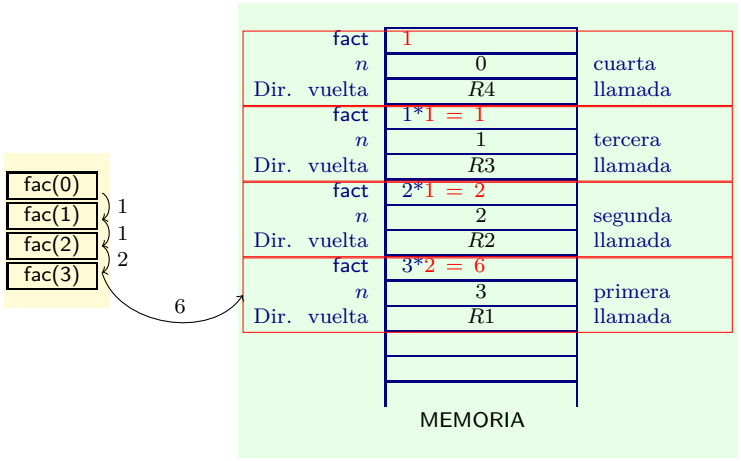
3.3-13

Pila de llamadas recursivas



3.3-14

Devolución de valores en las llamadas recursivas



3.3-15

Reglas Básicas de la Recursión

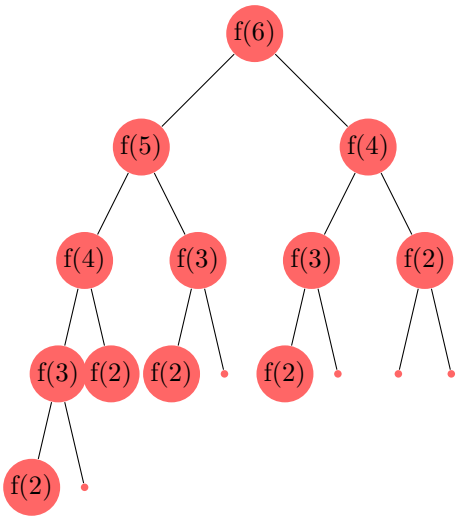
Reglas Básicas:

1. **Casos bases**: se debe tener siempre al menos un caso base que pueda resolverse sin recursión
2. **Progreso**: las llamada recursivas deben progresar hacia un caso base.
3. **Correción**: asumir siempre que toda llamada recursiva interna funciona correctamente.
4. **No recalcular términos**: nunca hay que duplicar trabajo resolviendo la misma instancia de un problema en llamadas recursivas separadas.

3.3-16

Ejemplo Recursión Ineficiente: Términos de la sucesión de Fibonacci

```
funcion FibREC(n)
    IF n < 2 devolver n
    ELSE
     devolver FibREC(n − 1) + FibREC(n − 2)
```



- $f(4)$ se calcula 2 veces
- $f(3)$ se calcula 3 veces
- $f(2)$ se calcula 5 veces
- Es de orden Exponencial

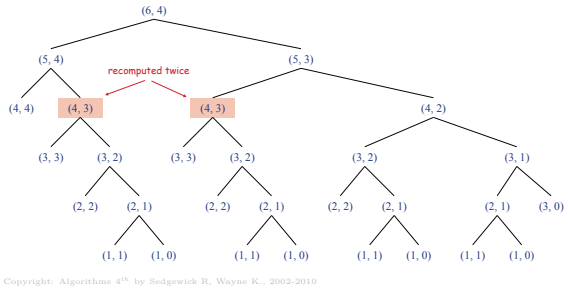
Ejemplo Recursión Ineficiente: Coeficientes Binomiales

Cálculo del coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0\ , \quad k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

```
funcion BinomREC(n, k)
    IF( k = 0 OR k = n)    Devolver 1
    ELSE
        Devolver( BinomREC(n − 1,k − 1) + BinomREC(n − 1,k) )
```

$$\begin{aligned} BinomREC(6,4) &= BinomREC(5,4) + BinomREC(5,3) \\ &= \ldots\ldots \\ &= \ldots\ BinomREC(1,1) + BinomREC(1,0) \end{aligned}$$



➜ Orden Exponencial

Inducción Matemática

- La programación recursiva está directamente relacionada con la **inducción matemática**.
- La inducción es una técnica para demostrar teoremas sobre funciones discretas.
- Probamos que un teorema es cierto para un entero N, y para otros posibles valores de N, en **dos etapas**:
  - **Caso Base**: probamos que la afirmación es cierta para unos valores secillos de N (generalmente 0 ó 1)
  - **Etapa de Inducción**: es la parte principal de la demostración.
    - Establecemos la **hipótesis de inducción**, en la que consideramos que el teorema es cierto para un k arbitrario **menor que** N,
    - A partir de ésta probamos que el teorema es cierto para $k+1$,
    - Y por inducción, el teorema queda demostrado para todos los casos de N.

¿Por qué funciona la Recursión?

- Las demostraciones por inducción nos muestran que podemos demostrar la certeza de una afirmación considerando que es cierta para casos más sencillos.
- **Se puede demostrar la corrección de los algoritmos recursivos usando inducción matemática**
- Ejemplo: Imprimir un número no negativo N en base 10.

```
void ImprimeBaseDiez(n)
1.    IF n ≥ 10
2.        ImprimeBaseDiez(n/10)
3.    Imprimir(n%10)
```

  - Ejemplo: 1369, debe imprimirse como 1, 3, 6, 9

```
ImprimeBaseDiez(1369) :     ImprimeBaseDiez(136)     (a la vuelta Imprime 9)
                      :       ImprimeBaseDiez(13)    (a la vuelta Imprime 6)
                      :         ImprimeBaseDiez(1)   (a la vuelta Imprime 3)
                      :           Imprimir(1)        ← caso base
                                Imprimir(3)
                              Imprimir(6)
                            Imprimir(9)
```

- Demostración [Weiss 7.3]

2 Análisis de Algoritmos Recursivos

Ecuación de Recurrencia

- En un algoritmo recursivo, la función $T(n)$ que establece su complejidad viene dada por una ecuación de recurrencia.

  Recurrencia
  Una recurrencia es una ecuación o desigualdad que describe una función en términos de sus valores para entradas más pequeñas.

- Sintetiza la relación de dependencia entre el **tiempo de ejecución** de un algoritmo para una **entrada de tamaño** n y el de **entradas de tamaños menores**.
- Por ejemplo: $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

3.3-21

¿Cómo hacemos el Análisis del Algoritmo Recursivo?

Para obtener el orden al que pertenece $T(n)$ del algoritmo:

1. A partir del código del algoritmo calculamos el **tiempo** empleado en las **llamadas recursivas** y el del **caso/s base**:
   - hay que tener en cuenta el **número** de llamadas recursivas
   - y el **tamaño de la entrada** en cada una de ellas
2. Planteamos una **ecuación de recurrencia** que recoja todos los tiempos
3. **Resolver** la ecuación, con un método adecuado

3.3-22

Ejemplo. Ecuación de Recurrencia

Ejemplo: Sucesión de Fibonacci con algoritmo recursivo

```
funcion FibREC(n)
    IF n < 2 devolver n
    ELSE devolver FibREC(n-1) + FibREC(n-2)
```

- Para $n < 2$, $T(n)$ es constante: a
  En otro caso:
  - dos llamadas recursivas que requieren: $T(n-1)$ y $T(n-2)$
  - sumar f_{n-1} y f_{n-2} : $\rightarrow h(n)$ (=cte si operaciones básicas)
- **Ecuación de recurrencia**:

$$T(n) = \begin{cases} a & si\ n < 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + h(n) & otro\ caso \end{cases}$$

- **Solución** a la ecuación : T_{FibREC} es **exponencial** en n [Brassard 4.7.2]

3.3-23

Cómo plantear la Ecuación de Recurrencia

- Sea n el tamaño del problema.
- Analizando para el **caso peor**, $T(n)$ se define en función de n como la **SUMA** de:

Coste RECURSIVO

1. Coste de todas las llamadas recursivas:

   $$T(k_1)+T(k_2)+....+T(k_i)+...$$

   - siendo k_i el **tamaño del problema en la llamada recursiva** i,
   - $k_i < n$

Coste NO RECURSIVO

2. Calcular costes de códigos no recursivos:
   - coste de los **casos base**
   - coste bloques que no son caso base,
   - coste de llamadas a funciones NO-recursivas
3. Aplicar regla de la SUMA y obtener el coste MÁXIMO: $f(n)$

$$T(n) = \text{Coste RECURSIVO} + \text{Coste NO RECURSIVO}$$

$$T(n) = \overbrace{T(k_1)+T(k_2)+....+T(k_i)+...}^{} + \overbrace{f(n)}^{}$$

Ejemplo. Algoritmo de ordenación Mergesort

MergeSort(i,j,T)
1. $n \leftarrow j-i+1$ *// Núm. de elementos a ordenar*
2. IF $(n == 1)$ Devolver T
3. ELSE
   (a) $S \leftarrow n$ div 2
   (b) **MergeSort**(i,S,T)
   (c) **MergeSort**$(S+1,j,T)$
   (d) Mezclar(i,S,j,T) *// Mezclar los dos subvectores*

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ \underbrace{T(n/2)}_{\text{mitad izquierda}} + \underbrace{T(n/2)}_{\text{mitad derecha}} + \underbrace{n}_{\text{mezcla}} & \text{otro caso} \end{cases}$$

- Coste recursivo= Ordenar mitad izda + Ordenar mitad derecha $= T(n/2)+T(n/2)$
- Coste no recursivo= Coste caso base + Coste Mezcla subvectores ordenados= $a+\Theta(n)=\Theta(n)$
- Ecuación de recurrencia: $T(n)=T(n/2)+T(n/2)+n$

$$T(n) = 2T(n/2)+n$$

Ejemplo. Algoritmo Factorial

```
funcion Factorial(n)
    IF n == 0 devolver 1;      ← caso base
    ELSE
     devolver n×Factorial(n − 1);
```

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{T(n-1)}_{\text{1 sola llamada}} + \underbrace{b}_{\text{operaciones elementales}} & \text{otro caso} \end{cases}$$

- Coste recursivo: tiempo invertido en 1 llamada de tamaño $n-1 = T(n-1)$
- Coste no recursivo: Coste caso base + Coste op. elementales= $a+b = \Theta(1)$
- Ecuación de recurrencia: $T(n) = T(n-1)+1$

Ejemplo. Sucesión de Fibonacci

```
funcion FibREC(n)
    IF n < 2 devolver n
    ELSE
     devolver FibREC(n − 1) + FibREC(n − 2)
```

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n < 2 \\ \underbrace{T(n-1)}_{\text{Primera llamada}} + \underbrace{T(n-2)}_{\text{Segunda llamada}} + \underbrace{b}_{\text{op. elem}} & \text{otro caso} \end{cases}$$

- Coste recursivo=
  tiempo invertido en 1 llamada de tamaño $n-1$: $T(n-1)$,
  más el invertido en otra llamada de tamaño $n-2$: $T(n-2) = T(n-1)+T(n-2)$
- Coste no recursivo= Coste caso base + Coste suma= $a+b = \Theta(1)$
- Ecuación de recurrencia: $T(n) = T(n-1)+T(n-2)+1$

Ejemplo: Búsqueda Binaria Recursiva

```
funcion int BinREC(A, x, i, j);
        // Busca x en el array A, en el interbalo A[i] − A[j]
    1. IF j < i    Devolver(-1)
    2. medio ← (i + j)/2
    3. IF x ≤ A[medio]
       Devolver( BinREC(A, x, i, medio) )

       ELSE
       Devolver( BinREC(A, x, medio + 1, j) )
```

- Coste no-recursivo: pasos 1 y 2 + comparación en paso 3: *cte*
- Coste recursivo: Hay dos llamadas recursivas en un bloque IF-Else :
  - Tenemos que analizar la parte IF y la parte ELSE y tomar el tiempo de la que tarda más
  - es decir, para calcular el tiempo, solo se considera la parte recursiva del IF o la del ELSE
  - Si n es el número de elementos considerados del array $n = j - i$

    - la parte del IF : 1 llamada de tamaño $n/2 = T(n/2)$

    - y la parte del ELSE : 1 llamada de tamaño $n/2 = T(n/2)$
  - Por ello **coste recursivo**= solo 1 llamada recursiva que emplea: $T(n/2)$

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ b + T(\frac{n}{2}) & \text{otro caso} \quad a, b : \text{cte} \end{cases}$$

- Ecuación de recurrencia: $T(n) = T(n/2) + 1$

Métodos para resolver Recurrencias

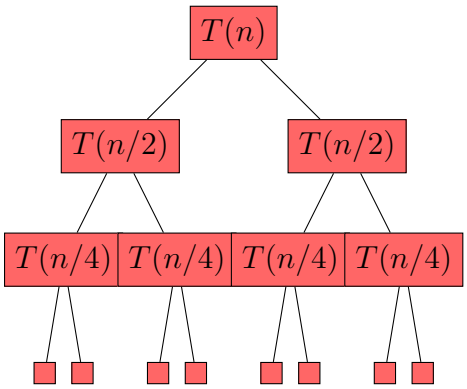
- **Método de Sustitución**, **Ecuación Característica**, ...
  - Se verán en la asignatura EDA2 [Brassard 4.7]
- **Árboles de Recursión**
  - No es un método formal pero sí es intuitivo
- **Método Maestro**
  - Se aplica en un determinados tipos de recurrencias

3 Árboles de Recursión

Recursion Trees

Árboles de Recursión

Son una herramienta para analizar las llamadas que realizan los algoritmos recursivos. Nos permiten estudiar la carga de trabajo de un algoritmo (tiempo de ejecución, número de comparaciones, etc.)



- Ejemplo: $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$
- Cada nodo representa el tamaño del problema que se ejecuta
- Añadimos el tiempo de ejecución **no-recursivo** de cada nodo
- Sumamos estos tiempos por niveles = coste del nivel k
- Suma de todos los niveles = **coste del algoritmo**

3.3-30

Cálculo de $T(n)$ con un árbol de recursión

Para resolver la ecuación de recurrencia y así calcular $T(n)$ podemos:

- Calcular el **máximo número de niveles** = altura del árbol = $numNIVELES$
- Calcular el **coste NO recursivo del nivel** k , $costeNR(k)$, que será la suma del coste de todos los nodos que hay en el nivel k del árbol (de izda a derecha)
- Entonces, obtenemos el orden de $T(n)$ calculando:

$$T(n) \leq \sum_{k=0}^{numNIVELES-1} costeNR(k)$$

3.3-31

Ejemplo. Algoritmo de ordenación *MergeSort*

- Ordena un array de n elementos con dos llamadas recursivas de sub-arrays de tamaño $n/2$ (suponemos n potencia de 2)
- Mezcla los subarrays en un tiempo de orden $\leq \Theta(n)$

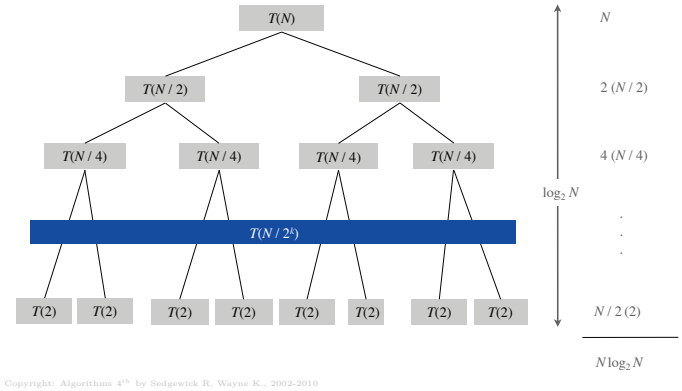
$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ \underbrace{T(n/2)}_{\text{mitad izquierda}} + \underbrace{T(n/2)}_{\text{mitad derecha}} + \underbrace{n}_{\text{mezcla}} & \text{otro caso} \end{cases}$$

- Ecuación de recurrencia :

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

- **Llamadas recursivas** que se van haciendo para cada ejecución: $2T(n/2)$
- El **coste no recursivo** es n

MergeSort. Árbol de Recursión



- El **número de niveles** del árbol es : $\log_2 n$
  (vamos dividiendo por 2 el tamaño del problema)
- El coste no recursivo de cada nodo es n, y sumando este coste para cada nivel obtenemos que el **coste no recursivo para el nivel** k es:

$$2^k \cdot \frac{n}{2^k}$$

- Calculamos:

$$T(n) \leq \sum_{k=0}^{numNIVELES-1} costeNR(k)$$

$$T(n) \leq \sum_{k=0}^{numNIVELES-1} 2^k \cdot \frac{n}{2^k} = \sum_{k=0}^{\log n - 1} n = \sum_{k=1}^{\log n} n = n \log n$$

- El algoritmo está en $\mathcal{O}(n \log n)$

Resumen de pasos para crear Árbol de Recursión

1. Empezar con nodo raíz asociandole su tamaño
2. Expandir el resto de los nodos:
   - Determinar el coste no-recursivo del nodo (a partir de la ecuación)
   - Crear los nodos descendientes para las llamadas recursivas
   - Los casos base (nodos hoja) son nodos de valor 1
3. Calcular el máximo número de niveles del árbol.

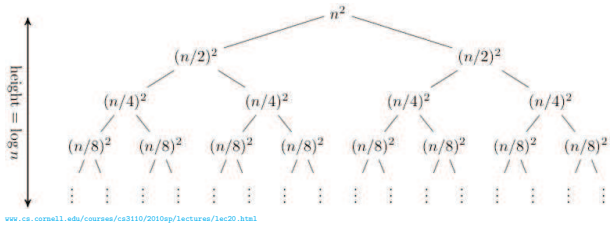
4. Sumar el coste de todos los niveles. Al plantear la sumatoria podemos encontrar, en general, patrones como:
   - Series geométricas en las que los niveles superiores son más costosos
   - Todos los niveles con aproximadamente el mismo coste.
   - Series geométricas en las que los niveles inferiores son más costosos

3.3-34

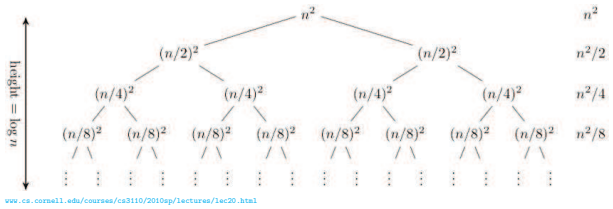
Ejemplo. Árbol de Recursión

El árbol de recursión nos permite visualizar lo que ocurre cuando iteramos una recurrencia.

- Por ejemplo, sea la recurrencia: $T(n) = 2T(n/2) + n^2$
- El árbol de recursión tiene la misma forma que el de MergeSort, $2T(n/2)$, pero el coste no recursivo de cada nodo es n^2.



- Sumamos por niveles para obtener el coste total:



- El **número de niveles** del árbol es : $\log_2 n$
- El coste no recursivo de cada nodo es n^2, y sumando este coste para cada nivel obtenemos que el **coste no recursivo para el nivel** k es:

$$\frac{n^2}{2^k}$$

- Calculamos:

$$T(n) \leq \sum_{k=0}^{numNIVELES-1} costeNR(k)$$

$$T(n) \leq \sum_{k=0}^{numNIVELES-1} \frac{n^2}{2^k} = \sum_{k=0}^{\log n-1} \frac{n^2}{2^k} = n^2 \sum_{k=0}^{\log n-1} \frac{1}{2^k}$$

$$T(n) \leq n^2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...)$$

- Resultado: una sucesión geométrica que suma (en límite) $O(n^2)$, y por tanto $T(n) \in O(n^2)$

3.3-35

4 Método Maestro

Master Method

Método Maestro

- Es un método para resolver recurrencias de la forma:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

  - $a \geq 1$ y $b > 1$ son constantes y $f(n)$ función asintóticamente positiva

- La recurrencia describe el tiempo de ejecución de un algoritmo que resuelve un problema de tamaño n en:
  - a llamadas recursivas de subproblemas de tamaño n/b , siendo:
  - $T(n/b)$: el tiempo empleado en resolver cada llamada **recursiva**, y
  - $f(n)$ el coste no-recursivo del algoritmo

Soluciones de la Recurrencia del Método Maestro

Teorema Maestro

Sean $a \geq 1$ y $b > 1$ constantes, $f(n)$ una función, y sea $T(n)$ definida en los enteros no negativos por la recurrencia:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

- Entonces $T(n)$ puede acotarse asintóticamente como:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & si\ f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon}) \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & si\ f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)) & si\ f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \quad (*) \end{cases}$$

(*) En el tercer caso, es necesario que $af(n/b) \leq cf(n)$

- $\epsilon > 0$, $c < 1$: constantes
- n: tamaño del problema
- a llamadas recursivas de subproblemas de tamaño n/b

Interpretación del Teorema Maestro

- En los tres casos se comparan las funciones $f(n)$ y $n^{\log_b a}$
- Intuitivamente **la solución a la recurrencia está determinada por la mayor de las dos funciones (asintóticamente)** :
  - Caso 1: La función $n^{\log_b a}$ es la mayor: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a})$
    Y la solución es: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$,
  - Caso 2: las dos funciones son del mismo tamaño, $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
    Multiplicamos por un factor logarítmico y la solución es:
    $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(f(n) \log n)$

  - Caso 3: $f(n)$ es la mayor : $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a})$
    Y la solución es $T(n) \in \Theta(f(n))$

- Pero esta condición no es suficiente. **Además se debe cumplir**:
  - Caso 1: $f(n)$ debe ser **polinómicamente menor** que $n^{\log_b a}$.
    Esto es, debe ser menor *por un factor de* n^{ϵ} , $\epsilon > 0$.
    Es decir, $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$
  - Caso 3: $f(n)$ debe ser **polinómicamente mayor** que $n^{\log_b a}$,
    es decir, $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$
    y además satisfacer la restricción de que $af(n/b) \leq cf(n)$ para $c < 1$.

3.3-38

Ejemplo 1. Solución de Recurrencias

1. $T(n) = 9T(n/3) + n$
   . $a = 9$ llamadas recursivas de tamaño $n/3$
   . $b = 3$
   . $f(n) = n$
   . Calculamos $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$
   y comparamos $f(n)$ con n^2:
   - Como $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, comprobamos las condiciones del caso 1

   $\Rightarrow$ Se debe cumplir que:
   - $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ para $\epsilon > 0$. Sustituyendo:
   - $n \in \mathcal{O}(n^{\log_3 9 - \epsilon})$, es decir, se debe cumplir que
   - $n \in \mathcal{O}(n^{2-\epsilon})$, para un $\epsilon > 0$
   - y es cierto para $\epsilon = 1$,

   - Podemos aplicar el Caso 1 y por tanto la solución a la recurrencia es:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_3 9}) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$$

3.3-39

Ejemplo 2. Solución de Recurrencias

2. $T(n) = T(2n/3) + 1$
   . $a = 1$
   . $b = 3/2$
   . $f(n) = 1$
   . Calculamos $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \in \Theta(1)$
   y comparamos $f(n)$ con $n^{\log_b a} = 1$:
   - Como $f(n) = 1 \in \Theta(n^{\log_b a})$, entonces
     aplicamos Caso 2 ya que $\Theta(f(n)) = \Theta(n^{\log_b a})$

   - Y la solución a la recurrencia es:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n) \Rightarrow T(n) \in \Theta(\log n)$$

3.3-40

Ejemplo 3. Solución de Recurrencia

3. $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$
   . $a = 3$, $b = 4$
   . $f(n) = n\log n$
   . Calculamos $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} \in \mathcal{O}(n^{0.793})$
   y comparamos $f(n)$ con $n^{\log_4 3}$
   – Como $f(n) = n\log n \in \Omega(n^{\log_4 3})$, es decir $n\log n \in \Omega(n^{0.793})$, comprobamos el caso 3:

   $\Rightarrow$ Se deben cumplir dos condiciones:
   i) $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}) = \Omega(n^{\log_4 3+\epsilon})$,
   es decir, $n\log n \in \Omega(n^{0.793+\epsilon})$: cierto para $\epsilon \approx 0.2$
   ii) Condición de regularidad para $f(n)$. Para n suficientemente grande,

$$af(n/b) \leq cf(n), \quad c < 1$$

$$af(\frac{n}{b}) = 3(\frac{n}{4})\log(\frac{n}{4}) \leq (\frac{3}{4})n\log n = cn\log n$$

   cierto para $c = 3/4 < 1$.

- La solución es: $T(n) \in \Theta(f(n)) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n\log n)$

3.3-41

Cuándo NO es posible aplicar el Método Maestro

- Hay que destacar que los tres casos del teorema NO cubren todas las posibilidades para $f(n)$.
- Si la función $f(n)$ está en una de estas situaciones, **no podemos usar el método maestro para resolver la recurrencia**:
  – Caso 1: $f(n)$ es **menor** que $n^{\log_b a}$, pero no lo es polinómicamente.
  – Caso 3: $f(n)$ es **mayor** que $n^{\log_b a}$, pero no polinómicamente, o NO se satisface la restricción de que $af(n/b) \leq cf(n)$

3.3-42

Ejemplo 4. Solución de Recurrencia

4. $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$
   . $a = 2$, $b = 2$
   . $f(n) = n\log n$
   - Calculamos $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$
   y comparamos $f(n)$ con n :
   – Como $f(n) = n\log n \in \Omega(n^{\log_b a})$, es decir $n\log n \in \Omega(n)$, comprobamos el caso 3
   - Tenemos que encontrar un $\epsilon > 0$ que cumpla que:

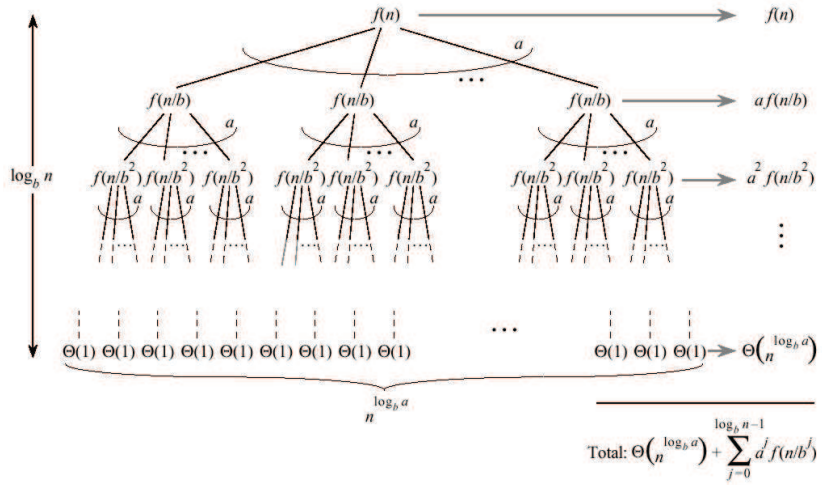
  - $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ es decir, $n\log n \in \Omega(n^{1+\epsilon})$,
  - ϵ= ??
  - No podemos acotar: $f(n) \in \Omega(n^{1+\epsilon})$ para $\epsilon > 0$
- $f(n) = n\log n$ es asintóticamente mayor que $n^{\log_b a} = n$ pero **no polinómicamente mayor**
- NO es posible aplicar el Caso 3: esta relación no es polinómica

$$\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \frac{n\log n}{n} = \log n$$

- NO podemos resolver esta recurrencia con el Método Maestro.

Árbol de Recursión del Teorema Maestro

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$



- número de niveles = altura del árbol = $h = \log_b n$
- número de hojas = $a^h = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$
- Coste:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

$T(n) =$ coste de hacer $n^{\log_b a}$ subproblemas de tamaño 1 + coste de los nodos interiores

5 Recurrencias Básicas

Fórmulas Básicas en el Análisis de Algoritmos Recursivos [Sedgewick 2.5]

Algunas fórmulas habituales utilizadas en el análisis de algoritmos recursivos que no pueden ser calculadas mediante el Método Maestro.

Fórmula 1

Modeliza programas que recorren la entrada para eliminar un item:

$$T(n) = T(n-1) + n \qquad \text{para } n \geq 2 \quad \text{y } T(1) = 1$$

Solución:

$$T(n) \approx \frac{n^2}{2}$$

Demostración: $T_n = T_{n-1} + n$

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= T_{n-2} + (n-1) + n \\ &= T_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots \\ &= T_1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \tfrac{n(n+n)}{2} \end{aligned}$$

Fórmula 2

$$T(n) = T(n-1) + 1 \qquad \text{para } n \geq 2 \quad \text{y } T(1) = 1$$

Solución:

$$T(n) \approx n$$

Demostración: $T_n = T_{n-1} + 1$

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + 1 \\ &= (T_{n-2} + 1) + 1 \\ &= T_{n-2} + 2 \\ &= \cdots \\ &= T_{n-i} + i \\ &= T_1 + n - 1 = 1 + n - 1 \\ &= n \end{aligned}$$

3.3-45

6 Aplicaciones de la recurrencia en diseño de Algoritmos

Diseño de Algoritmos

- Los algoritmos recursivos se utilizan en los paradigmas de diseño de algoritmos más importantes:
  - *Divide and Conquer* : algoritmos "Divide y Vencerás"
  - *Dynamic Programming* : algoritmos de "Programación Dinámica"
  - *Backtracking* : algoritmos de "Vuelta Atrás"

3.3-46

Paradigma Divide y Vencerás

- Consiste en **descomponer** el problema en un conjunto de subproblemas más pequeños
- Se **resuelven estos subproblemas** y se **combinan las soluciones** para obtener la solución para el problema original

```
Divide_y_Venceras(P: problema)
    descomponer(P, p_1,p_2,...,p_m)
    FOR i = 1,2,...,m
        s_i = Divide_y_Venceras (p_i)
    solucion = combinar (s_1,s_2,...,s_m)
```

➜ Los subproblemas deben ser **disjuntos** (sin superposiciones)
➜ Para resolver los subproblemas se realizan llamadas recursivas al mismo algoritmo

- Tiempo de ejecución: podemos aplicar el **método maestro** en la mayoría de los casos

3.3-47

Divide y Vencerás. Ejemplo 1

MergeSort

```
MergeSort(i,j,T)
1. n ← j − i + 1        // Núm. de elementos a ordenar
2. IF (n == 1) Devolver T
3. ELSE
   (a) S ← n div 2
   (b) MergeSort(i,S,T)
   (c) MergeSort(S+1,j,T)
   (d) Mezclar(i,S,j,T)      // Mezclar los dos subvectores
```

- Número de subproblemas en cada pasada: 2
- Tamaño de los subproblemas: $n/2$
- Coste de mezclar subvectores ordenados: $\Theta(n)$
- Ecuación de recurrencia :

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

- Resolvemos con método maestro:
  - $a = 2$, $b = 2$
  - $f(n) = \Theta(n)$: caso 2

$$T(n) \in \Theta(n \log n)$$

Divide y Vencerás. Ejemplo 2

Buscar el Máximo de un Array
Dado un array, buscar de forma recursiva el máximo valor:

- Caso base: Si el array es de tamaño 1 es inmediato
- Para $n > 1$,
  - divide el array en dos subarrays de tamaño menor que n
  - busca el máximo en cada parte de forma recursiva, y
  - devuelve el mayor de ambas partes.

```
BuscaMAX(left,right,T[n])
    S ← n div 2
    IF (left==right) Devolver (T[1])
    u ← BuscaMAX(left,S,T)
    v ← BuscaMAX(right+1,j,T)
    IF (u > v) Devolver u
    ELSE Devolver v
```

- n: tamaño del problema
- Número de subproblemas en cada pasada: 2
- Tamaño de los subproblemas: $n/2$
- Cada llamada recursiva tiene un coste constante: $\Theta(1)$
- Ecuación de recurrencia :

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- Resolvemos con método maestro:
  - $a = 2$, $b = 2$
  - $f(n) = \Theta(1)$, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$
  - caso 1

$$T(n) \in \Theta(n)$$

Divide y Vencerás. Ejemplo 3

Búsqueda Binaria Recursiva

```
funcion BinREC(T[], first, last, x): int
  1. IF last < first    Devolver(-1)
  2. mid ← (first + last)/2
  3. IF x ≤ T[mid] THEN
     Devolver( BinREC(T[], first, mid, x) )
  4. ELSE
     Devolver( BinREC(T[], mid + 1, last, x) )
```

- Es un caso particular en el que en cada llamada nos quedamos con **sólo 1 subproblema de tamaño** $n/2$
- El tiempo de cada llamada es **constante**, $f(n) = \Theta(1)$
- $a = 1$, $b = 2$,
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = 1$: caso 2

$$T(n) \in \Theta(\log n)$$

Ejemplo. Elevar un número a un Exponente

Exponenciación. Solución Divide y Vencerás
Calcular $x = a^n$. a, n *enteros,* $n > 0$

- Se basa en que $a^n = (a^{\frac{n}{2}})^2$ si n par
- Produce la recurrencia:

$$a^n = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ (a^{\frac{n}{2}})^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ a.a^{n-1} & \text{otro caso} \end{cases}$$

```
expoDyV (a, n)
    IF n = 0    Devolver(1)
    IF n = 1    Devolver(a)
    IF n es par,
        Devolver [expoDyV(a, n/2)]^2
    ELSE
        Devolver a*expoDyV(a, n − 1)
```

Ejemplo: $a^{29} = a.a^{28} = a.(a^{14})^2 = a((a^7)^2)^2 = ...$

- Asociamos la recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(n/2) + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ T(n-1) + 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

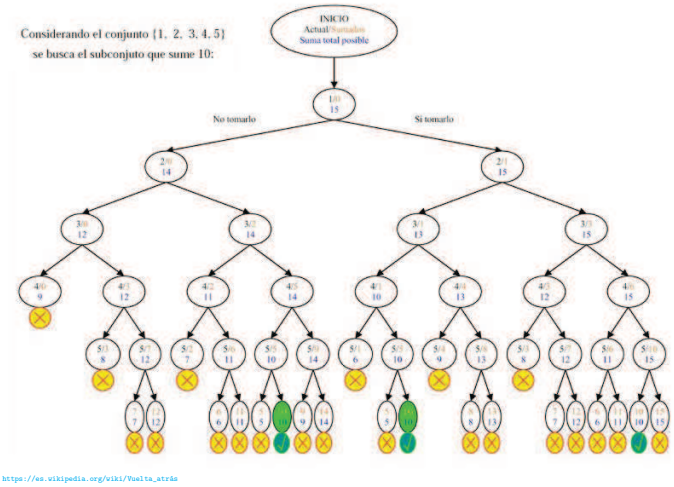
- **NO podemos usar el método maestro** para resolver la recurrencia
- Podemos ver la solución de esta recurrencia en [*Brassard 7.7*] :

- Si las operaciones son elementales: $T(n) \in \Theta(\log n)$
- Nota: el algoritmo clásico es $\Theta(n)$:

```
expoClasico (a, n)
    valor = 1
    FOR i = 1 TO n
        valor = valor × a
    Devolver valor
```

3.3-51

Otras aplicaciones. Algoritmos de Vuelta Atrás



https://es.wikipedia.org/wiki/Vuelta_atrás

En el transcurso de la busqueda si se encuentra un estado incorrecto (en amarillo), se retrocede hasta la decisión anterior, y se continua la búsqueda por los caminos que aún no han sido explorados, y que puedan conducir a una solución.

3.3-52

Aplicaciones. Algoritmos de Búsqueda de soluciones en juegos

Ejemplo: Algoritmo de tres en raya

- Dada una posición del tablero se usa la estrategia "vuelta atrás" para elegir el mejor movimiento
- La rutina que elige el mejor movimiento realiza llamadas recursivas para evaluar todos los posibles movimientos
- Ver ejemplo en *Weiss 7.7*

3.3-53

7 Problemas de la Recursión

Problemas de usar Recursión

- Demasiada recursión puede ser peligrosa
- Es una buena solución pero NO siempre es apropiada: nunca se debe usar como sustitución de un bucle simple.
- COSTE MEMORIA: hay que tener en cuenta el coste de memoria de pila que se requiere en cada llamada recursiva.
  Aunque un método recursivo sólo utilice variables escalares, puede requerir un espacio de $\Theta(n)$ si realiza n llamadas recursivas.

- **Errores más comunes:**
  - No incluir el **caso base**
  - Las llamadas recursivas siempre deben **progresar hacia un caso base**: en otro caso, la recursión no terminará.
  - Evitar la **superposición** de llamadas recursivas o se pueden generar algoritmos de coste **exponencial**. (Ejemplo: alg. de Fibonacci)
  - El tiempo empleado por las llamadas recursivas ha de calcularse usando **fórmulas recursivas**, no son llamadas con tiempo lineal.

3.3-54

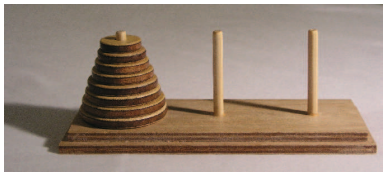
Y para terminar, la leyenda de las Torres de Hanoi...

Problema:

Se tienen tres varillas verticales. En una de las varillas se apilan n discos de tamaño creciente. No hay dos discos iguales.

El juego consiste en pasar todos los discos de la varilla ocupada a una de las otras, siguiendo unas reglas:

- Mover un disco cada vez
- El disco solo se puede poner sobre otro mayor



http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

La leyenda dice que unos monjes tienen la tarea de resolver este problema con 64 discos. El mundo acabará el día que lo resuelvan...

Cuánto tiempo nos queda???

3.3-55

Solución recursiva del problema...

```
HANOI(n, varillaA, varillaB, varillaC)
    IF(n==1)
                Imprimir (pasar disco de A a B)
    ELSE
                HANOI(n-1, A, C, B)
                Imprimir (pasar disco de A a B)
                HANOI(n-1, C, B, A)
```

La **solución recursiva** de este problema, para n discos es una recurrencia del tipo:

$$T(n) = 2T(n-1)+1 \quad \text{para } n > 1 \text{ y } T(1) = 1$$

Cuya solución es

$$T(n) = 2^n - 1$$

Exponencial !!

3.3-56

Solución recursiva del problema...

Si los monjes mueven un disco por segundo,

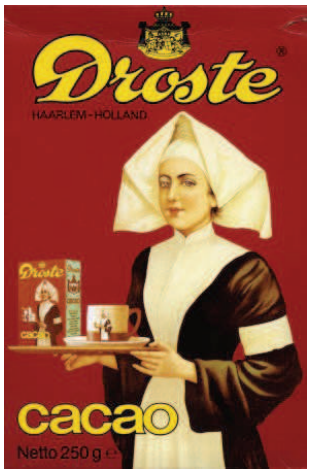
- les llevaría más de una semana resolver el problema con 20 discos
- más de 31 años finalizar un problema con 30 discos,
- más de 348 siglos si la torre tiene 40 discos, (asumiendo que no cometen errores)
- Y el problema de 64 discos les llevaría más de **5.8 billones de siglos**

(La solución iterativa también necesita $2^n - 1$ movimientos).

http://towersofhanoi.info/Animate.aspx

3.3-57

Imágenes con recursión..

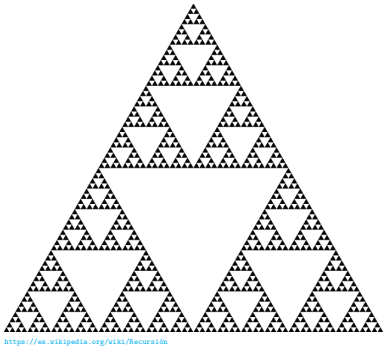


https://es.wikipedia.org/wiki/Recursión

Anuncio de cacao con una imagen recursiva. La mujer muestra un paquete idéntico al del propio anuncio, conteniendo así a otra mujer que muestra otro paquete más pequeño, de forma recursiva.

3.3-58

Triangulo de Sierpinski



https://es.wikipedia.org/wiki/Recursión

Imagen recursiva formada por un triángulo. Cada triángulo está compuesto de otros más pequeños, compuestos a su vez de la misma estructura recursiva.

3.3-59

A Conclusiones

Conclusiones

1. La recursión es una técnica básica para resolver problemas que pueden definirse **en función de sus propios términos** o en función de varios casos más sencillos.
2. Al definir un algoritmo recursivo es necesario **incluir siempre un caso base** que termine las llamadas recursivas.
3. Podemos demostrar la correción de un algoritmo recursivo por medio de **Inducción Matemática**.
4. El **tiempo de ejecución** de los algoritmos recursivos se obtiene asociando **Ecuaciones de Recurrencia** que modelizan las llamadas recursivas.
5. El **Teorema maestro** permite resolver ecuaciones de recurrencia de la forma $T(n) = aT(n/b) + f(n)$.
6. Los **Árboles de Recursión** permiten analizar gráficamente las llamadas recursivas y su coste.
7. **Inconvenientes**: los algoritmos que usan recursión a veces no son eficientes. Hay que evitar repetir cálculos en las llamadas recursivas. Coste de memoria elevado.
8. **Aplicaciones**: Algoritmos "Divide y Vencerás", "Vuelta Atrás", recorrido de árboles y grafos, ...

3.3-60

References

[1] [Básica] Weiss M.A. *Estructuras de datos en Java.* (capítulo 7) Addison-Wesley, 2000 /2004

[2] Brassard G., Bratley P. *Fundamentos de Algoritmia.* (capítulo 4) Prentice Hall, 1997 /2004

[3] Sedgewick R. *Computer Science. An Interdisciplinary Approach.* (sección 2.3) Addison-Wesley, 2017 https://introcs.cs.princeton.edu/java/23recursion/

3.3-61