GRANGETTE Paule Pour le : 17/10/22

$\boxed{\text{Homework 1}}$

Exercice 1 :

1) un rectangle : $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \,,\ i = 1, \dots, n\} = R$ est convexe car chaque composante de $x \in R$ est affine : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\theta_i \in \mathbb{R}$ tel que $x_i = \theta_i \alpha_i + (1-\theta_i)\beta_i$. R est donc une intersection finie de demi-espaces.

2) Montrons que $\{x \in \mathbb{R}^2_+ \,/\, x_1 x_2 \geq 1\} = \mathcal{H}$ est convexe.
Soient $x, y \in \mathcal{H}$. Montrons que $z = (1-\theta)x + \theta y$, $\theta \in [0,1]$ appartient à $\mathcal{H}$.

- si $x \preceq y$ (ie $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$), alors :

$$z = x + \theta \underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \succeq x$$

donc $z_1 z_2 \geq x_1 x_2 \geq 1$ donc $z \in \mathcal{H}$.

- idem si $y \succeq x$.
- si $x_1 > y_1$ et $x_2 < y_2$:

$$\cancel{z_1 z_2 = \left((1-\theta)x_1 + \theta y_1\right)\left((1-\theta)x_2 + \theta y_2\right)}$$
$$\cancel{= \left(x_1 + \theta(y_1 - x_1)\right)\left(x_2 + \theta(y_2 - x_2)\right)}$$
$$\cancel{= x_1 x_2 + \theta x_1 (y_2 - x_2) + \theta x_2 (y_1 - x_1) + \theta^2 (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)}$$
$$\cancel{= (1 - 2\theta) x_1 x_2 + \theta}$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \left((1-\theta)x_1 + \theta y_1\right)\left((1-\theta)x_2 + \theta y_2\right) \\
&= (1-\theta)^2 x_1 x_2 + \theta^2 y_1 y_2 + (1-\theta)\theta\, x_1 y_2 + \theta(1-\theta)\, y_1 x_2 \\
&= (1-\theta) x_1 x_2 - \theta(1-\theta) x_1 x_2 + \theta y_1 y_2 - \theta(1-\theta) y_1 y_2 \\
&\quad + (1-\theta)\theta\, x_1 y_2 + \theta(1-\theta)\, y_1 x_2 \\
&= (1-\theta) x_1 x_2 + \theta y_1 y_2 + (1-\theta)\theta \underbrace{(y_1 - x_1)(x_2 - y_2)}_{\geq 0} \\
&\geq (1-\theta) x_1 x_2 + \theta y_1 y_2 \geq 1 - \theta + \theta \geq 1
\end{aligned}$$

donc $z_1 z_2 \geq 1$ donc $z \in \mathcal{H}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{H} \text{ est convexe}}$

3) Soit $A = \{x \mid \|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2, \forall y \in S\}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$

Soit $y \in S$. et x tel que $\|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2$ ...

$\Leftrightarrow (x-x_0)^T(x-x_0) \leq (x-y)^T(x-y)$

$\Leftrightarrow x^Tx - x^Tx_0 - x_0^Tx + x_0^Tx_0 \leq x^Tx - x^Ty - y^Tx + y^Ty$,

$\Leftrightarrow x^T(y-x_0) + (y-x_0)^Tx \leq y^Ty - x_0^Tx_0$

$\Leftrightarrow 2(y-x_0)^T x \leq y^Ty - x_0^Tx_0$

Ainsi pour $y \in S$, $A_y = \{x \mid \|x-x_0\|_2 \leq \|x-y\|_2\}$ est un demi-espace et est donc convexe.

$A = \bigcap_{y \in S} A_y$. comme l'intersection préserve la convexité, A est convexe.

4) $B = \{x / \text{dist}(x,S) \leq \text{dist}(x,T)\}$ où $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\text{dist}(x,S) = \inf\{\|x-z\|_2 / z \in S\}$ n'est pas convexe.

En effet dans le cas $n=1$, si on prend $S = \{0\}$ et $T = \{-1,1\}$ on a : $B = \{x / x \leq -1/2 \text{ et } x \geq 1/2\}$

5) $C = \{x / x + S_2 \subseteq S_1\}$ où $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ et S_1 convexe.

$C = \bigcap_{y \in S_2} \{x / x+y \in S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} \{x / x \in S_1 - y\}$

$= \bigcap_{y \in S_2} (S_1 - y)$

C est donc une intersection d'ensembles convexes.

Exercice 2

1) $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$ $\quad \nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\nabla^2 f$ n'est pas semi-definie positive ou négative.

La fonction f est donc ni convexe ni concave

f est aussi quasiconcave car $\{ x \in \mathbb{R}^2_{++} \mid x_1 x_2 \geq \alpha \}$ est convexe (comme on a prouvé en $\boxed{1}$ 2)).

2) $f(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_1 x_2}$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2 x_2} \\ -\frac{1}{x_1 x_2^2} \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(x_1 x_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2} & \frac{2}{x_1 x_2^3} \end{bmatrix} \succeq 0$$

Donc f est convexe et quasiconvexe mais pas concave ni quasiconcave.

3) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} \\ -\frac{x_1}{x_2^2} \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1/x_2^2 \\ -1/x_2^2 & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f$ n'est ni semi-définie positive ni semi-definie négative donc f n'est ni convexe ni concave.

En revanche pour $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$

$C_\alpha = \{ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{++} \mid \frac{x_1}{x_2} \leq \alpha \}$ et $D_\alpha = \{ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{++} \mid \frac{x_1}{x_2} \geq \alpha \}$ sont des demi-espaces.

Donc f est quasiconvexe et quasiconcave.

4) $f(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ $\quad 0 \leq \alpha \leq 1$ sur $\mathbb{R}^2_{++}$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \\ (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha-1} x_2^{-\alpha} \\ (1-\alpha)\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{-\alpha} & -\alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-(\alpha+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/x_1^2 & \frac{1}{x_1 x_2} \\ 1/x_1 x_2 & -1/x_2^2 \end{bmatrix}}_{=H}$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$Y^T H Y = (y_1 \; y_2) \begin{pmatrix} -\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_1 x_2} \\ \frac{y_1}{x_1 x_2} - \frac{y_2}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{y_1^2}{x_1^2} + \frac{2 y_1 y_2}{x_1 x_2} - \frac{y_2^2}{x_2^2}$$

$$= -\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2}{x_1^2 x_2^2} \leq 0$$

donc $\nabla^2 f(x_1,x_2) \preceq 0$

donc f est concave et quasiconcave et n'est pas convexe ni quasiconvexe.

Exercice 3 :

1) $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{-1})$ sur $\mathrm{dom}\, f = S^n_{++}$

Soit $X, Y \in S^n_{++}$. Soit $t \in \mathbb{R}$

On pose $g(t) = f(X+tY)$. Alors

$g(t) = \mathrm{Tr}((X+tY)^{-1}) = \mathrm{Tr}\left(X^{-1}(I + t X^{-1/2} Y X^{-1/2})^{-1}\right)$

or, $X^{-1/2} Y X^{-1/2} \in S^n_{++}$ donc d'après le théorème spectral, il existe V matrice orthogonale de taille $n \times n$ et D diagonale telles que : $X^{-1/2} Y X^{-1/2} = V D V^T$

on note $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coefficients diagonaux de D

GRANGETTE
Paule

$$g(t) = Tr\left(X^{-1}(I + tVDV^T)^{-1}\right) = Tr\left(X^{-1}V^{T^{-1}}(I+tD)^{-1}V^{-1}\right)$$
$$= Tr\left(V^{-1}X^{-1}V^{T^{-1}}(I+tD)^{-1}\right) = Tr\left(V^TX^{-1}V\ (I+tD)^{-1}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (V^TX^{-1}V)_{ii}\ (1+td_i)^{-1}$$

Or, $(V^TX^{-1}V)_{ii} > 0$ et $t \mapsto (1+td_i)^{-1}$ est une fonction convexe
donc g est une fonction convexe en t
donc f est convexe.

2) $f(X,y) = y^T X^{-1} y$ sur $\mathrm{dom}\, f = S^n_{++} \times \mathbb{R}^n$

3) $f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(X)$, $X \in S^n$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(X) = \sup_{\substack{(L,M) \in (\mathbb{R}^n)^2 \\ \text{unitaires}}} \left(\mathrm{Tr}(L^T X M) \right)$$

en effet, X admet une décomposition singulière.
$X = U \Sigma V^T$ où U et V sont unitaires et Σ est diagonale de coefficients diagonaux $(\sigma_i(X))_{1 \leq i \leq n}$

Exercice 4 : $K_{m+} = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0 \}$

1) • Soit $(y^{(i)})_{i \in \mathbb{N}} \in K_{m+}^{\mathbb{N}}$ tel que $y^{(i)} \xrightarrow[i \to \infty]{} y$.
Supposons qu'il existe j_0 tel que $y_{j_0} < y_{j_0-1}$
Soit $\varepsilon = \dfrac{y_{j_0-1} - y_{j_0}}{2}$

il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geq N_1$, $|y^{(j)}_{j_0} - y_{j_0}| < \varepsilon$
et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geq N_2$ $|y^{(j)}_{j_0-1} - y_{j_0-1}| < \varepsilon$
Soit $N = \max(N_1, N_2)$
$\forall j \geq N$, $y^{(j)}_{j_0} \in B(y_{j_0}, \varepsilon)$ et $y^{(j)}_{j_0-1} \in B(y_{j_0-1}, \varepsilon)$

donc $y^{(j)}_{j_0} < y^{(j)}_{j_0-1}$, ce qui est absurde.

Donc $y \in K_{m+}$ donc K_{m+} est fermé.
• $0 \in \mathbb{R}^n$, $0 \in K_{m+}$ donc K_{m+} est non-vide.
• Soit $x \in K_{m+} \setminus \{0\}$, clairement $-x \notin K_{m+}$

Donc $K_{m+} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un proper cone.