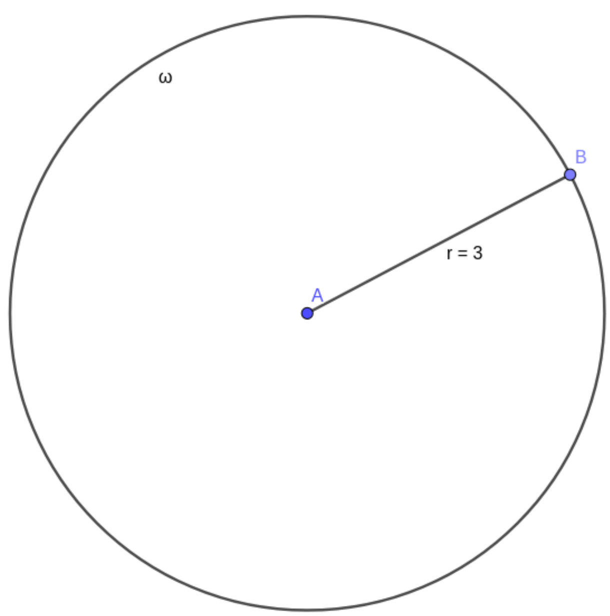
Ezoteryczne Kartki
Wykresiki

Jakub Bachurski

wersja 1.0.1

1 Całkowanie numeryczne i metoda Simpsona

Czasami mamy potrzebę policzenia pola pewnej figury, lecz nie wiemy, jak to zrobić. Możemy wtedy taką figurę opisać w układzie współrzędnych i potraktować jej krawędzie jako wykres pewnej funkcji. Powiedzmy, że mamy za zadanie policzyć pole figury (nazwijmy ją ω), która zdefiniowana jest przez swój środek i pewną odległość r oraz zawiera wszystkie punkty odległe o co najwyżej r od środka.

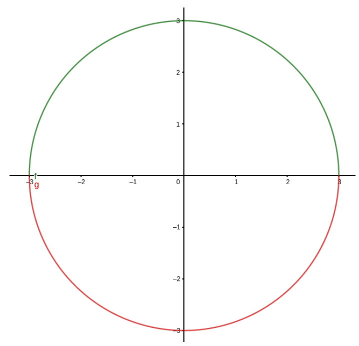


Rysunek 1: Figura ω z $r = 3$.

1.1 Wykres i trapezy

Spróbujmy znaleźć wykres funkcji krawędzi figury. Najpierw opiszmy ją równaniem – znajdźmy punkty (x, y), które leżą wewnątrz niej. Z tw. Pitagorasa: $x^2 + y^2 \leqslant R^2 \iff y^2 \leqslant R^2 - x^2$

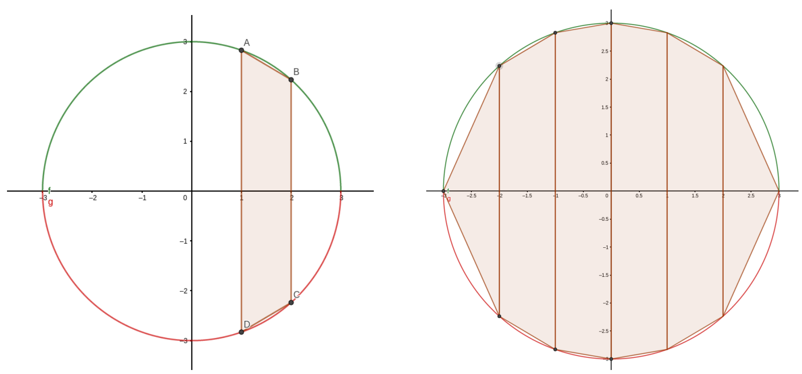
Na krawędzi leżą zatem punkty dane wzorem $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Dla jednego x są dwa możliwe y, więc opiszmy je dwoma funkcjami – $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ i $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$.



Rysunek 2: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = -\sqrt{9 - x^2}$

Co teraz zrobić, by odzyskać pole? Moglibyśmy podzielić płaszczyznę na bardzo małe kawałeczki $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots$ i zsumować pole trapezów o wierzchołkach:

$$(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}), (x_{i+1}, g(x_{i+1})), (x_i, g(x_i))$$



(a) $x_0 = 1, x_1 = 2$

(b) $x_i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

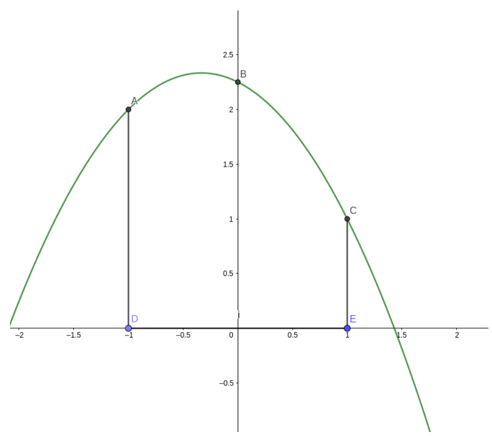
Rysunek 3

W ten sposób stworzyliśmy [wzór trapezów]. Niestety, jak widać, nie ma on zbyt dobrej dokładności – spróbujmy opracować coś lepszego.

1.2 Parabole

Spójrzmy, gdzie trapezy sobie nie radziły – przy funkcjach gwałtownie zmieniających swoje nachylenie. Zauważmy, że wykorzystując trapezy, tak na prawdę zaokrąglaliśmy wszystko do wielu funkcji liniowych. W takim razie pójdźmy o krok dalej – sprowadźmy wszystko do funkcji kwadratowych. Zamiast odcinków będą pojawiały się kawałki paraboli.

Musimy zatem znaleźć sposób na liczenie pola pod kawałkiem paraboli, która jak najbardziej przypomina kawałek danego wykresu. Z powszechnie znanego faktu, każda funkcja kwadratowa jest jednoznacznie wyznaczona przez trzy punkty, zatem weźmy sobie trzy punkty pewnej paraboli $f(x) = ax^2 + bx + c$: $A = (-h, f(-h)), B = (0, f(0)), C = (h, f(h))$.



Rysunek 4: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, $h = 1$

My będziemy chcieli postąpić odwrotnie: wziąć trzy punkty czegoś co *nie jest* parabolą, i za tego pomocą dostaniemy pole pod parabolą, która przechodziłaby przez te punkty. Na razie jednak musimy pozostać przy założeniu, że poszukiwana parabola jest już znana.

Musimy teraz odwołać się do wzoru na pole pod parabolą. Można go znaleźć za pomocą całek, ale my nie wiemy, co to takiego, więc po prostu go gdzieś znajdujemy. (Pierwsze dwa wyrażenia można spokojnie zignorować.)

$$\int_{-h}^{h} ax^2 + bx + c\,dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\Big|_{-h}^{h} = \frac{2a}{3}h^3 + 2ch^2 = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Mamy nasz wzór. Pozostaje problem: nie będziemy znali współczynników paraboli, a jedynie jej punkty, więc musimy przedstawić jej pole w inny sposób. Chcemy otrzymać wyrażenie:

$$2ah^2 + 6c$$

Tak, by było nie było zapisane w ramach współczynników a, b, c.

Wypiszmy, co daje nam znajomość punktów:

$$\begin{cases} f(-h) = ah^2 - bh + c \\ f(0) = c \\ f(h) = ah^2 + bh + c \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że na pewno musimy uwzględnić w wyniku we wzorze wartość $f(-h)$ lub $f(h)$, aby otrzymać ah^2. Jednakże wtedy otrzymamy składnik bh, co doprowadza nas do wniosku, że musimy mieć zarówno $f(-h)$ jak i $f(h)$, z takim samym współczynnikiem – tak, by wyraz bh skrócił się. $f(-h) + f(h) = 2ah^2 + 2c$, zatem pozostało nam $4c = 4f(0)$. Tym samym:

$$2ah^2 + 6c = f(-h) + 4f(0) + f(h)$$

Podstawiając, pole pod parabolą przechodzącą przez punkty

$$(-h, f(-h)), (0, f(0)), (h, f(h))$$

dane jest wzorem:

$$\frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h))$$

Co więcej, specyficzny dobór punktów nie ma znaczenia – możemy odpowiednio przesunąć układ współrzędnych, a wzór dalej będzie działał dla $x-h, x, x+h$.

Możemy teraz, analogicznie jak dla trapezów, wybrać sobie pewien zbiór punktów $x_0, x_1, ..., x_n$, takich, że $x_i = x_0 + ih$, i zsumować powyższe wyrażenie z odpowiednio podstawionymi punktami. W ten sposób wyprowadziliśmy [metodę Simpsona].

Porównajmy implementację obu algorytmów.

```
def trapezoidal_rule(f, lo, hi, n):
    h = (hi - lo) / n
    result = 0
    for i in 0..n-1:
        a = lo + i*h; b = a + h
        result += h * (f(a) + f(b)) / 2
    return result

def simpson_method(f, lo, hi, n):
    h = (hi - lo) / (2*n)
    result = 0
    for i in 0..n-1:
        a = lo + 2*i*h; b = a + 2*h
        result += h/3 * (f(a) + 4*f((a+b)/2) + f(b))
    return result
```

A teraz porównajmy wyniki dla $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i zakresu $[0, 1]$.

	Wartość	Błąd	Stosunek
Poprawny wynik	0.785398	0	100%
Trapezy	0.759262	-0.026136	96.6723%
Simpson	0.781752	-0.003646	99.5358%

$n = 5$

	Wartość	Błąd	Stosunek
Poprawny wynik	0.785398	0	100%
Trapezy	0.784567	-0.000831	99.5358%
Simpson	0.784567	-0.000115	99.9854%

$n = 50$

	Wartość	Błąd	Stosunek
Poprawny wynik	0.785398	0	100%
Trapezy	0.785372	-0.000026	99.9967%
Simpson	0.785395	-0.000003	99.9996%

$n = 500$

Metoda Simpsona jest zauważalnie dokładniejsza od wzoru trapezów.

1.3 Implementacja

```
double simpson_method(double (*f) (double x),
                      double lo, double hi, size_t n)
{
    double h = (hi - lo) / (2*n);
    double result = f(lo) + f(hi);
    for(size_t i = 1; i < 2*n; i++)
        result += f(lo + h*i) * (i%2 ? 4 : 2);
    return result * (h / 3);
}
```

Implementując Simpsona warto sięgnąć do pewnego triku: metoda Simpsona dalej będzie miała problem z gwałtownie zmieniającymi się funkcjami. Możemy w takim razie spojrzeć, czy wywołując się rekurencyjnie z taką samą liczbą prób na lewej i prawej połowie przedziału otrzymamy zauważalnie lepszy wynik, i jeżeli tak, to tam ponownie wykonać metodę Simpsona.

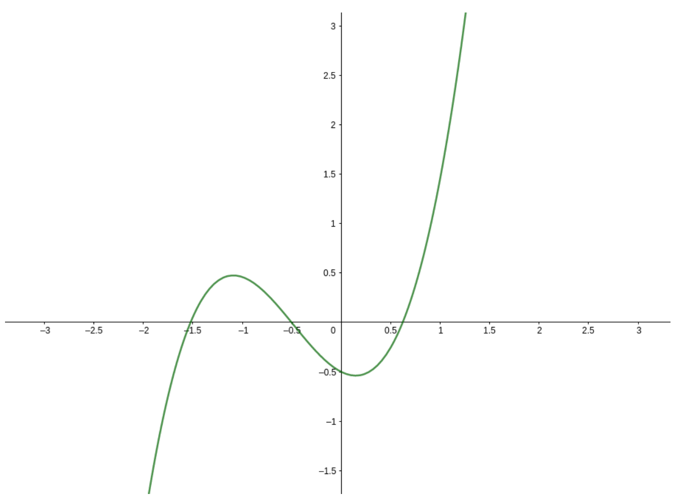
```
double integrate(double (*f) (double x),
                 double lo, double hi, size_t n, double eps)
{
    double   left = simpson_method(f, lo, (lo+hi)/2, n),
            right = simpson_method(f, (lo+hi)/2, hi, n),
           result = simpson_method(f, lo, hi, n);
    if(abs((left + right) - result) > eps)
        return integrate(f, lo, (lo+hi)/2, n, eps)
             + integrate(f, (lo+hi)/2, hi, n, eps);
    else
        return result;
}
```

1.4 Podsumowanie

Wyprowadziliśmy w ten sposób dwie metody całkowania numerycznego. Metoda Simpsona jest w praktyce o wiele efektywniejsza, i warto znać sposób jej wyprowadzenia.

2 Praktyczne pochodne[1]

Narysujmy sobie ładną funkcję.

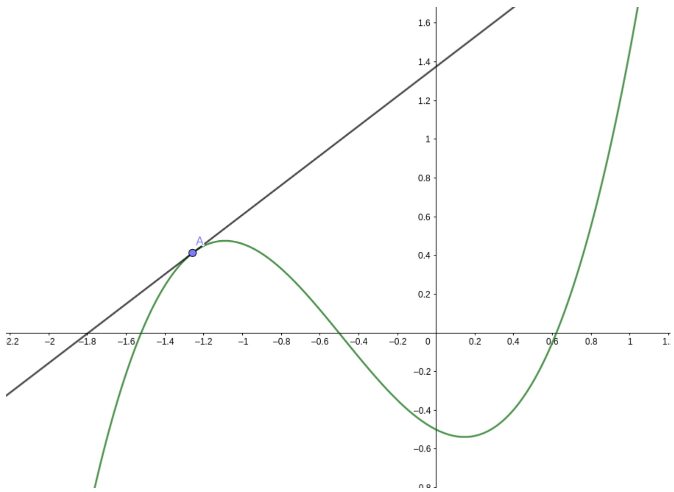


Rysunek 5: Ładna funkcja $f(x)$.

Będzie nas interesował jej kształt. A dokładniej, będziemy chcieli poznać jej ekstrema oraz móc łatwo sprawdzić, czy w danym punkcie jest rosnąca lub

[1] Ta sekcja jest wprowadzaniem do pochodnych, jeżeli ich nie znasz. Nie jest ona zbyt formalna. Jeżeli już znasz pochodne, możesz ją spokojnie pominąć.

malejąca. W tym celu zdefiniujemy pojęcie pochodnej $f'(x)$, która jest miarą tego, jak bardzo nachylona jest styczna do wykresu w danym punkcie $(x, f(x))$.

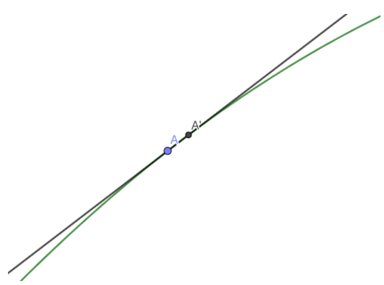


Rysunek 6: Ładna funkcja $f(x)$ i styczna w A.

Pochodne zwykle definiuje się za pomocą granic i za ich pomocą wyznacza ich własności. My skupimy się na ich zastosowaniach.

2.1 Definicja pochodnej

Zacznijmy od formalniejszej definicji pochodnej, aby nabrać intuicji matematycznej. Weźmy bardzo małą wartość[2] Δx. Wtedy pochodna to nachylenie prostej łączącej punkty $(x, f(x))$ i $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.



Rysunek 7: Zbliżenie na styczną.

Zapisując to matematycznie:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

[2]Ahem, dążącą do zera: $\lim_{\Delta x \to 0}$.

W ten sposób możemy spróbować policzyć pochodną z $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x \approx 2x$$

2.2 Liczenie pochodnej

Nie będą nas zbytnio interesować metody numeryczne, więc skupmy się na próbie analitycznego liczenia pochodnych. Na początek trochę prostych własności, wynikających z definicji lub z intuicji:

Nazwa	Funkcja $h(x)$	Pochodna $h'(x)$
Identyczność	x	1
Funkcja stała	c	0
Suma funkcji	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Różnica funkcji	$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$
Iloczyn przez stałą	$cf(x)$	$cf'(x)$

Niestety, często inne własności wymagają trudniejszego wyprowadzenia z definicji. Warto zapamiętać kilka najbardziej przydatnych:

Nazwa	Funkcja $h(x)$	Pochodna $h'(x)$
Potęgowanie	x^n	nx^{n-1}
Iloczyn	$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Odwrotność	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
Iloraz	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Złożenie	$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$

Wspaniałym źródłem do praktycznego stosowania pochodnych jest:

`https://www.mathsisfun.com/calculus/derivatives-rules.html`

Gdzie znajduje się tabela ze wszystkimi najważniejszymi zasadami ich wyprowadzania.

Chcąc policzyć szybko jakąś trudną pochodną zawsze warto wykorzystać WolframAlpha. Wystarczy spytać o:

```
derivative f(x) = ...
```

2.3 Monotoniczności

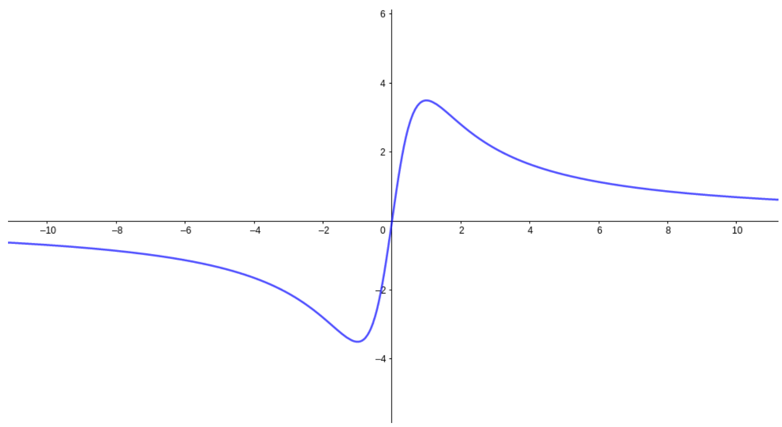
Nietrudno się domyślić, że $f'(x) > 0$ oznacza, że f w punkcie x jest rosnąca, $f'(x) < 0$ – malejąca, $f'(x) = 0$ – stała. Na przykładzie funkcji kwadratowej:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ 2x &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Co jest oczywiście prawdą – x^2 jest rosnąca dla $x > 0$.

2.4 Ekstrema

Ekstremum to minimum lub maksimum funkcji. Za pomocą pochodnych możemy wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne. Aby zrozumieć jak to zrobić, należy narysować styczną do funkcji w takim punkcie: ma ona nachylenie 0. W takim razie, aby znaleźć ekstremum musimy znaleźć x, dla których $f'(x) = 0$.



Rysunek 8: Funkcja $f(x) = \frac{7x}{x^2+1}$.

Powiedzmy, że chcemy znaleźć x, dla którego $f(x) = \frac{7x}{x^2+1}$ przyjmuje maksymalną wartość. Policzmy $f'(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^2+1}\right)' = \frac{7(x^2+1) - 7x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{7-7x^2}{(x^2+1)^2}$$

I rozwiążmy $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{7-7x^2}{(x^2+1)^2} &= 0 \\ 7-7x^2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Ekstrema lokalne znajdują się w $x = 1$ i $x = -1$. Pozostaje sprawdzić, w którym z nich jest większa wartość:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{7}{2} \\ f(-1) &= \frac{-7}{2} \end{aligned}$$

A co za tym idzie, maksimum $f(x)$ znajduje się w punkcie $(1, \frac{7}{2})$.

Nie musi dać się znaleźć maksimum (lub minimum) w ten sposób – w szczególności, może ono w ogóle nie istnieć. Jednak najczęściej, gdy będziemy mieli potrzebę maksymalizować jakąś funkcję, będzie to wykonalne zadanie. Dla przykładu, można spróbować w ten sposób zminimalizować $k + \frac{n}{k}$ – równanie często pojawiające się w pierwiastkach. W celu stwierdzenia, czy nasze zadanie jest wykonalne, warto spojrzeć na wykres funkcji.

3 Metoda Newtona

Tym razem będziemy chcieli rozwiązać problem szukania pierwiastków funkcji f, czyli takich x, dla których

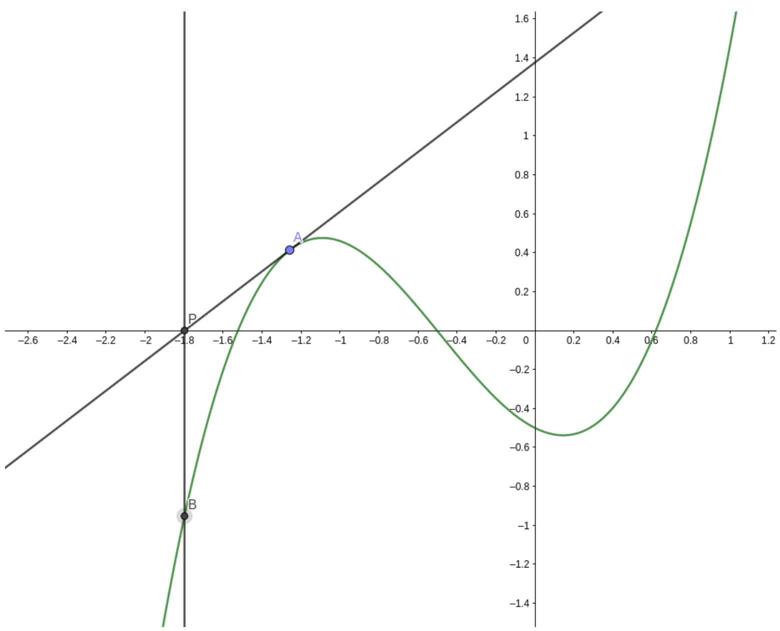
$$f(x) = 0$$

Posłużymy się do tego stycznymi.

3.1 Idea

Weźmy naszą funkcję f i spróbujmy zgadnąć pierwiastek – oznaczmy nasz *guess* jako x_0. Im bliżej on będzie poszukiwanego pierwiastka, tym lepiej.

Poprowadźmy teraz styczną do f w x_0. Oznaczmy punkt jej przecięcia z osią OX jako P, a współrzędną x punktu P jako x_1. Intuicyjnie: najprawdopodobniej x_1 będzie bliższe do pewnego pierwiastka f niż x_0.



Rysunek 9: Opisana konstrukcja

3.2 Wyprowadzenie

Opisana styczna miała nachylenie $f'(x_0)$ i jest prostą przechodzącą przez $(x_0, f(x_0))$. Pozostaje rozwiązać równania i znaleźć jej przecięcie z OX. Opiszmy prostą jako funkcję liniową $p(x) = ax + b$. Jej nachylenie już znamy: $a = f'(x_0)$.

$$\begin{cases} p(x) = f'(x_0)x + b \\ p(x_0) = f(x_0) \\ p(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \\ f'(x_0)x_1 + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x_0)x_1 + f(x_0) = f'(x_0)x_0 \\ (x_1 - x_0)f'(x_0) = -f(x_0) \\ x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór na iterację metody Newtona:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3.3 Przypadki krańcowe

Niestety, są przypadki, dla których metoda Newtona utknie w nieskończonej pętli, i nigdy nie dojdzie do poprawnego wyniku dla każdej wartości startowej. Tutaj jest opisany przykład sposobu generowania takich przypadków:

`https://math.stackexchange.com/a/2408132`

Poza tym, styczna w danym punkcie może być równa 0 (jeżeli napotkaliśmy ekstremum lokalne). W takim wypadku musimy rozpocząć proces od nowa od innego x_0.

Jednak w ogólności, metoda Newtona jest kwadratowo zbieżna (bardzo szybko zbiega do wyniku).

3.4 Implementacja

```
def newton_method(f, f1, x, n=64):
    for i in 1..n:
        x -= f(x) / f1(x)
    return x
```

Przykładowo, pierwiastków kwadratowych można szukać za pomocą $f(x) = n - x^2, f'(x) = -2x, x_0 = \frac{n}{2}$.

4 Pierwiastki wielomianu

Warto znać problem szukania pierwiastków wielomianu. Dla przypomnienia, wielomian $P(x)$ o współczynnikach $a_0, a_1, ..., a_n$ zdefiniowany jest jako:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Liczba n jest wtedy nazywana stopniem wielomianu $P(x)$ i jest oznaczana $\deg P$. Pierwiastkiem wielomianu nazywamy taki x, że $P(x) = 0$. Ważnym twierdzeniem jest twierdzenie Bézout: w jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(x)$ jest podzielne przez jednomian $(x - w)$ (czyli można je zapisać jako $P(x) = (x - w)Q(x)$ dla pewnego wielomianu $Q(x)$). Wynika z niego bezpośrednio, że wielomian stopnia n ma n pierwiastków (niekoniecznie różnych).

Rozważmy dwa proste sposoby rozwiązywania tego problemu. Swoich sił w implementacji można spróbować w [UVa Online Judge] The Roots. Będziemy zajmować się tylko pierwiastkami rzeczywistymi.

4.1 Metoda Newtona

Pierwszy sposób jest bardziej bezpośredni i oparty na metodzie Newtona. Po prostu losujemy x_0 i szukamy pierwiastka tą metodą. Pochodna $P'(x)$ jest dana wzorem:

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n_2} + ... + 2a_2 x + a_1$$

Gdy go znajdziemy, chcemy już więcej go nie napotkać (chyba że jest to pierwiastek wielokrotny). Możemy skorzystać z twierdzenia Bézout i po prostu podzielić $P(x)$ przez odpowiedni jednomian. [Dzielenie wielomianów] przebiega podobnie do dzielenia pisemnego. W ten sposób zmniejszymy stopień wielomianu o 1, sprowadzając problem do mniejszego przypadku. Gdy otrzymamy wielomian stopnia 0, kończymy algorytm.

Rozważmy złożoność tego podejścia: n razy wykonujemy metodę Newtona z I iteracjami, a następnie dzielimy wielomian w $O(n)$. Otrzymujemy sumaryczną złożoność:

$$O(n^2 I)$$

Niestety, istnieją wielomiany, dla których metoda Newtona nie zadziała.

4.2 Pochodne i wyszukiwanie binarne

Ten sposób jest bardziej elegancki. Zaczyna się od rozważania, jak moglibyśmy wykorzystać wyszukiwanie binarne: moglibyśmy to zrobić, o ile znalibyśmy, na jakich przedziałach $P(x)$ jest monotoniczne. Możemy do tego wykorzystać pochodne: wystarczy znaleźć wszystkie ekstrema (punkty w których pochodna jest zerowa). Przedziały pomiędzy ekstremami muszą być monotoniczne. Jednakże ponieważ pochodna wielomianu jest wielomianem, a chcemy szukać punktów, gdzie jest ona równa zero, sprowadziliśmy problem do mniejszego przypadku szukania pierwiastków wielomianu (bo $\deg P'(x) = \deg P(x) - 1$).

W takim razie algorytm przebiega następująco: Niech $n = \deg P$. Jeżeli $\deg P = 1$, rozwiązujemy proste równanie pierwszego stopnia. W przeciwnym wypadku, szukamy wszystkich pierwiastków $P'(x)$ tym samym algorytmem. Po ich otrzymaniu, sortujemy je, i każde dwa sąsiednie traktujemy jako przedział, na którym znajduje się pewien pierwiastek. Jest on monotoniczny, więc wykorzystujemy wyszukiwanie binarne.

Złożoność można opisać za pomocą funkcji $T(n)$. Oznaczmy liczbę iteracji w wyszukiwaniu binarnym jako I.

$$T(1) = O(1)$$
$$T(n) = T(n-1) + O(nI)$$

Nietrudno zauważyć, że $T(n) = O(n^2 I)$.

Niestety, ten sposób nie może być wykorzystany do znalezienia pierwiastków wielokrotnych – chyba, że podobnie jak w pierwszym sposobie będziemy dzielić wielomian przez jednomiany.

5 Rysowanie wykresików

W analizie minimalizowanych funkcji, skomplikowanych złożoności i tak dalej przyda się dobra wizualizacja danych. Możemy oczywiście bawić w czytanie tekstowych tabelek, ale o wiele łatwiej wyciągnąć wnioski z formy graficznej.

5.1 Geogebra

Jeżeli mamy dostęp do Internetu, przydatnym narzędziem jest Geogebra. Pozwala na proste programowalne funkcje. Obrazki na tej kartce zostały zrobione właśnie w niej. Podobnym narzędziem jest Desmos. W WolframAlpha także można rysować (małe) wykresy, a odpowiednio formułując wyszukiwaną frazę w Google także można narysować prostą funkcję.

5.2 `matplotlib`

O wiele częściej przyda nam się dostęp do wykresów z poziomu pełnego języka programowania. Na przykład wykorzystując Pythona mamy dostęp do biblioteki `matplotplib`. Możemy w ten sposób stworzyć wykresy funkcji, które są zbyt skomplikowane dla Geogebry.

Przykładowo, opiszmy funkcję rekurencyjną ϕ_n.

$$\phi_n(0) = 0$$
$$\phi_n(i) = 1 + \phi_n(n \bmod i)$$

A następnie zapiszmy odpowiedni program w Pythonie wykorzystując bibliotekę `matplotlib`:

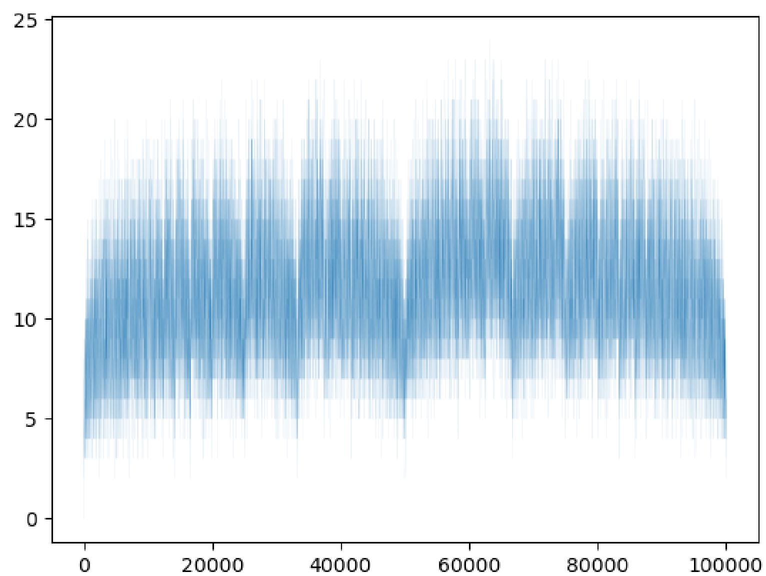
```python
from matplotlib import pyplot as plt

def make_phi(n):
    def phi(i):
        return 0 if i == 0 else 1 + phi(n % i)
    return phi

n = 10**5 + 3
phi = make_phi(n)
X = list(range(n)) # [0, 1, 2, ..., n - 1]
Y = [phi(x) for x in X] # [phi(0), phi(1), ..., phi(n - 1)]

plt.plot(X, Y, '-', linewidth=0.025)
plt.show()
```

I otrzymujemy ten o to piękny wykres:



Rysunek 10: Doprawdy, piękny.