双线性函数和辛空间

冯哲

2021 年 2 月 22 日

目录

1 线性函数

定义 设 V 是数域 P 上的一个线性空间，f 是 V 到 P 的一个映射，如果 f 满足

$$f(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=f(\vec{\alpha})+f(\vec{\beta})$$

$$f(k\vec{\alpha})=kf(\vec{\alpha})$$

式中的是 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 中 V 任意元素，k 是 P 中的任意数，则称 f 为 V 上的一个线性函数。

设 V 是 P 上一个 n 维线性空间,$\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\ldots,\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基,$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是中任意 n 个数，存在唯一的上的线性函数 f 使

$$f(\vec{\varepsilon_i})=a_i, i=1,2,\ldots,n.$$

2 对偶空间

引入空间 设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间。V 上全体线性函数组成的集合记作 $L(V,P)$。在 $L(V,P)$ 上定义加法与数乘：
定义函数 $f+g$ 为 f 与 g 的和，有

$$(f+g)(\vec{\alpha})=f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha}),\vec{\alpha}\in V$$

$f+g$ 也是线性函数。
定义函数 kf 为 k 与 f 的数乘，有

$$(kf)(\vec{\alpha})=k(f(\vec{\alpha})),\vec{\alpha}\in V$$

kf 也是线性函数。
在这样的定义下，$L(V,P)$ 成为数域 P 上的线性空间。

寻找基 取定 V 中的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\ldots,\vec{\varepsilon_n}$, 作 V 上 n 个线性函数（存在且唯一）$f_1,f_2,\ldots,f_n$，使得

$$f_i(\vec{\varepsilon_j})=\delta_{ij},i,j=1,2,\ldots,n.$$

$\Rightarrow$ 对 V 中 $\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{\varepsilon_i}$，有

$$f_i(\vec{\alpha})=x_i$$

$\Rightarrow$ 对 V 中 $\vec{\alpha}$，有

$$\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^n f_i(\vec{\alpha})\vec{\varepsilon_i}$$

而对 $L(V,P)$ 中的任意 f，有

$$f=\sum_{i=1}^n f(\vec{\varepsilon_i})f_i$$

$L(V,P)$ 的维数等于 V 的维数，而 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ 是 $L(V,P)$ 的一组基。

定义 $L(V,P)$ 称为 V 的对偶空间，记作 V^*。由 $f_i(\vec{\varepsilon_j})=\delta_{ij},i,j=1,2,\ldots,n$ 决定的基称为 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\ldots,\vec{\varepsilon_n}$ 的对偶基。

V 的两组对偶基之间的关系 两组对偶基之间的过渡矩阵为两组基之间的过渡矩阵的逆转置。

一个线性空间到其对偶空间的对偶空间的映射 $\vec{x} \longrightarrow \vec{x^{**}}, \vec{x^{**}}(f) = f(\vec{x}), f \in V^*$ 是一个同构映射。

对偶性 V 与 V^* 互为线性函数空间，任一线性空间都可看成某个线性空间的线性函数所组成的空间。

3 双线性函数

定义 V 是数域 P 上一个线性空间，$f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ 是 V 上一个二元函数，即对 V 中任意两个向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$，根据都唯一地对应于中的一个数。
如果 $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ 有下列性质:

$$f(\vec{\alpha}, k_1\vec{\beta_1} + k_2\vec{\beta_2}) = k_1 f(\vec{\alpha}, \vec{\beta_1}) + k_2 f(\vec{\alpha}, \vec{\beta_2})$$

$$f(k_1\vec{\alpha_1} + k_2\vec{\alpha_2}, \vec{\beta}) = k_1 f(\vec{\alpha_1}, \vec{\beta}) + k_2 f(\vec{\alpha_2}, \vec{\beta})$$

其中 $\vec{\alpha}, \vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\beta}, \vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}$ 是 V 中任意向量，k_1, k_2 是 P 中任意数，则称 $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ 为 V 上的一个双线性函数。

度量矩阵 设 $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数。$\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \ldots, \vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基，则矩阵

$$A = \begin{pmatrix} f(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_1}) & f(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}) & \cdots & f(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_n}) \\ f(\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_1}) & f(\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_2}) & \cdots & f(\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\vec{\varepsilon_n}, \vec{\varepsilon_1}) & f(\vec{\varepsilon_n}, \vec{\varepsilon_2}) & \cdots & f(\vec{\varepsilon_n}, \vec{\varepsilon_n}) \end{pmatrix}$$

叫做 $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ 在 $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \ldots, \vec{\varepsilon_n}$ 下的度量矩阵。
则对 $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{\varepsilon_i}, \vec{\beta} = \sum_{j=1}^n y_j\vec{\varepsilon_j}$，有

$$f(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = f(\sum_{i=1}^n x_i\vec{\varepsilon_i}, \sum_{j=1}^n y_j\vec{\varepsilon_j}) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(\vec{\varepsilon_i}, \vec{\varepsilon_j}) x_i y_j.$$

在给定的基下，V 上全体双线性函数与 P 上全体 n 级矩阵之间有一个双射。
同一个双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的。

设 $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ 是线性空间 V 上一个双线性函数，如果 $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ 对任意的 $\beta \in V$，可推出 $\alpha = 0$，f 就叫做非退化的。
双线性函数 $f(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ 是非退化的 $\Leftrightarrow$ 其度量矩阵 A 为非退化矩阵

（反）对称双线性函数定义　对线性空间 V 中任意两个向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 都有

$$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(-)f(\vec{\beta},\vec{\alpha})$$

的双线性函数 $f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$.
双线性函数是（反）对称的 $\Leftrightarrow$ 它在任一组基下的度量矩阵是（反）对称矩阵

对称双线性函数　设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间，$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\dots,\vec{\varepsilon_n}$，使 $f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 在这组基下的度量矩阵为对角阵。

推论 1　设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\dots,\vec{\varepsilon_n}$，对 V 中任意向量 $\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{\varepsilon_i},\vec{\beta}=\sum_{j=1}^n y_j\vec{\varepsilon_j}$，有

$$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=x_1y_1+\cdots+x_ry_r(0\le r\le n).$$

推论 2　设 V 是实数域上的 n 维线性空间，$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\dots,\vec{\varepsilon_n}$，对 V 中任意向量 $\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{\varepsilon_i},\vec{\beta}=\sum_{j=1}^n y_j\vec{\varepsilon_j}$，有

$$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r(0\le p\le r\le n).$$

反对称双线性函数　设 $f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 是 n 维线性空间 V 上的反对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_{-1}},\dots,\vec{\varepsilon_r},\vec{\varepsilon_{-r}},\vec{\eta_1},\dots,\vec{\eta_s}$ 使

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_{-i}})=1, & i=1,\dots,r;\\ f(\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_j})=0, & i+j\ne 0;\\ f(\vec{\alpha},\vec{\eta_k}), & \vec{\alpha}\in V,k=1,\dots,s.\end{cases}$$

V 上的对称双线性函数 $f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 如果是非退化的，则有 V 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\dots,\vec{\varepsilon_n}$ 满足

$$f(\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_j})=k\delta_{ij},\ i,j=1,2,\dots,n,k\ne 0$$

这样的基叫做 V 对于 $f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 的正交基。

V 上的反对称双线性函数 $f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 如果是非退化的，则有 V 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_{-1}},\ldots,\vec{\varepsilon_r},\vec{\varepsilon_{-r}}$ 满足

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_{-i}})=1, & i=1,2,\ldots,r; \\ f(\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_j})=0, & i+j\neq 0. \end{cases}$$

具有非退化反对称双线性函数的线性空间一定是偶数维的。

双线性度量空间 定义了一个非退化双线性函数 f 的数域 P 上的线性空间 V，常记为 (V,f).

正交空间 f 是非退化对称双线性函数

准欧氏空间 V 是 n 维实线性空间 f 是非退化对称双线性函数

辛空间 f 是非退化对称双线性函数

4 辛空间

辛同构 两个辛空间 (V_1,f_1) 及 (V_2,f_2)，若有 V_1 到 V_2 的作为线性空间的同构 $\mathcal{K}$，它满足

$$f_1(\vec{u},\vec{v})=f_2(\mathcal{K}\vec{u},\mathcal{K}\vec{v})$$

则称 $\mathcal{K}$ 是 (V_1,f_1) 到 (V_2,f_2) 的辛同构。
(V_1,f_1) 到 (V_2,f_2) 的作为线性空间的同构是辛同构 $\Leftrightarrow$ 它把 (V_1,f_1) 的一组辛正交基变成 (V_2,f_2)
两个辛空间是辛同构的 $\Leftrightarrow$ 它们有相同的维数

辛变换 辛空间到自身的辛同构。

辛正交 设 (V,f) 是辛空间，$\vec{u},\vec{v}\in V$，满足 $f(\vec{u},\vec{v})=0$，则称 $\vec{u},\vec{v}$ 为辛正交的。

辛正交补空间 W 是 V 的子空间，令

$$W^{\perp} = \{\vec{u} \in V | f(\vec{u}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in W\}$$

$W^{\perp}$ 显然是 V 的子空间，称为 W 的辛正交补空间。(V, f) 是辛空间，W 是 V 的子空间，则

$$dim\ W^{\perp} = dim\ V - dim\ W$$

若 $W \subset W^{\perp}$，则称 W 为 (V, f) 的迷向子空间

若 $W = W^{\perp}$，即 W 是极大的迷向子空间，也称为拉格朗日子空间

若 $W \cap W^{\perp} = \{0\}$，则称 W 为 (V, f) 的辛子空间

1 $(W^{\perp})^{\perp} = W$

2 $U \subset W \Rightarrow W^{\perp} \subset U^{\perp}$

3 若 U 是辛子空间，则 $V = U \oplus U^{\perp}$

4 若 U 是迷向子空间，则 $dim\ U \leq \frac{1}{2} dim\ V$

5 若 U 是拉格朗日子空间，则 $dim\ U = \frac{1}{2} dim\ V$

迷向子空间的基可以扩充成拉格朗日子空间的基，进而可以扩充成原辛空间的基。

辛子空间的一组辛正交基可扩充成原辛空间的辛正交基。

有辛空间的辛变换把拉格朗日子空间或辛子空间变成另一个拉格朗日子空间或另一个同维数的辛子空间。

Witt 定理

等距 辛空间 (V,f) 的两个子空间 V 及 W 之间的（线性）同构 $\mathcal{K}$ 若满足

$$f(\vec{u},\vec{v})=f(\mathcal{K}\vec{u},\mathcal{K}\vec{v}),\ \forall\vec{u}\in W,\vec{v}\in V$$

则称 $\mathcal{K}$ 为 V 与 W 间的等距。

辛空间 (V,f) 的两个子空间 V 及 W 之间若有等距，则此等距可扩充成 (V,f) 的一个辛变换。

辛变换的行列式为 1.

设 $\mathcal{K}$ 是 $2n$ 维辛空间中的辛变换，K 是 $\mathcal{K}$ 在某辛正交基下矩阵，则它的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-K|$ 满足 $f(\lambda)=\lambda^{2n}f(\frac{1}{\lambda})$. 若设

$$f(\lambda)=a_0\lambda^{2n}+a_1\lambda^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}\lambda+a_{2n}$$

则 $a_i=a_{2n-i},i=0,1,\ldots,n.$

设 λ_i,λ_j 是数域 P 上辛空间 (V,f) 上的辛变换 $\mathcal{K}$ 在 P 中的特征值，且 $\lambda_i\lambda_j\neq 1$. 设 $V_{\lambda_i},V_{\lambda_j}$ 是 V 中对应于特征值 λ_i 及 λ_j 的特征子空间。则 $\forall\vec{u}\in V_{\lambda_i},\vec{v}\in V_{\lambda_j}$，有 $f(\vec{u},\vec{v})=0$，即 V_{λ_i} 与 V_{λ_j} 是辛正交的。特别地，当 $\lambda_i\neq\pm 1$ 时 V_{λ_i} 是迷向子空间。

参考文献

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数.2003