Sistemas Não-Lineares: Método de Newton

Diego Nunes da Silva

Instituto Federal de São Paulo, Câmpus Presidente Epitácio

Sistema Não-Linear

Anteriormente, estudamos técnicas para a resolução de sistemas lineares. Agora, estamos interessados em estudar métodos numéricos para resolução de sistemas não-lineares, isto é, sistemas da forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

com n equações e n incógnitas.

Sistema Não-Linear

Por exemplo, o sistema não-linear

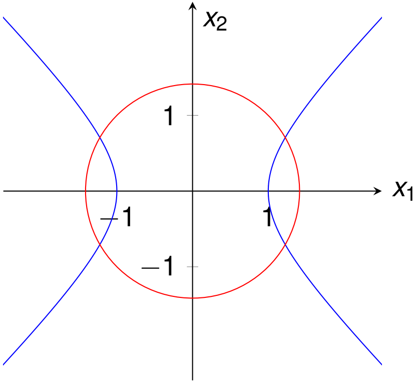
$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 2 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma indicada fazendo

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Sistema Não-Linear

Neste exemplo, desejamos encontrar algum ponto de intersecção da hipérbole $x_1^2 - x_2^2 = 1$ com a circunferência $x_1^2 + x_2^2 = 2$.



Sistema Não-Linear

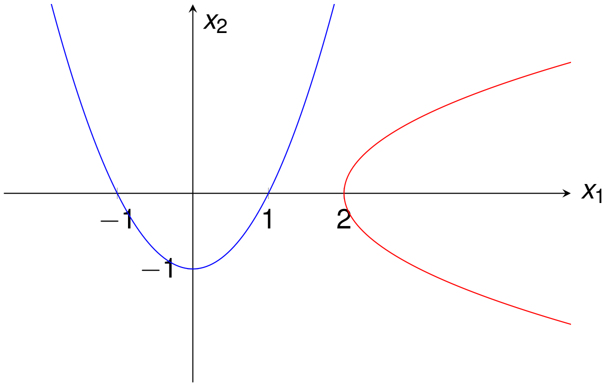
Deve-se observar, entretanto, que um sistema não-linear pode não possuir soluções. Por exemplo, o sistema não-linear

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

não possui soluções.

Sistema Não-Linear

Neste exemplo, desejamos encontrar algum ponto de intersecção da parábola de eixo vertical $x_2 = x_1^2 - 1$ e a parábola de eixo horizontal $x_1 = x_2^2 + 2$.



Sistema Não-Linear

Para facilitar a representação, utilizaremos a seguinte notação:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema não-linear

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

será indicado, de modo compacto, por

$$F(x) = 0$$

Solução de um Sistema Não-Linear

Dada uma função vetorial $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, estamos interessados em determinar uma solução $x^* \in D$ tal que $F(x^*) = 0$.

Assumiremos que tal solução existe, que D é um conjunto aberto e que F possui derivadas contínuas em D.

Vetor Gradiente

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o **vetor gradiente** de f é o vetor das derivadas parciais de f:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Observação: em métodos numéricos comumente representamos vetores como colunas (em Cálculo, provavelmente escreveram o vetor gradiente em linha).

Matriz Jacobiana

Dada uma função vetorial F, a **matriz Jacobiana** de F é a matriz das derivadas parciais de suas componentes, dada por

$$JF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Matriz Jacobiana

Exemplo

Determinar a matriz Jacobiana da função vetorial

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 - \operatorname{sen}(x_2) \\ x_1 \cos(x_2) - \ln(x_1) \end{pmatrix}$$

A matriz Jacobiana de F é

$$JF(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 & x_1^2 - \cos(x_2) \\ \cos(x_2) - \frac{1}{x_1} & -x_1 \operatorname{sen}(x_2) \end{pmatrix}$$

Expansão de Taylor de Primeira Ordem

Ao estudar métodos numéricos para equações não-lineares, vimos que uma possibilidade era aproximar a função f, cuja raiz era procurada, por sua expansão de Taylor de primeira ordem, T_1, em torno de um ponto $\overline{x}$:

$$f(x) \cong f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) = T_1(x)$$

Em seguida, como desejávamos calcular a raiz, impusemos que

$$f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) = 0 \Rightarrow x = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$$

originando o método de Newton.

Expansão de Taylor de Primeira Ordem

De modo análogo, no Cálculo de várias variáveis, demonstra-se que a expansão de Taylor de primeira ordem para uma função vetorial $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em torno de $\overline{x} \in D$ é expressa por

$$T_1(x) = F(\overline{x}) + JF(\overline{x})(x - \overline{x})$$

Do mesmo modo que no método de Newton para equações não-lineares, no método de Newton para sistemas não-lineares, a partir de um iterando $x^{(k)}$, determinamos sua expansão de Taylor de primeira ordem, T_1, em torno de $x^{(k)}$ e obtemos um iterando $x^{(k+1)}$ como sendo solução do sistema linear

$$T_1(x) = 0 \Rightarrow F(x^{(k)}) + JF(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0$$

isto é, $x^{(k+1)}$ é tal que

$$JF(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$$

Método de Newton

Fazendo $d^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$, o sistema a ser resolvido é

$$JF(x^{(k)})d^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

e o vetor $d^{(k)}$ é conhecido como **direção de Newton**.

Uma vez calculada a direção de Newton, resolvendo o sistema linear anterior, o vetor de variáveis $x^{(k)}$ é atualizado por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$$

Critério de Parada

Assim como nos métodos iterativos para sistemas lineares, precisamos estabelecer um critério de parada para o procedimento iterativo do método de Newton. Os critérios mais utilizados são:

1. alterações pouco significativas de uma iteração para outra, isto é,

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty \leqslant \varepsilon, \quad \text{com } \varepsilon > 0;$$

2. $F(x^{(k+1)})$ estiver próximo do vetor nulo, isto é, o resíduo estiver próximo de zero,

$$\|F(x^{(k+1)})\|_\infty \leqslant \varepsilon, \quad \text{com } \varepsilon > 0;$$

3. o número máximo de iterações, $k_{\max}$, foi atingido.

Método de Newton: Algoritmo

Inicialização: forneça o ponto inicial $x^{(0)} \in D$, a tolerância para convergência $\varepsilon > 0$, o número máximo de iterações $k_{\max}$, $N = \varepsilon + 1$.

Passo 1. Faça $k \leftarrow 0$ e calcule $F(x^{(k)})$.

Passo 2. Enquanto $k \leqslant k_{\max}$, $\|F(x^{(k)})\|_\infty > \varepsilon$ e $N > \varepsilon$, faça:

- Passo 3. Resolva $JF(x^{(k)})d^{(k)} = -F(x^{(k)})$ para $d^{(k)}$.
- Passo 4. Atualize $x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$.
- Passo 5. Calcule $N = \|d^{(k)}\|_\infty$.
- Passo 6. Faça $k \leftarrow k + 1$.
- Passo 8. Calcule $F(x^{(k)})$.

Passo 9. Se $\|F(x^{(k)})\|_\infty > \varepsilon$ e $N > \varepsilon$, escreva “O método não obteve solução em $k_{\max}$ iterações”. Do contrário, retorne $x^{(k)}$ como solução.

Exemplo

Resolver o sistema não-linear

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ 2x_1 - x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pelo método de Newton, com uma tolerância $\varepsilon = 10^{-6}$ e ponto inicial $x^{(0)} = (1, 1)$.

Neste exemplo, a matriz Jacobiana é

$$JF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Método de Newton

Note que

$$F(x^{(0)}) = F(1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|F(x^{(0)})\|_\infty = 2 > \varepsilon$$

Além disso,

$$JF(x^{(0)}) = JF(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$JF(x^{(0)})d^{(0)} = -F(x^{(0)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Portanto, o próximo ponto será

$$x^{(1)} = x^{(0)} + d^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$F(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.5625 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\|F(x^{(1)})\|_\infty = 0.625 > \varepsilon \quad \text{e} \quad N = \|d^{(0)}\|_\infty = 0.75 > \varepsilon$$

e o método não convergiu.

Agora, temos que

$$JF(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2.5 & 3.5 \\ 2 & -3.5 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$JF(x^{(1)})d^{(1)} = -F(x^{(1)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2.5 & 3.5 \\ 2 & -3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.5625 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{pmatrix}$$

Portanto, o próximo ponto será

$$x^{(2)} = x^{(1)} + d^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.236111 \\ 1.581349 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$F(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0.028636 \\ -0.028443 \end{pmatrix}$$

Logo,

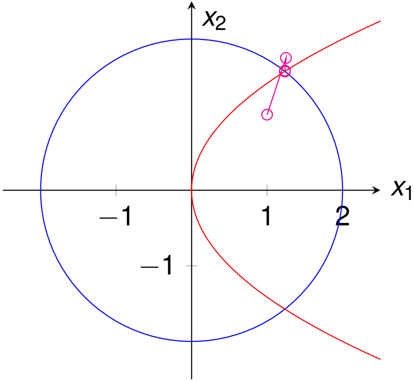
$$\|F(x^{(2)})\|_\infty = 0.028636 > \varepsilon \quad \text{e} \quad N = \|d^{(1)}\|_\infty = 0.168651 > \varepsilon$$

e o método não convergiu.

Procedendo desta maneira, o método convergirá após 4 iterações, conforme indicado na tabela abaixo:

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$
0	$(1, 1)$	$(-2, 1)$
1	$(1.250000, 1.750000)$	$(6.250000 \times 10^{-1}, -5.625000 \times 10^{-1})$
2	$(1.236111, 1.581349)$	$(2.863599 \times 10^{-2}, -2.844309 \times 10^{-2})$
3	$(1.236068, 1.572329)$	$(8.137262 \times 10^{-5}, -8.137076 \times 10^{-5})$
4	$(1.236068, 1.572303)$	$(6.695746 \times 10^{-10}, -6.695746 \times 10^{-10})$

A figura abaixo mostra a trajetória de convergência do método de Newton, neste caso.



Método de Newton

Se considerássemos $x^{(0)} = (-5, 5)$ como ponto inicial, o método de Newton não convergiria em 10 iterações:

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$
0	$(-5, 5)$	$(46, -35)$
1	$(-3.625000 \times 10^0, 1.775000 \times 10^0)$	$(1.229125 \times 10^1, -1.040063 \times 10^1)$
2	$(-3.264881 \times 10^0, -9.518696 \times 10^{-1})$	$(7.565503 \times 10^0, -7.435818 \times 10^0)$
3	$(-3.236251 \times 10^0, 2.923955 \times 10^0)$	$(1.502283 \times 10^1, -1.502201 \times 10^1)$
4	$(-3.236068 \times 10^0, 3.552338 \times 10^{-1})$	$(6.598327 \times 10^0, -6.598327 \times 10^0)$
5	$(-3.236068 \times 10^0, -8.932068 \times 10^0)$	$(8.625398 \times 10^1, -8.625398 \times 10^1)$
6	$(-3.236068 \times 10^0, -4.103736 \times 10^0)$	$(2.331279 \times 10^1, -2.331279 \times 10^1)$
7	$(-3.236068 \times 10^0, -1.263302 \times 10^0)$	$(8.068068 \times 10^0, -8.068068 \times 10^0)$
8	$(-3.236068 \times 10^0, 1.929944 \times 10^0)$	$(1.019682 \times 10^1, -1.019682 \times 10^1)$
9	$(-3.236068 \times 10^0, -7.117957 \times 10^{-1})$	$(6.978789 \times 10^0, -6.978789 \times 10^0)$
10	$(-3.236068 \times 10^0, 4.190446 \times 10^0)$	$(2.403197 \times 10^1, -2.403197 \times 10^1)$

Vantagens e Desvantagens

A cada iteração do método de Newton, temos que:

- avaliar a matriz Jacobiana no iterando;
- resolver um sistema linear.

Isto significa que as iterações do método de Newton para sistemas não-lineares são caras.

Entretanto, **sob hipóteses apropriadas** sobre o ponto inicial $x^{(0)}$, a função vetorial F e a matriz Jacobiana JF, a sequência $\{x^{(k)}\}$ gerada pelo método de Newton **converge** para a solução de $F(x) = 0$ com **taxa quadrática**.