Chapitre 1

Introduction aux Statistiques

Théorème 1.0.1 (de Slutsky)
$(X)_n$ dans $\mathbb{R}^d$, $(Y)_n$ dans $\mathbb{R}^m$
On suppose que :
$(X)_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$
$(Y)_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}\ ou\ \mathbb{P}} a = c^{\underline{te}}$
Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} (X, a)$

Application 1.1
Sous les hypothèses du théorème de Slutsky, on a :
i. $X_n + Y_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X + a$ si $m = d$
ii. $X_n Y_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} aX$ si $m = 1$
iii. $X_n / Y_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X/a$ si $m = 1$ et $a \neq 0$

Théorème 1.0.2 (Delta-méthode)
Soient $(X)_n$ variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\theta \in \mathbb{R}^d$.
Soient :
i. $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, différentiable en θ
ii. $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels tels que $c_n \underset{n\infty}{\to} \infty$.

Si $c_n(X_n - \theta) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$ alors $c_n(\phi(X_n) - \phi(\theta)) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \phi'(\theta)X$
Où ϕ' est la matrice $m * d$ d'éléments $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j})_{i,j}$

Théorème 1.0.3 (de Student)
$(X)_n$ variables aléatoires dans $\mathbb{R}$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
On a :
i. $\bar{X_n} \backsim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
ii. $\mathcal{R}_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X_n})^2 \backsim \sigma^2 \mathfrak{X}^2(n-1)$
iii. $\mathcal{R}_n \amalg \bar{X_n}$
iv. $\mathcal{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\mathcal{R}_n$ et $T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X_n} - \mu)}{\mathcal{S}_n} \backsim t(n-1)$

Chapitre 2

Méthodologie Statistique

2.1 Méthodologie statistique

2.1.1 Généralités

Définition 2.1.1 (Modèle statistique)
On appelle modèle statistique la famille $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.

Définition 2.1.2 (Modèle d'échantillonage)
$\mathcal{M} = (\mathfrak{X}^n, \mathcal{A}_n, \{\mathbb{P}_\theta{}^{\otimes n}, \theta \in \Theta\})$
- $\mathcal{A}_n$ tribu de $\mathfrak{X}^n$,
- $\mathbb{P}_\theta{}^{\otimes n}$ probabilité produit de n copies indépendantes de $\mathbb{P}_\theta$.

Définition 2.1.3
On dira qu'un modèle est paramétrique si $\Theta \subset \mathbb{R}^d$.

Définition 2.1.4
Dans $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$, on appelle statistique toute variable aléatoire S qui s'écrit comme une fonction de X : $S(X)$.

2.1.2 Domination

$\Theta \subset \mathbb{R}^d, d$ étant le nombre de paramètres.

Définition 2.1.5
Un modèle $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ est dit dominé s'il existe une mesure μ sur $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ positive, σ-finie, telle que $\forall \theta \in \Theta, \mathbb{P}_\theta$ est absolument continue par rapport à μ.
- $\mathbb{P}_\theta$ est absolument continue par rapport à μ :
  $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_\theta(A) = 0$.
  On note $\mathbb{P}_\theta \ll \mu$.
- σ-finie : $\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}$ telle que $\mathfrak{X} = \bigcup_n A_n$ et $\mu(A_n) < \infty, \forall n$

Définition 2.1.6
Dans un modèle dominé, on va définir les fonctions de vraisemblance :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \times \Theta & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, \theta) & \mapsto & L(x, \theta) = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x) \end{array}}$$

2.1.3 Identifiabilité

Définition 2.1.7
Un modèle $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ est dit identifiable si l'application de Θ dans l'espace des probabilités sur $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ qui à θ associe $\mathbb{P}_\theta$ est injective.

2.1.4 Exhaustivité

Définition 2.1.8
Une statistique est dite exhaustive si et seulement si la loi de $(X|S(X))$ ne dépend pas de θ.

Théorème 2.1.1 (Critère de factorisation)
Une statistique est exhaustive si et seulement si la vraisemblance peut s'écrire :

$$L(x, \theta) = \Psi(S(x), \theta)\lambda(x)$$

Définition 2.1.9
Une statistique S est dite totale ou complète si et seulement si pour toute fonction Φ mesurable à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$\{\forall\ \theta \in \Theta, E_\theta(\Phi(S(X))) = 0\} \Rightarrow \{\forall\ \theta \in \Theta, \Phi(S(X)) = 0, [\mathbb{P}_\theta]\ ps\}$$

2.1.5 Modèle exponentiel (1)

Définition 2.1.10
On dit qu'un modèle $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ est exponentiel si :
- Il est dominé par une mesure μ,
- $L(x, \theta) = \lambda(x)\Phi(x)\exp(\sum_{i=1}^{\Omega} Q_i(\theta)S_i(x))$, où $S(X) = (S_1(X), ..., S_n(X))$ est la statistique canonique.

Proposition 2.1.1
i. La statistique canonique est exhaustive.
ii. S suit un modèle exponentiel.
iii. Le modèle est de type exponentiel (1) si les fonctions $S_j(x), j = 1...n$ sont linéairements indépendantes au sens affine
(ie $\forall\ x \in \mathfrak{X}, \sum_{j=1}^{n} a_j S_j(x) = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_n = 0$)
Alors $\mathbb{P}_{\theta_1} = \mathbb{P}_{\theta_2}$ si et seulement si $Q_j(\theta_1) = Q_j(\theta_2), \forall\ j = 1...n$.

Corollaire 2.1.1
Dans un modèle exponentiel (1), si les $S_j(x)$ sont linéaires indépendantes au sens affine, alors le paramètres θ est identifiable si et seulement si l'application $\theta \to Q(\theta) = (Q_1(\theta), ..., Q_n(\theta))$ est injective.

Théorème 2.1.2
Dans un modèle exponentiel (1), si $Q(\Theta)$ est d'intérieur non vide, alors S est totale.

2.2 Estimation sans biais

2.2.1 Théorie de la décision

Définition 2.2.1
Dans le cas de l'estimation ponctuelle, on appelle estimation δ (ou règle de décision), une statistique de $\mathfrak{X}$ dans $g(\Theta)$.

Définition 2.2.2
Deux estimateurs seront comparés grâce à l'erreur quadratique moyenne (EQM) définie par :

$$R_\delta = E_\theta(L(\theta, \delta(X))) = E_\theta((g(\theta) - \delta(X))^2)$$

Définition 2.2.3
On dit que δ_1 est préférale à δ_2 si

$$\forall\ \theta \in \Theta, R(\delta_1, \theta) \leq R(\delta_2, \theta)$$

(Si l'inégalité est stricte pour au moins un θ, δ_2 est inadmissible.)

Définition 2.2.4 (Estimateur sans biais (ESB))
Un estimateur $\delta(X)$ de $g(\theta)$ est dit sans biais si :

$$E[\delta(X)] = g(\theta), \forall\ \theta \in \Theta$$

Théorème 2.2.1 (Amélioré de Raoul-Blackwell)
Soient δ un ESB de $g(\theta)$ et S la statistique exhaustive.
Soit $\delta_S \to E_\theta(\delta(X)|S(X) = s)$.
Alors : $\begin{cases} R_{\delta_s} \leq R_s(\theta) \\ \delta_S \text{ est un ESB} \end{cases}$

Théorème 2.2.2 (Lehmann Scheffé)
Si δ est un ESB de $g(\theta)$ et si S est une statistique exhaustive et totale alors l'améliorée de Raoul-Blackwell δ_S de δ est optimale dans la classe des ESB (ie sa variance est minimale).