I. Lý thuyết

1. Các tiên đề xác suất và 1 số tính chất cơ bản

Các tiên đề xác suất

1. $0 \leq P(A = a) \leq 1$ với mọi a thuộc miền giá trị của A
2. $P(True) = 1$, $P(False) = 0$
3. $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

Một số tính chất

1. $P(\neg A) = 1 - P(A)$
2. $P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B)$
3. $\Sigma_a P(A = a) = 1$: tổng lấy theo các giá trị a thuộc miền giá trị của A

2. Xác suất đồng thời

Có dạng $P(V1 = v1, V2 = v2, \ldots, Vn = vn)$ được tính bằng quy tắc chuỗi (xem phần 4)

3. Xác suất điều kiện

Đóng vai trò quan trọng trong suy diễn

- Từ bằng chứng suy ra xác suất của kết quả
- Ví dụ:
  - $P(A|B) = 1$ tương đương $B \Rightarrow A$ trong logic
  - $P(A|B) = 0.9$ tương đương $B \Rightarrow A$ với xác suất hay độ chắc chắn là 90%
  - Với nhiều bằng chứng (quan sát) $E_1, \ldots, E_n$ có thể tính $P(Q|E_1, \ldots, E_n)$ tương đương: niềm tin Q đúng là bao nhiêu nếu biết $E_1, \ldots, E_n$ và không biết gì thêm

Định nghĩa xác suất điều kiện

- $P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A,B)}{P(B)}$

4. Các tính chất của xác suất có điều kiện

- $P(A,B) = P(A|B)P(B)$
- Quy tắc chuỗi: $P(A,B,C,D) = P(A|B,C,D)\,P(B|C,D)\,P(C|D)\,P(D)$
- Quy tắc chuỗi có điều kiện: $P(A,B|C) = P(A|B,C)\,P(B|C)$
- Quy tắc Bayes: $P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}$
- Bayes có điều kiện: $P(A|B,C) = \frac{P(B|A,C)\,P(A|C)}{P(B|C)}$
- $P(A) = \Sigma_b\{P(A|B=b)\,P(B=b)\}$, tổng lấy theo tất cả giá trị b của B
- $P(\neg B|A) = 1 - P(B|A)$

5. Tính độc lập xác suất

- A độc lập với B nếu $P(A|B) = P(A)$
  - Ý nghĩa: biết giá trị của B không thêm thông tin về A
  - Từ đây có thể suy ra $P(A,B) = P(A)P(B)$

- A độc lập có điều kiện với B khi biết C nếu
  - $P(A|B,C) = P(A|C)$ hoặc $P(B|A,C) = P(B|C)$
  - Ý nghĩa: nếu đã biết giá trị của C thì việc biết giá trị của B không cho ta thêm thông tin về A
  - Suy ra $P(A,B|C) = P(A|C)P(B|C)$

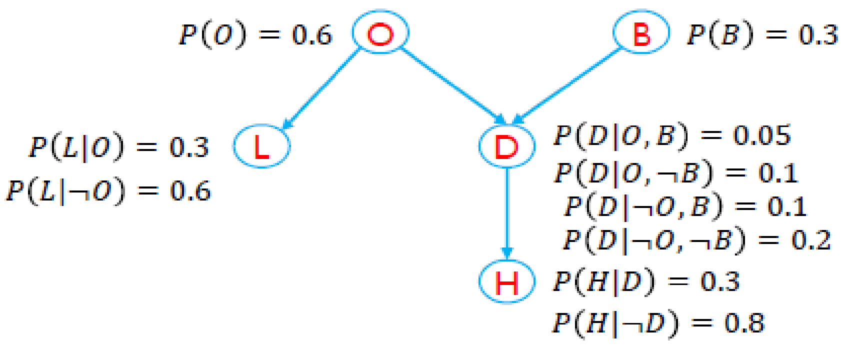
6. Mạng Bayes

Mạng Bayes bao gồm 2 phần

- Phần thứ nhất là đồ thị có hướng, không chu trình, trong đó mỗi nút ứng với một biến ngẫu nhiêu, mỗi cạnh (có hướng) biểu diễn cho quan hệ giữa nút gốc và nút đích
- Phần thứ hai là bảng xác suất điều kiện chứa xác suất điều kiện của nút con khi biết tổ hợp giá trị của nút bố mẹ

Tính độc lập xác suất của mạng Bayes

- Mạng Bayes cho phép biểu diễn ngắn gọn toàn bộ các xác suất đồng thời
  - Việc rút gọn nhờ sử dụng tính độc lập xác suất trong mạng
- Độc lập xác suất
  - Mỗi nút V độc lập với tất cả các nút không phải là hậu duệ của V, nếu biết giá trị các nút bố mẹ của V
  - Ví dụ: H độc lập có điều kiện với L, O, B nếu biết D



VD:

Tính: P(H, ¬L, D, ¬O, B) ?

= P(H | ¬L, D, ¬O, B) P(¬L | D, ¬O, B) P(D | ¬O, B) P(¬O | B) P(B)

= P(H | D) P(¬L | ¬O) P(D | ¬O, B) P(¬O) P(B)

= 0.3 * (1 – 0.6) * 0.1 * (1 – 0.6) * 0.3 = 1.44 * 10^(-3)

7. Xây dựng mạng Bayes (bằng tay)

Bước 1: Xác định các biến ngẫu nhiên liên quan.

Bước 2: Chọn thứ tự cho các biến (thường để vẽ mạng tối ưu nhất thì từ trái sang phải là các biến nguyên nhân rồi đến kết quả)

Bước 3: Chạy lần lượt các biến từ trái sang phải:

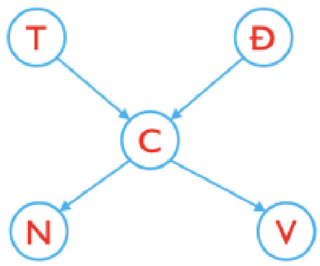
- Thêm biến hiện tại Xi vào mạng.
- Chọn tập nhỏ nhất các nút đã có trong mạng làm tập các nút cha mẹ parents(Xi) của Xi sao cho Xi độc lập có điều kiện với tất cả các nút đã có nếu biết parents(Xi).
- Thêm cung có hướng từ mỗi nút trong parents(Xi) tới Xi
- Thêm các giá trị xác suất.

Ví dụ về xây dựng mạng Bayes (2/4)

- Một người vừa lắp hệ thống báo động chống trộm ở nhà
- Hệ thống sẽ phát hiện tiếng động khi có trộm
- Tuy nhiên hệ thống có thể báo động sai nếu có chấn động do động đất
- Trong trường hợp nghe thấy hệ thống báo động, hai người hàng xóm tên là Nam và Việt sẽ gọi điện cho chủ nhà
- Do nhiều nguyên nhân khác nhau, Nam và Việt có thể thông báo sai, chẳng hạn do ồn nên không nghe thấy chuông báo động hoặc ngược lại, nhầm âm thanh khác là tiếng chuông.

- **Bước 1: Xác định các biến**
  Sử dụng 5 biến ngẫu nhiên: T: có trộm, Đ: động đất, C: chuông báo động, N: Nam gọi điện, V: Việt gọi điện
- **Bước 2: Các biến được sắp xếp theo thứ tự**
  : **T, Đ, C, N, V**

- **Bước 3: Xây dựng cấu trúc mạng Bayes:**
  - Thêm nút **T**: Không có nút cha
  - Thêm nút **Đ**: Không có nút cha
  - Thêm nút **C**: Nếu có trộm và động đất => khả năng chuông kêu cao hơn => Cần thêm cả **T, Đ** vào tập nút cha của C
  - Thêm nút **N**: Nếu chuông kêu, khả năng Nam gọi điện tăng => Thêm **C** là nút cha của **N**
  - Thêm nút **V**: Nếu chuông kêu, khả năng Việt gọi điện tăng => Thêm **C** là nút cha của **V**



8. Xác suất hậu nghiệm – Suy diễn nhân quả và chuẩn đoán

9. Tính độc lập xác suất tổng quát – khái niệm d-phân cách

- Các nút X và các nút Y được gọi là d-phân cách bởi các nút E nếu X và Y độc lập xác suất với nhau khi biết E. Nếu không d-phân cách thì X và Y d-kết nối.
- **Quy tắc 1: Nút x (thuộc X) và y (thuộc Y) là d-kết nối nếu tồn tại đường đi không bị phong toả giữa 2 nút.**
  - **Đường đi là chuỗi các cung nằm liền nhau không quan tâm hướng cung.**
  - Đường đi không bị phong toả tức trên nó không có 2 cung liền kề hướng vào nhau, nút có 2 cung hướng vào gọi là nút xung đột.
  - Tính độc lập xác suất theo quy tắc 1 là độc lập không điều kiện.
- **Quy tắc 2: Nút x và y là d-kết nối có điều kiện khi biết tập nút E nếu tồn tại đường đi không bị phong toả và không đi qua nút nào thuộc E.**
  - Ngược lại, nếu không tồn tại đường đi như vậy thì ta nói rằng x và y là d-phân cách bởi E => Mọi đường đi giữa x và y (nếu có) đều bị E phong tỏa.
  - Tính độc lập hay phụ thuộc trong trường hợp này được gọi là d-phân cách có điều kiện theo tập biến E

- **Quy tắc 3: Nếu một nút xung đột thuộc tập *E* hoặc có hậu duệ thuộc tập *E* thì nút đó không còn phong tỏa các đường đi qua nó nữa.**

10. Suy diễn cho trường hợp riêng

Mạng có dạng liên kết đơn (polytree): giữa 2 nút bất kỳ không có quá 1 đường đi.

11. Công thức tính xác suất đồng thời tổng quát cho mạng Bayes

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i \mid parents(X_i))$$

II. Bài tập

1. Một người có kết quả xét nghiệm dương tính với bệnh B. Thiết bị cho kết quả dương tính đối với 98% người có bệnh và 3% đối với người không có bệnh. Biết rằng 0.8% dân số mắc bệnh này. Hỏi : Người này có bị bệnh không ?

BL

Giả sử ta kí hiệu sự kiện có bệnh là B, sự kiện xét nghiệm dương tính là A. Từ đề ta có: P(A|B) = 0.98 ; P(A|¬B) = 0.03 ; P(B) = 0.008 => P(¬B) = 0.992.

Để biết người này có bệnh không, ta cần so sánh xác suất P(B|A) và P(¬B|A).

Sử dụng quy tắc Bayes:

P(B|A) = P(B)P(A|B) / P(A) = 0.00784 / P(A)

P(¬B|A) = P(¬B)P(A|¬B) / P(A) = 0.02976 / P(A)

Dễ thấy P(¬B|A) > P(B|A) => Người này không bị bệnh.

Nếu muốn tính cụ thể các xác suất trên ta phải tính P(A), phải dùng thêm tính chất là: P(B|A) + P(¬B|A) = 1

2. Cho 3 biến nhị phân : gan BG, vàng da VD, thiếu máu TM. Giả sử VD độc lập với TM. Biết $P(BG)$ = 10^(−7), $P(VD)$ = 2^(−10) và $P(VD|BG)$ = 2^(−3).

Có người khám bị vàng da.

a) Xác suất người khám bị bệnh BG là bao nhiêu ?

b) Cho biết thêm người đó bị thiếu máu và $P(TM)$ = 2^(−6), $P(TM|BG)$=2^(−1). Hãy tính xác suất người khám bị bệnh BG ?

BL

a) Sử dụng quy tắc Bayes:

$P(BG|VD) = P(BG)P(VD \mid BG) / P(VD) = 1.28 * 10^{(-5)}$

b) Sử dụng Bayes có điều kiện:

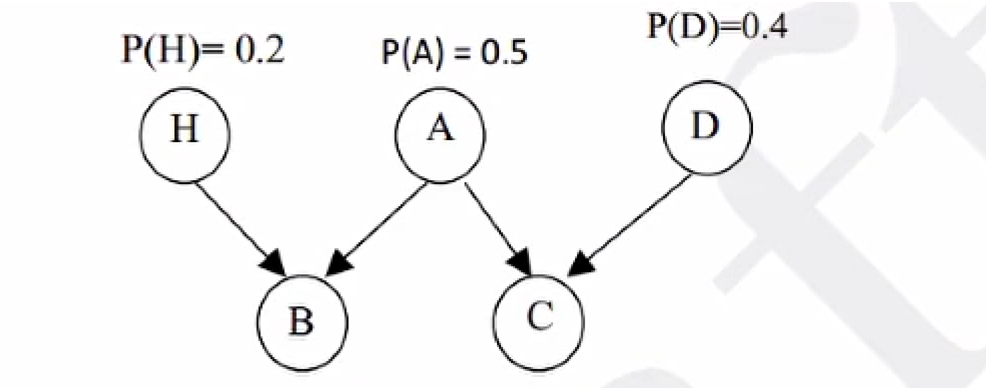
$P(BG|VD, TM) = P(BG)P(VD, TM \mid BG) / P(VD, TM)$

Vì VD và TM độc lập xác suất:

$P(BG|VD, TM) = P(BG)\, P(VD \mid BG)\, P(TM \mid BG) / P(VD)\, P(TM)$

$= 4.096 * 10^{(-4)}$

3. Cho mạng Bayes sau, các biến có thể nhận giá trị T, F:



H	A	P(B=T|A,H)
F	F	0.7
F	T	0.2
T	F	0.1
T	T	0.5

A	D	P(C=T|A,D)
F	F	0.8
F	T	0.3
T	F	0.4
T	T	0.2

a) Tính xác suất cả 5 biến nhận giá trị F

b) Tính P(A | C)

c) Theo mạng đã cho thì H có độc lập xác suất với B không ?

BL

a) Ta cần tính $P(\neg H, \neg A, \neg D, \neg B, \neg C)$. Có:

$P(\neg B, \neg H, \neg A, \neg C, \neg D)$

$= P(\neg B \mid \neg H, \neg A, \neg C, \neg D)\, P(\neg C \mid \neg A, \neg H, \neg D)\, P(\neg H \mid \neg A, \neg D)\, P(\neg A \mid \neg D)\, P(\neg D)$

$= P(\neg B \mid \neg H, \neg A)\, P(\neg C \mid \neg A, \neg D)\, P(\neg H)\, P(\neg A)\, P(\neg D)$

$= (1 – 0.7) * (1 – 0.8) * 0.8 * 0.5 * 0.6 = 0.0144$

b) Ta có:

$P(A \mid C) = P(A, C) / P(C) = (P(A, C, D) + P(A, C, \neg D)) / P(C)$

$= (P(C \mid A, D) P(A, D) + P(C \mid A, \neg D) P(A, \neg D)) / P(C)$

$= (P(C \mid A, D) P(A) P(D) + P(C \mid A, \neg D) P(A) P(\neg D)) / P(C) = 0.16 / P(C)$

Lại có:

$P(\neg A \mid C) = P(\neg A, C) / P(C) = (P(\neg A, C, D) + P(\neg A, C, \neg D)) / P(C)$

$= (P(C \mid \neg A, D) P(\neg A, D) + P(C \mid \neg A, \neg D) P(\neg A, \neg D)) / P(C)$

$= (P(C \mid \neg A, D) P(\neg A) P(D) + P(C \mid \neg A, \neg D) P(\neg A) P(\neg D)) / P(C)$

$= 0.3 / P(C)$

Mà $P(A \mid C) + P(\neg A \mid C) = 1$ => $P(C) = 0.46$ => $P(A \mid C) = 0.348$

c) Để kiểm tra H có độc lập xác suất với B hay không, ta cần tính $P(H \mid B)$ và so sánh nó với $P(H)$.

Ta có:

$P(H \mid B) = P(H, B) / P(B) = (P(B, H, A) + P(B, H, \neg A)) / P(B)$

$= (P(B \mid H, A) P(H, A) + P(B \mid H, \neg A) P(H, \neg A)) / P(B)$

$= (P(B \mid H, A) P(H) P(A) + P(B \mid H, \neg A) P(H) P(\neg A)) / P(B) = 0.06 / P(B)$

Lại có:

$P(\neg H \mid B) = P(\neg H, B) / P(B) = (P(B, \neg H, A) + P(B, \neg H, \neg A)) / P(B)$

$= (P(B \mid \neg H, A) P(\neg H, A) + P(B \mid \neg H, \neg A) P(\neg H, \neg A)) / P(B)$

$= (P(B \mid \neg H, A) P(\neg H) P(A) + P(B \mid \neg H, \neg A) P(\neg H) P(\neg A)) / P(B)$

$= 0.36 / P(B)$

Mà $P(H \mid B) + P(\neg H \mid B) = 1$ => $P(B) = 0.42$ => $P(H \mid B) = 0.143$

Dễ thấy $P(H \mid B) \neq P(H)$ => H và B không độc lập xác suất.

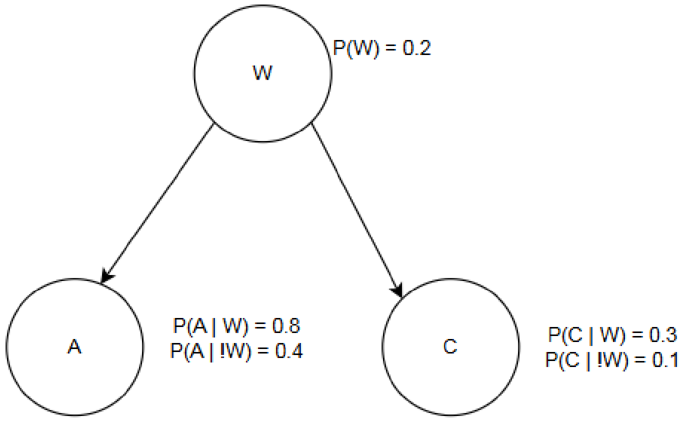
4. **Giả sử cần suy diễn về quan hệ giữa thời tiết và giao thông. Cho 3 biến ngẫu nhiên W, A, C biểu diễn 3 tình huống: W (thời tiết xấu), A (Chuyến bay bị chậm), C (Quốc lộ bị tắc). Giả sử chuyến bay chậm và quốc lộ tắc không ảnh hưởng nhau trong bất cứ thời tiết nào. Khi thời tiết xấu có 80% chuyến bay bị chậm và khi thời tiết tốt thì có 40% chuyến bay bị chậm. Tần suất tắc quốc lộ khi thời tiết xấu là 30% và thời tiết tốt là 10%. Xác suất thời tiết xấu là 20%.**

a) Vẽ mạng Bayes và bảng xác suất điều kiện

b) Tính $P(\neg A, W, C)$ và $P(A, C)$

BL

a) Mạng Bayes theo thứ tự các biến là W, A, C:



b)

* $P(\neg A, W, C) = P(\neg A \mid W, C)\, P(W \mid C)\, P(C) = P(\neg A \mid W, C)\, P(C \mid W)\, P(W)$

A và C độc lập xác khi biết W => $P(\neg A \mid W, C) = P(\neg A \mid W)$

=> $P(\neg A \mid W, C) = (1 - P(A \mid W))\, P(C \mid W)\, P(W) = 0.012$

* $P(A, C) = P(A, C, W) + P(A, C, \neg W)$

Ta có:

$P(A, C, W) = P(A \mid C, W)\, P(C \mid W)\, P(W) = P(A \mid W)\, P(C \mid W)\, P(W) = 0.048$

$P(A, C, \neg W) = P(A \mid C, \neg W)\, P(C \mid \neg W)\, P(\neg W) = P(A \mid \neg W)\, P(C \mid \neg W)\, P(\neg W)$

$= 0.032$ => $P(A, C) = 0.08$

5. Cho 3 biến D, W, P nhận giá trị {true, false}, trong đó:

D = true nếu máy tính được trang bị đĩa cứng tốc độ thấp

W = true nếu trò chơi chạy chậm

P = true nếu tốc độ in chậm.

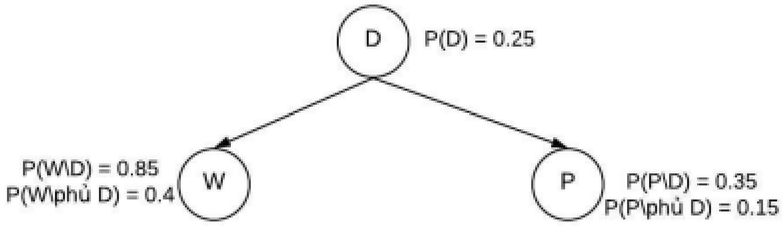
a) Vẽ mạng Bayes thể hiện quan hệ: tốc độ trò chơi và tốc độ in là độc lập với nhau nếu biết tốc độ đĩa cứng. Tính bảng xác suất điều kiện cho mạng biết: 25% khả năng đĩa cứng chậm. Nếu đĩa chậm có 85% khả năng trò chơi bị chậm. Trong trường hợp đĩa nhanh vẫn có 40% khả năng trò chơi bị chậm. Đĩa chậm dẫn đến tốc độ in chậm trong 35% trường hợp. Khi đĩa nhanh vẫn có 15% khả năng in chậm.

b) Tính P(D | W, P)

c) Tính P(W | P)

BL

a) Mạng Bayes:



b) Ta có: P(D | W, P) = P(D) P(W, P | D) / P(W, P)

Khi biết D thì W và P độc lập xác suất => P(W, P | D) = P(W | D) P(P | D) = 0.2975

=> P(D | W, P) = 0.074375 / P(W, P) (1)

Lại có: P(¬D | W, P) = P(¬D) P(W, P | ¬D) / P(W, P)

= P(¬D) P(W | ¬D) P(P | ¬D) / P(W, P) = 0.045 / P(W, P) (2)

Mà P(D | W, P) + P(¬D | W, P) = 1 (3)

(1)(2)(3) => P(W, P) = 0.119375 => P(D| W, P) = 0.623

c) Ta có: P(W | P) = P(W, P) / P(P) = 0.119375 / P(P)

Ta sẽ tính P(P) theo D và P, quy tắc Bayes có:

P(D | P) = P(D) P(P | D) / P(P) = 0.0875 / P(P)

P(¬D | P) = P(¬D) P(P | ¬D) / P(P) = 0.1125 / P(P)

Mà P(D | P) + P((¬D | P) = 1 => P(P) = 0.2 => P(W | P) = 0.596875

6. **Giả sử 1 loại virus (V) có thể gây ra mất file (F), máy chạy chậm (C), máy tự khởi động lại (R). Biết xác suất mất file khi không nhiễm và có nhiễm virus là 0.05 và 0.7; xác suất máy chạy chậm khi không nhiễm và có nhiễm là 0.2 và 0.6; xác suất máy tự khởi động lại khi không nhiễm và có nhiễm là 0.05 và 0.4. Quan sát thấy có 25 máy nhiễm virus trong 100 máy.**

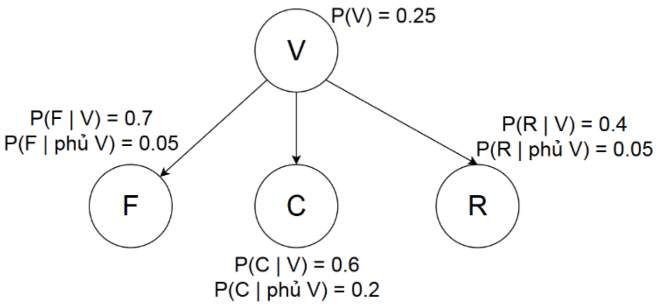
a) Vẽ mạng Bayes và bảng xác suất điều kiện cho ví dụ này.

b) Máy tính phòng thực hành chạy chậm, tính xác suất máy này nhiễm virus.

c) Tính xác suất 1 máy nhiễm virus nếu máy đó vừa chạy chậm vừa mất file

BL

a) Mạng Bayes:



b) Từ đề, ta cần tính P(V | C)

Theo quy tắc Bayes:

P(V | C) = P(V) P(C | V) / P(C) = 0.15 / P(C)

P(¬V | C) = P(¬V) P(C | ¬V) / P(C) = 0.15 / P(C)

Mà P(V | C) + P(¬V | C) = 1 => P(C) = 0.3 => P(V | C) = 0.5

c) Từ đề, ta cần tính P(V | C, F)

Theo quy tắc Bayes:

P(V | C, F) = P(V) P(C, F | V) / P(C, F)

Vì C và F độc lập khi biết V

=> P(V | C, F) = P(V) P(C | V) P(F | V) / P(C, F) = 0.105 / P(C, F)

Tương tự:

P(¬V | C, F) = P(¬V) P(C, F | ¬V) / P(C, F)

= P(¬V) P(C | ¬V) P(F | ¬V) / P(C, F) = 0.0075 / P(C, F)

Mà P(V | C, F) + P((¬V | C, F) = 1 => P(C, F) = 0.1125 => P(V | C, F) = 0.93

7. **Cho biết 60% dân số thường xuyên ăn rau sống. Có 50% người ăn rau nhiễm bệnh đường ruột và 10% người không ăn bị bệnh. Nếu bị bệnh thì đau bụng với xác suất 80% và bị chán ăn với xác suất 70%. Nếu không bệnh thì cũng có thể đau bụng với xác suất 10% và chán ăn với xác suất 20%. Ký hiệu ăn rau sống, nhiễm bệnh, đau bụng, chán ăn là các biến ngẫu nhiên R, B, Đ, C.**

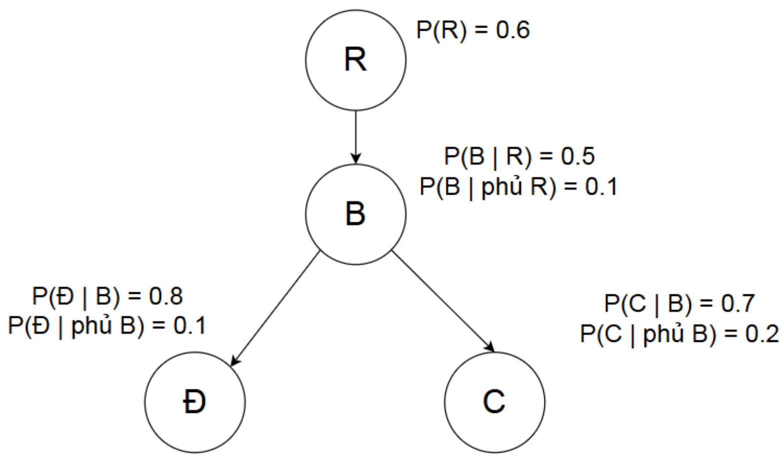
a) Vẽ mạng Bayes và bảng xác suất điều kiện cho ví dụ này.

b) Tính P(R, ¬B, ¬Đ, ¬C)

c) Một người bệnh bị đau bụng. Người đó có nhiễm bệnh đường ruột không ?

BL

a) Mạng Bayes:



b)

Ta có:

$P(\neg B, R, \neg Đ, \neg C) = P(\neg Đ \mid \neg B, R, \neg C)\ P(\neg C \mid \neg B, R)\ P(\neg B \mid R)\ P(R)$

$= P(\neg Đ \mid \neg B)\ P(\neg C \mid \neg B)\ P(\neg B \mid R)\ P(R) = 0.216$

c) Từ đề, ta cần tính $P(B \mid Đ)$ và so sánh với $P(\neg B \mid Đ)$

Sử dụng Bayes:

$P(B \mid Đ) = P(B)\ P(Đ \mid B) / P(Đ)$

$= P(B, R)\ P(B, \neg R)\ P(Đ \mid B) / P(Đ)$

$= P(B \mid R)\ P(R)\ P(B \mid \neg R)\ P(\neg R)\ P(Đ \mid B) / P(Đ) = 0.0096 / P(Đ)$

$P(\neg B \mid Đ) = P(\neg B)\ P(Đ \mid \neg B) / P(Đ)$

$= P(\neg B, R)\ P(\neg B, \neg R)\ P(Đ \mid \neg B) / P(Đ)$

$= P(\neg B \mid R)\ P(R)\ P(\neg B \mid \neg R)\ P(\neg R)\ P(Đ \mid \neg B) / P(Đ) = 0.0108 / P(Đ)$

Dễ thấy $P(\neg B \mid Đ) > P(B \mid Đ)$ => Người này không bị bệnh đường ruột.

8. Nhằm tìm hiểu nguyên nhân hỏng của hệ thống máy in 1 đội kỹ thuật đã thu thập được dữ liệu như sau:

- **In lệch do giấy lỗi và chỉnh máy sai, kẹt giấy do chỉnh máy sai, kẹt giấy có thể dẫn đến hỏng máy.**
- **Nếu không kẹt giấy 30% là máy hỏng; kẹt giấy thì 80% là máy hỏng.**
- **Nếu giấy lỗi mà máy in chỉnh sai thì 90% in bị lệch.**
- **Nếu giấy không lỗi mà máy chỉnh đúng thì 10% in bị lệch.**
- **Nếu giấy lỗi mà máy chỉnh đúng thì 69% in bị lệch.**
- **Nếu giấy không lỗi mà máy chỉnh sai thì 70% in bị lệch.**
- **Nếu máy chỉnh sai thì 50% kẹt giấy; máy không chỉnh sai thì 20% kẹt giấy.**
- **Cứ 1000 tờ thì có 1 tờ giấy lỗi và xác suất chỉnh sai của máy là 20%.**

a) Từ những câu trên, vẽ mạng Bayes với các biến có thể nhận giá trị {T, F}.

b) Tính xác suất máy hỏng nếu in lệch.

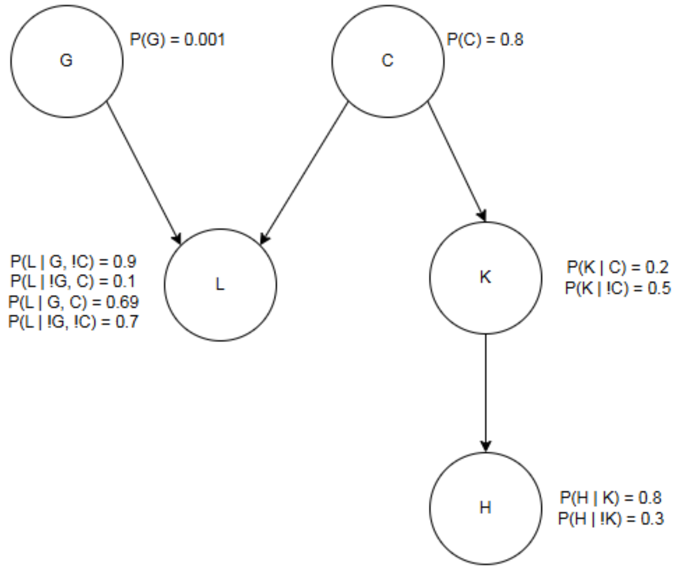
c) Tính xác suất đồng thời xảy ra: kẹt giấy, giấy không lỗi và máy hỏng.

BL

a) Lựa chọn biến: sử dụng 5 biến sau:

G (giấy lỗi), K (kẹt giấy), H (máy hỏng), L (in lệch), C (chỉnh máy đúng).

Các biến được sắp xếp theo thứ tự: G, C, L, K, H. Ta có mạng Bayes:



b) Cần tính P(H | L). Ta có:

P(H | L) = P(H, L) / P(L)

Tách ra để tính:

- P(H, L) = P(H, L, K, C, G) + P(H, L, K, C, ¬G) + P(H, L, K, ¬C, G) + P(H, L, K, ¬C, ¬G) + P(H, L, ¬K, C, G) + P(H, L, ¬K, C, ¬G) + P(H, L, ¬K, ¬C, G) + P(H, L, ¬K, ¬C, ¬G)

Tính từng cái 1 (8 cái) rồi cộng vào:

1. P(H, L, K, C, G) = P(H | L, K, C, G) P(L | K, C, G) P(K | C, G) P(C | G) P(G) = P(H | K) P(L | C, G) P(K | C) P(C) P(G) = 0.00008832
2. P(H, L, K, C, ¬G) = P(H | L, K, C, ¬G) P(L | K, C, ¬G) P(K | C, ¬G) P(C | ¬G) P(¬G) = P(H | K) P(L | C, ¬G) P(K | C) P(C) P(¬G) = 0.0127872
3. P(H, L, K, ¬C, G) = P(H | L, K, ¬C, G) P(L | K, ¬C, G) P(K | ¬C, G) P(¬C | G) P(G) = P(H | K) P(L | ¬C, G) P(K | ¬C) P(¬C) P(G) = 0.000072
4. P(H, L, K, ¬C, ¬G) = P(H | L, K, ¬C, ¬G) P(L | K, ¬C, ¬G) P(K | ¬C, ¬G) P(¬C | ¬G) P(¬G) = P(H | K) P(L | ¬C, ¬G) P(K | ¬C) P(¬C) P(¬G) = 0.055944
5. P(H, L, ¬K, C, G) = P(H | L, ¬K, C, G) P(L | ¬K, C, G) P(¬K | C, G) P(C | G) P(G) = P(H | ¬K) P(L | C, G) P(¬K | C) P(C) P(G) = 0.00013248
6. P(H, L, ¬K, C, ¬G) = P(H | L, ¬K, C, ¬G) P(L | ¬K, C, ¬G) P(¬K | C, ¬G) P(C | ¬G) P(¬G) = P(H | ¬K) P(L | C, ¬G) P(¬K | C) P(C) P(¬G) = 0.0191808
7. P(H, L, ¬K, ¬C, G) = P(H | L, ¬K, ¬C, G) P(L | ¬K, ¬C, G) P(¬K | ¬C, G) P(¬C | G) P(G) = P(H | ¬K) P(L | ¬C, G) P(¬K | ¬C) P(¬C) P(G) = 0.000027

8. P(H, L, ¬K, ¬C, ¬G) = P(H | L, ¬K, ¬C, ¬G) P(L | ¬K, ¬C, ¬G) P(¬K | ¬C, ¬G) P(¬C | ¬G) P(¬G) = P(H | ¬K) P(L | ¬C, ¬G) P(¬K | ¬C) P(¬C) P(¬G) = 0.020979

Cộng hết lại ta được: P(H, L) = 0.1092108 (1)

- P(L) = P(L, C, G) + P(L, C, ¬G) + P(L, ¬C, G) + P(L, ¬C, ¬G)

= P(L | C, G) P(C) P(G) + P(L | C, ¬G) P(C) P(¬G) + P(L | ¬C, G) P(¬C) P(G) + P(L | ¬C, ¬G) P(¬C) P(¬G) = 0.220512 (2)

(1)(2) => P(H | L) = 0.4953

c) Cần tính P(K, ¬G, H) (câu này đang thừa, thực ra không cần có L @@, nhưng kết quả vẫn đúng vì L không ảnh hưởng gì)

Ta có: P(K, ¬G, H) = P(K, ¬G, H, C, L) + P(K, ¬G, H, ¬C, L)

+ P(K, ¬G, H, C, ¬L) + P(K, ¬G, H, ¬C, ¬L)

Dùng luôn tính toán từ câu b (2, 4): P(K, ¬G, H, C, L) = 0.0127872 và P(K, ¬G, H, ¬C, L) = 0.055944

Tính thêm 2 cái cuối:

9. P(K, ¬G, H, C, ¬L) = P(H | ¬L, K, C, ¬G) P(¬L | K, C, ¬G) P(K | C, ¬G) P(C | ¬G) P(¬G) = P(H | K) P(¬L | C, ¬G) P(K | C) P(C) P(¬G) = 0.1150848

10. P(K, ¬G, H, ¬C, ¬L) = P(H | ¬L, K, ¬C, ¬G) P(¬L | K, ¬C, ¬G) P(K | ¬C, ¬G) P(¬C | ¬G) P(¬G) = P(H | K) P(¬L | ¬C, ¬G) P(K | ¬C) P(¬C) P(¬G) = 0.023976

=> P(K, ¬G, H) = 0.207792