Xác suất thống kê

1 Công thức xác suất

1.1 Kiến thức cơ bản

Định nghĩa 1 *$P(A)$ được gọi là xác suất của biến cố A*

$$P(A+B) = P(A \cup B) \tag{1}$$

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) \tag{2}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{3}$$

Nếu A B xung khắc:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{4}$$

Định nghĩa 2 *Xác suất biến cố đối của A là xác suất không xảy ra A*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{5}$$

Định nghĩa 3

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{6}$$

Định nghĩa 4 *Nếu A B không độc lập*

$$P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B) = P(A) + P(B) - P(A+B) \tag{7}$$

1.2 Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 5 *Xác suất của biến cố A khi biết biến cố B đã xảy ra*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{8}$$

Từ đó có công thức

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \tag{9}$$

Với 3 biến cố A B C

$$P(ABC) = P(A|BC)P(BC) = P(B|AC)P(AC) = P(C|AB)P(AB) \tag{10}$$

Định nghĩa 6 *Công thức xác suất toàn phần*

$$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F|A_i)P(A_i) \tag{11}$$

Hay ta có thể viết lại

$$P(F) = P(F|A_1)P(A_1) + P(F|A_2)P(A_2) + \cdots + P(F|A_n)P(A_n) \tag{12}$$

Định nghĩa 7 *Công thức Bayes*

$$P(A_i|F) = \frac{P(F|A_i)P(A_i)}{P(F)} \tag{13}$$

Mở rộng cho 3 biến cố A, B C độc lập:

$$P(A|BC) = \frac{P(BC|A)P(A)}{P(BC)} = \frac{P(B|A)P(C|A)P(A)}{P(B)P(C)} \tag{14}$$

Trường hợp $A, B_1 = B_2 = ... = B_n$*:*

$$P(A|B_1B_2...B_n) = \frac{P(B|A)^n P(A)}{P(B)^n} \tag{15}$$

Định nghĩa 8 *Chứng minh biến cố A B độc lập, ta cần chứng minh 1 trong 2 cách sau:*

1. $P(AB) = P(A)P(B)$
2. $P(A|B) = P(A)$ *hoặc* $P(B|A) = P(B)$

Lưu ý: $P(A+B) = P(A) + P(B)$ *không phải là điều kiện để A B độc lập*
phải tìm $P(AB)$ *từ* $P(AB) = P(A)P(B) - P(A+B)$*, rồi kiểm tra như trên*

1.3 Công thức Bernoulli

Định nghĩa 9 *Xác suất của biến cố A xảy ra k lần trong n lần thử là:*

$$P(A) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \tag{16}$$

2 Hàm phân phối xác suất, hàm mật độ xác suất

2.1 Hàm phân phối xác suất

Định nghĩa 10 *Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X có dạng*

X	$x_1, x_2, \cdots, x_n$
$P(X)$	$p_1, p_2, \cdots, p_n$

Định nghĩa 11 *Kỳ vọng:*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \tag{17}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n \tag{18}$$

Phương sai:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{19}$$

Độ lệch chuẩn:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} \tag{20}$$

2.2 Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa 12 *Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{21}$$

$$f(x) = \begin{cases} p_1, & x = x_1 \\ p_2, & x = x_2 \\ \vdots, & \vdots \\ p_n, & x = x_n \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{22}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{23}$$

$$P(X > a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \tag{24}$$

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{25}$$

Định nghĩa 13 *Cách tìm hằng số chuẩn hóa*

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx = CF(x)|_a^b = CF(b) - CF(a) \tag{26}$$

hoặc đơn giản hơn:

$$C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx} = \frac{1}{\int_a^b f(x)dx} \tag{27}$$

Định nghĩa 14 *Xác suất có điều kiện trong trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục:*

$$P(A|B) = \frac{\int_{A\cap B} f(x)dx}{\int_B f(x)dx} \tag{28}$$

VD 15 *Xác suất để $x \geq 4$ khi x đã ≥ 2*

$$P(x \geq 4 | x \geq 2) = \frac{P(x \geq 4 \cap x \geq 2)}{P(x \geq 2)} = \frac{\int_{x \geq 4 \cap x \geq 2} f(x)dx}{\int_{x \geq 2} f(x)dx} = \frac{\int_4^\infty f(x)dx}{\int_2^\infty f(x)dx} \tag{29}$$

Định nghĩa 16 *Kỳ vọng:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \tag{30}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \tag{31}$$

Phương sai:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{32}$$

Độ lệch chuẩn:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} \tag{33}$$

Định nghĩa 17 *Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{34}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{35}$$

Tính trực tiếp xác suất từ hàm phân phối xác suất:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{36}$$

$$P(X > a) = 1 - F(a) \tag{37}$$

$$P(X < a) = F(a) \tag{38}$$

Định nghĩa 18 *Định lý Chebysev: cho X là biến ngẫu nhiên có kỳ vọng $E(X) = \mu$ và phương sai $Var(X) = \sigma^2$. Khi đó:*

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{39}$$

$$P(\mu - \epsilon \leq X \leq \mu + \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{40}$$

Định nghĩa 19 *Trung vị: giá trị biến ngẫu nhiên X sao cho $P(X \leq x) = 0.5$*

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.5 \tag{41}$$

3 Các phân phối xác suất thường gặp

3.1 Phân phối nhị thức

Định nghĩa 20 *Phân phối nhị thức: là phân phối của một biến ngẫu nhiên mà nó là số lần thành công trong một dãy n phép thử Bernoulli độc lập với nhau. Ký hiệu $X \sim B(n,p)$, khi đó: n là số lần thử, p là xác suất thành công của mỗi lần thử.*

$$f(x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{42}$$

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{x} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, & x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{43}$$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \tag{44}$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \tag{45}$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \tag{46}$$

$$E(X) = np \tag{47}$$

$$Var(X) = np(1-p) \tag{48}$$

Định nghĩa 21 *Chuyển từ phân phối nhị thức sang phân phối Poisson:*

$$B(n,p) \sim P(\lambda), \text{ với } \lambda = np \tag{49}$$

Điều kiện: $n \geq 30$ và $np \leq 5$

Định nghĩa 22 *Chuyển từ phân phối nhị thức sang phân phối chuẩn:*

$$B(n,p) \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ với } \mu = np, \sigma^2 = np(1-p) \tag{50}$$

Điều kiện: $n \geq 30$ và $np \geq 5$ và n(1-p) ≥ 5

3.2 Phân phối siêu bội

Định nghĩa 23 *Xét tập N trong đó có M phần tử có tính chất P và N-M phần tử không có tính chất P. Chọn k phần tử khác nhau không phân biệt từ N phần tử. Gọi X là số phần tử có tính chất P trong k phần tử đã chọn. X có phân phối siêu bội với 3 tham số N, M, n. Ký hiệu $X \sim H(N, M, n)$, khi đó:*

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \tag{51}$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} \tag{52}$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} \tag{53}$$

$$E(X) = \frac{Mn}{N} \tag{54}$$

$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) \tag{55}$$

Định nghĩa 24 *Chuyển từ phân phối siêu bội sang phân phối nhị thức:*

$$H(N, M, n) \sim B(n, \frac{M}{N}) \tag{56}$$

3.3 Phân phối Poisson

Định nghĩa 25 *Phân phối Poisson: là phân phối của một biến ngẫu nhiên mà nó là số lần xảy ra của một sự kiện trong một khoảng thời gian hoặc không gian nhất định. Ký hiệu $X \sim P(\lambda)$, với λ là trung bình số lần xuất hiện biến cố, khi đó:*

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{57}$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \tag{58}$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \tag{59}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i=a}^{b} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \tag{60}$$

$$E(X) = \lambda \tag{61}$$

$$Var(X) = \lambda \tag{62}$$

Định nghĩa 26 *Chuyển từ phân phối poisson sang phân phối chuẩn:*

$$P(\lambda) \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ với } \mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda \tag{63}$$

3.4 Phân phối chuẩn

Định nghĩa 27 *Phân phối chuẩn: là phân phối của một biến ngẫu nhiên mà nó là tổng của nhiều biến ngẫu nhiên độc lập với nhau. Ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, khi đó:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{64}$$

$$E(X) = \mu \tag{65}$$

$$Var(X) = \sigma^2 \tag{66}$$

Định nghĩa 28 *Phân phối chuẩn tắc: là phân phối chuẩn với $\mu = 0, \sigma = 1$ Ký hiệu $X \sim N(0,1)$, khi đó:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{67}$$

Định nghĩa 29 *Đổi biến từ phân phối chuẩn sang phân phối chuẩn tắc:*

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \to Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{68}$$

Khi đó:

$$P(X \leq b) = P(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) \tag{69}$$

$$P(X \geq a) = 1 - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}) \tag{70}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}) \tag{71}$$

Cách tính $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{72}$$

Do $\frac{1}{2}$ bị triệt tiêu, nên:

$$\Phi(B) - \Phi(A) = \int_{0}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{73}$$

Hoặc xem bảng giá trị 1 và 2

Định nghĩa 30 *Dùng hiệu chỉnh liên tục để tính xác xuất $P(X = a)$:*

$$P(X = a) \approx P(a - \frac{1}{2} < X < a + \frac{1}{2}) \approx \Phi(\frac{a + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}) \tag{74}$$

Dùng hiệu chỉnh rời rạc để tính xác xuất $P(a \leq X \leq b)$:

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} < X < b + \frac{1}{2}) \approx \Phi(\frac{b + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}) \tag{75}$$

Định nghĩa 31 *Chuyển từ phân phối chuẩn sang phân phối nhị thức:*

$$N(\mu, \sigma^2) \sim B(n, p) \text{ với } p = \frac{\mu}{\sigma^2}, n = \frac{\sigma^2}{p(1-p)} \tag{76}$$

4 Vector ngẫu nhiên

4.1 Vector ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 32 *Để biến cố X, Y độc lập thì:*

$$P(x, y) = P_X(x) P_Y(y), \forall x, y \tag{77}$$

p(x, y)	y = 0	y = 1	y = 2	p(x)
x = 0	0.1	0.2	0.1	0.4
x = 1	0.1	0.2	0.1	0.4
x = 2	0.1	0.1	0.1	0.3
p(y)	0.3	0.5	0.3	1

Bảng 1: Bảng phân phối xác suất đồng thời

Định nghĩa 33 *Bảng phân phối xác suất đồng thời:*

Định nghĩa 34 *Xác suất có điều kiện:*

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \tag{78}$$

Kỳ vọng có điều kiện:

$$E(X|Y = y) = \sum_x xP(X = x|Y = y) \tag{79}$$

4.2 Vector ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 35 *Có dạng:*

$$f(x, y) = \begin{cases} ... & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{80}$$

Định nghĩa 36 *Hàm mật độ thành phần của X:*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \tag{81}$$

Hàm mật độ thành phần của Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \tag{82}$$

Định nghĩa 37 *Hàm mật độ xác suất có điều kiện:*

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \tag{83}$$

Kỳ vọng có điều kiện:

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx \tag{84}$$

Định nghĩa 38 *Cách tính xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục:*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \tag{85}$$

$$P(a \leq X \leq b|Y = y) = \int_a^b f(x|y)dx \tag{86}$$

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx \tag{87}$$

5 Thống kê

5.1 Kiến thức cơ bản

Định nghĩa 39 *Định nghĩa:*
α *là mức ý nghĩa.*
$\gamma = 1 - \alpha$ *là độ tin cậy.*
ϵ *là sai số.*
$\bar{x}$ *là trung bình mẫu.*
$f = \frac{m}{n}$ *là tần suất.*
μ *là trung bình của quần thể.*
σ *là độ lệch chuẩn của quần thể.*
σ_{n-1} *là độ lệch chuẩn của mẫu.*
n *là số lượng mẫu.*
m *là số lượng mẫu có tính chất cần chứng minh.*
$z_{\alpha/2}$, z_α *: phân phối chuẩn.*
$t_{\alpha/2}$, t_α *: phân phối t có n - 1 bậc tự do.*

5.2 Tìm khoảng ước lượng cho trung bình quần thể khi σ đã biết

Định nghĩa 40 *Bước 1: tìm* $t_{\alpha/2}$ *bằng bảng phân phối chuẩn.*
Bước 2: tính

$$\epsilon = t_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{88}$$

nếu tìm khoảng tối thiểu, tối đa thì (áp dụng chung):

$$\epsilon = t_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{89}$$

Bước 3: tính khoảng ước lượng:

$$\mu \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon) \tag{90}$$

Nếu tìm khoảng tối thiểu, tối đa thì: kết luận phía còn lại ∞

5.3 Tìm khoảng ước lượng cho trung bình quần thể khi σ chưa biết

Định nghĩa 41 *Tương tự, nhưng thay* σ *bằng* σ_{n-1}

$$\epsilon = t_{\alpha/2}\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \tag{91}$$

Khoảng ước lượng:

$$\mu \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon) \tag{92}$$

Lưu ý: dùng phân phối t nếu $n < 30$*, dùng phân phối chuẩn nếu* $n \geq 30$.

5.4 Tìm khoảng tin cậy

Định nghĩa 42 *Tương tự, nhưng thay $\bar{x}$ bằng $f = \frac{m}{n}$, dùng phân phối chuẩn.*

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \tag{93}$$

Khoảng ước lượng:

$$p \in (f - \epsilon, f + \epsilon) \tag{94}$$

Công thức xác định cỡ mẫu:

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 f(1-f)}{\epsilon^2} \tag{95}$$

Nếu chưa biết f:

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{4\epsilon^2} \tag{96}$$

6 Kiểm định giả thuyết

6.1 So sánh tỉ lệ tổng thể với tỉ lệ mẫu

Định nghĩa 43

$$H_0 : p = p_0 \tag{97}$$

$$H_1 : p \neq p_0 \tag{98}$$

Bước 1: tìm $f = \frac{m}{n}$, $t_{\alpha/2}$ bằng bảng phân phối chuẩn.
Bước 2: tính

$$t_0 = \frac{|f - p_0|\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \tag{99}$$

Bước 4: so sánh t_0 với $t_{\alpha/2}$:

- *Nếu $t_0 \leq t_{\alpha/2}$ thì không bác bỏ H_0*
- *Nếu $t_0 > t_{\alpha/2}$ thì bác bỏ H_0*

6.2 Kiểm tra một phía

Định nghĩa 44

$$H_0 : p = p_0 \tag{100}$$

$$H_1 : p > p_0 \tag{101}$$

Bước 1: tìm $f = \frac{m}{n}$, t_α bằng bảng phân phối chuẩn.
Bước 2: tính

$$t_0 = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \tag{102}$$

Bước 4: so sánh t_0 với t_α:

- *Nếu $t_0 \leq t_\alpha$ thì không bác bỏ H_0*

- *Nếu $t_0 > t_\alpha$ thì bác bỏ H_0*

Định nghĩa 45 *Tương tự:*

$$H_0 : p = p_0 \tag{103}$$

$$H_1 : p < p_0 \tag{104}$$

Bước 1: tìm $f = \frac{m}{n}$, $-t_\alpha$ bằng bảng phân phối chuẩn.
Bước 2: tính

$$t_0 = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \tag{105}$$

Bước 4: so sánh t_0 với $-t_\alpha$:

- *Nếu $t_0 \geq -t_\alpha$ thì không bác bỏ H_0*
- *Nếu $t_0 < -t_\alpha$ thì bác bỏ H_0*

6.3 Đối với trung bình mẫu

Định nghĩa 46 *Tương tự, nhưng thay f bằng $\bar{x}$, p_0 bằng μ_0, p bằng μ.*
Nếu σ đã biết, dùng phân phối chuẩn.
Nếu σ chưa biết, tính σ_{n-1} từ mẫu. Khi đó, nếu $n \geq 30$, dùng phân phối chuẩn. Nếu $n < 30$, dùng phân phối Student.

$$t_0 = \frac{|\bar{x} - \mu_0|\sqrt{n}}{\sigma} \tag{106}$$

Lưu ý: cách dùng α, $\alpha/2$, $-t_\alpha$,..., dấu abs tương tự như trên.

7 Các dạng toán thường gặp

7.1 Dàn ý giải 1 bài toán bất kỳ

1. Xác định loại bài toán: nếu là xác suất, thì là xác suất độc lập hay xác suất có điều kiện? nếu là phân phối, thì phân phối gì?
2. Xác định yêu cầu bài toán: bài toán hỏi gì? công thức cuối cùng cần tìm là gì?
3. Phân tích thành phần bài toán: gọi tên các biến cố bằng ký hiệu, tính xác suất các biến cố đó
4. Tìm công thức cần tính

7.2 Dấu hiệu của các phân phối

Phân phối nhị thức: số lượng + xác suất
Phân phối Poisson: số lượng + thời gian
Phân phối chuẩn: kỳ vọng (trung bình) + độ lệch chuẩn

7.3 Một số ví dụ

Ví dụ: Trong một cửa hiệu kinh doanh điện thoại di động, tỉ lệ điện thoại di động của hãng Nokia, Samsung và Iphone lần lượt là 20%, 50% và 30%. Tỉ lệ bị trục trặc (về cài đặt) trong thời gian bảo hành của các loại diện thoại di động của hãng Nokia, Samsung và Iphone tương ứng là 6%, 8%, 7%. Giả sử một khách hàng mua ngẫu nhiên một điện thoại di động và điện thoại đó không bị trục trặc trong suốt thời gian bảo hành. Tính xác suất để điện thoại đó của hãng Samsung.

1. Xác định loại bài toán: Bài toán thuộc loại xác suất có điều kiện.

2. Xác định yêu cầu bài toán: Tìm xác suất để điện thoại đó của hãng Samsung mà không bị trục trặc trong suốt thời gian bảo hành.

3. Phân tích thành phần bài toán:

    Gọi X là biến cố điện thoại trục trặc trong suốt thời gian bảo hành.

    Gọi N, S, I lần lượt là biến cố điện thoại của hãng Nokia, Samsung, Iphone.
   $P(N) = 0.2$, $P(S) = 0.5$, $P(I) = 0.3$.
   $P(X|N) = 0.06$, $P(X|S) = 0.08$, $P(X|I) = 0.07$.

4. Tìm xác suất cần tính:
   $P(X) = P(X|N)P(N) + P(X|S)P(S) + P(X|I)P(I) = 0.06.0.2 + 0.08.0.5 + 0.07.0.3 = 0.073$
   $P(S|\bar{X}) = \frac{P(S)P(\bar{X}|S)}{1-P(X)} = \frac{0.5.0.92}{1-0.073} = 0.496$

Ví dụ: Một nhà máy dệt có 1000 ống sợi. Xác suất để trong 1 giờ máy hoạt động có 1 ống sợi bị đứt là 0.002. Tính xác suất để trong 1 giờ máy hoạt động có không quá 4 ống sợi bị đứt.

1. Xác định loại bài toán: Bài toán có thể quy về phân phối nhị thức

2. Xác định yêu cầu bài toán: Tính xác suất để trong 1 giờ máy hoạt động có không quá 4 ống sợi bị đứt.

3. Phân tích thành phần bài toán:

    Gọi X là số ống sợi bị đứt trong 1 giờ máy hoạt động.
   $X \sim B(n, p), n = 1000, p = 0.002$

4. Tìm xác suất cần tính:
   $P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 0.9475$
   Hoặc tính xấp xỉ bằng phân phối Poisson:
   $X \sim P(\lambda), \lambda = np = 2$
   $P(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = 0.9475$

Ví dụ: Thời gian tải một tập tin có dung lượng dưới 20MB từ một website được mô hình hóa bởi biến ngẫu nhiên X (tính theo phút) có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} C(5x^3 - x^4) & x \in [0, 5] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{107}$$

a. Xác định C.
b. Tính thời gian trung bình để tải một tập tin có dung lượng dưới 20MB từ website đó.
c. Giả sử bạn thấy tập tin đó vẫn chưa tải xong sau khi bắt đầu tải được 2 phút. Tính xác suất phải mất hơn 2 phút nữa mới tải xong tập tin.

1. Xác định loại bài toán: Bài toán liên quan đến hàm mật độ xác suất.

2. a. Ta có:
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^5 C(5x^3 - x^4)dx = 1$
   $C = \frac{1}{\int_0^5 5x^3 - x^4 dx} = \frac{4}{625}$
   b. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^5 \frac{4}{625}x(5x^3 - x^4)dx = \frac{10}{3}$
   c. $P(X > 4|X > 2) = \frac{P(X>4)}{P(X>2)} = \frac{\int_4^5 \frac{4}{625}(5x^3-x^4)dx}{\int_2^5 \frac{4}{625}(5x^3-x^4)dx} = 0.2875$

Ví dụ: Giả sử nồng độ chloride trong máu (mmol/L) có phân phối chuẩn với trung bình là 104 và độ lệch chuẩn là 5. a. Tính tỉ lệ người có nồng độ chloride trong máu nhiều hơn 105. b. Chọn ngẫu nhiên 1000 người. Tính xác suất có từ 200 đến 300 người có nồng độ chloride trong máu nhiều hơn 105.

1. Xác định loại bài toán: Bài toán có thể quy về phân phối chuẩn.
   Gọi X là nồng độ chloride trong máu.
   $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu = 104, \sigma = 5$

2. a. $P(X > 105) = 1 - \Phi(\frac{105-104}{5}) = 0.4207$
   b. Gọi Y là số người có nồng độ chloride trong máu nhiều hơn 105 trong 1000 người
   $Y \sim B(n, p), n = 1000, p = 0.4207$
   $Y \sim N(\mu, \sigma^2), \mu = np = 420.7, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 15.61$
   $P(200 \leq Y \leq 300) = \Phi(\frac{300-420.7}{15.61}) - \Phi(\frac{200-420.7}{15.61}) \approx 0$

8 Bảng giá trị

z	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	-0.00
-(3.9+)	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.8	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.7	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.6	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
-3.3	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0005	.0005	.0005
-3.2	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007
-3.1	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008	.0009	.0009	.0009	.0010
-3.0	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0012	.0012	.0013	.0013	.0013
-2.9	.0014	.0014	.0015	.0015	.0016	.0016	.0017	.0018	.0018	.0019
-2.8	.0019	.0020	.0021	.0021	.0022	.0023	.0023	.0024	.0025	.0026
-2.7	.0026	.0027	.0028	.0029	.0030	.0031	.0032	.0033	.0034	.0035
-2.6	.0036	.0037	.0038	.0039	.0040	.0041	.0043	.0044	.0045	.0047
-2.5	.0048	.0049	.0051	.0052	.0054	.0055	.0057	.0059	.0060	.0062
-2.4	.0064	.0066	.0068	.0069	.0071	.0073	.0075	.0078	.0080	.0082
-2.3	.0084	.0087	.0089	.0091	.0094	.0096	.0099	.0102	.0104	.0107
-2.2	.0110	.0113	.0116	.0119	.0122	.0125	.0129	.0132	.0136	.0139
-2.1	.0143	.0146	.0150	.0154	.0158	.0162	.0166	.0170	.0174	.0179
-2.0	.0183	.0188	.0192	.0197	.0202	.0207	.0212	.0217	.0222	.0228
-1.9	.0233	.0239	.0244	.0250	.0256	.0262	.0268	.0274	.0281	.0287
-1.8	.0294	.0301	.0307	.0314	.0322	.0329	.0336	.0344	.0351	.0359
-1.7	.0367	.0375	.0384	.0392	.0401	.0409	.0418	.0427	.0436	.0446
-1.6	.0455	.0465	.0475	.0485	.0495	.0505	.0516	.0526	.0537	.0548
-1.5	.0559	.0571	.0582	.0594	.0606	.0618	.0630	.0643	.0655	.0668
-1.4	.0681	.0694	.0708	.0721	.0735	.0749	.0764	.0778	.0793	.0808
-1.3	.0823	.0838	.0853	.0869	.0885	.0901	.0918	.0934	.0951	.0968
-1.2	.0985	.1003	.1020	.1038	.1056	.1075	.1093	.1112	.1131	.1151
-1.1	.1170	.1190	.1210	.1230	.1251	.1271	.1292	.1314	.1335	.1357
-1.0	.1379	.1401	.1423	.1446	.1469	.1492	.1515	.1539	.1562	.1587
-0.9	.1611	.1635	.1660	.1685	.1711	.1736	.1762	.1788	.1814	.1841
-0.8	.1867	.1894	.1922	.1949	.1977	.2005	.2033	.2061	.2090	.2119
-0.7	.2148	.2177	.2206	.2236	.2266	.2296	.2327	.2358	.2389	.2420
-0.6	.2451	.2483	.2514	.2546	.2578	.2611	.2643	.2676	.2709	.2743
-0.5	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981	.3015	.3050	.3085
-0.4	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336	.3372	.3409	.3446
-0.3	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707	.3745	.3783	.3821
-0.2	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090	.4129	.4168	.4207
-0.1	.4247	.4286	.4325	.4364	.4404	.4443	.4483	.4522	.4562	.4602
-0.0	.4641	.4681	.4721	.4761	.4801	.4840	.4880	.4920	.4960	.5000

Hình 1: Bảng phân phối chuẩn tắc 1

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9+	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Hình 2: Bảng phân phối chuẩn tắc 2