CHƯƠNG 2

# CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

Giảng viên: Ths. Vũ Minh Yến
Bộ môn: Công nghệ đa phương tiện
SĐT: 0983087636

## Tài liệu tham khảo

[1] Edward Angel, Dave Shreiner. *Interactive Computer Graphics*. Addison-Wesley, 6th Edition, 2012

[2] Peter Shirley, Steve Marschner. *Fundamentals Of Computer Graphics*. A K Peters/CRC, 3 Edition, 2009

[3] Brian Curless. *Tập bài giảng môn Đồ họa máy tính của trường đại học Washington*, 2017.

[4] Dave Shreiner, Graham Sellers, John M. Kessenich, Bill M. Licea-Kane. *OpenGL Programming Guide*. Addison-Wesley, 8th Edition, 2013 ( Redbook)

[5] Vũ Minh Yến, Vũ Đức Huy, Nguyễn Phương Nga. *Giáo trình ĐHMT trường ĐHCNHN*. NBX Khoa học Kỹ thuật, 2015.

[6] Foley,Van Dam. *Computer Graphics Principles And Practice In C*. Ed Addison Wesley, 2Nd Edition, 1995.

# Nội dung

2.1. Biểu diễn điểm, vector
2.2. Các phép biến đổi Affine
2.3. Dựng mô hình phân cấp
2.4. Các phép biến đổi trong OpenGL

# 2.1. Biểu diễn điểm, vector (1)

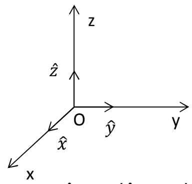
- Biểu diễn điểm
  - Không gian Descartes 2D: P=(x, y)
  - Không gian Descartes 3D: P=(x, y, z)
- Biểu diễn điểm bằng ma trận:
  - Ma trận cột: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
  - Ma trận hàng: $[x \quad y], [x \quad y \quad z]$

<u>Lưu ý</u>: Bài giảng sẽ biểu diễn điểm theo ma trận cột.

# 2.1. Biểu diễn điểm, vector (2)

- Các vector đơn vị tương ứng các trục Ox, Oy, Oz: $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ với

$\hat{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\quad \hat{y}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\quad \hat{z}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

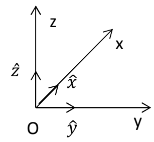



Hệ tọa độ tay phải

- Vector $v = \vec{v} = v =$(x, y, z) được biểu diễn:

$\vec{v}$ = v = x. $\hat{x}$ + y. $\hat{y}$ + z. $\hat{z}$

$$= x.\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + y.\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z.\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

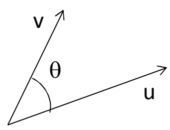



Hệ tọa độ tay trái

- Hệ tọa độ tay phải: Chiều dương của góc quay tuân theo quy tắc nắm bàn tay phải
- Hệ tọa độ tay trái: Chiều dương của góc quay tuân theo quy tắc nắm bàn tay trái

# 2.1. Biểu diễn điểm, vector (3)

Cho u= $\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}$




- Độ dài vector $v$

$\|v\|=\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$; $\qquad \hat{v}=\frac{v}{\|v\|}$ và $\|\hat{v}\|$ = 1

u.v = $u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ $\qquad$ u.v = $u^T$.v = $\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}$

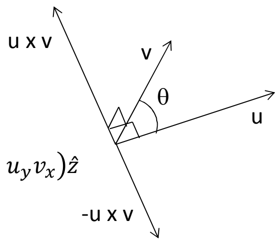
- Tích vô hướng

u.v = v.u
v.v = $\|v\|^2$
u.v = $\|u\|\|v\| \cos\theta$
u.v = 0 ($\|u\|\neq 0, \|v\|\neq 0$) $\Leftrightarrow$ u $\perp$ v
$\hat{u}.\hat{v} = \cos\theta$

# 2.1. Biểu diễn điểm, vector (4)

- Tích hữu hướng
- u x v = $\begin{Vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{Vmatrix}$

  $=(u_y v_z - u_z v_y)\hat{x} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{y} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{z}$




- u x v = $\hat{n}\ \|u\|\|v\| sin\theta$

  $\hat{n}$ - vector đơn vị ⊥ với u và v

- $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sin\theta$
- u x v = - v x u
- (u x v). u= 0; (u x v). v = 0
- Lưu ý:
  - Tích hữu hướng không có phép giao hoán
  - Hướng của vector kết quả tuân theo quy tắc nắm bàn tay phải.

# 2.1. Biểu diễn điểm, vector (5)

- Hệ tọa độ thuần nhất:
  - Descartes 2D: P(x, y) → trong hệ tọa độ thuần nhất tương ứng P(w.x, w.y, w) với w≠0
  - Descartes 3D: P(x, y, z) → trong hệ tọa độ thuần nhất tương ứng P(w.x, w.y, w.z, w) với w≠0

  Trong phạm vi bài giảng chúng ta xét w=1, suy ra:

2D: P(x, y, 1) ➔ P= $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

3D: P(x, y, z, 1) ➔ P= $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

# 2.2. Các phép biến đổi affine

2.2.1. Khái niệm

2.2.2. Phép biến đổi 2D

2.2.3. Phép biến đổi 3D

# 2.2.1 Khái niệm phép biến đổi affine

Theo [1]:

- Phép biến đổi: là một hàm ánh xạ một điểm hay một vector thành một điểm hoặc một vector khác.
- Phép biến đổi affine là phép biến đổi tuyến tính ➔ thỏa mãn:

$$f(\alpha p+\beta q)=\alpha f(p)+\beta f(q)$$

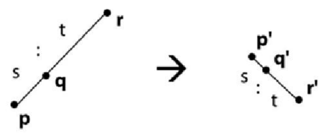
Trong đó: p, q là điểm hoặc vector; α, β là các hằng số.

Theo [2]:

- Phép biến đổi affine: là phép biến đổi tuyến tính và phép tịnh tiến.

# 2.2.1 Khái niệm phép biến đổi affine

- Các tính chất của các phép biến đổi affine
  – Bảo toàn tính thẳng hàng
  – Bảo toàn tính song song
  – Bảo toàn tỉ lệ khoảng cách
    - Biến trung điểm thành trung điểm
    - …



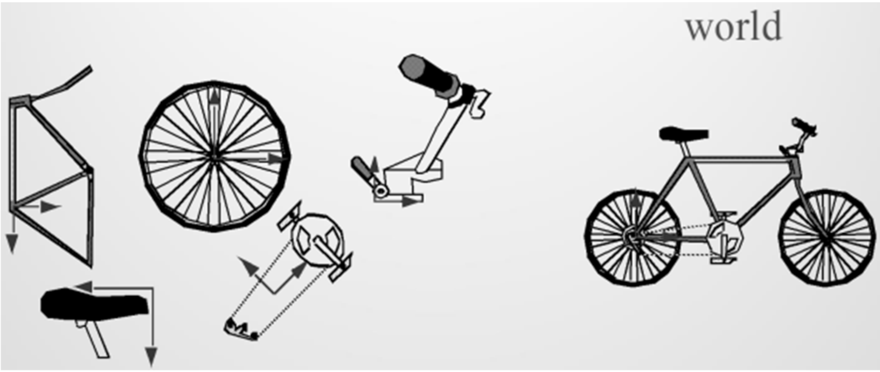

$$\text{ratio} = \frac{\|\mathbf{pq}\|}{\|\mathbf{qr}\|} = \frac{s}{t} = \frac{\|\mathbf{p'q'}\|}{\|\mathbf{q'r'}\|}$$

# 2.2.1 Khái niệm phép biến đổi affine

- Phép biến đổi affine gồm:
  - Phép tịnh tiến
  - Phép biến đổi tỉ lệ
  - Phép quay tại gốc tọa độ
  - Phép đối xứng
  - Phép biến đổi shear
  - Phép biến đổi kết hợp của các phép biến đổi trên

# 2.2.1 Khái niệm phép biến đổi affine

- Ví dụ




# 2.2.2 Phép biến đổi 2D

a) Phép biến đổi 2D khái quát

- Xét trong hệ tọa độ Descartes
  - P'(x', y') là ảnh của P(x, y) qua phép biến đổi T.
  - Ma trận M của phép biến đổi T có dạng:

    M=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

    Ta có: P' = M. P

    $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

    $\rightarrow \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

# 2.2.2 Phép biến đổi 2D
## a) Phép biến đổi 2D khái quát

- Hạn chế của ma trận 2x2
  - Xét phép tịnh tiến:

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

➔ Ma trận M=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ không thể biểu diễn được phép tịnh tiến

<u>Kết luận</u>

- Ma trận 2 x 2 có thể biểu diễn được:
  - Phép biến đổi tỉ lệ
  - Phép quay
  - Phép đối xứng
  - Phép biến đổi shear
- Không biểu diễn được phép tịnh tiến.

➔ Biểu diễn điểm và các phép biến đổi trong hệ tọa độ thuần nhất.

# 2.2.2 Phép biến đổi 2D
## a) Phép biến đổi 2D khái quát

- Xét trong hệ tọa độ thuần nhất:

  P=$[x \quad y \quad 1]^T$
  - Biểu diễn phép biến đổi 2D bằng ma trận:

    M=$\begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Ta có P' là ảnh của P qua phép biến đổi ma trận M:

    **P' = M x P**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + t_x \\ cx + dy + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Công thức biến đổi: $\begin{cases} x' = ax + by + t_x \\ y' = cx + dy + t_y \end{cases}$

# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D
## b) Phép bất biến

- Biến điểm P thành P' và P'≡ P
- Ma trận biến đổi:

$$M = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

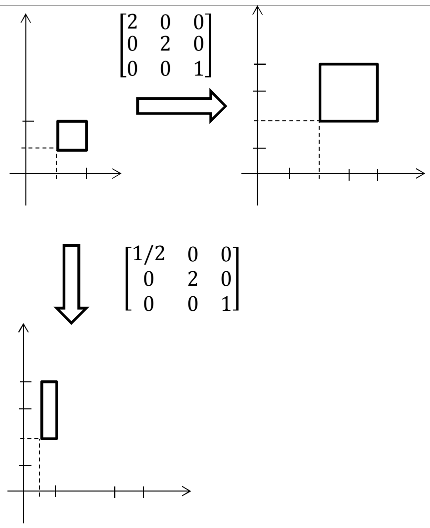
# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (3)
## c) Phép biến đổi tỉ lệ

- Ta có ma trận biến đổi tỉ lệ:

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Công thức biến đổi:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = dy \end{cases}$$

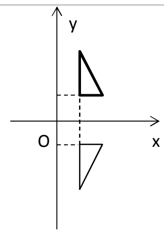


# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (4)

## d) Phép đối xứng

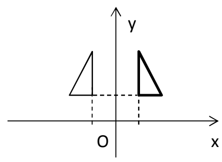
- Đối xứng qua trục Ox:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



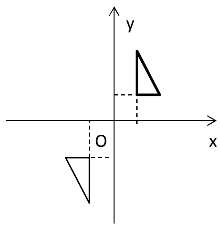

- Đối xứng qua trục Oy:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




- Đối xứng qua tâm O:

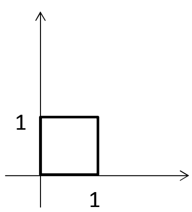
$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

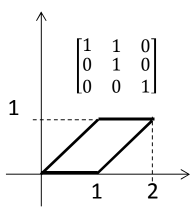


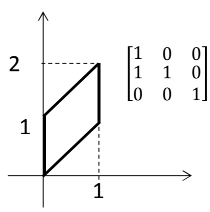

# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (5)

## e) Phép biến đổi Shear

- Biến dạng theo trục x: $M = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Biến dạng theo trục y: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



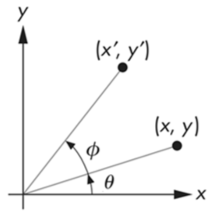



# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (6)
## f) Phép quay tâm O

- P(x, y) qua phép quay T tại tâm O góc quay $\phi$
- Ma trận biến đổi:

$$\begin{bmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




- Công thức biến đổi

$$\begin{cases} x' = x\cos\phi - y\sin\phi \\ y' = x\sin\phi + y\cos\phi \end{cases}$$

# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (6)
## f) Phép quay tâm O

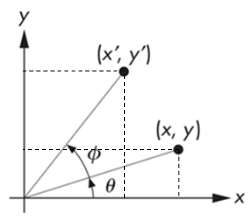
- Cách tính công thức biến đổi:
  - Ta có:

P: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

P’: $\begin{cases} x' = r\cos(\theta+\varphi) \\ y' = r\sin(\theta+\varphi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi \\ y' = r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi \end{cases}$

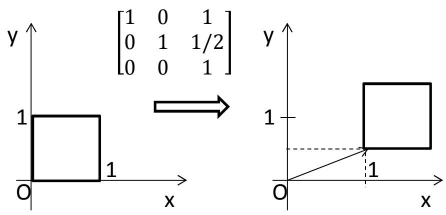
$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$



# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (6)
## g) Phép tịnh tiến

- Phép tịnh tiến vector *v($t_x$, $t_y$)*
- Ma trận biến đổi

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & t_x\\0 & 1 & t_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$




- Công thức biến đổi

$$\begin{cases}x' = x + t_x\\y' = y + t_y\end{cases}$$

# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (6)
## h) Phép biến đổi kết hợp

$$P(x, y) \xrightarrow{T_1} P_1(x_1, y_1) \xrightarrow{T_2} P_2(x_2, y_2)$$

$$\Leftrightarrow\ P(x, y) \xrightarrow{T} P_2(x_2, y_2)$$

$\Rightarrow$ T là phép biến đổi kết hợp của $T_1$ và $T_2$

Ta có: $\mathbf{M = M_2 \times M_1}$ - M, $M_1$, $M_2$ là ma trận biến đổi của T, $T_1$, $T_2$

<u>Chứng minh:</u>

$P_1 = M_1 . P$

$P_2 = M_2 . P_1$ mà $P_2 = M . P$ $\Rightarrow$ $M_2 . M_1 . P = M . P$ $\Rightarrow$ $\mathbf{M = M_2 . M_1}$

# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (6)
## h) Phép biến đổi kết hợp

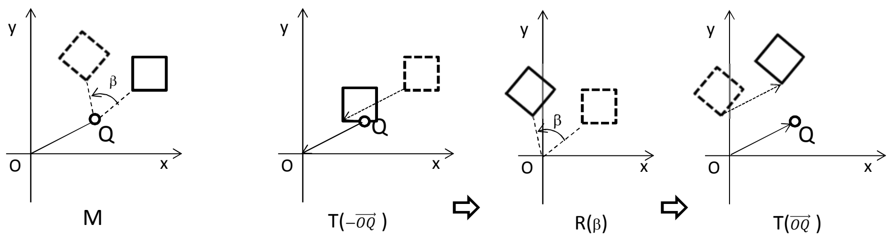
**Ví dụ:** Phép quay T quanh một điểm bất kỳ Q(x0, y0) góc quay $\beta$

- Phân tích (phân rã) T thành các phép biến đổi cơ bản:

$$P(x, y) \xrightarrow{T(-\overrightarrow{OQ})} P_1(x_1, y_1) \xrightarrow{R(\beta)} P_2(x_2, y_2) \xrightarrow{T(\overrightarrow{OQ})} P_3(x_3, y_3)$$

1. $T(-\overrightarrow{OQ})$: Tịnh tiến Q về gốc tọa độ O
2. $R(\beta)$: Quay tại O góc quay $\beta$
3. $T(\overrightarrow{OQ})$: Tịnh tiến ngược trở lại

➔ $M=T(\overrightarrow{OQ}) . R(\beta) . T(-\overrightarrow{OQ})$

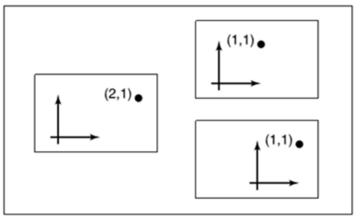



# 2.2.2 Các phép biến đổi 2D (7)
## i) Phép biến đổi hệ trục tọa độ

- Phép biến đổi hệ trục thì bằng nghịch đảo phép biến đổi đối tượng

  $M_{\text{hệ trục}} = M^{-1}{}_{\text{đối tượng}}$

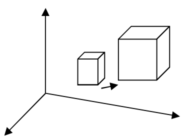
  trong đó: $M. M^{-1}= I$
- Ma trận nghịch đảo có thể tính theo đại số tuyến tính hoặc tính theo các phép biến đổi hình học.
  - $T^{-1}(x, y) = T(-x, -y)$
  - $R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha)$
  - $S^{-1}(s_x,s_y) = S(1/s_x, 1/s_y)$
- Ví dụ:
  - Tịnh tiến điểm P(2,1) với vector (-1, 0) → P'(1, 1)
  - Tịnh tiến hệ trục tọa độ với vector (1, 0) → P=P'(1, 1)



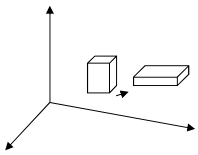
# 2.2.3 Các phép biến đổi 3D –
## a) Phép biến đổi tỉ lệ

- Tương tự như phép biến đổi 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



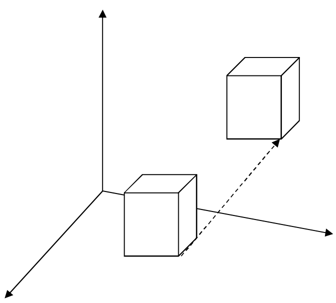
*Phép biến đổi tỉ lệ đồng dạng*



*Phép biến đổi tỉ lệ biến dạng*

# 2.2.3. Các phép biến đổi 3D –
## b) Phép tịnh tiến

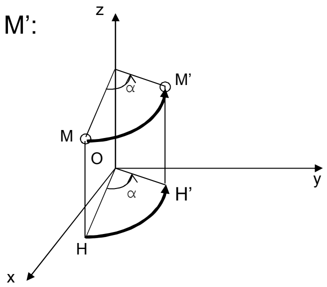
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



# 2.2.3 Các phép biến đổi 3D –

## c) Phép quay – Phép quay quanh trục Oz

- Điểm M quay quanh trục Oz góc quay $\alpha$ thành M':
  $$M(x,y,z) \xrightarrow{R_z(\alpha)} M'(x',y',z')$$
- Công thức biến đổi:
  $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' = z \end{cases}$$
- Ma trận biến đổi:
- $R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

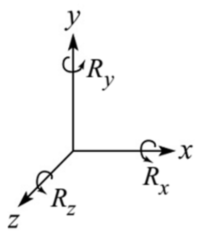



- Lưu ý:
  - Chiều dương góc quay theo quy tắc vặn đinh ốc, hoặc nắm bàn tay phải.
  - Chiều dương từ Ox sang Oy

# 2.2.3 Các phép biến đổi 3D –

## c) Phép quay

- $R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$




Hướng dương của góc quay sử dụng quy tắc bàn tay phải.

- Một phép quay khái quát quanh một trục có hướng $\hat{v}$ và góc quay $\alpha$ là tích của các ma trận quay theo trục trên.

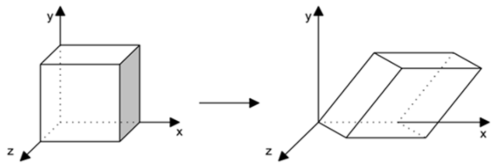
? Tính ma trận của phép quay quanh trục có hướng $\hat{v}(v_x, v_y, v_z)$ và góc quay $\alpha$

# 2.2.3 Các phép biến đổi 3D –
## d) Phép biến đổi shear

- Biến dạng trên các trục Ox, Oy, Oz

$$Sh_{Ox} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Sh_{Oy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Sh_{Oz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ví dụ: $Sh_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$




*Phép biến dạng – shear theo ma trận $Sh_1$*

# Tổng kết

- Biểu diễn điểm và các phép biến đổi
- Cách tính toán độ dài, phép nhân vô hướng, hữu hướng của các vector và ý nghĩa hình học của chúng.
- Biểu diễn ma trận biến đổi 2x2 và 3x3 trong 2D
- Hệ tọa độ thuần nhất và các phép biến đổi affine
- Sự liên kết giữa các phép biến đổi – phép biến đổi kết hợp.
- Các tính chất toán học của các phép biến đổi affine.