GCDLCM Solution:

Không mất tổng quát ta luôn có thể viết hai số P, Q dưới dạng:

$$P = a_1^{x_1} \times a_2^{x_2} \times \dots \times a_r^{x_r}; \quad Q = a_1^{y_1} \times a_2^{y_2} \times \dots \times a_r^{y_r}$$

Trong đó $a_1, a_2, \dots, a_r$ là các số nguyên tố trong đoạn $[1, M = \max(p_i, q_j : i = 1 \div m, j = 1 \div n)]$
(Để làm điều này có thể sử dụng sàng số nguyên tố và chỉ xét a với $E[a] == a$.
+TH1): Nếu tồn tại chỉ số i mà $x_i > y_i$ thì đáp số luôn là 0 (vì Q không chia hết cho P)
+TH2): Trường hợp còn lại
Số cách chọn bộ K số khác nhau bằng tích của số cách chọn bộ K số có dạng a_i^t với $x_i \le t \le y_i$ và trong đó buộc phải có một số với $t = x_i$ và một số với $t = y_i$:

$$ans = Demsl(x_1, y_1) \times Demsl(x_2, y_2) \times \dots \times Demsl(x_r, y_r)$$

Vấn đề chỉ còn viết hàm $Dem(u, v)$: Đếm số cách chọn K giá trị trong số $a^u, a^{u+1}, \dots, a^v$ trong đó có ít nhất một giá trị bằng a_u; có ít nhất một giá trị bằng a^v.
Để làm điều này ta nhận xét rằng số cách chọn K giá trị trong số n giá trị khác nhau luôn bằng n^k (mỗi giá trị có n cách chọn). Do vậy:

- Trước tiên ta đếm số cách chọn K giá trị tùy ý: $A = (v - u + 1)^K$
- Kết quả trên phải trừ đi các cách chọn không chứa a^u: $B = (v - u)^K$ (với $v \ge u + 1$)
- Sau đó phải trừ đi các cách chọn không chứa a^v : $C = (v - u)^K$ (với $v - 1 \ge u$)
- Tất nhiên số cách chọn không chứa cả a^u, a^v bị trừ đi 2 lần do vậy phải cộng thêm $D = (v - u - 1)^K$ với $(v - 1 \ge u + 1)$

Vậy:

$$Demsl(u, v) = A - B - C + D$$

GCM Solution:

Trước tiên chúng ta phân tích a, b thành các thừa số nguyên tố. Giả sử:

$$a = p_1^{k_1} \times \dots \times p_r^{k_r}; \quad b = p_1^{l_1} \times \dots \times p_r^{l_r}$$

Chú ý rằng $(p_1, \dots p_r)$ là hợp các số nguyên tố trong cả hai phân tích của a, b. Nếu p_i không xuất hiện trong phân tích của số a thì đặt $k_i = 0$ nếu p_i không xuất hiện trong phân tích của số b thì đặt $l_i = 0$.
Để hai số x, y có $lcm(x, y) = lcm(a, b)$ và $\gcd(x, y) = \gcd(a, b)$ thì với thừa số nguyên tố p_i phải có một số có số mũ bằng k_i và số còn lại có số mũ bằng l_i.
→ Một khả năng chọn cặp x, y tương ứng với một dãy nhị phân $c_1, c_2, \dots, c_r$ trong đó $c_i = 1$ tương ứng với số mũ của p_i trong phân tích x là k_i, trong phân tích y là l_i còn $c_i = 0$ tương ứng với số mũ của p_i trong phân tích x là l_i, trong phân tích y là k_i.
Duyệt backtracking tất cả các dãy nhị phân $c_1, \dots, c_r$ với mỗi trường hợp tính x, y. Tìm hiệu $|x - y|$ nhỏ nhất.

SUBLCM Solution:

Với mỗi vị trí i, đặt $P[i] = k$ là vị trí k lớn nhất $\gcd(a_i, a_k) > 1$.
Gọi $f[i]$ là độ dài dãy con liên tiếp lớn nhất kết thúc tại a_i có lcm bằng tích các phần tử. Dễ thấy:

$$f[i] = \min\{f[i-1] + 1, i - k\}$$

Để tính P[i] ta nhớ các vị trí gần nhất xuất hiện số nguyên tố trong quá trình lặp i từ 1 đến n và P[i] là max các vị trí như vậy khi phân tích a_i thành thừa số nguyên tố

CWATER Solution:

Gọi x là số lần sử dụng gáo A, y là số lần sử dụng gáo B ($x, y > 0$ nếu đổ nước vào thùng, <0 nếu đổ nước ra khỏi thùng. Ta cần tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ |x| + |y| \to min \end{cases}$$

Đối với phương trình thứ nhất công thức nghiệm của nó có dạng:

$$\begin{cases} x = x0.c_1 + b_1 t \\ y = y0.c_1 - a_1 t \end{cases}$$

Khi đó:$|x| + |y| = f(t) = |a_1 c_1 + b_1 t| + |a_1 t - b_1 c_1|$

Hàm $f(t)$ là đồ thị của một đường gấp khúc nên giá trị nhỏ nhất của nó đạt tại các điểm "nối":

$$t_1 = -\frac{x0.c_1}{b_1}; t_2 = \frac{y0.c_1}{a_1}$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ nên chỉ cần thử 4 giá trị nguyên tại các điểm lân cận t_1, t_2. Giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trong bốn giá trị này là đáp số của bài toán.

CNTWAYS Solution:

Mọi đường đi hợp lệ từ đỉnh góc trên trái đến đỉnh góc dưới phải đều chia thành 3 phần:

1. Từ góc trên trái đi đến đỉnh $(B-1, j)$
2. Từ $(B-1, j)$ đi đến (B, j)
3. Từ (B, j) đi đến (M, N)

Ở đây $j = 0 \div (N - A)$

Số đường đi loại (1) là C_{B-1+j}^{B-1}

Số đường đi loại (2) là 1

Số đường đi loại (3) là $C_{M-B+N-j}^{M-B}$

Vậy đáp số của bài toán là:

$$\sum_{j=0}^{N-A} C_{B-1+j}^{B-1} \times C_{M-B+N-j}^{M-B}$$

NWAYS Solution:

Nhận xét rằng số lượng đường đi từ (x_1, y_1) đến (x_2, y_2) bằng $C_{|y_1-y_2|}^{|x_1-x_2|}$. Bài toán qui về tính biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{|i-j|+k}^{k} = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} C_{j-i+k}^{k} - n$$

Trên tam giác Pascal ta có công thức "Hockey":

$$\sum_{i=k}^{n} C_i^k = C_{n+1}^{k+1}$$

Sử dụng công thức trên ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} C_{j-i+k}^{k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k}^{n-i+k} C_{j}^{k}\ \text{(hockey)} = \sum_{i=1}^{n} C_{n-i+k+1}^{k+1}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n+k} C_{i}^{k+1}\ \text{(hockey)} = C_{n+k+1}^{k+2}$$

Đáp số của bài toán đơn giản là:

$$2.C_{n+k+1}^{k+2} - n = 2.\frac{(n+k+1)!}{(k+2)!\,(n-1)!} - n$$

Bằng cách chuẩn bị trước mảng lũy thừa việc tính công thức trên trong trường đồng dư modulo P là đơn giản

EP Solution:

Trước tiên ta xây dựng mảng f[1], ..., f[10^6] với f[x] là tích các thừa số nguyên tố khác nhau của x. f[x] là biểu diễn nguyên tố tương đươn của x.

Với mỗi truy vấn a, b ta chỉ cần đếm xem trong dãy con f[a], ..., f[b] có bao nhiêu giá trị khác nhau và mỗi giá trị xuất hiện bao nhiêu lần (sử dụng map trong C++).

Nếu một giá trị c xuất hiện m lần thì số cặp tương đương ứng với giá trị này là:

$$\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$