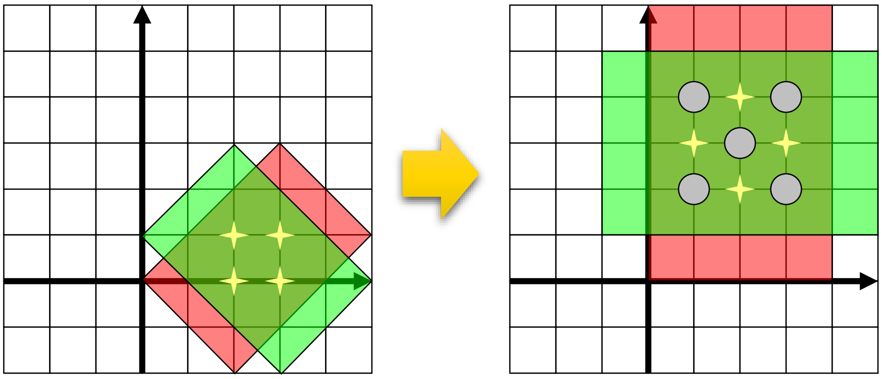
Đáp án PREVNOI 2013-2014 ngày 1

Bài 1. PINPOS (thầy Lê Minh Hoàng)

Ánh xạ tọa độ $(x, y) \to (x - y, x + y)$, các hình chữ nhật trở thành có cạnh song song với một trong hai trục tọa độ. Có thể hiểu là giờ đây ta coi 2 đường phân giác góc phần tư thứ IV và thứ I là hai trục tọa độ mới, 1 đơn vị độ dài trong hệ trục tọa độ mới bằng $\sqrt{2}$ đơn vị độ dài trong hệ trục tọa độ cũ (xem hình vẽ)



Một nhận xét quan trọng là với một tọa độ (x, y) ánh xạ thành $(x - y, x + y)$ thì $x - y$ và $x + y$ luôn cùng tính chẵn lẻ. Không phải điểm nguyên nào trong hệ tọa độ mới cũng ứng với một điểm nguyên trong hệ tọa độ cũ. Trên hệ tọa độ mới, ta gọi những điểm nguyên có hoành độ và tung độ cùng tính chẵn lẻ là điểm nguyên hợp lệ, tức là tồn tại một điểm nguyên trong hệ tọa độ cũ tương ứng với nó. Những điểm nguyên hợp lệ và không hợp lệ bố trí xen kẽ trong hệ tọa độ mới như các ô đen/trắng trên bàn cờ.

Sau khi ánh xạ lại tọa độ, mỗi hình chữ nhật hoàn toàn xác định bởi tọa độ góc trái dưới (x_1, y_1) và tọa độ góc phải trên (x_2, y_2). Khi đó phần giao R có tọa độ góc trái dưới (x_1^*, y_1^*) và tọa độ góc phải trên (x_2^*, y_2^*) xác định như sau:

x_1^* là giá trị lớn nhất trong các x_1 của n hình chữ nhật

y_1^* là giá trị lớn nhất trong các y_1

x_2^* là giá trị nhỏ nhất trong các x_2

y_2^* là giá trị nhỏ nhất trong các y_2

Vấn đề còn lại là đếm số điểm nguyên hợp lệ thuộc miền trong của R. Điều này tương đối đơn giản dựa vào quy tắc bố trí xen kẽ giữa những điểm nguyên hợp lệ và không hợp lệ:

Tổng số điểm nguyên (hợp lệ và không hợp lệ) thuộc miền trong của R là

$$Q = (x_2^* - x_1^* - 1) \times (y_2^* - y_1^* - 1)$$

Nếu $Q \le 0$, đáp số là 0

Nếu $Q > 0$,

- Nếu x_1^* và y_1^* cùng tính chẵn lẻ, đáp số là $\left\lfloor \frac{Q+1}{2} \right\rfloor$
- Nếu x_1^* và y_1^* khác tính chẵn lẻ, đáp số là $\left\lfloor \frac{Q}{2} \right\rfloor$

Bài 2. RSELECT (thầy Lê Thanh Bình)

Với hai ô chung cạnh, ta gọi **"vách ngăn"** là phần cạnh chung giữa hai ô, vách ngăn đó có **nhãn** bằng độ chênh lệnh độ cao của hai ô đó. Tổng cộng có $2n(n - 1)$ vách ngăn.

Ta gọi hai vách ngăn là **kề nhau** nếu chúng **cùng nhãn** và **cùng là cạnh** của một ô. Dễ thấy rằng mỗi vách ngăn có không quá 7 vách ngăn khác kề với nó.

Thuật toán:

Bước 1: Liệt kê các miền liên thông các vách ngăn theo quan hệ kề nhau định nghĩa ở trên.

Bước 2: Với mỗi miền liên thông, đếm số ô liên thuộc với ít nhất một vách ngăn trong miền liên thông đó.

Bước 3: Xác định miền liên thông có số ô liên thuộc nhiều nhất, in ra số ô đó.

Việc xác định miền liên thông bằng BFS/DFS mất thời gian $O(n^2)$, tổng cộng thao tác đếm số ô cũng mất thời gian $O(n^2)$. Tổng cộng, độ phức tạp $O(n^2)$

Chú ý: Có thể tìm miền liên thông bằng Disjoint-set forest với ĐPT $O(n^2\alpha(n^2))$*, hơi cao hơn so với thuật toán trên nhưng dễ cài đặt hơn và thời gian chạy thực tế không khác nhau đáng kể*

Bài 3. TOUR (thầy Đỗ Đức Đông)

Cho đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm n đỉnh, m cạnh, hàm trọng số $w: E \to \mathbb{R}$. Ta định nghĩa trung bình trọng số của một chu trình C gồm các cạnh $\langle e_1, e_2, \dots, e_k\rangle$ là:

$$\mu(C) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w(e_i)$$

Đặt

$$\mu^* = \min_C\{\mu(C)\}$$

Khi đó chu trình C có $\mu(C) = \mu^*$ gọi là chu trình có trung bình trọng số nhỏ nhất (*minimum mean-weight cycle)*. Chu trình có trung bình trọng số nhỏ nhất có nhiều ý nghĩa trong các thuật toán tìm luồng với chi phí cực tiểu.
Thuật toán tìm chu trình có trung bình trọng số nhỏ nhất:

Thuật toán $O(nm\log W)$

Nhận xét rằng nếu trừ tất cả trọng số cạnh đi Δ, trung bình trọng số của mọi chu trình cũng bị trừ đi Δ và như vậy chu trình có trung bình trọng số nhỏ nhất vẫn được bảo toàn.
Vậy thì ta sẽ tìm giá trị Δ sao cho nếu trừ tất cả trọng số cạnh đi Δ thì chu trình ngắn nhất trên đồ thị sẽ có độ dài 0, tức là trung bình trọng số 0. Đây chính là chu trình có trung bình trọng số nhỏ nhất.
Giá trị Δ ở trên được tìm bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân: Tìm Δ lớn nhất sau cho sau khi trừ tất cả mọi trọng số cạnh đi Δ thì đồ thị vẫn không có chu trình âm (tức là chu trình trọng số nhỏ nhất $w(.) = 0$)
Đánh giá:
Kiểm tra sự tồn tại chu trình âm (thuật toán Bellman-Ford): $O(nm)$
Thuật toán tìm kiếm nhị phân chạy $O(\log|W|)$ lượt với W là giá trị lớn nhất của các trọng số cạnh
Vậy độ phức tạp là $O(nm\log W)$

Thuật toán Karp $O(nm + n^2)$

Thuật toán Karp được xây dựng và chứng minh qua các bước sau (Có thể đọc trong phần bt phần đường đi ngắn nhất, tài liệu chuyên tin)
Thêm vào đồ thị đỉnh s và cung trọng số 0 nối từ s tới mọi đỉnh khác, đồ thị có $n + 1$ đỉnh. Điều này không tạo ra thêm chu trình và vì vậy không ảnh hưởng tới tính đúng đắn của thuật toán. Đặt $\delta(v)$ là độ dài đường đi đơn ngắn nhất từ s tới v. Đặt $\delta_k(v)$ là độ dài đường đi ngắn nhất trong số các đường đi từ s tới v qua đúng k cung (cho phép đi qua một cung nhiều lần), quy ước $\delta_k(v) = +\infty$ nếu không tồn tại đường đi như vậy. Công thức truy hồi tính các $\delta_k(v)$ như sau:

$$\begin{cases}\delta_1(v) = 0, \forall v \in V\\ \delta_k(v) = \min\limits_{u\in\Gamma^-(v)}\{\delta_{k-1}(u) + w(u,v)\}, \forall v \in V, k = 2,3,\dots,n+1\end{cases}$$

Việc tính mỗi $\delta_k(v)$ mất thời gian $O(\deg^-(v))$, vì vậy việc tính các $\delta_k(.)$ mất thời gian $O(m)$ và việc tính các $\delta_.(.)$ mất thời gian $O(nm)$.
Khi đó đáp số (có thể tính trong thời gian $O(n^2)$) bằng:

$$\boxed{\mu^* = \min_{v\in V}\max_{1\le k\le n}\frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1}}$$

Chú ý: Ta quy ước $s \notin V$ và trong các biểu thức ta chỉ quan tâm tới các $\delta_k(v) < +\infty$

Chứng minh

a) Trước hết ta chỉ ra rằng nếu $\mu^* = 0$, đồ thị G không có chu trình âm và:

$$\delta(v) = \min_{1\le k\le n}\{\delta_k(v)\}, \forall v \in V$$

Thật vậy, nếu $\mu^* = 0$, đồ thị không có chu trình âm. Tồn tại đường đi ngắn nhất từ s tới v là đường đi đơn (qua không quá n cạnh). Tức là:

$$\delta(v) = \min_{1\le k\le n}\{\delta_k(v)\}$$

b) Ta tiếp tục chứng minh rằng nếu $\mu^* = 0$ thì $\forall v \in V$ ta có:

$$\max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1} \ge 0$$

Thật vậy, ta thấy rằng $\delta_{n+1}(v) \ge \delta(v)$ và chắc chắn tồn tại một giá trị k để $\delta_k(v) = \delta(v)$. Ngoài ra chắc chắn $n - k + 1 > 0$ do đó $\frac{\delta_{n+1}(v)-\delta_k(v)}{n-k+1} \ge 0$

c) Gọi C là một chu trình trọng số 0, u, v là hai đỉnh nằm trên C, giả sử $\mu^* = 0$ và x là độ dài đường đi từ u tới v dọc theo chu trình C. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\delta(v) = \delta(u) + x$$

Theo bất đẳng thức tam giác:
Vì độ dài đường đi từ u tới v dọc chu trình C có độ dài x, do đó $\delta(u) + x \ge \delta(v)$
Vì độ dài đường đi từ v tới u dọc chu trình C có độ dài $-x$, do đó $\delta(v) - x \ge \delta(u)$
Tổng hợp lại ta có $\delta(v) = \delta(u) + x$

d) Tiếp thep, ta sẽ chỉ ra rằng nếu $\mu^* = 0$ thì trên mỗi chu trình trọng số 0 sẽ tồn tại một đỉnh v sao cho:

$$\max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1} = 0$$

Gọi C là chu trình độ dài 0, tìm một đường đi đơn ngắn nhất từ s tới một đỉnh $\in C$ gọi là đỉnh u. Sau đó đi tiếp dọc chu trình C để được một đường đi P qua $n+1$ cung. Giả sử cuối cùng ta đến đỉnh v, từ kết quả trên, ta có $\delta(v) = \delta(u) + x$ với x là độ dài quãng đường từ u tới v dọc chu trình C. Đường đi P chắc chắn đi lặp đỉnh và chứa trọn chu trình C (vì P qua $n+1$ cung), ngoài ra đi lặp chu trình C bao nhiêu vòng thì cũng không làm tăng độ dài quãng đường. Từ P là đường đi từ s tới v qua đúng n cung, ta suy ra P cũng là đường đi ngắn nhất từ s tới v. Tức là $\delta_{n+1}(v) = \delta(v)$. Mặt khác phải tồn tại một giá trị k để $\delta_k(v) = \delta(v)$ và với $\forall k' \ne k$ thì $\delta_{k'}(v) > \delta_k(v)$. Suy ra:

$$\max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1} = 0$$

e) Hệ quả của kết quả trên là nếu $\mu^* = 0$ thì

$$\min_{v\in V} \max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1} = 0$$

Thật vậy, do đồ thị không có chu trình âm, $\forall v \in V$ ta có

$$\max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1} \ge 0$$

Ngoài ra lại tồn tại đỉnh v để bất đẳng thức trên xảy ra dấu "=". Suy ra

$$\min_{v\in V} \max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1} = 0$$

f) Dễ thấy rằng nếu chúng ta trừ đi một hằng số Δ vào tất cả các trọng số cạnh thì μ^* giảm đi Δ. Ta sẽ sử dụng tính chất này để chứng minh rằng

$$\mu^* = \min_{v\in V} \max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1}$$

Thật vậy, nếu trừ tất cả các trọng số cạnh đi Δ, tất cả các $\delta_{n+1}(v)$ giảm đi $(n+1)\Delta$ và tất cả các $\delta_k(v)$ giảm đi $k\Delta$, ngoài ra μ^* cũng giảm đi Δ.
Trừ tất cả các trọng số cạnh đi μ^*, đồ thị vẫn không có chu trình âm từ kết quả câu e), ta có:

$$\min_{v\in V} \max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - (n+1).\mu^* - (\delta_k(v) - k.\mu^*)}{n-k+1} = 0$$

hay

$$\min_{v\in V} \max_{1\le k\le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n-k+1} - \mu^* = 0$$

Tức là

$$\boxed{\mu^* = \min_{v \in V} \max_{1 \le k \le n} \frac{\delta_{n+1}(v) - \delta_k(v)}{n - k + 1}}$$

Ta có công thức tính μ^* trong thời gian $O(n^2)$

Độ phức tạp $O(nm + n^2)$