ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Điện tử cho Công nghệ thông tin

IT3421

ONE LOVE. ONE FUTURE.

Điện tử cho CNTT

ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Chương 6 Đại số Boole

ONE LOVE. ONE FUTURE.

6.1 Đại số Boole

6.2 Các định lý cơ bản

6.3 Các phương pháp tối thiểu hóa hàm logic

Tài liệu tham khảo:

- ***Digital electronics: Principles, Devices, and Applications, Anil Kumar Maini 2007 John Wiley & Sons***
- ***Fundamentals of Logic Design, Seventh Edition, Charles H. Roth, Jr. and Larry L. Kinney***
- ***Digital Fundamentals, Thomas L. Floyd, Eleventh Edition, Pearson Education Limited 2015***

6.1 Đại số Boole

- Do George Boole đưa ra vào năm 1984, được gọi là đại số logic hay đại số Boole.
- Là công cụ toán học đơn giản, cho phép mô tả mối liên hệ giữa các đầu ra của mạch logic với các đầu vào của nó dưới dạng biểu thức logic.
- Là cơ sở lý thuyết và công cụ cho phép nghiên cứu, mô tả, phân tích, thiết kế và xây dựng các hệ thống số, hệ thống logic, mạch số ngày nay.
- Chỉ sử dụng 2 giá trị 0 và 1 để biểu thị giá trị.

6.1 Đại số Boole

- Các giá trị 0, 1 không tượng trưng cho các con số thực mà tượng trưng cho trạng thái giá trị điện thế hay còn gọi là mức logic (logic level)
- Một số cách gọi khác của 2 mức logic:

Mức logic 0	Mức logic 1
Sai (False)	Đúng (True)
Tắt (Off)	Bật (On)
Thấp (Low)	Cao (High)
Không (No)	Có (Yes)
(Ngắt) Open switch	(Đóng) Closed switch

6.1 Đại số Boole

- Mạch logic (mạch số) hoạt động dựa trên chế độ nhị phân:
  - Điện thế ở đầu vào bằng 0 hoặc bằng 1 với 0 hay 1 tượng trưng cho các khoảng điện thế được định nghĩa sẵn:
  - Ví dụ: $0 \rightarrow 0.8V$: định nghĩa mức logic 0
    $2.5 \rightarrow 5V$: định nghĩa mức logic 1

⇒ Cho phép sử dụng Đại số Boole như là một công cụ để phân tích và thiết kế các hệ thống số

6.1 Đại số Boole

- **Biến logic**: biểu diễn bằng một ký hiệu, được sử dụng để biểu thị một hành động, điều kiện hoặc dữ liệu nào đó. Một biến bất kỳ chỉ nhận một rong có , về mặt giá trị chỉ lấy giá trị 0 hoặc 1.
- **Hàm logic**: là biểu diễn của nhóm các biến logic, liên hệ với nhau thông qua các phép toán logic, về mặt giá trị cũng lấy giá trị 0 hoặc 1.
- **Phép toán logic**: có 3 phép toán logic cơ bản:
  - Phép **ĐẢO** - "NOT"
  - Phép **HOẶC** - "OR"
  - Phép **VÀ** - "AND"

Phép ĐẢO

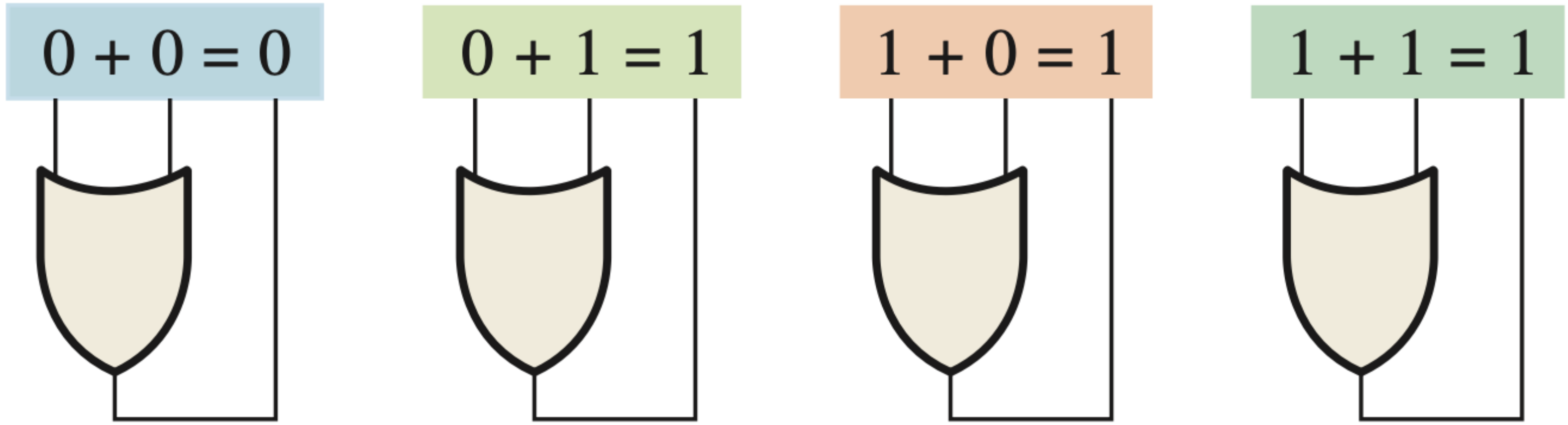
- Còn gọi là phép bù
- Phép bù thực hiện việc đảo giá trị của 1 biến, được ký hiệu bởi dấu gạch ngang trên biến.
- Ví dụ: Bù của A là $\overline{A}$

$$A = 0 \Rightarrow \overline{A} = 1$$

$$A = 1 \Rightarrow \overline{A} = 0$$

Phép HOẶC

- Còn gọi là phép cộng đại số Boole
- Quy tắc của phép cộng đại số tương tự cổng OR như sau:

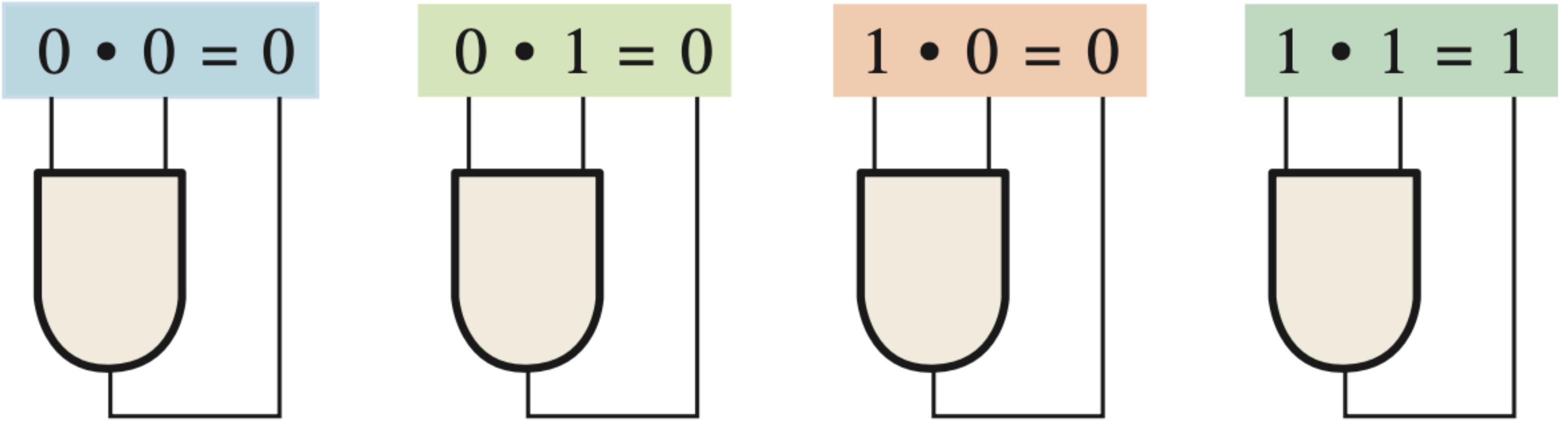


$$A + B$$
$$A + \overline{B}$$
$$A + B + \overline{C}$$
$$\overline{A} + B + C + \overline{D}$$

- Kết quả của phép cộng được gọi là một tổng (sum term)
- Trong mạch logic, một tổng được tạo ra bởi cổng OR
- Một tổng nhận 1 giá trị bằng 0 hoặc 1

Phép VÀ

- Còn gọi là phép nhân đại số Boole
- Quy tắc của phép nhân đại số tương tự cổng AND như sau:



$$AB$$
$$A\overline{B}$$
$$ABC$$
$$A\overline{B}C\overline{D}$$

- Kết quả của phép nhân được gọi là một tích (product term)
- Trong mạch logic, một tích được tạo ra bởi cổng AND
- Một tích nhận 1 giá trị bằng 0 hoặc 1

6.1 Đại số Boole

6.2 Các định lý cơ bản

6.3 Các phương pháp tối thiểu hóa hàm logic

Tài liệu tham khảo:

- ***Digital electronics: Principles, Devices, and Applications, Anil Kumar Maini 2007 John Wiley & Sons***
- ***Fundamentals of Logic Design, Seventh Edition, Charles H. Roth, Jr. and Larry L. Kinney***
- ***Digital Fundamentals, Thomas L. Floyd, Eleventh Edition, Pearson Education Limited 2015***

6.2 Các định lý cơ bản

- Khái niệm biểu thức tương đương, bù, đối ngẫu
- Các định đề quan trọng
- Các định lý và định luật cơ bản
- Định lý DeMorgan

Bảng thật/Bảng trạng thái

- Bảng thật/Bảng trạng thái mô tả sự phụ thuộc đầu ra vào các mức điện thế đầu vào của các mạch logic.

F = A+B

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

F = AB

A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Để biểu diễn 1 hàm logic **n** biến, bảng có:

- (n+1) cột:
  - n cột đầu tương ứng với n biến
  - cột còn lại tương ứng với giá trị của hàm
- 2^n hàng: tương ứng với 2^n giá trị của tổ hợp biến

Biểu thức tương đương

- Hai biểu thức được gọi là tương đương nếu biểu thức này bằng 1 khi và chỉ khi biểu thức kia bằng 1, biểu thức này bằng 0 khi và chỉ khi biểu thức kia bằng 0.
- Ví dụ: Xét hai biểu thức: $\overline{\overline{A}.B + A.\overline{B}}$ và $\overline{A}.\overline{B} + A.B$

A	B	$\overline{\overline{A}.B + A.\overline{B}}$	$\overline{A}.\overline{B} + A.B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Biểu thức bù

- Hai biểu thức được gọi là bù nếu biểu thức này bằng 1 khi và chỉ khi biểu thức kia bằng 0 và ngược lại.
- Biểu thức bù đạt được bằng cách đổi phép nhân thành phép cộng và ngược lại, 0 thành 1 và ngược lại, nguyên biến thành đảo biến và ngược lại.
- Ví dụ:
  - Biểu thức bù của $\overline{A}.B + A.\overline{B}$ là: $(A+\overline{B}).(\overline{A}+B)$
  - Biểu thức bù của $\overline{A}.\overline{B} + A.B$ là: $(A+B).(\overline{A}+\overline{B})$

Biểu thức đối ngẫu

- Trạng thái đối ngẫu của một biểu thức đạt được bằng cách:
  - Hoán đổi phép nhân thành phép cộng và ngược lại
  - Mức logic 0 thành 1 và ngược lại
  - Các quan hệ khác giữ nguyên
- Ví dụ:
  - Biểu thức đối ngẫu của $\overline{A}.B + A.\overline{B}$ là: $(\overline{A} + B).(A + \overline{B})$
  - Biểu thức đối ngẫu của $A.B + \overline{A}.\overline{B}$ là: $(A + B).(\overline{A} + \overline{B})$
- Không có một mối quan hệ chung nào cho các biểu thức và biểu thức đối ngẫu, tuy nhiên, khi một biểu thức logic đúng thì biểu thức đối ngẫu cũng đúng.

Biểu thức A = Biểu thức B $\Rightarrow$ Đối ngẫu của A = Đối ngẫu của B

Ví dụ 6.1

a. Tìm biểu thức đối ngẫu của: $A.\overline{B} + B.\overline{C} + C.\overline{D}$

Biểu thức đối ngẫu: $(A + \overline{B}).(B + \overline{C}).(C + \overline{D})$

Các định đề quan trọng trong đại số Boole

- 1 x 1 = 1
- 1 x 0 = 0
- 0 x 1 = 0
- 0 x 0 = 0

- 0 + 0 = 0
- 0 + 1 = 1
- 1 + 0 = 1
- 1 + 1 = 1

- $\overline{0} = 1$
- $\overline{1} = 0$

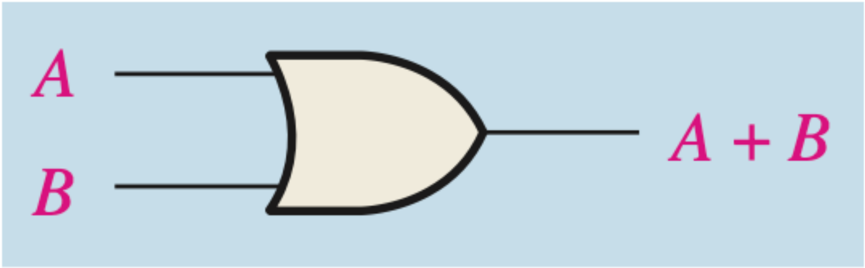
Các định lý cơ bản trong đại số Boole

- Tính giao hoán
- Tính kết hợp
- Tính phân phối

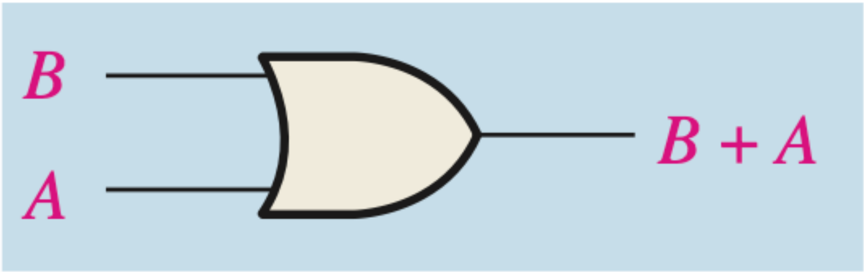
Tính giao hoán

- Hoán vị với phép cộng

$$A + B = B + A$$

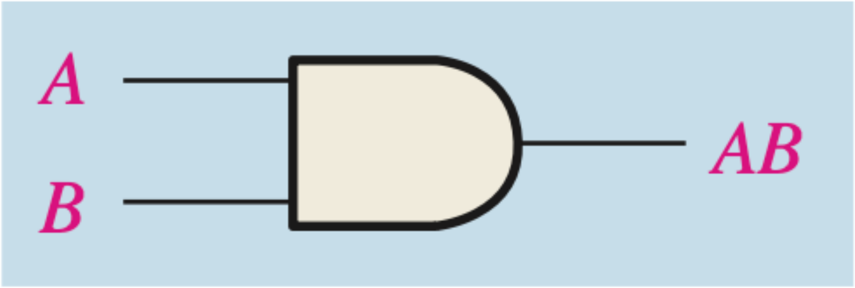


≡

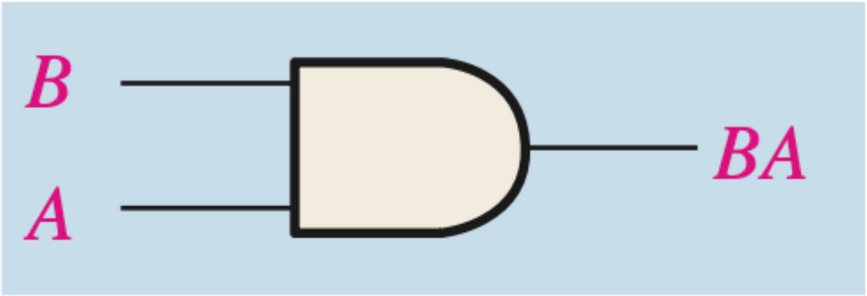


- Hoán vị với phép nhân

$$AB = BA$$



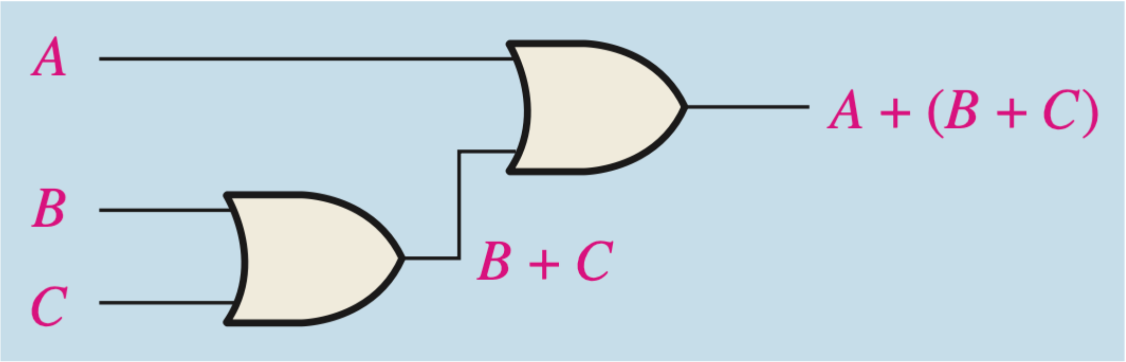
≡



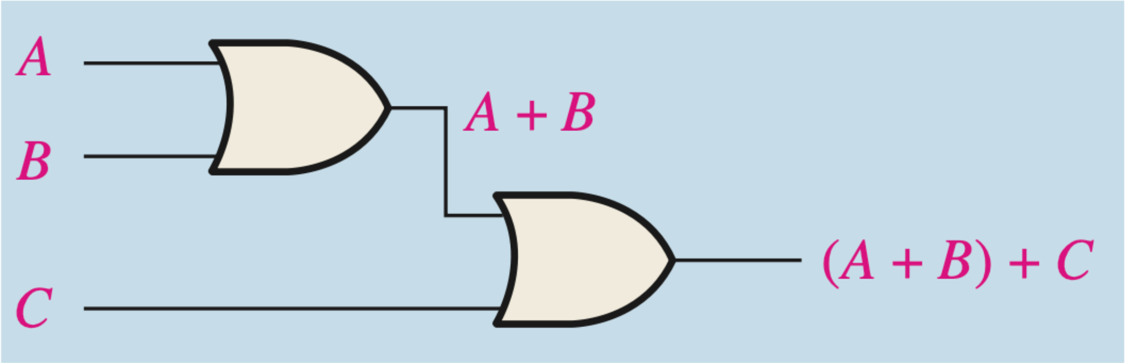
Tính kết hợp

- Định luật kết hợp với phép cộng

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

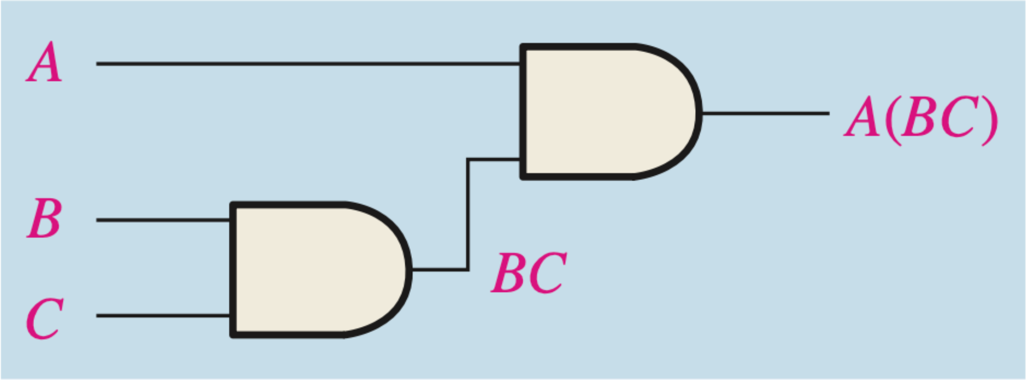


≡

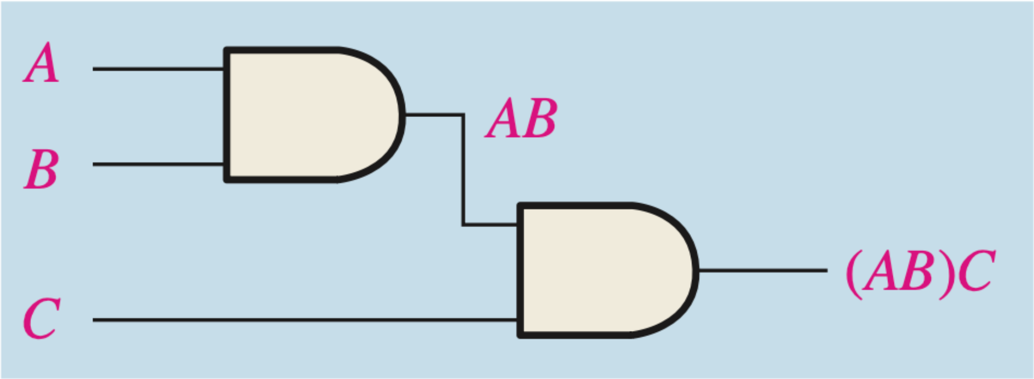


- Định luật kết hợp với phép nhân

$$A(BC) = (AB)C$$



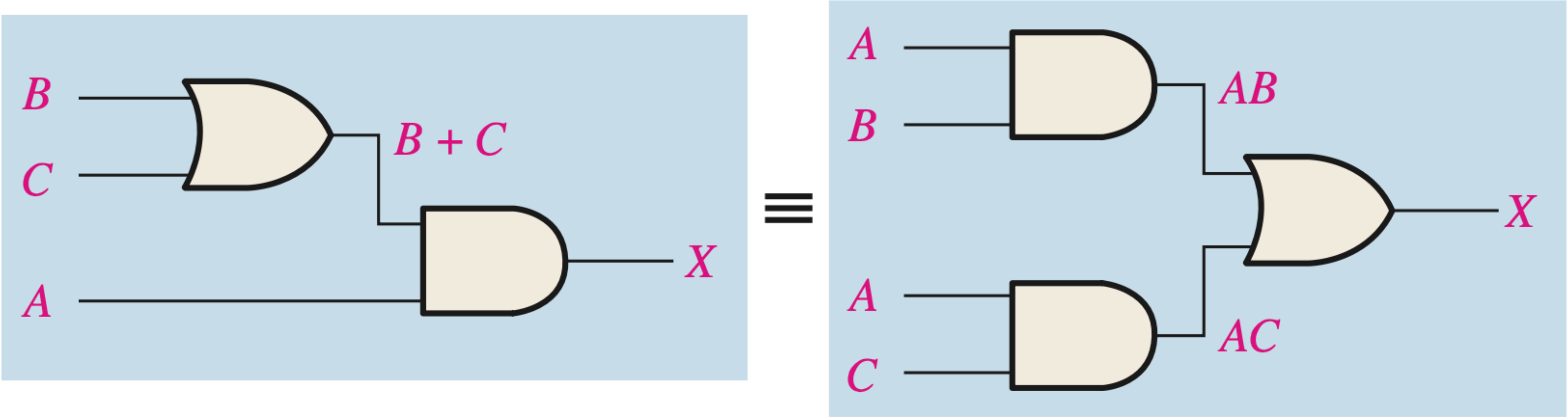
≡



Tính phân phối

- Phát biểu:

$$A(B + C) = AB + AC$$



$X = A(B + C)$

$X = AB + AC$

Các định luật cơ bản trong đại số Boole

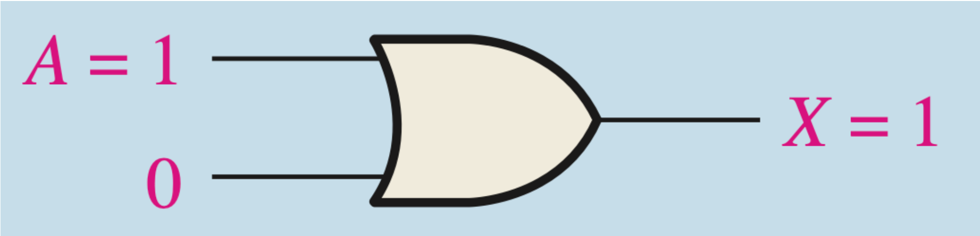
- Một số luật cơ bản trong đại số Boole

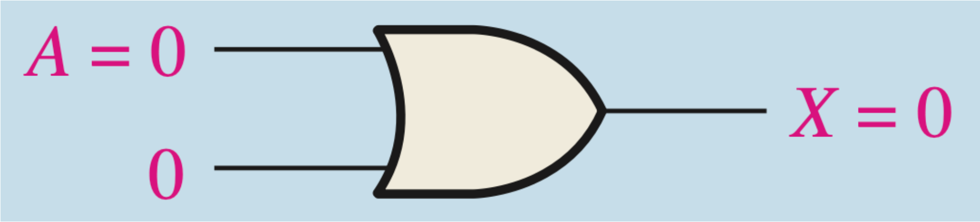
1. $A + 0 = A$	**7.** $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	**8.** $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	**9.** $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	**10.** $A + AB = A$
5. $A + A = A$	**11.** $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	**12.** $(A + B)(A + C) = A + BC$

Các định luật cơ bản trong đại số Boole

1. Luật 1: A + 0 = A

Một biến HOẶC với 0 luôn bằng chính biến đó

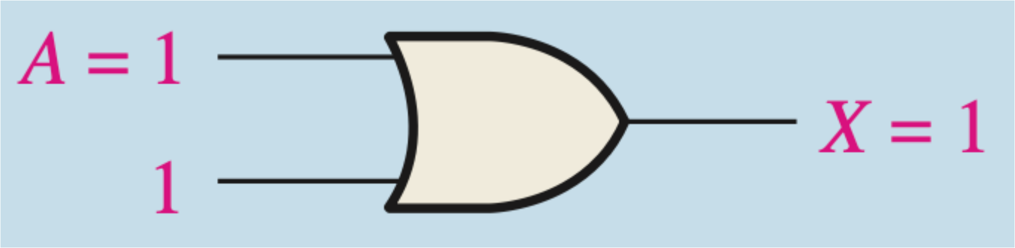


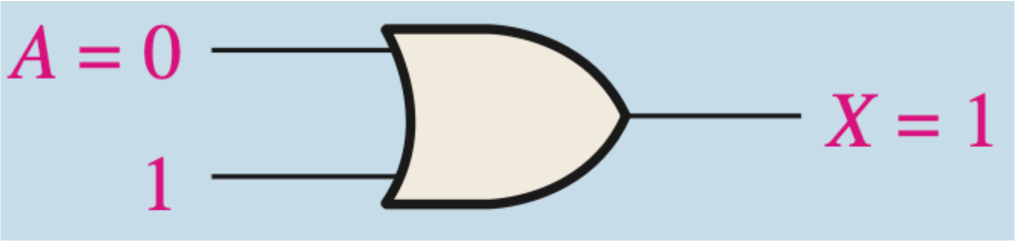


$$X = A + 0 = A$$

2. Luật 2: A + 1 = 1

Một biến HOẶC với 1 luôn bằng 1.

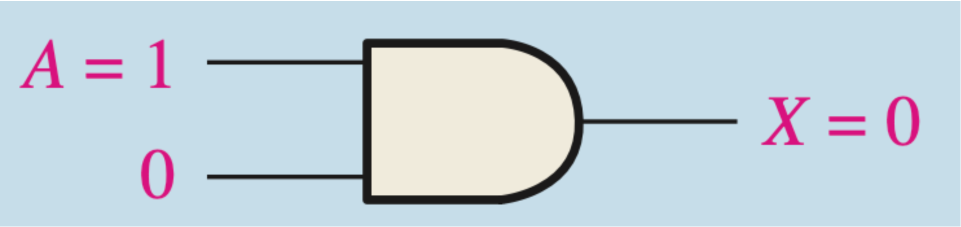


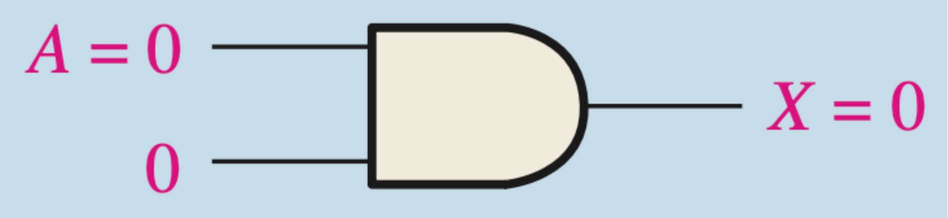


$$X = A + 1 = 1$$

3. Luật 3: A x 0 = 0

Một biến VÀ với 0 luôn bằng 0.

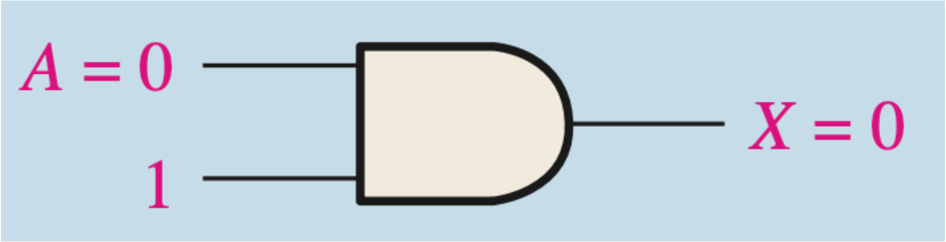


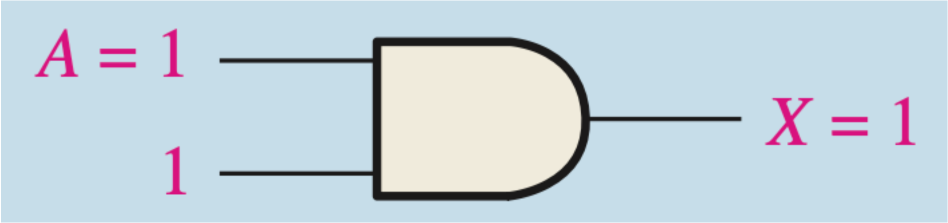


$$X = A \cdot 0 = 0$$

4. Luật 4: A x 1 = A

Một biến VÀ với 1 luôn bằng chính biến đó.

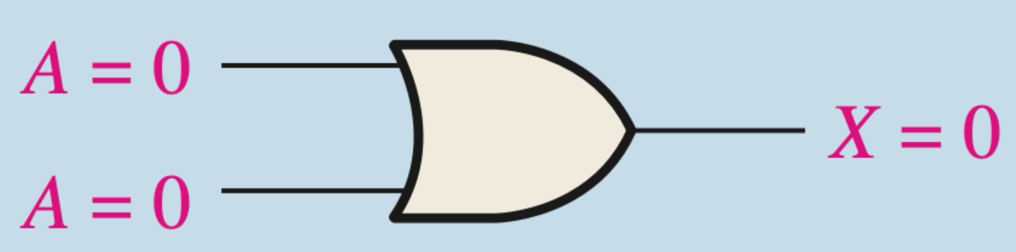


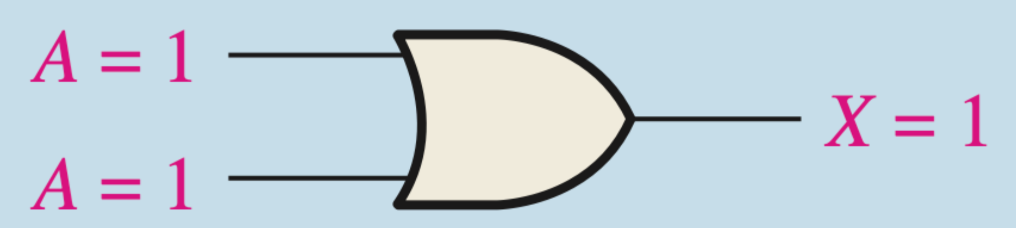


$$X = A \cdot 1 = A$$

5. Luật 5: A + A = A

Một biến HOẶC với chính nó luôn bằng chính biến đó.

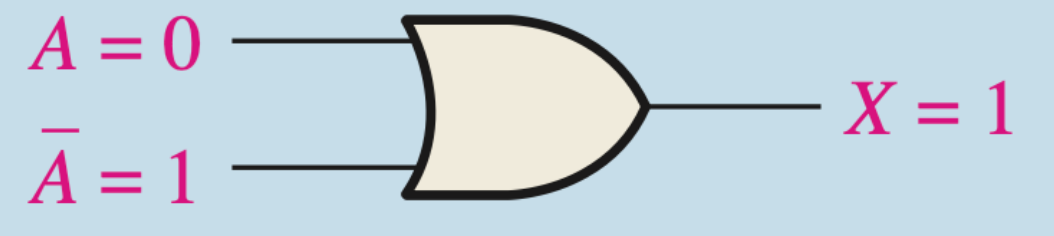


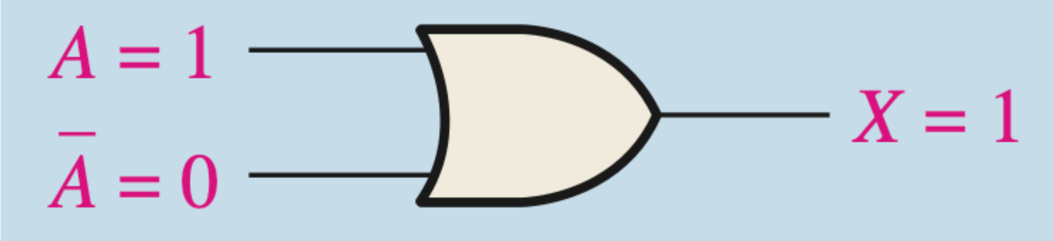


$$X = A + A = A$$

6. Luật 6: A + $\overline{A}$ = 1

Một biến hoặc với phần bù của nó luôn bằng 1.



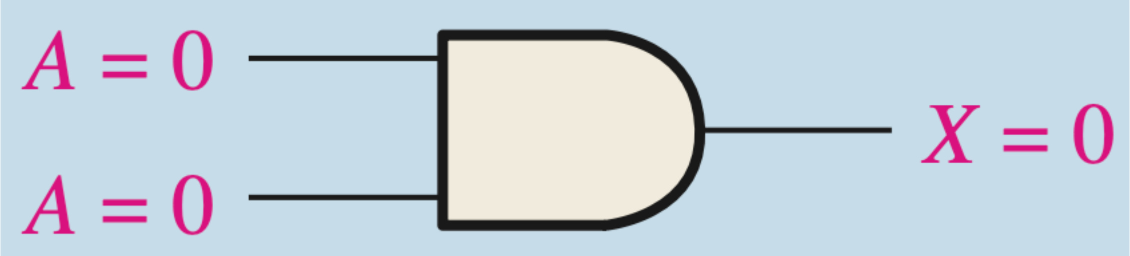


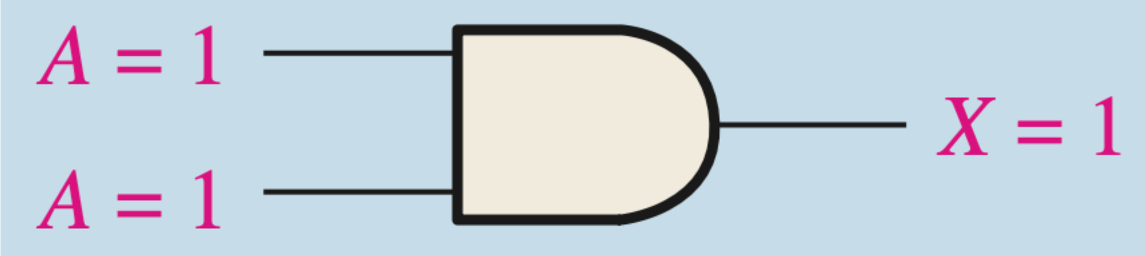
$$X = A + \overline{A} = 1$$

Các định luật cơ bản trong đại số Boole

7. Luật 7: A x A = A

Một biến VÀ với chính nó luôn bằng chính biến đó

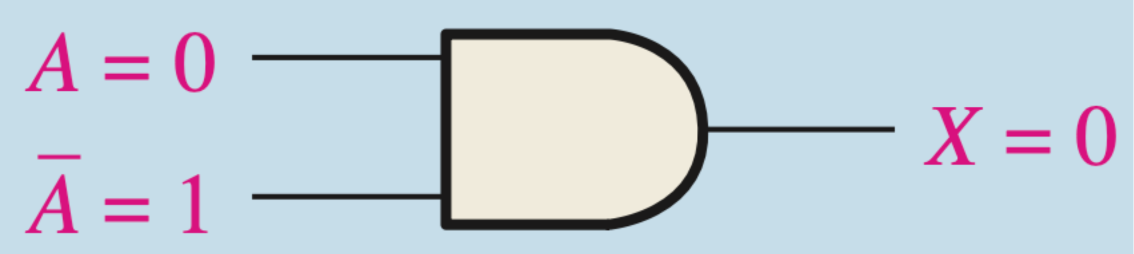


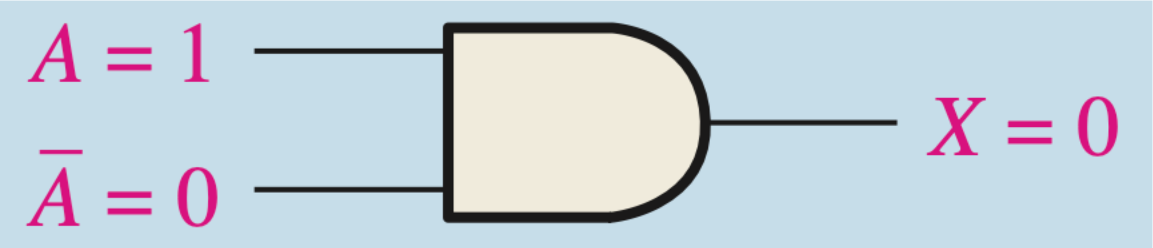


$$X = A \cdot A = A$$

8. Luật 8: A x $\overline{A}$ = 0

Một biến VÀ với phần bù của nó luôn bằng 0

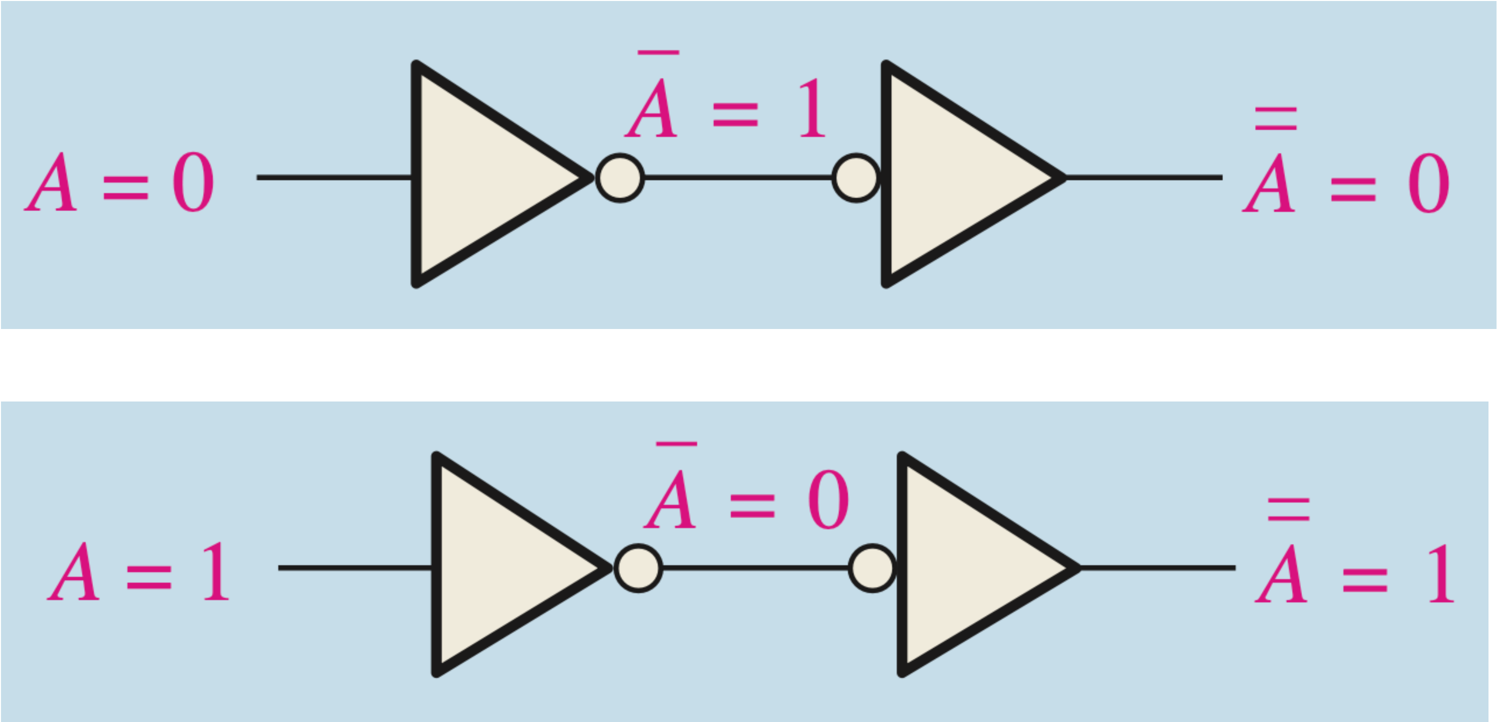




$$X = A \cdot \overline{A} = 0$$

9. Luật 9: $\overline{\overline{A}} = A$

Bù 2 lần của cùng 1 biến bằng chính biến đó



$$\overline{\overline{A}} = A$$

10. Luật 10: A + AB = A

Chứng minh:

$$A + AB = A \cdot 1 + AB = A(1 + B)$$

$$= A \cdot 1$$

$$= A$$

Phân tích (Tính phân phối)

Luật 2: $(1 + B) = 1$

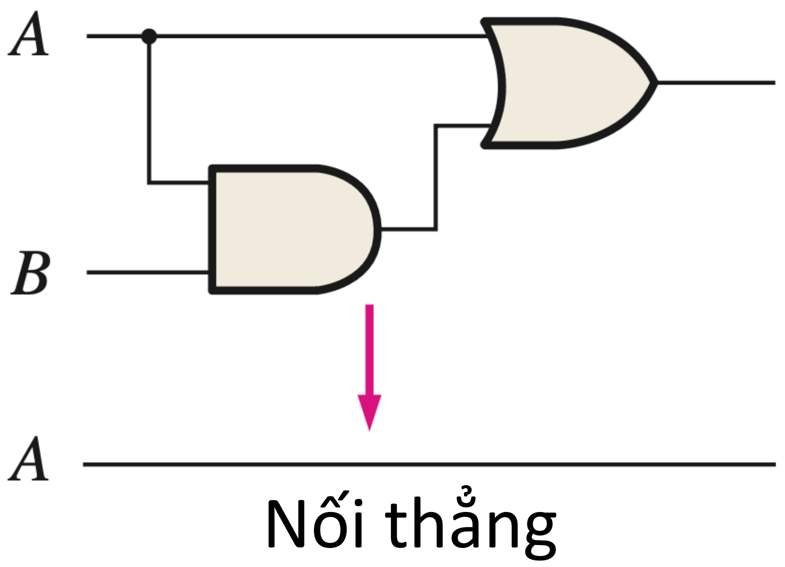
Luật 4: $A \cdot 1 = A$

10. Luật 10: A + AB = A

Chứng minh:

A	B	AB	$A + AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Bằng



Các định luật cơ bản trong đại số Boole

11. Luật 11: A + $\overline{A}$B = A + B

Chứng minh:

$$A + \overline{A}B = (A + AB) + \overline{A}B$$ Luật 10: $A = A + AB$

$$= (AA + AB) + \overline{A}B$$ Luật 7: $A = AA$

$$= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B$$ Luật 8: cộng $A\overline{A} = 0$

$$= (A + \overline{A})(A + B)$$ Nhóm

$$= 1 \cdot (A + B)$$ Luật 6: $A + \overline{A} = 1$

$$= A + B$$ Luật 4: Loại bỏ 1

11. Luật 11: $A + \overline{A}B = A + B$

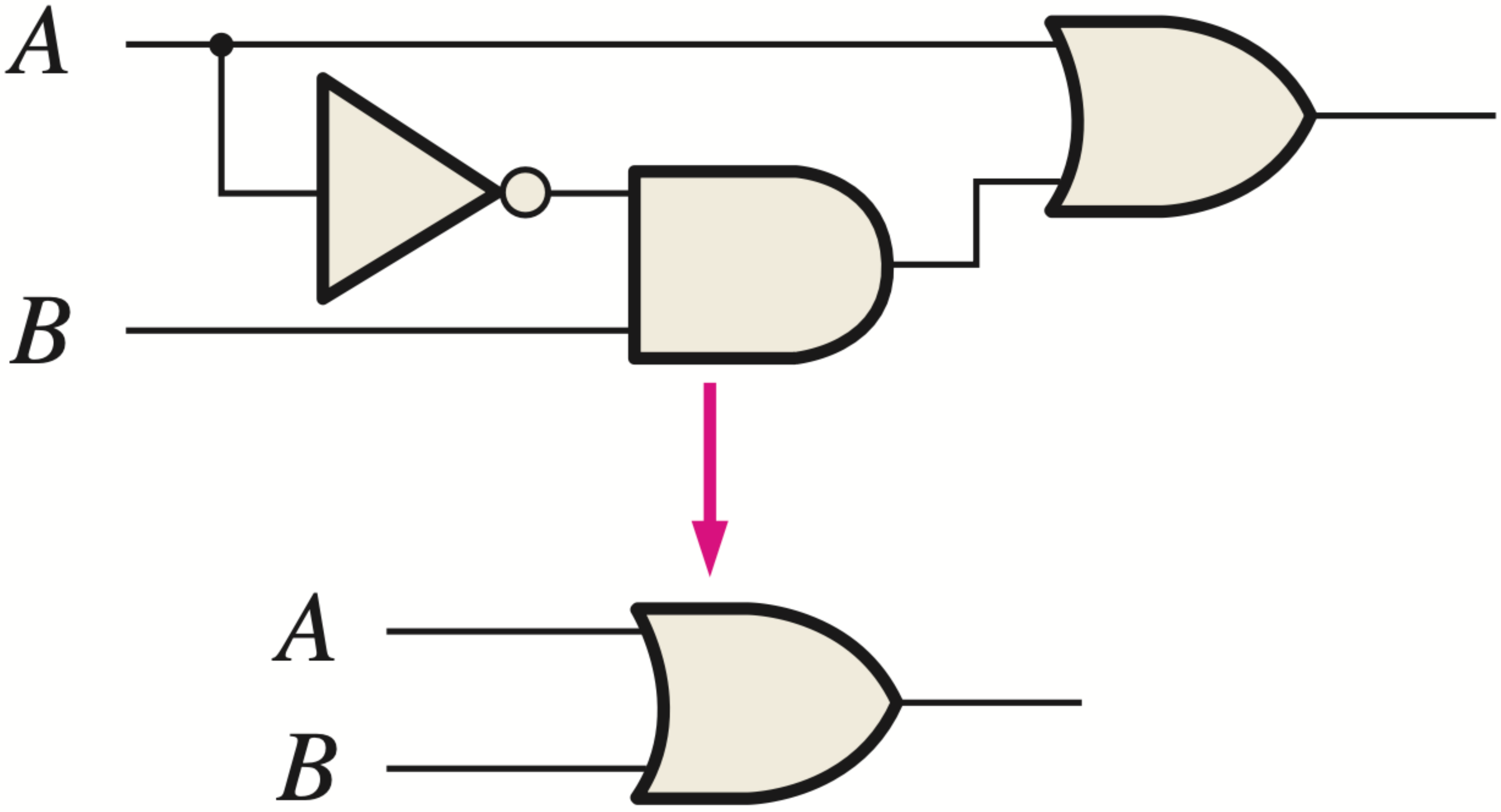
Chứng minh:

A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Bằng

Các định luật cơ bản trong đại số Boole

11. Luật 11: $A + \overline{A}B = A + B$



12. Luật 12: (A + B)(A + C) = A + BC

Chứng minh

$(A + B)(A + C) = AA + AC + AB + BC$ Phân tích (Tính phân phối)

$= A + AC + AB + BC$ Luật 7: $AA = A$

$= A(1 + C) + AB + BC$ Nhóm (Tính phân phối)

$= A \cdot 1 + AB + BC$ Luật 2: $1 + C = 1$

$= A(1 + B) + BC$ Nhóm (Tính phân phối)

$= A \cdot 1 + BC$ Luật 2: $1 + B = 1$

$= A + BC$ Luật 4: $A \cdot 1 = A$

12. Luật 12: (A + B)(A + C) = A + BC

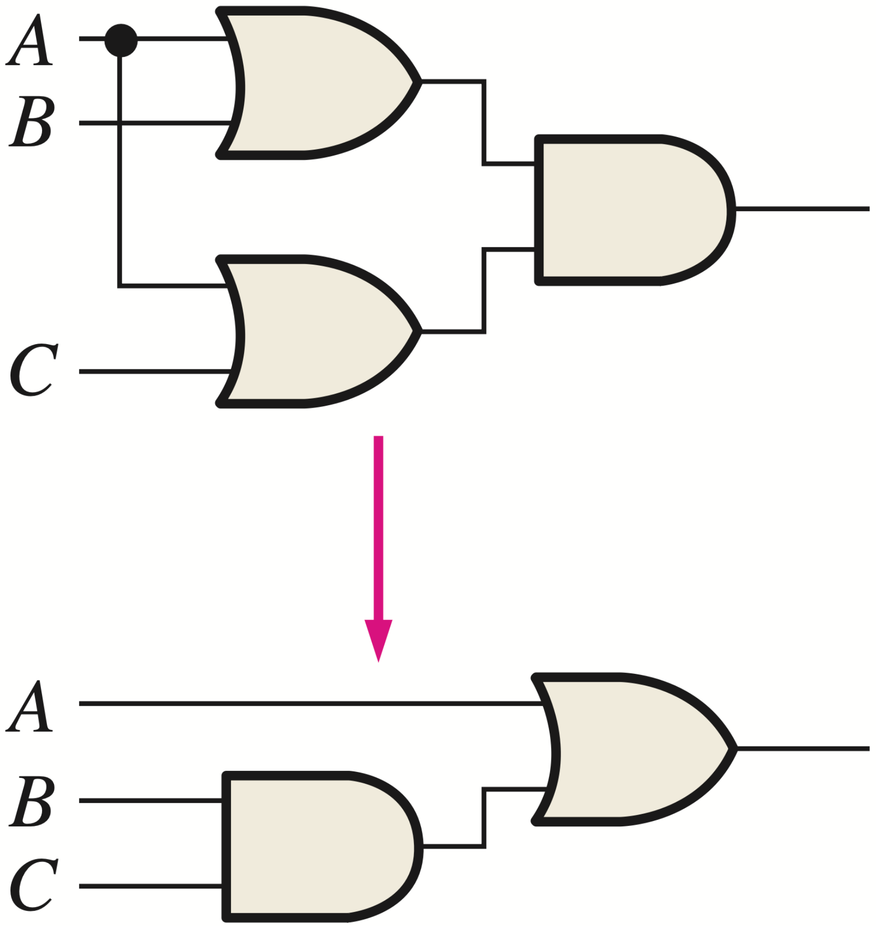
Chứng minh

A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Bằng

Các định luật cơ bản trong đại số Boole

12. Luật 12: (A + B)(A + C) = A + BC

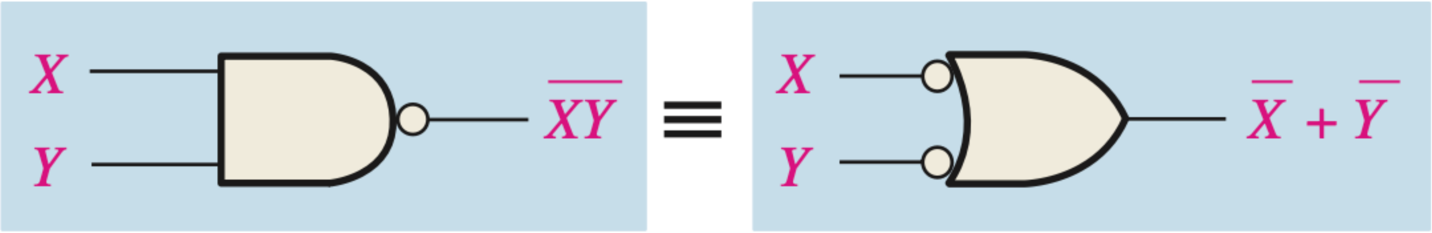


Định lý DeMorgan

- DeMorgan là một nhà toán học, đã đề xuất 2 định lý quan trọng trong đại số Boole.
- Trên thực tế, định lý DeMorgan cung cấp xác minh toán học về tính tương đương giữa các cổng NAND và OR đảo, giữa cổng NOR và AND đảo.
- Ứng dụng định lý DeMorgan để tối thiểu hoá hàm Boole

- Định lý DeMorgan 1: Phủ định của 1 tích tương đương với tổng của phủ định các biến thành phần

$$\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}$$



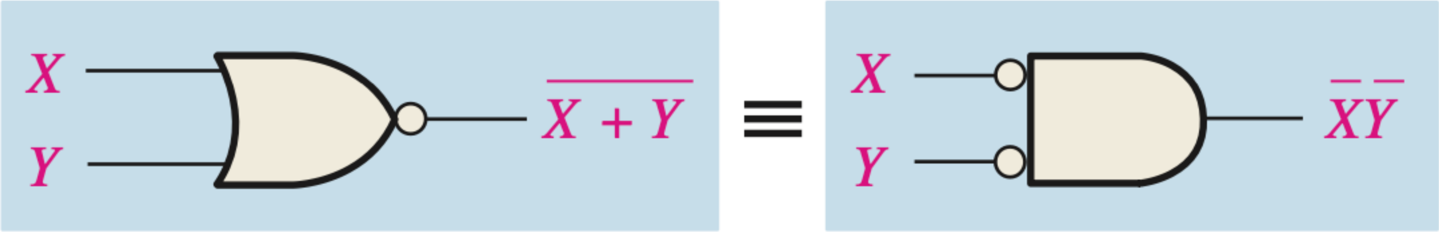
NAND　　Negative-OR

X	Y	$\overline{XY}$	$\overline{X} + \overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Định lý DeMorgan

- Định lý DeMorgan 2: Phủ định của 1 tổng tương đương với tích của phủ định các biến thành phần

$$\overline{X + Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$$



NOR Negative-AND

X	Y	$\overline{X+Y}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Ví dụ 6.2 Áp dụng định lý DeMorgan

- Áp dụng định lý DeMorgan để phân tích biểu thức sau:

$$\overline{\overline{A + B\overline{C}} + D(\overline{E + \overline{F}})}$$

- Bước 1: Xác định các thành phần có thể áp dụng định lý DeMorgan, coi mỗi thành phần như một biến đơn.

Đặt: $\overline{A + B\overline{C}} = X$ $\qquad$ $D(\overline{E + \overline{F}}) = Y$

- Bước 2: Áp dụng định lý DeMorgan: $\overline{X + Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$

$$\overline{(\overline{A + B\overline{C}}) + (D(\overline{E + \overline{F}}))} = \overline{\overline{(A + B\overline{C})}}\,\overline{(D(\overline{E + \overline{F}}))}$$

Ví dụ 6.2 Áp dụng định lý DeMorgan

- Bước 2: $\overline{\overline{(A + B\overline{C})}}\,\overline{(D\overline{(E + \overline{F})})}$
- Bước 3: Áp dụng luật 9 $(\overline{\overline{A}} = A)$ cho thừa số bên trái:

$$\overline{\overline{(A + B\overline{C})}}\,\overline{(D\overline{(E + \overline{F})})} = (A + B\overline{C})\overline{(D\overline{(E + \overline{F})})}$$

- Bước 4: Tiếp tục áp dụng định lý DeMorgan cho thừa số bên phải:

$$(A + B\overline{C})\overline{(D\overline{(E + \overline{F})})} = (A + B\overline{C})(\overline{D} + \overline{\overline{(E + \overline{F})}})$$

- Bước 5: Tiếp tục áp dụng luật 9 $(\overline{\overline{A}} = A)$

$$(A + B\overline{C})(\overline{D} + \overline{\overline{E + \overline{F}}}) = (A + B\overline{C})(\overline{D} + E + \overline{F})$$

Ví dụ 6.3:

- Áp dụng định lý DeMorgan để phân tích các biểu thức sau:

(a) $\overline{(A + B + C)D}$

(b) $\overline{ABC + DEF}$

(c) $\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF}$

(d) $\overline{\overline{(A + B)} + \overline{C}}$

(e) $\overline{(\overline{A} + B) + CD}$

(f) $\overline{(A + B)\overline{C}\,\overline{D} + E + \overline{F}}$

Bài tập 6.1

- Tìm giá trị của X với tất cả các tổ hợp giá trị của các biến sau:

(a) $X = A + B + C$

(b) $X = (A + B)C$

(c) $X = (A + B)(\overline{B + C})$

(d) $X = (A + B) + (\overline{AB + BC})$

(e) $X = (\overline{A} + \overline{B})(A + B)$

Bài tập 6.2

- Chứng minh các biểu thức sau:

$$\text{(a)}\quad A + AB + ABC + \overline{ABCD} = \overline{ABCD} + ABC + AB + A$$

$$\text{(b)}\quad A + \overline{AB} + ABC + \overline{ABCD} = \overline{DCBA} + CBA + \overline{BA} + A$$

$$\text{(c)}\quad AB(CD + \overline{CD} + EF + \overline{EF}) = ABCD + AB\overline{CD} + ABEF + AB\overline{EF}$$

Bài tập 6.3

- Chứng minh các biểu thức sau:

$$\text{(a)}\quad \overline{\overline{AB + CD}} + \overline{EF} = AB + CD + \overline{EF}$$

$$\text{(b)}\quad A\overline{A}B + AB\overline{C} + AB\overline{B} = AB\overline{C}$$

$$\text{(c)}\quad A(BC + BC) + AC = A(BC) + AC$$

$$\text{(d)}\quad AB(C + \overline{C}) + AC = AB + AC$$

$$\text{(e)}\quad A\overline{B} + A\overline{B}C = A\overline{B}$$

$$\text{(f)}\quad ABC + \overline{AB} + \overline{ABC}D = ABC + \overline{AB} + D$$

Bài tập 6.4

- Áp dụng định lý DeMorgan để phân tích biểu thức sau:

(a) $\overline{A\overline{B}(C+\overline{D})}$

(b) $\overline{AB(CD+EF)}$

(c) $\overline{(A+\overline{B}+C+\overline{D})}+\overline{ABC\overline{D}}$

(d) $\overline{\overline{(\overline{A}+B+C+D)}\;\overline{(A\overline{B}\,\overline{C}D)}}$

(e) $\overline{\overline{AB}(CD+\overline{E}F)(\overline{AB}+\overline{CD})}$

Bài tập 6.5

- Áp dụng định lý DeMorgan để phân tích biểu thức sau:

(a) $\overline{\overline{(\overline{ABC})(\overline{EFG})} + \overline{(\overline{HIJ})(\overline{KLM})}}$

(b) $\overline{(A + B\overline{C} + CD)} + \overline{\overline{BC}}$

(c) $\overline{\overline{(\overline{A + B})(\overline{C + D})(\overline{E + F})(\overline{G + H})}}$

Chương 6 Đại số Boole và các cổng logic cơ bản

6.1 Đại số Boole

6.2 Các định lý cơ bản

6.3 Các phương pháp tối thiểu hóa hàm logic

Tài liệu tham khảo:

- ***Digital electronics: Principles, Devices, and Applications, Anil Kumar Maini 2007 John Wiley & Sons***
- ***Fundamentals of Logic Design, Seventh Edition, Charles H. Roth, Jr. and Larry L. Kinney***
- ***Digital Fundamentals, Thomas L. Floyd, Eleventh Edition, Pearson Education Limited 2015***

6.3 Các phương pháp tối thiểu hóa hàm logic

- Một hàm logic được gọi là tối thiểu hoá nếu như nó có số lượng số hạng ít nhất và số lượng biến ít nhất.
- Mục đích:
  - Mỗi hàm logic có thể được biểu diễn bằng các biểu thức logic khác nhau.
  - Mỗi 1 biểu thức logic có một mạch thực hiện tương ứng với nó.
  - Biểu thức logic càng đơn giản thì mạch thực hiện càng đơn giản.
- Các phương pháp để tối thiểu hoá hàm logic:
  - Phương pháp đại số
  - Phương pháp bảng Karnaugh
  - Phương pháp Quine Mc. Cluskey

Tối thiểu hoá bằng phương pháp đại số

- Một biểu thức logic có thể được tối thiếu hoá về dạng đơn giản nhất hoặc thay đổi thành dạng thuật tiện hơn để triển khai biểu thức một cách hiệu quả nhất bằng đại số Boole.
- Có thể sử dụng các tiên đề, định lý, định luật cơ bản để thao tác và đơn giản hoá một biểu thức.
- Phương pháp này đòi hỏi phải nắm vững kiến thức về đại số Boole; thao tác tính toán nhiều.

Ví dụ 6.4: Tối thiểu hoá bằng phương pháp đại số

- Sử dụng đại số Boole tối thiểu hoá hàm sau:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

- Bước 1: Áp dụng luật phân phối cho thừa số thứ 2 và 3:

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

- Bước 2: Áp dụng luật 7 $(BB = B)$

$$AB + AB + AC + B + BC$$

Ví dụ 6.4: Tối thiểu hoá bằng phương pháp đại số

- Bước 2: $AB + AB + AC + B + BC$

- Bước 3: Áp dụng luật 5 $(AB + AB = AB)$

$$AB + AC + B + BC$$

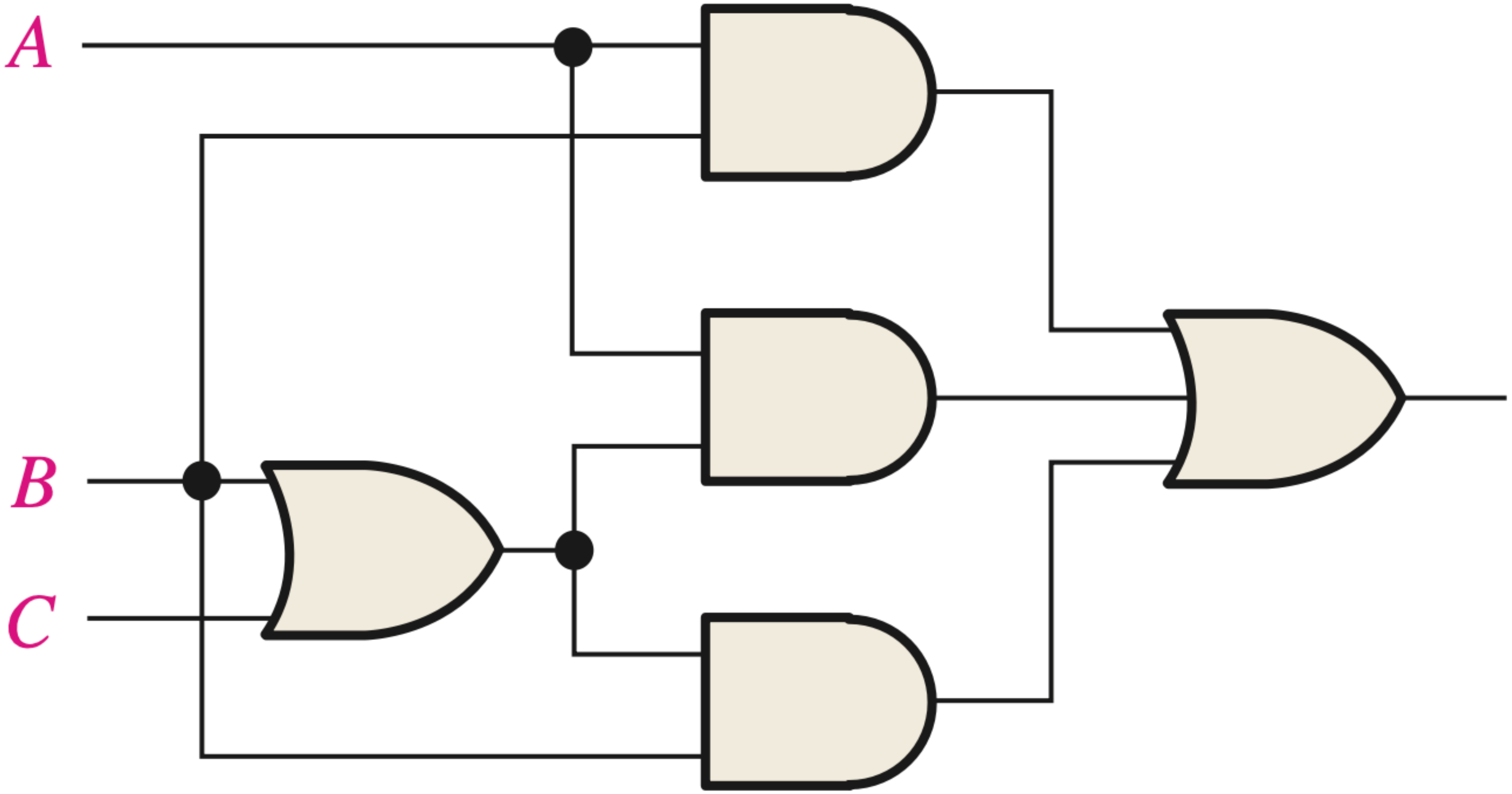
- Bước 4: Áp dụng luật 10 $(B + BC = B)$

$$AB + AC + B$$

- Bước 5: Áp dụng luật 10 $(AB + B = B)$

$$B + AC$$

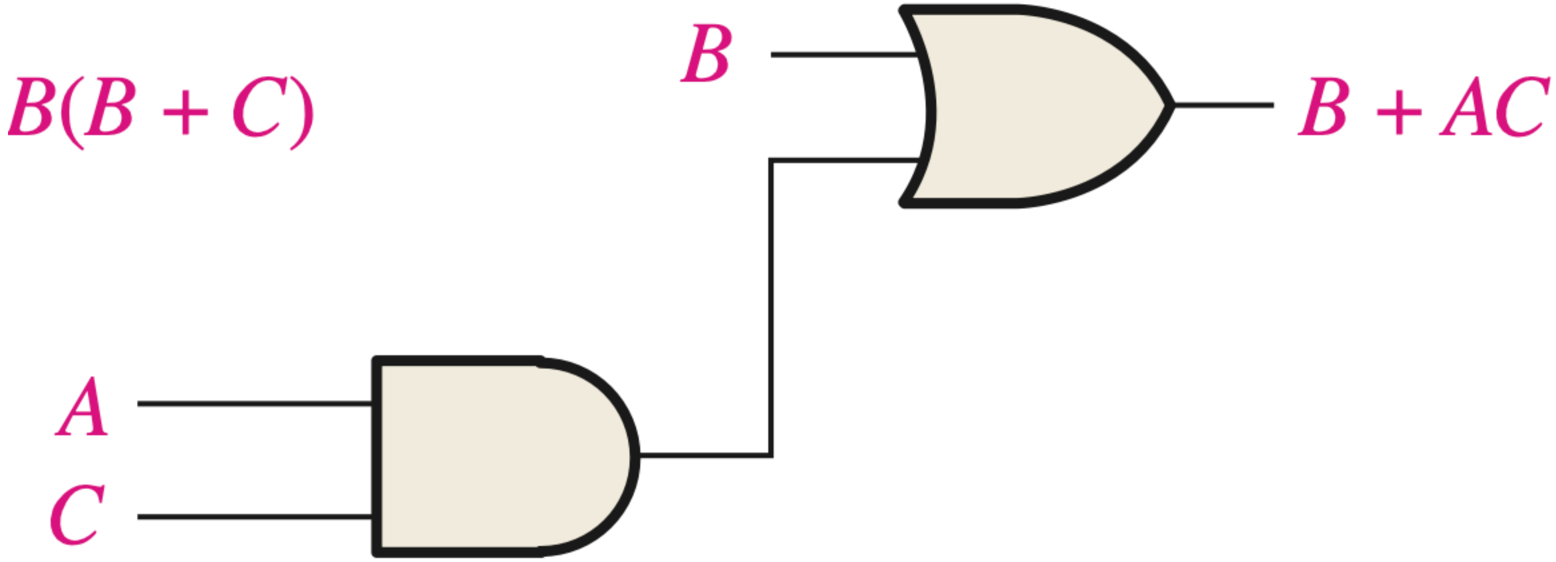
- Mạch ban đầu:



$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

Ví dụ 6.4: Tối thiểu hoá bằng phương pháp đại số

- Mạch tương đương sau khi tối thiểu hoá:



Phương pháp tối thiểu hoá sử dụng bảng (bìa) Karnaugh

Khái niệm:

- Dạng tổng các tích (SOP sum-of-products)
- Dạng tổng các tích chuẩn (dạng tuyển)
- Dạng tích các tổng (POS product-of-sums)
- Dạng tích các tổng chuẩn (dạng hội)

Dạng tổng các tích (SOP sum-of-products)

- Khi hai hay nhiều tích (phép nhân đại số Boole) được cộng lại với nhau bằng phép cộng đại số Boole thì được gọi là dạng tổng các tích.

  Ví dụ: $AB + ABC$

  $$ABC + CDE + \overline{B}C\overline{D}$$

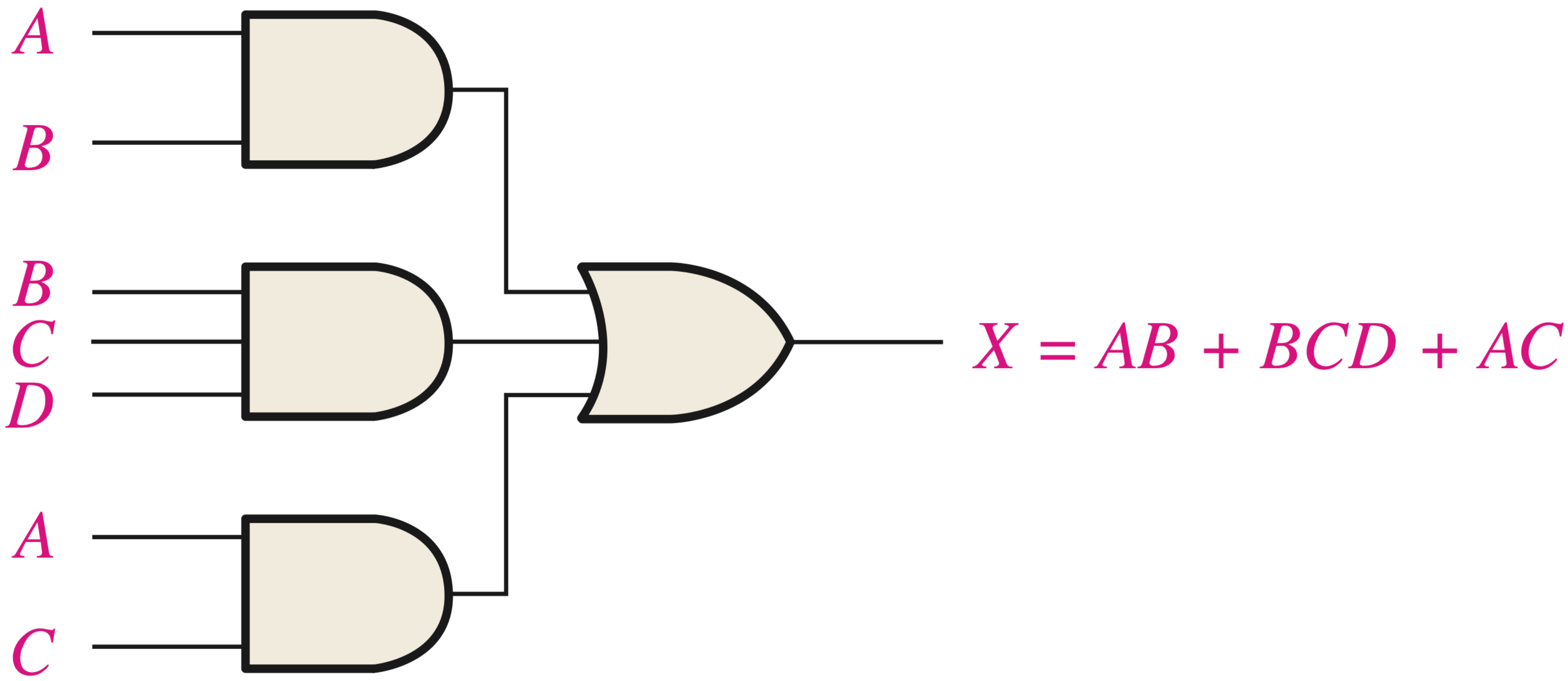
  $$\overline{A}B + \overline{A}B\overline{C} + AC$$

  $$A + \overline{A}\,\overline{B}C + BC\overline{D}$$

- Dạng tổng các tích cho phép dạng bù của một biến đơn (ví dụ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$) chứ không phải dạng bù của nhiều biến (ví dụ $\overline{ABC}$).

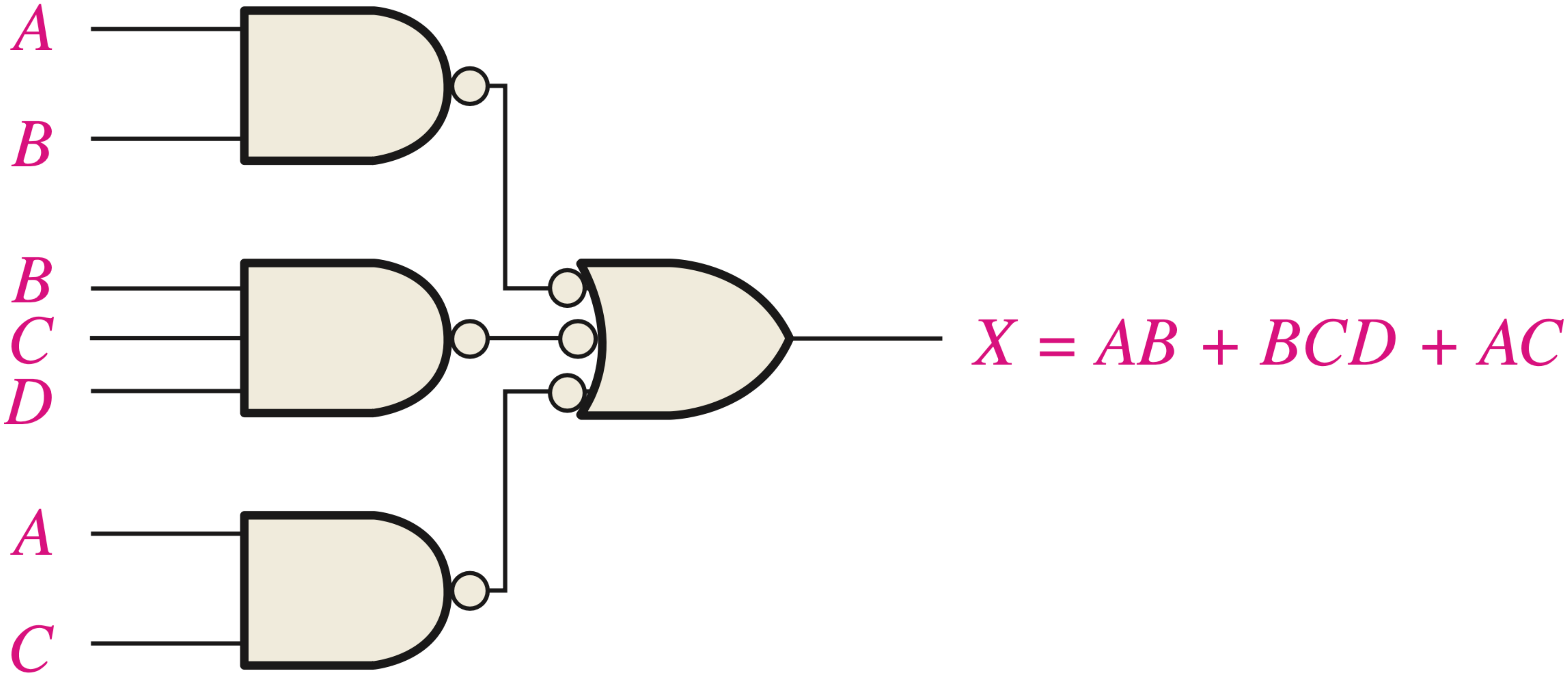
Dạng tổng các tích (SOP sum-of-products)

- Triển khai mạch với các biểu thức ở dạng tổng các tích sử dụng cổng AND/OR:



Dạng tổng các tích (SOP sum-of-products)

- Triển khai mạch với các biểu thức ở dạng tổng các tích sử dụng cổng NAND:



Dạng tổng các tích chuẩn (dạng tuyển)

- Dạng tổng các tích chuẩn (dạng tuyển) là dạng tổng các tích mà trong đó tất cả các biến đều có mặt trong mỗi thành phần.

  Ví dụ: $A\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D}$ …

- Dạng tổng các tích chuẩn được sử dụng trong phương pháp tối thiểu hoá sử dụng bảng Karnaugh.
- Nếu hàm logic chưa ở dưới dạng tổng các tích chuẩn, cần phải chuyển hàm logic đó về dạng tổng các tích chuẩn sử dụng luật 6: $(A + \overline{A} = 1)$

  Ví dụ: $A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B} + AB\overline{C}D$

  $$A\overline{B}C = A\overline{B}C(D + \overline{D}) = A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

- Dạng tổng các tích chuẩn:

$$A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D$$

Dạng tích các tổng (POS product-of-sums)

- Khi hai hay nhiều tổng (tổng của phép cộng đại số Boole) được nhân với nhau bởi phép nhân đại số Boole thì được gọi là dạng tích của các tổng.

Ví dụ: $(\overline{A} + B)(A + \overline{B} + C)$

$$(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(C + \overline{D} + E)(\overline{B} + C + D)$$

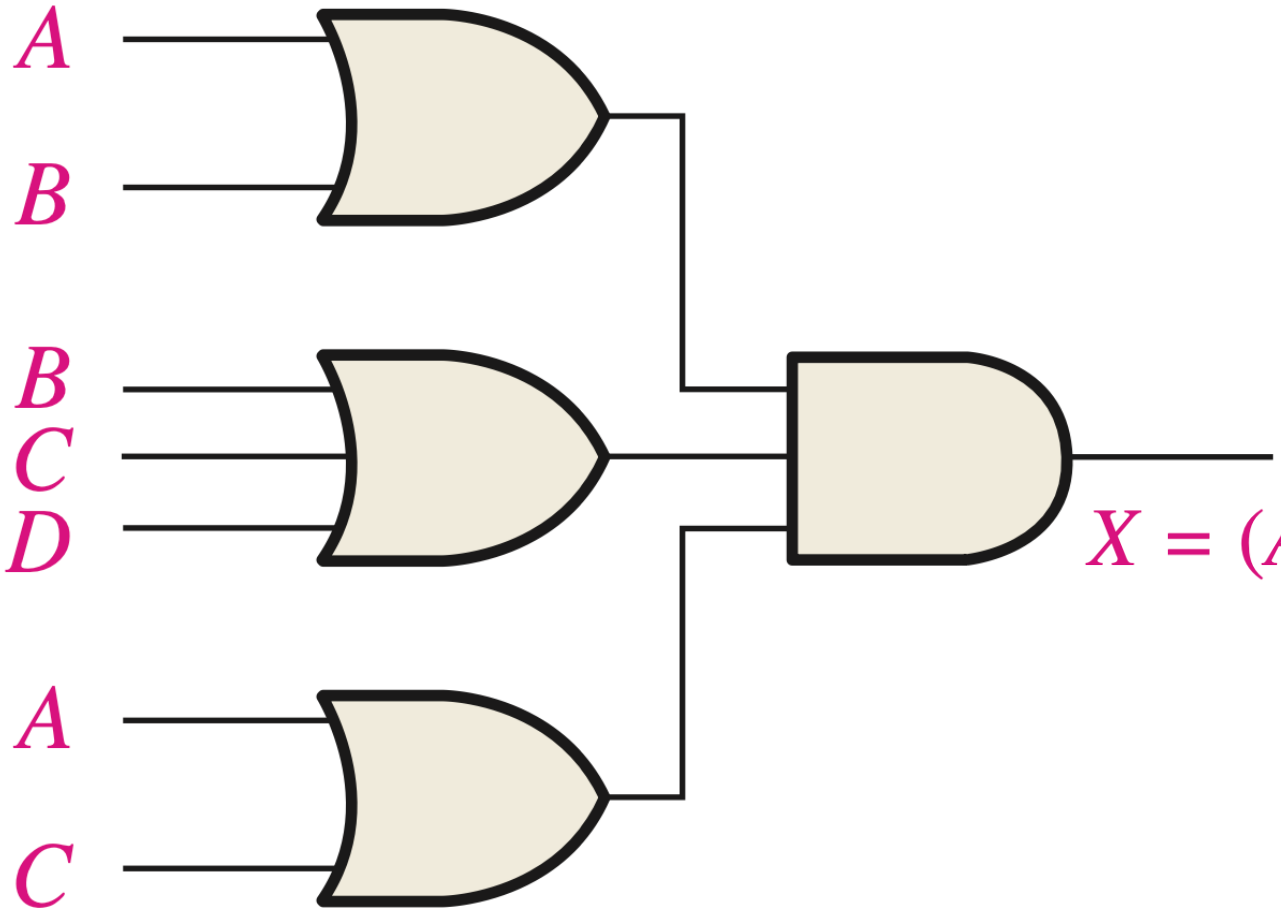
$$(A + B)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + C)$$

$$\overline{A}(A + \overline{B} + C)(\overline{B} + \overline{C} + D)$$

- Dạng tích các tổng cho phép dạng bù của một biến đơn (ví dụ $\overline{A} + \overline{B}$) chứ không phải dạng bù của nhiều biến (ví dụ $\overline{A + B}$).

Dạng tích các tổng (POS product-of-sums)

- Triển khai mạch với các biểu thức ở dạng tích các tổng sử dụng cổng AND/OR:



$X = (A + B)(B + C + D)(A + C)$

Dạng tích các tổng chuẩn (dạng hội)

- Dạng tích các tổng chuẩn (dạng hội) là dạng tích các tổng mà trong đó tất cả các biến đều có mặt trong mỗi thành phần.

  Ví dụ: $(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})(A + \overline{B} + C + D)(A + B + \overline{C} + D)$

- Dạng tích các tổng chuẩn (dạng hội) được sử dụng trong phương pháp tối thiểu hoá sử dụng bảng Karnaugh.
- Nếu hàm logic chưa ở dưới dạng tích các tổng chuẩn, cần phải chuyển hàm logic đó về dạng tích các tổng chuẩn sử dụng luật 8: $(A \cdot \overline{A} = 0)$

  Ví dụ: $(A + \overline{B} + C)(\overline{B} + C + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{C} + D)$

  $$A + \overline{B} + C = A + \overline{B} + C + D\overline{D} = (A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + C + \overline{D})$$

- Dạng tích các tổng chuẩn:

$$(A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + C + \overline{D})(A + \overline{B} + C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{C} + D)$$

Biểu diễn hàm tổng các tích trên bảng thật

- Một tổng bằng 1 khi và chỉ khi 1 thừa số trong tổng đó có giá trị bằng 1.

  Ví dụ: biểu diễn hàm sau trên bảng thật: $\overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$

A	B	C	X	Tích
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

Biểu diễn hàm POS trên bảng thật

- Một tích bằng 0 khi và chỉ khi ít nhất một thừa số bằng 0.

$$(A + B + C)(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

A	B	C	X	Tổng
0	0	0	0	$(A + B + C)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(A + \overline{B} + C)$
0	1	1	0	$(A + \overline{B} + \overline{C})$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$(\overline{A} + B + \overline{C})$
1	1	0	0	$(\overline{A} + \overline{B} + C)$
1	1	1	1	

Biểu diễn chuẩn từ bảng thật

- Viết dạng SOP từ bảng thật:

A	B	C	X	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{A}BC$
1	0	0	1	$\longrightarrow A\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$\longrightarrow AB\overline{C}$
1	1	1	1	$\longrightarrow ABC$

$$X = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Biểu diễn chuẩn từ bảng thật

- Viết dạng POS từ bảng thật:

A	B	C	X	
0	0	0	0	$\longrightarrow A + B + C$
0	0	1	0	$\longrightarrow A + B + \overline{C}$
0	1	0	0	$\longrightarrow A + \overline{B} + C$
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\longrightarrow \overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

$$X = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$$

Bảng Karnaugh

- Là cách biểu diễn tương đương của bảng trạng thái, biểu diễn tất cả tổ hợp giá trị của các biến đầu vào và đầu ra tương ứng, trong đó:
  - Mỗi ô tương ứng với 1 dòng của bảng thật.
  - Một hàm logic n biến có 2^n ô.
  - Các tổ hợp biến được viết theo 1 dòng và 1 cột , do đó, tọa độ của ô xác định giá trị của tổ hợp biến đầu vào.
  - Giá trị của hàm được ghi vào ô tương ứng. Mỗi ô thể hiện 1 hạng tích hay một hạng tổng.
- Các ô được sắp xếp sao cho việc tối thiểu hoá một hàm chỉ đơn giản là việc nhóm các ô lại với nhau.
- Thường được dùng để rút gọn những hàm không vượt quá 5 biến.

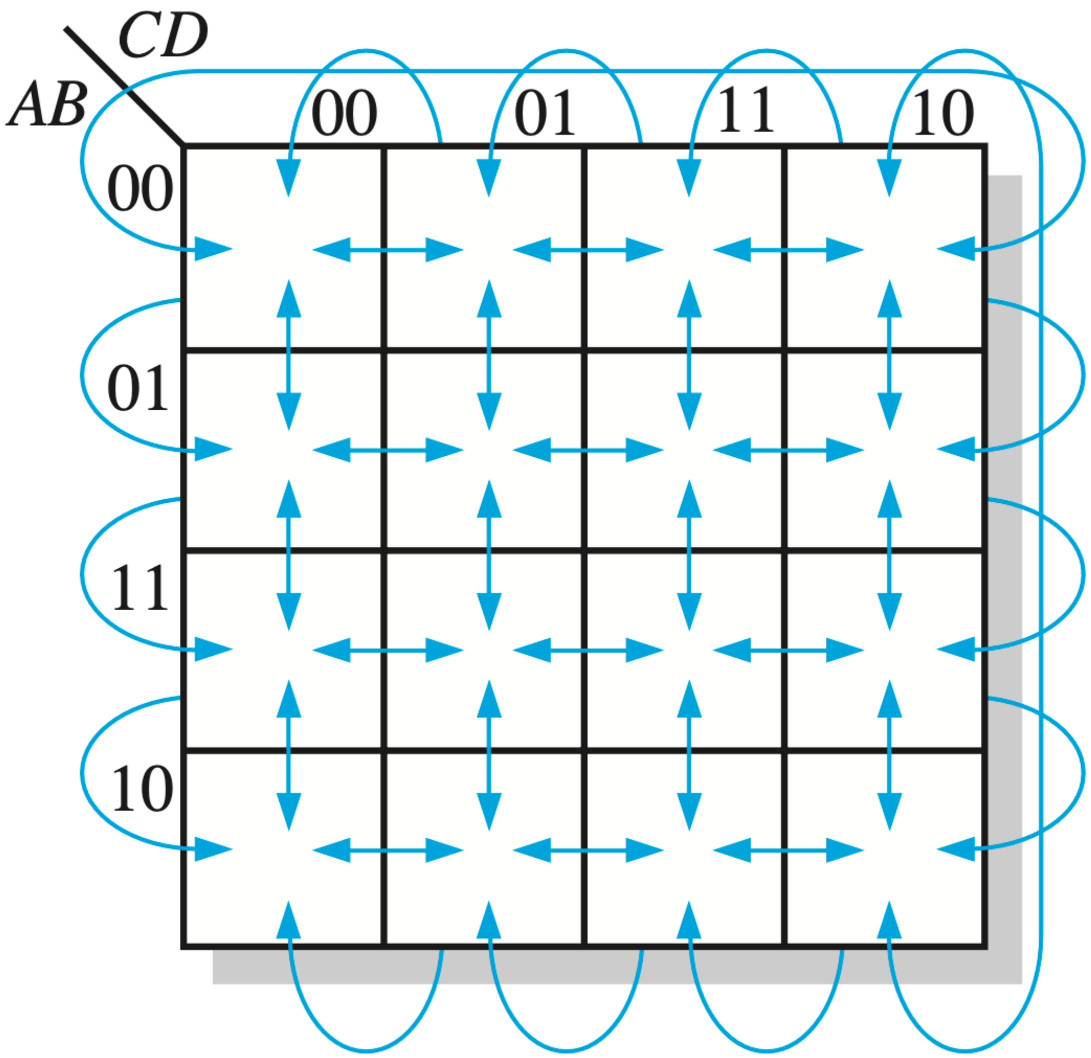
A \ B	0	1
0		
1		

A \ BC	00	01	11	10
0				
1				

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tính tuần hoàn của bảng Karnaugh

- Các ô trong một bảng Karnaugh được sắp xếp sao cho các ô cạnh nhau chỉ sai khác nhau 1 giá trị.
- Các ô đầu dòng và cuối dòng, đầu cột và cuối cột khác nhau 1 biến nên cũng được gọi là các ô kế cận.
- Các ô ở cột ngoài cùng bên trái cũng kế cận với các ô tương ứng ở cột ngoài cùng bên phải.
- Có thể thiết lập bảng Karnaugh dưới dạng tuyển (SOP) hoặc hội (POS) chuẩn.



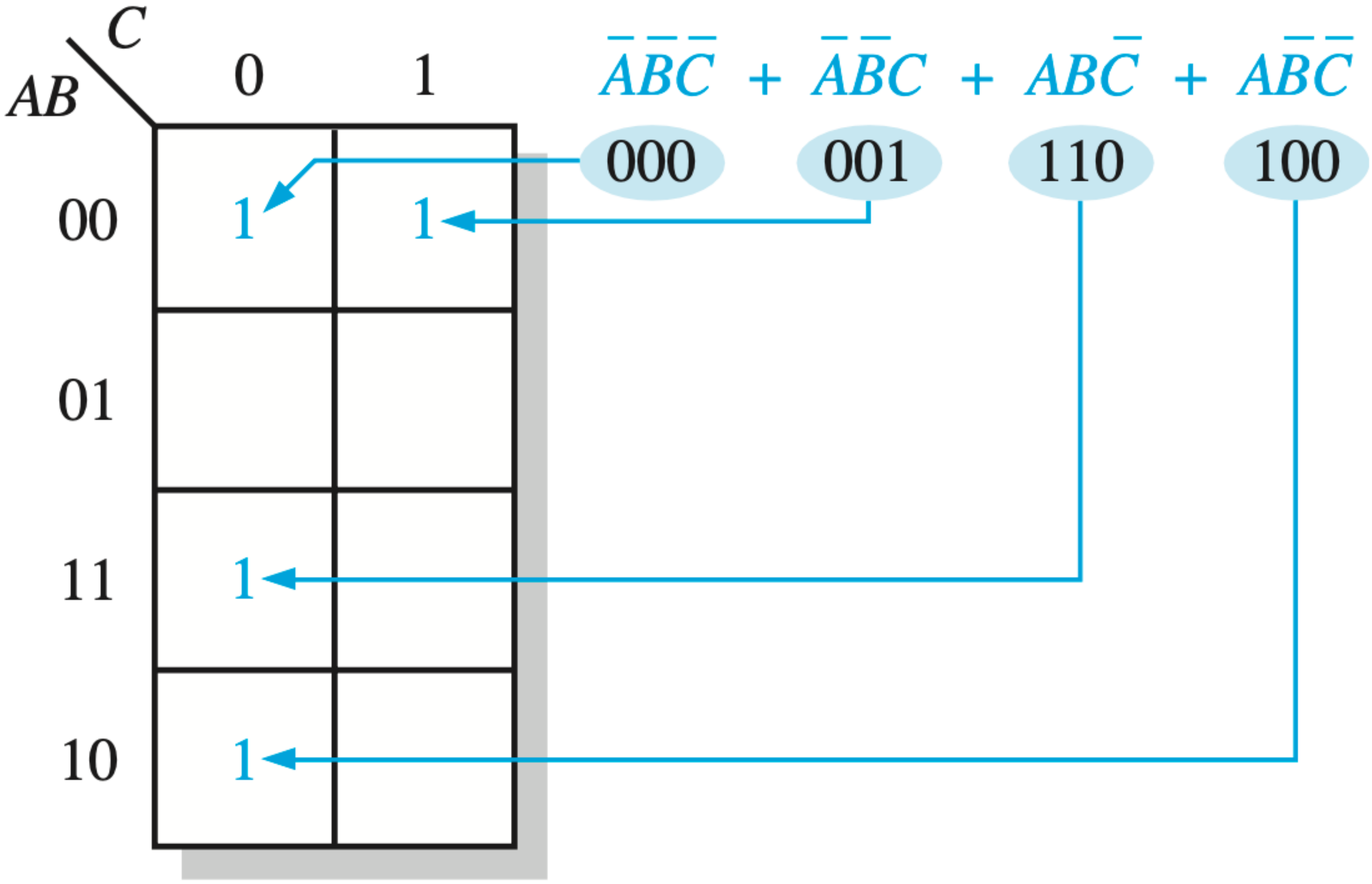
- Dạng tổng quát:

$$f(X_{n-1},\ldots,X_0)=\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i m_i$$

a_i: nhận giá trị 0 hoặc 1

- Mỗi hạng tích có mặt sẽ nhận giá trị 1 trên ô tương ứng có cùng giá trị với số hạng đó.
- Các ô còn lại lấy giá trị 0.

- Bảng Karnaugh dưới dạng tổng các tích

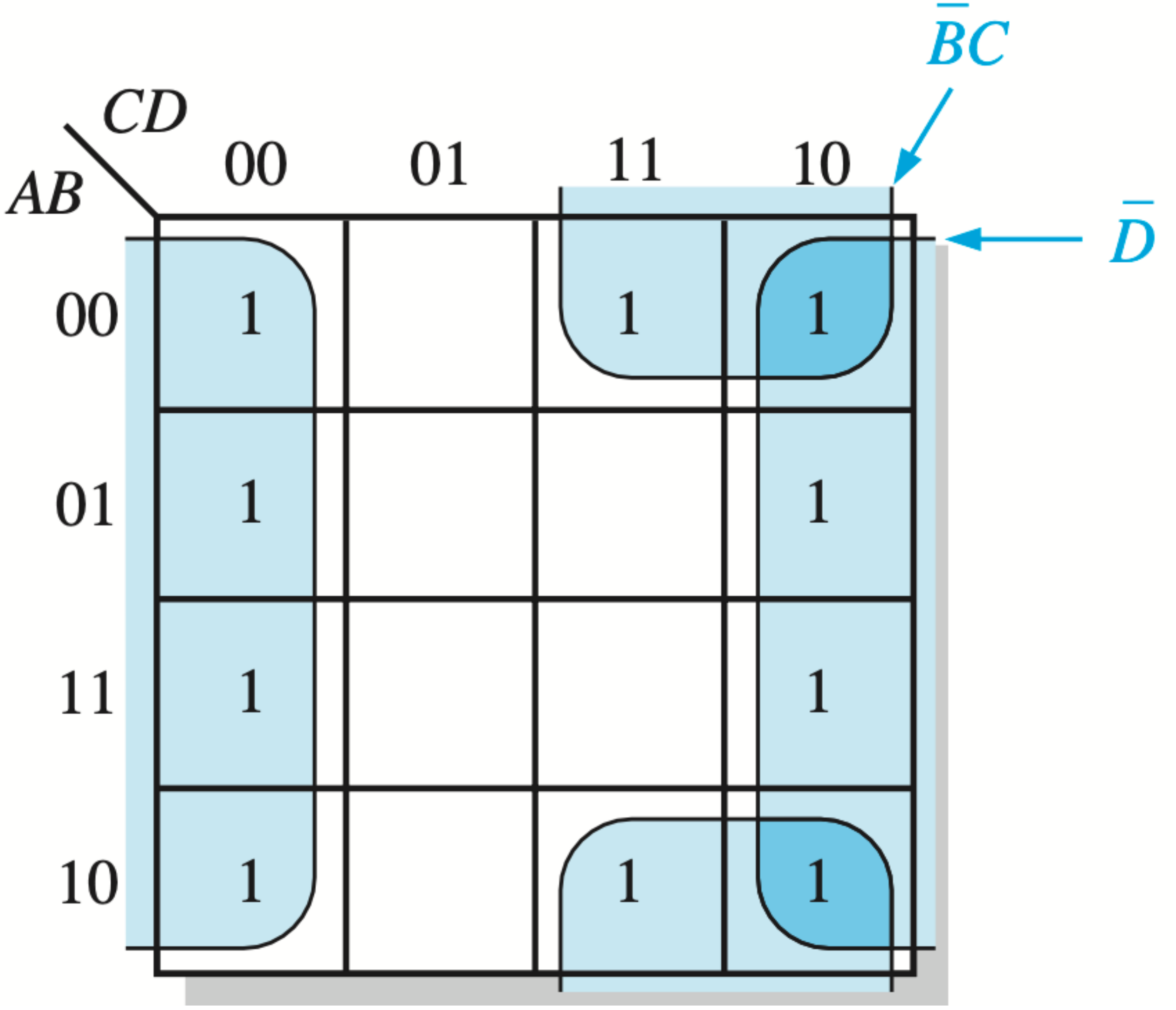


Tối thiểu hoá bảng Karnaugh dưới dạng tuyển chuẩn

Các bước tối thiểu hoá:

- Gộp các ô kế cận có giá trị ‘1’ thành nhóm 2, 4, …., 2^i ô.
- Hai ô liền kề nhóm lại thì triệt tiêu được 1 biến (biến và bù của biến đó ở hai ô liền kề).
- Số ô trong mỗi nhóm càng lớn thì kết quả thu được càng tối giản.
- Một ô có thể được gộp nhiều lần trong các nhóm khác nhau.

- Tối thiểu hoá theo hạng tích:



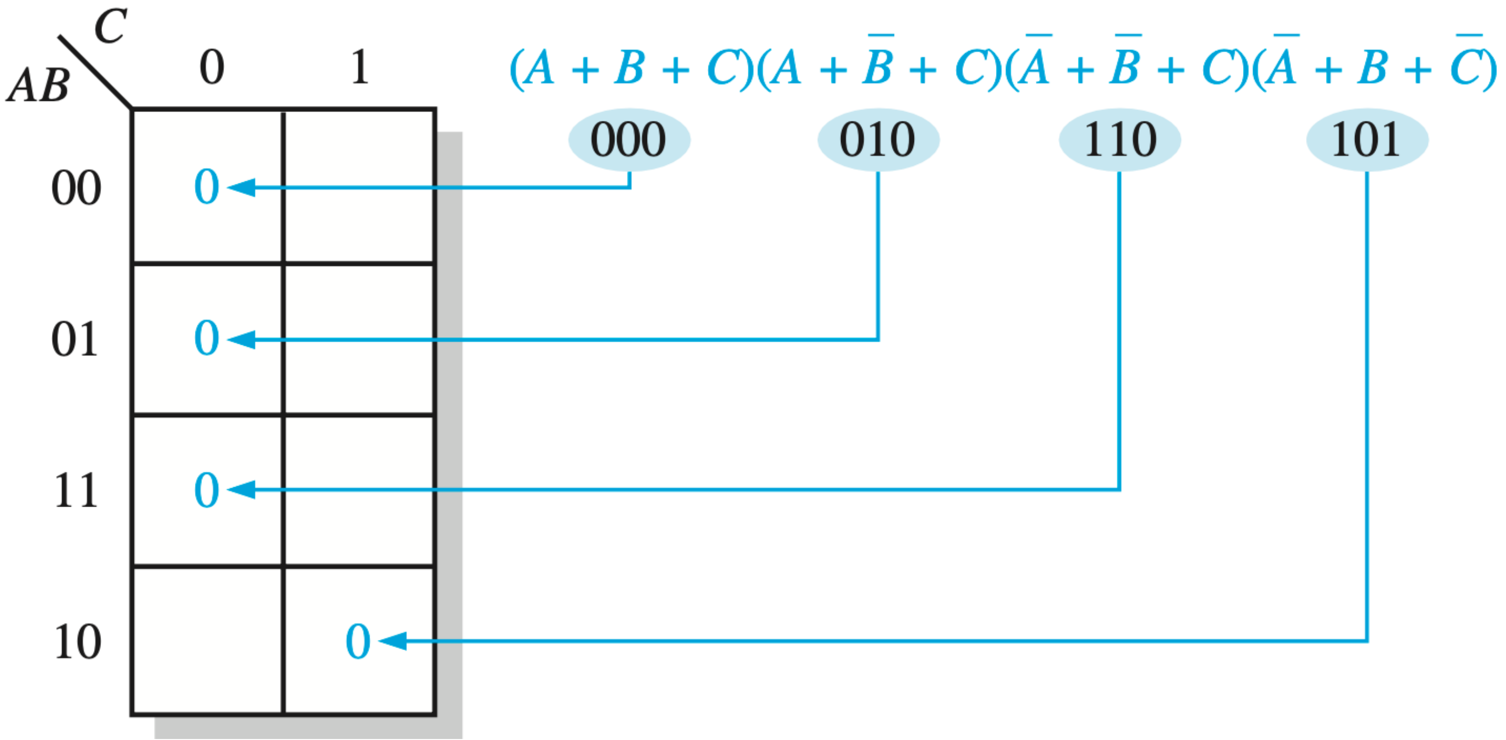
- Dạng tổng quát:

$$f(X_{n-1},\ldots,X_0)=\prod_{i=0}^{2^n-1}(a_i+M_i)$$

a_i: nhận giá trị 0 hoặc 1

- Mỗi hạng tổng có mặt sẽ nhận giá trị 0 trên ô tương ứng có cùng giá trị với số hạng đó.
- Các ô còn lại lấy giá trị 1.

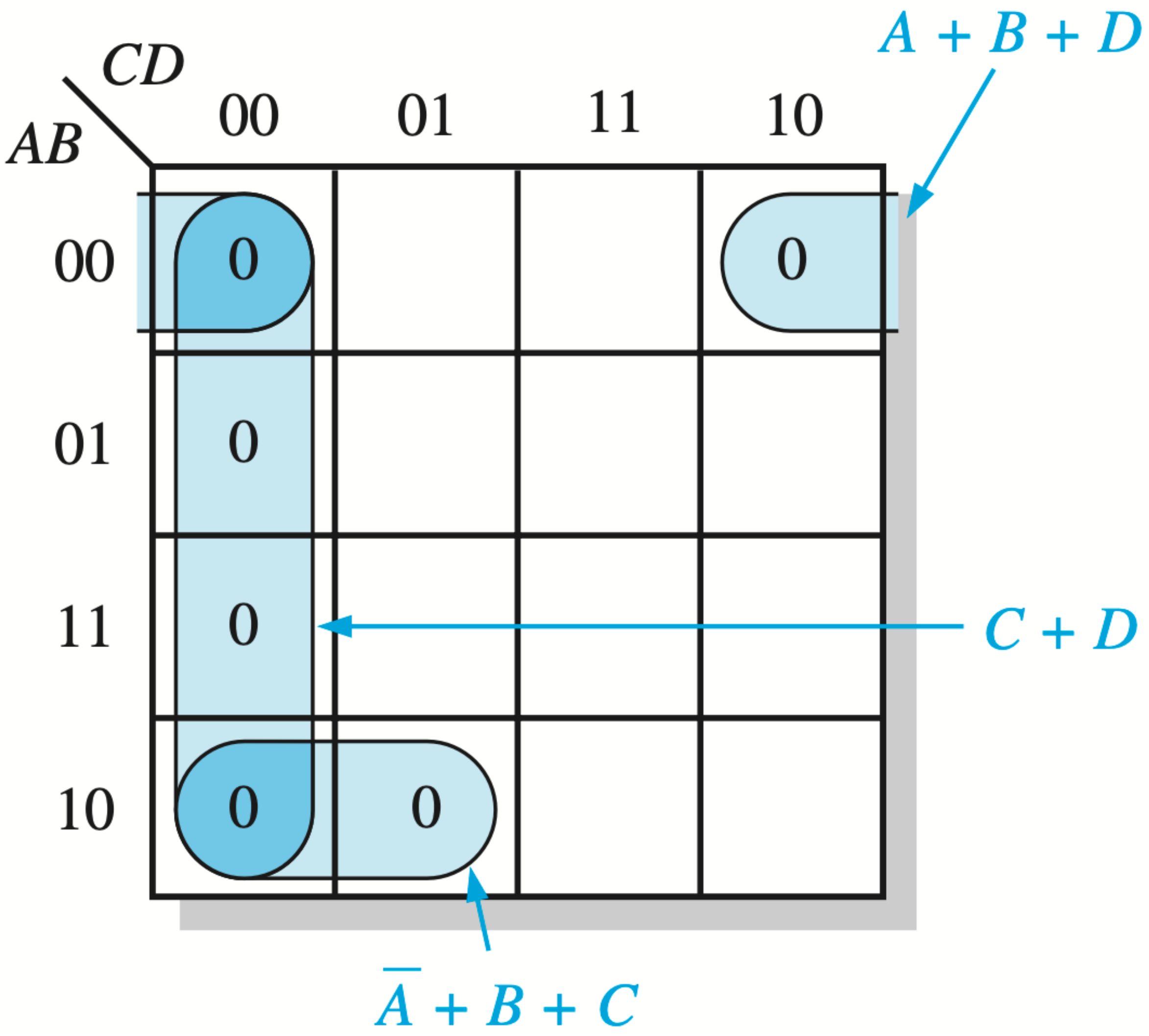
- Bảng Karnaugh dưới dạng tích các tổng



Tối thiểu hoá bảng Karnaugh dưới dạng tổng các tích

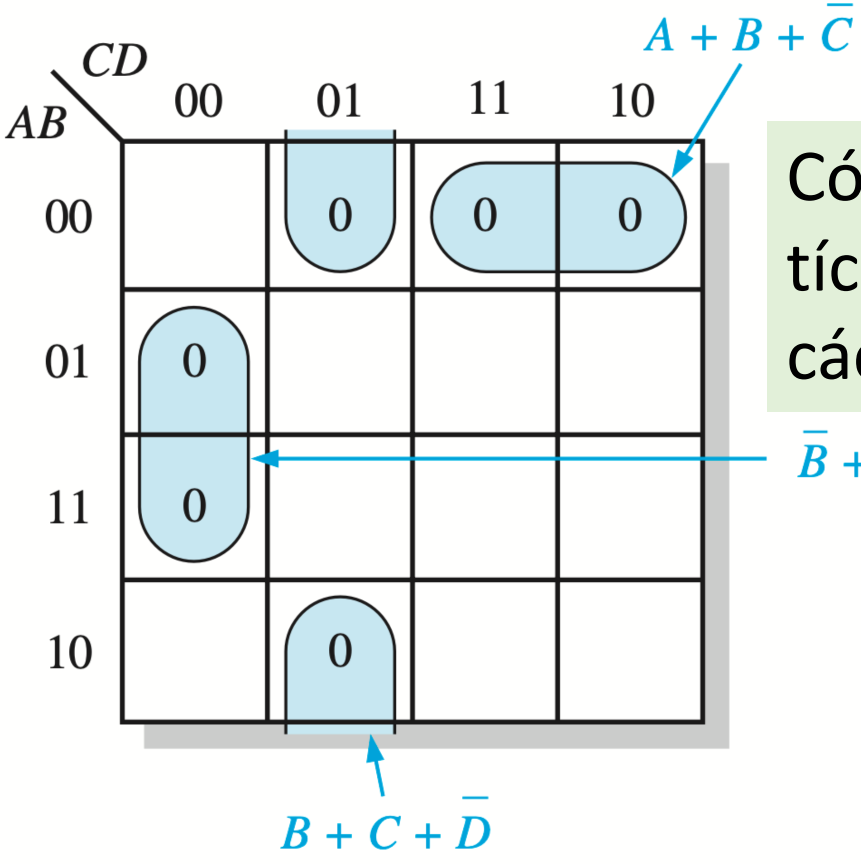
Các bước tối thiểu hoá:

- Gộp các ô kế cận có giá trị ‘0’ thành nhóm 2, 4, …., 2^i ô.
- Hai ô liền kề nhóm lại thì triệt tiêu được 1 biến (biến và bù của biến đó ở hai ô liền kề).
- Số ô trong mỗi nhóm càng lớn thì kết quả thu được càng tối giản.
- Một ô có thể được gộp nhiều lần trong các nhóm khác nhau.

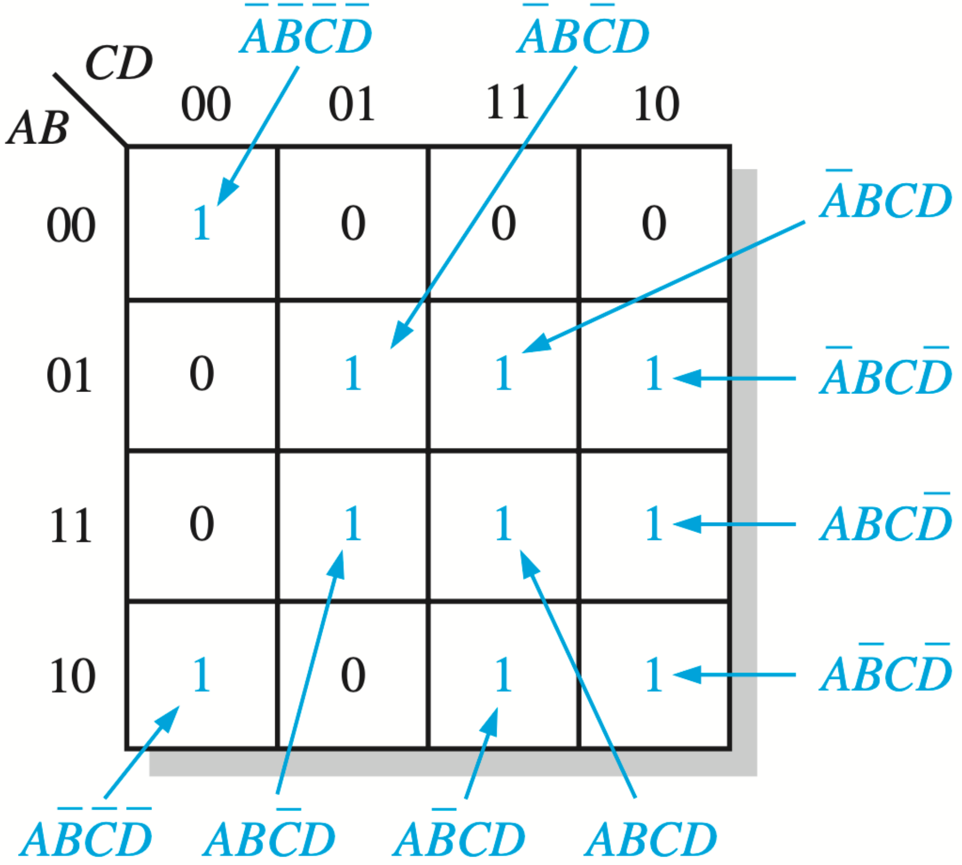


Chuyển đổi giữa hai dạng biểu diễn: tổng các tích và tích các tổng

- Dạng tích các tổng nhóm các ô chứa giá trị 0.
- Dạng tích các tổng nhóm các ô chứa giá trị 1.



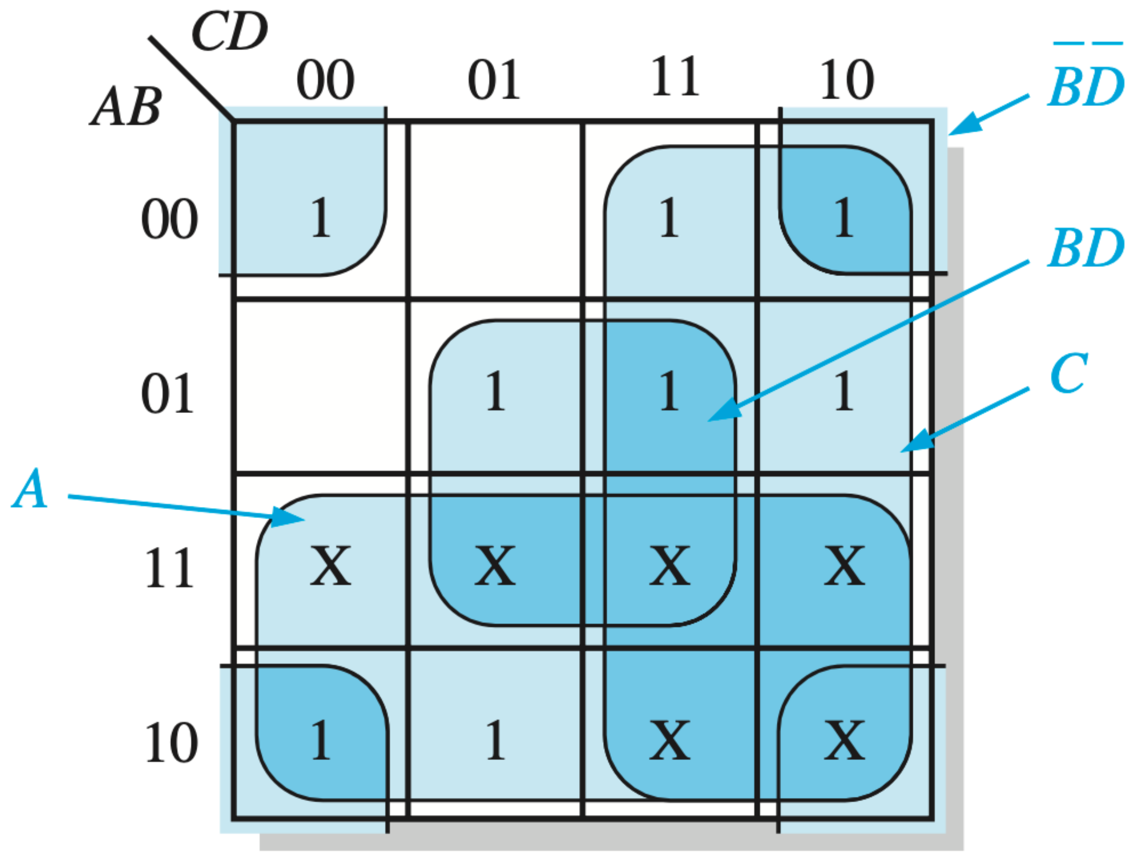
Có thể chuyển từ dạng tích các tổng sang tổng các tích và ngược lại



Tối thiểu hoá bảng Karnaugh

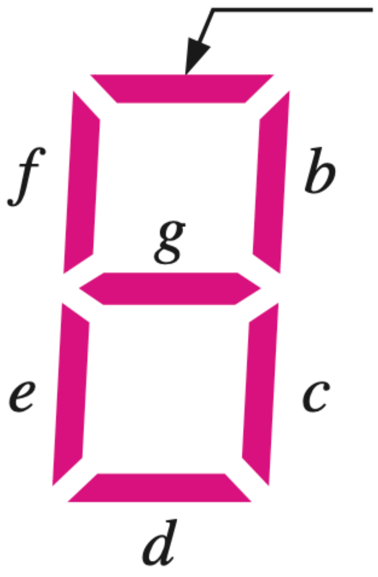
- Trong một số trường hợp, có thể xuất hiện một số tổ hợp biến đầu vào không được phép.
- Các tổ hợp biến đó có thể gọi là các tổ hợp biến ở trạng thái "không quan tâm" (don't care), nghĩa là có thể gán 1 hoặc 0 cho đầu ra.
- Các giá trị này không ảnh hưởng vì các tổ hợp này sẽ không xảy ra.
- Do đó, có thể sử dụng các tổ hợp này để nhóm sao cho số ô gộp lại là lớn nhất.

- Tối thiểu hoá sử dụng các trạng thái "không quan tâm"



Ví dụ 6.5

- Đèn LED 7 thanh bao gồm 7 đèn led bố trí như hình sau:



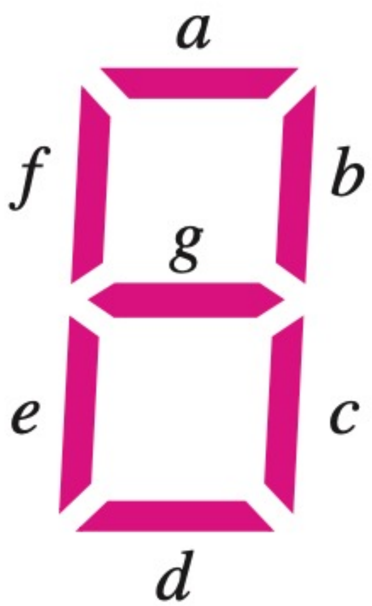
Thanh : a

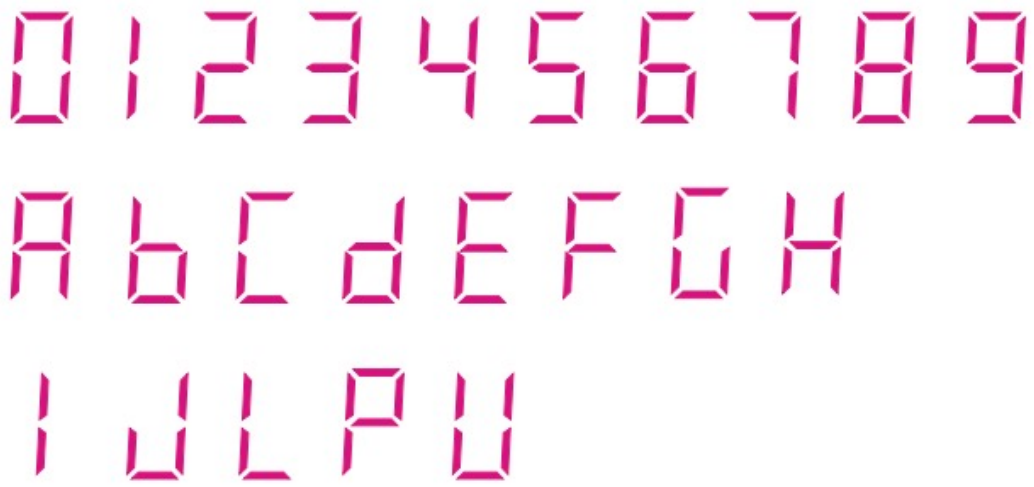
$$a = A + C + BD + \overline{B}\,\overline{D}$$

- Khi muốn hiển thị số nào thì đèn led tương ứng sẽ được kích hoạt. Mỗi số từ 0-9 được biểu thị bởi một mã BCD, hãy tìm biểu diễn dạng SOP cho thanh a sử dụng các biến ABCD, sau đó tối thiểu hoá sử dụng bảng Karrnaugh.

Bài tập 6.6

- Cho đèn LED 7 thanh, cách hiển thị các chữ số từ 0-9 và các chữ cái như sau:





- Tìm hàm biểu diễn tối thiểu hoá cho các thanh từ a - g

Tối thiểu hoá bằng phương pháp Quine Mc. Cluskey

- Tối thiểu hoá được hàm nhiều biến và có thể tiến hành nhờ máy tính.
- Quy tắc tối thiểu hoá dựa vào tính chất phân phối của đại số Boole cho các hạng tích khác nhau để triệt tiêu một biến và bù của biến đó.

  Ví dụ: $ABCD + ABC\overline{D} = ABC$
- Các bước tối thiểu hoá bằng phương pháp Quine Mc. Cluskey:
  - Viết lại hàm về dạng tổng các tích chuẩn
  - Lập bảng liệt kê các hạng tích dưới dạng nhị phân theo từng nhóm có số bit 1 giống nhau và xếp theo số bit 1 tăng dần.
  - Gộp 2 hạng tích của mỗi cặp nhóm chỉ khác nhau 1 bit để tạo các nhóm mới. Trong mỗi nhóm mới, giữ lại các biến giống nhau, biến bỏ đi thay bằng một dấu ngang (-). Đánh dấu vào các cặp ghép được.
  - Lặp lại cho đến khi trong các nhóm tạo thành không có khả năng gộp nữa. Đánh dấu vào các cặp ghép được.
  - Các cặp/hạng tích không đánh dấu trong mỗi lần rút gọn sẽ được tập hợp lại để lựa chọn biểu thức tối giản.

Tối thiểu hoá bằng phương pháp Quine Mc. Cluskey

- Tối thiểu hoá hàm sau bằng phương pháp Quine Mc. Cluskey:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABD$$

- Bước 1: Viết lại hàm về dạng SOP chuẩn

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABCD$$

- Biểu diễn giá trị nhị phân của các hạng tích trên bảng thật, các hạng tích có mặt trong hàm xuất hiện ở cột bên phải của bảng.

$ABCD$	Hạng tích	X	Hạng tích
0000	m_0	0	
0001	m_1	1	m_1
0010	m_2	0	
0011	m_3	1	m_3
0100	m_4	1	m_4
0101	m_5	1	m_5
0110	m_6	0	
0111	m_7	0	
1000	m_8	0	
1001	m_9	0	
1010	m_{10}	1	m_{10}
1011	m_{11}	0	
1100	m_{12}	1	m_{12}
1101	m_{13}	1	m_{13}
1110	m_{14}	0	
1111	m_{15}	1	m_{15}

- Bước 2: Lập bảng liệt kê các hạng tích dưới dạng nhị phân theo từng nhóm có số bit 1 giống nhau và xếp theo số bit 1 tăng dần.

Số lượng bit 1	Hạng tích	$ABCD$
1	m_1	0001
	m_4	0100
2	m_3	0011
	m_5	0101
	m_{10}	1010
	m_{12}	1100
3	m_{13}	1101
4	m_{15}	1111

Tối thiểu hoá bằng phương pháp Quine Mc. Cluskey

- Bước 3: Gộp 2 hạng tích của mỗi cặp nhóm chỉ khác nhau 1 bit để tạo các nhóm mới. Trong mỗi nhóm mới, giữ lại các biến giống nhau, biến bỏ đi thay bằng một dấu ngang (-). Đánh dấu vào các cặp ghép được.

Số lượng bit 1	Hạng tích	ABCD		Mức 1
1	m_1	0001	✓	(m_1, m_3) 00x1
	m_4	0100	✓	(m_1, m_5) 0x01
2	m_3	0011	✓	(m_4, m_5) 010x
	m_5	0101	✓	(m_4, m_{12}) x100
	m_{10}	1010		(m_5, m_{13}) x101
	m_{12}	1100	✓	(m_{12}, m_{13}) 110x
3	m_{13}	1101	✓	(m_{13}, m_{15}) 11x1
4	m_{15}	1111	✓	

Tối thiểu hoá bằng phương pháp Quine Mc. Cluskey

- Bước 4: Lặp lại cho đến khi trong các nhóm tạo thành không có khả năng gộp nữa. Đánh dấu vào các cặp ghép được.

Mức 1		Số lượng bit 1 ở mức 1	Mức 2
(m_1, m_3) 00x1		1	$(m_4, m_5, m_{12}, m_{13})$ x10x
(m_1, m_5) 0x01			$(m_4, m_5, m_{12}, m_{13})$ x10x
$\boxed{(m_4, m_5)\ 010x}$	✓		
$\boxed{(m_4, m_{12})\ x100}$	✓		
$\boxed{(m_5, m_{13})\ x101}$	✓	2	
$\boxed{(m_{12}, m_{13})\ 110x}$	✓		
(m_{13}, m_{15}) 11x1		3	

Tối thiểu hoá bằng phương pháp Quine Mc. Cluskey

- Các cặp/hạng tích không đánh dấu trong mỗi lần rút gọn sẽ được tập hợp lại để lựa chọn biểu thức tối giản:

m_{10} 1010 $\quad$ (m_1, m_3) 00x1 $\quad$ $(m_4, m_5, m_{12}, m_{13})$ x10x

(m_{13}, m_{15}) 11x1 $\quad$ (m_1, m_5) 0x01

$$X = B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}\,\overline{C}D + ABD + A\overline{B}C\overline{D}$$

- Tuy nhiên, các biểu diễn này chưa tối ưu và có thể chứa các số hạng bị trùng lặp. Do đó, ở bước cuối cùng, cần thực hiện các thao tác loại trừ số hạng bị trùng lặp.

- Bước 5: Loại trừ số hạng bị trùng lặp.
  - Gợi ý 1: Nếu 1 hạng tích/tổ hợp chỉ được đánh dấu 1 lần, hạng tích/tổ hợp tương ứng với đánh dấu đó là duy nhất và phải đưa vào hàm cuối cùng.
  - Gợi ý 2: Chọn hạng tích/tổ hợp có nhiều đánh dấu nhất

$$X = B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}D + ABD + A\overline{B}C\overline{D}$$

Các tổ hợp/hạng tích	$\cancel{m_1}$	$\cancel{m_3}$	$\cancel{m_4}$	$\cancel{m_5}$	$\cancel{m_{10}}$	$\cancel{m_{12}}$	$\cancel{m_{13}}$	$\cancel{m_{15}}$
$\boxed{B\overline{C}\ (m_4, m_5, m_{12}, m_{13})}$			✓	✓		✓	✓	
$\boxed{\overline{A}\,\overline{B}D\ (m_1, m_3)}$	✓	✓						
$\overline{A}\,\overline{C}D\ (m_1, m_5)$	✓			✓				
$\boxed{ABD\ (m_{13}, m_{15})}$							✓	✓
$\boxed{A\overline{B}C\overline{D}\ (m_{10})}$					✓			

Ví dụ 6.6

- Tối thiểu hoá hàm sau sử dụng phương pháp Quine Mc.Cluskey

$$X = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC\overline{D}$$

Bài tập 6.7

- Sử dụng bảng Karnaugh để tối thiểu hoá các biểu diễn sau về dạng SOP:

(a) $A + B\overline{C} + CD$

(b) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + ABCD + ABC\overline{D}$

(c) $\overline{A}B(\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D) + AB(\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D) + A\overline{B}\,\overline{C}D$

(d) $(\overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B})(CD + C\overline{D})$

(e) $\overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D} + C\overline{D}$

Bài tập 6.8

- Chuyển các biểu diễn sau thành dạng SOP chuẩn.
  - Tối thiểu hoá sử dụng bảng Karnaugh
  - Tối thiểu hoá sử dụng phương pháp Quine Mc.Cluskey
  - So sánh hai phương pháp và nhận xét

(a) $(A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(A + \overline{B} + C)$

(b) $(X + \overline{Y})(\overline{X} + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$

(c) $A(B + \overline{C})(\overline{A} + C)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$

(d) $(A + \overline{B})(A + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$

(e) $(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(B + \overline{C} + D)(A + \overline{B} + C + \overline{D})$

Hết chương 6