

Übungsblatt zur Veranstaltung „Informatik“

Grundlagen der Booleschen Algebra

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X	$\neg X$
0	1
1	0

Aufgabe 1 (Boolesche Ausdrücke)

Werten Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke aus:

- (a) $\neg(0 \wedge 1) \vee 0$
- (b) $(0 \wedge (0 \vee 1)) \wedge (0 \vee (0 \wedge 1))$
- (c) $0 \vee (\neg 1 \wedge (\neg 0 \vee \neg 1 \vee 1))$

Aufgabe 2 (Beweis einiger Rechengesetze)

- (a) Beweisen Sie die De Morganschen Regeln mithilfe von Wahrheitstafeln.
- (b) Beweisen Sie das zweite Distributivgesetz mithilfe von Wahrheitstafeln.
- (c) Beweisen Sie das erste Idempotenzgesetz mithilfe der anderen Gesetze.
- (d) Beweisen Sie die Absorptionsgesetze:

$$A \wedge (A \vee B) = A \text{ und } A \vee (A \wedge B) = A$$

Aufgabe 3 (Rechengesetze anwenden)

In dieser Aufgabe verwenden wir für UND- und ODER-Operator sowie Negation die Zeichen \cdot , $+$ und den Überstrich. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe der Rechengesetze:

(a) $\overline{(A \cdot 1)} + A$

(b) $A \cdot B + \overline{A} \cdot B$

(c) $A + (\overline{B} \cdot \overline{(A + \overline{B} + C)})$

(d) $(A + B) \cdot (C + \overline{A}) \cdot (C + \overline{C}) \cdot B + \overline{\overline{C}} \cdot \overline{C}$

Hinweis: Verallgemeinerte De Morgansche Regeln:

$$\overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad \overline{\sum_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$$

Aufgabe 4 (Inversionssatz von Shannon)

Der Inversionssatz von Shannon ist eine Verallgemeinerung der De Morganschen Regeln. Hier kommen UND- und ODER-Verknüpfungen gemischt vor: Gegeben sei ein Boolescher Ausdruck, der Negationen, UND- und ODER-Verknüpfungen enthält. Dieser Ausdruck kann negiert werden, indem man jedes Auftreten einer Variablen negiert und bei jedem negierten Auftreten einer Variablen die Negation entfernt und alle UND-Operatoren durch ODER ersetzt und umgekehrt. Die Prioritäten in der Auswertungs-Reihenfolge der Rechenausdrücke und Klammern bleiben erhalten.

Geben Sie vom folgenden Booleschen Ausdruck die Negation an:

$$A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot (C + A)$$

Vereinfachen Sie **anschließend** den negierten Ausdruck.

Rechengesetze zur Booleschen Algebra:

1. Kommutativgesetze:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

2. Assoziativgesetze:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$$

3. Distributivgesetze:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

4. Neutrales Element:

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \vee 0 = A$$

5. Komplementärgesetze:

$$A \wedge \neg A = 0$$

$$A \vee \neg A = 1$$

6. Idempotenzgesetze:

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

7. Doppelte Negation:

$$\neg(\neg A) = A$$

8. Extremalgesetze:

$$0 \wedge A = 0$$

$$1 \vee A = 1$$

9. De Morgansche Regeln:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

Rechengesetze zur Booleschen Algebra:

1. Kommutativgesetze:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

2. Assoziativgesetze:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

3. Distributivgesetze:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

4. Neutrales Element:

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + 0 = A$$

5. Komplementärgesetze:

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + \overline{A} = 1$$

6. Idempotenzgesetze:

$$A \cdot A = A$$

$$A + A = A$$

7. Doppelte Negation:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

8. Extremalgesetze:

$$0 \cdot A = 0$$

$$1 + A = 1$$

9. De Morgansche Regeln:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$