CHỈNH HỢP LẶP - TỔ HỢP LẶP

Trần Thị Thanh Hường, Trần Đức Duy, Mai Hữu Nhân, 11T
THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long

Bài toán mở đầu. Có bao nhiêu cách xếp 4 viên bi giống nhau vào 3 hộp khác nhau.

Lời giải. Ở bài toán bày chúng ta có thể liệt kê các trường hợp có thể xảy ra như sau: Gọi số viên bi xếp vào hộp 1, hộp 2, hộp 3, lần lượt là x, y, z. Các trường hợp có thể xảy ra đối với (x, y, z) là: (4;0;0), (0;4;0), (0;0;4), (1;1;2), (1;2;1), (2;1;1), (1;3;0), (1;0;3), (0;1;3), (0;3;1), (3;0;1), (3;1;0), (0;2;2), (2;2;0), (2; 0; 2). Vậy có 15 cách xếp.

Nhận xét. Với bài toán này có thể liệt kê tất cả các trường hợp, nhưng với những bài toán tương tự như thế nhưng số bi và số hộp lớn hơn rất nhiều thì chúng ta sẽ gặp nhiều khó khăn trong việc liệt kê. Vậy có một phương pháp nào giúp chúng ta giải những bài toán như thế đơn giản hơn không?

Sau đây chúng ta hãy cùng nhau tìm hiểu về "Tổ hợp lặp – Chỉnh hợp lặp", chúng sẽ giúp chúng ta giải các bài toán phức tạp một cách dễ dàng hơn.

1. Chỉnh hợp lặp

a) Định nghĩa. Cho tập X gồm n $(n \in N^*)$ phần tử. Một dãy có độ dài m $(m \in N^*)$ các phần tử của X, trong đó mỗi phần tử có thể lặp lại nhiều lần, sắp xếp theo thứ tự nhất định gọi là một chỉnh hợp lặp chập m của n phần tử. Ký hiệu số chỉnh hợp lặp chập m của n phần tử là F_n^m.

b) Công thức. $F_n^m = n^m$.

Chứng minh. Cho $X = \{x_1; x_2; ......; x_n\}$. Dãy có độ dài m là $a_1a_2.......a_m$ $(m \in N^*)$.

a_1 có n cách chọn , a_2 cũng có n cách chọn (vì a_2 cũng có thể giống a_1), ... a_m cũng có n cách chọn.

Vậy dãy có độ dài m có n^m cách chọn, hay $F_n^m = n^m$.

c) Các ví dụ

Ví dụ 1. Biển đăng kí ô tô có 6 chữ số và 2 chữ cái đầu tiên trong 26 chữ cái (không dùng chữ O và I). Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi X là tập hợp các chữ cái dùng trong bảng đăng kí, suy ra X có 24 phần tử (vì không dùng O và I). Vì vậy ta có $F_{24}^2 = 24^2$ cách chọn cho hai chữ cái đầu tiên. Gọi Y là tập hợp các chữ số dùng trong bảng đăng kí, suy ra Y có 10 phần tử. Vì vậy có $F_{10}^6 = 10^6$ cách chọn cho 6 chữ số còn lại. Do đó có tất cả $10^6.24^2$ biển số.

Ví dụ 2. Hỏi có bao nhiêu số có 10 chữ số mà 3 chữ số đầu và 3 chữ số cuối tương ứng giống nhau?

Lời giải. Ta thấy với 1 cách chọn cho 3 chữ số đầu cũng chỉ có 1 cách chọn cho 3 chữ số cuối để chúng tương ứng giống nhau. Ta có $F_{10}^3 = 10^3$ cách chọn tùy ý cho 3 chữ số đầu. Ta phải loại trường hợp số 0 đứng đầu, suy ra có $F_{10}^2 = 10^2$ cách bị loại. Như vậy ta có $F_{10}^3 - F_{10}^2 = 10^3 - 10^2 = 900$ cách chọn cho 3 chữ số đầu. Nên ta có 900 cách chọn cho 3 chữ số đầu và 3 chữ số cuối tương ứng giống nhau. Ta còn lại 4 ô trống, mà từ 4 ô trống đó ta lập được $F_{10}^4 = 10^4 = 10000$. Vậy ta có 900.10000 = 9000000 số cần tìm.

Nhận xét. Từ đó ta có thể tổng quát bài toán lên như sau: Cho $n > 2m > 2$ $(n, m \in N^*)$. Hỏi có bao nhiêu số có n chữ số mà m chữ số đầu và m chữ số cuối tương ứng giống nhau.

Lời giải. Chúng ta cũng lí luận như trên. Ta có được $(F_{10}^m - F_{10}^{m-1}).F_{10}^{n-2m}$ số cần tìm.

2. Tổ hợp lặp

a) Định nghĩa. Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là tổ hợp lặp chập k của n. Số các tổ lặp chập k của n được ký hiệu là K_n^k.

b) Công thức. $K_n^k = C_{n+k-1}^k$.

c) Các ví dụ.

Ví dụ đầu tiên sẽ là một hệ quả quan trọng.

Ví dụ 1. Giả sử có n viên bi giống nhau và m cái hộp, ta xếp bi vào các hộp. Gọi x_i với $i = 1, 2, 3..., m$ là số bi ở hộp *i*. Chứng minh rằng

a) Số cách xếp khác nhau n viên bi vào m cái hộp là C_{m+n-1}^{n}.

b) Trong C_{m+n-1}^{n} cách xếp đó có C_{n-1}^{m-1} cách xếp cho tất cả các hộp đều có bi.

Lời giải. a) Ta biểu diễn m cái hộp từ $m+1$ gạch thẳng đứng, còn các viên bi biểu diễn bằng các ngôi sao (*). Chẳng hạn như

|**|*|***|*|…….|***|

Như vậy ở ngoài cùng luôn luôn là các vạch thẳng đứng, còn lại $m-1$ vạch thẳng đứng và n viên bi được sắp xếp theo thứ tự tùy ý. Như vậy số cách sắp xếp khác nhau bằng số cách chọn n phần tử trong tập hợp $m-1+n$ phần tử (cả vạch và ngôi sao) đó chính là C_{m+n-1}^{n}.

b) Trường hợp mỗi hộp có ít nhất 1 viên bi tương ứng với cách biểu diễn mỗi vạch phải bao gồm giữa hai ngôi sao. Nhưng có tất cả $n-1$ khoảng trống giữa n ngôi sao. Vì vậy phải xếp $m-1$ vạch vào $n-1$ khoảng trống đó. Vậy có tất cả C_{n-1}^{m-1} cách xếp.

Nhận xét. Từ bài toán trên ta suy ra một hệ quả thú vị.

a) Số các nghiệm tự nhiên của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ $(n, m \in N^*)$ là C_{m+n-1}^{n}.

b) Số các nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ $(m \le n, n, m \in N^*)$ là C_{n-1}^{m-1}.

Để thấy được ứng dụng của hệ quả trên ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 2. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ (1) thỏa điều kiện

$$x_1 \le 3; x_2 \ge 2; x_3 > 4 \ (*)$$

Lời giải. Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \le 3; x_2 \ge 2; x_3 \ge 5$. Xét các điều kiện sau

$$x_2 \ge 2; x_3 \ge 5 \ (**),\ x_1 \ge 4; x_2 \ge 2; x_3 \ge 5 \ (***).$$

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện (*), (**), (***). Ta có $p = q - r$. Đặt $x_1' = x_1; x_2' = x_2 - 2; x_3' = x_3 - 5; x_4' = x_4$, kết hợp với (**), phương trình (1) trở thành $x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13$ (2).

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2). Theo hệ quả trên số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$. Vậy $q = C_{16}^{13}$.

Lý luận tương tự, ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^{9} = C_{12}^{9}$. Suy ra $p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^{9} = 560 - 220 = 340$.

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (*) là 340.

Ví dụ 3. Tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1có nhất 5 bi, biết rằng hộp 2 và hộp 3 không chứa quá 6 bi.

Lời giải. Trước hết ta tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi. Nhận xét rằng ta cần lấy 5 bi để xếp trước vào hộp 1, do đó số bi còn lại là 25. Suy ra số cách xếp trong trường hợp này bằng số cách xếp 25 bi vào 5 hộp mà không có điều kiện gì thêm. Số cách xếp đó là $K_5^{25} = C_{5+25-1}^{25} = C_{29}^{25} = 23751$. Tương tự ta có:

- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp chứa ít nhất 7 bi là $K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18} = C_{22}^{18}$.

- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là $K_5^{18} = C_{5+18-1}^{18} = C_{22}^{18}$.

- Số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, mỗi hộp 2 và 3 chứa ít nhất 7 bi là $K_5^{11} = C_{5+11-1}^{11} = C_{15}^{11}$.

Sử dụng công thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ta suy ra số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 bi, đồng thời hộp 2 hay hộp 3 chứa ít nhất 7 bi là

$$K_5^{18} + K_5^{18} - K_5^{11} = C_{22}^{18} + C_{22}^{18} - C_{15}^{11} = 13265 \ (2)$$

Theo yêu cầu của bài toán, khi xếp 30 viên bi vào 5 hộp thì hộp 1 phải có ít nhất 5 bi còn mỗi hộp 2 và 3 phải có không quá 6 bi. Do đó số cách xếp này sẽ bằng hiệu của hai cách xếp (1) và (2), tức là bằng: $23751 - 13265 = 10486$.

3. Bài tập

Bài 1. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$ trong mỗi trường hợp sau

a) $x_1 \ge 3, x_2 \le 4$,

b) $x_1 > 3, x_2 < 4$,

c) $2 \le x_1 \le 8, x_2 \le 4, x_3 > 3, x_4 < 6$.

Bài 2. [*Đề thi đại học năm 2007*] Có bao nhiêu bộ ba số nguyên không âm (x_1, x_2, x_3) thỏa điều kiện

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 15, \text{ với } x_1 > 2,\ x_2 < 4.$$

Bài 3. Mỗi khóa gồm 5 vòng số ghi 0, 1, 2, …..,9. Mỗi dãy 5 chữ số cho một cách để mở khóa. Có bao nhiêu khóa có cách mở khác nhau.

Bài 4. Có bao nhiêu cách phát 100 phần thưởng giống nhau cho 60 học sinh. Mỗi học sinh có ít nhất 1 phần thưởng.

Bài 5. Có bao nhiêu số có 6 chữ số mà

a) Chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau.

b) Chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau

c) Hai chữ số đầu và hai chữ số cuối giống nhau

Bài 6. Có bao nhiêu cách xếp kn vật khác nhau thành k nhóm, mỗi nhóm có n vật?

Bài 7. Người ta làm một bó hoa từ 18 hoa. Cho biết không có bó hoa nào dưới 3 hoa. Hỏi có bao nhiêu cách làm một bó hoa?

Bài 8. Trong tủ có n đôi găng tay. Lấy từ đó ra một cách ngẫu nhiên $2r$ chiếc găng tay $(2r < n)$. Tìm xem có bao nhiêu khả năng trong số tất lấy ra

a) Không lắp thành một đôi nào cả.

b) Có đúng 1 đôi.

c) Có đúng 2 đôi

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Vũ Thanh, ***"Chuyên đề bồi dưỡng chuyên toán cấp 2-3 Số Học",*** Nhà xuất bản trẻ, 2001

[2] Ngô Thế Phiệt, ***"250 bài toán Giải Tích Tổ Hợp",*** Nhà xuất bản Đồng Nai,1994

[3] TS.Trần Văn Hoài, ***"[pdf] Tổ hợp và phép đếm",*** 2007–2008

[4] TS. Nguyễn Viết Đồng, ***"[pdf] Tập hợp, ánh xạ, phép đếm"***

Và các tài liệu trên: www.diendantoanhoc.net

www.onthi.com.vn

http://en.wikipedia.org/wiki/Combinations

"It's at first you don't success try. Try again."