Câu 3: Cho k là 1 số nguyên dương, và A là 1 tập hợp hữu hạn các số nguyên tố. lẻ Cmr có ko quá 1 cách sắp xếp các phần tử của A trên 1 vòng tròn sao cho tích của 2 phần tử liên tiếp trên vòng tròn có dạng x^2+x+k với số nguyên dương x nào đó.

Giải:

Ta quy nạp theo |A| với A là tập chứa các số nguyên tố trong đề bài.

Bây giờ giả sử tồn tại 2 cách đặt S và S' là 2 cách đặt các phần tử của A lên vòng tròn sao cho S' không là hoán vị vòng hay đối xứng của S.

Gọi các phần tử trong cách đặt S là $p_1,p_2,\ldots,p_m$ theo thứ tự kim dồng hồ.

Giả sử p_1 là phần tử lớn nhất trong cách đặt S.

Giả sử S được sắp theo là $p_m<p_1,p_2<p_1$ và $p_m<p_2$. (ta có thể xoay và đối xứng S để được cách đặt này)

Điều kiện bài toán tương đương với $4p_ip_{i+1}-4k+1=z_i^2$ với z_i lẻ.

Ta cmr $4k-1=2(p_1p_m+p_1p_2+p_2p_m)-p_m^2-p_1^2-p_2^2$

Thật vậy ta có $4p_mp_1-4k+1=z_m^2$ và $4p_2p_1-4k+1=z_1^2$

Để ý là z_m+z_1 chia hết cho $2p_1$ và z_m và z_1 đều $<2p_1$ nên $z_m+z_1=2p_1$

Khi này $4(p_m-p_2)p_1=z_m^2-(2p_1-z_m)^2$, vậy $z_m=p_1+p_m-p_2$

Lúc này vì $4p_mp_1-4k+1=z_m^2$ ta tính được:

$4k-1=2(p_1p_m+p_1p_2+p_2p_m)-p_m^2-p_1^2-p_2^2$ (1)

Tiếp theo, ta cũng giả sử p_1 cũng là phần tử lớn nhất trong cách đặt S' và các phần tử của S' được sắp theo là $p'_m<p_1,p_2<p_1$ và $p'_m<p'_2$.

Ta chứng minh rằng $p'_m=p_m$ và $p'_2=p_2$

Thật vậy, từ (1), cm tương tự với S', ta được:

$4k-1=p_1(2p_2+2p_m-p_1)-(p_2-p_m)^2=p_1(2p'_2+2p'_m-p_1)-(p'_2-p'_m)^2$ (2)

Khi này $(p_2-p_m)^2\equiv(p'_2-p'_m)^2 \pmod{4p_1}$, từ đó phải có:

$p_2-p_m=p'_2-p'_m$ (3)

Từ (2) và (3) ta dễ dàng suy ra $p'_m=p_m$ và $p'_2=p_2$..

Bây giờ để ý từ (1) thì $4p_mp_2+4k-1$ cũng là 1 số chính phương (4)

Để tiện lập luận, ta sẽ đặt $p_2=M$ và $p_m=N$.

Xét $A\backslash\{p_1\}$. Nếu trong S và S' bỏ phần tử p_1 ra khỏi vòng tròn thì được 2 cách đặt các phần tử của $A\backslash\{p_1\}$ lên vòng tròn và thỏa điều kiện bài toán (do (4)). Gọi 2 cách đặt này là S_1 và S_2.

Vậy từ đây ta quy nạp, thì S_2 là hoán vị vòng hoặc đối xứng của S_1, để ý rằng S_2 và S_1 cùng có phần tử đầu là M và phần tử cuối là N nên $S_2=S_1$. Mặt khác, S và S' đều được tạo bằng cách chèn p_1 vào giữa M và N nên S=S', mâu thuẫn.

Vậy với tập A, chỉ tồn tại duy nhất 1 cách đặt S, ĐPCM.