6. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với mọi $a_1,a_2,\dots,a_n$ thỏa mãn n ko chia hết $a_1+a_2+\dots+a_n$ thì tồn tại 1 hoán vị $b_1,b_2,\dots,b_n$ của $a_1,a_2,\dots,a_n$ sao cho $n \mid a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n$.

Ta quy nạp theo n:

Step 1) Nếu n có ít nhất 2 ước nguyên tố và n lẻ:

Xét số nguyên tố q thỏa mãn $a_1+a_2+\dots+a_n$ ko chia hết cho $q^{vq(n)}$

n=mp với p khác q, khi đó m ko chia hết $a_1+a_2+\dots+a_{mp}$

Nếu các a_i đều $=c \pmod p$ với c nào đó thì xét $a_i=pb_i+c$ thì ta quy nạp theo m và dãy b_i . Vậy ta xét có 2 phần tử ko bằng nhau (mod p)

Vậy ta phân hoạch $a_1,a_2,\dots,a_{mp}$ thành m tập, mỗi tập p phần tử, đặt là $S_1,S_2,\dots,S_m$. Đặt Sum(S) là tổng các phần tử của S.

Nếu có 1 số i thỏa $Sum(S_i)$ ko chia hết cho p thì thôi, ko làm gì. Nếu ko thì xét 1 phần tử a S_i và 1 phần tử b của S_j thỏa mãn a-b không chia hết cho p thì hoán a vào S_j và b vào S_i . WLOG là ta đc $Sum(S_1)$ ko chia hết cho p.

Bây giờ vì $Sum(S_1)+Sum(S_2)+\dots+Sum(S_m)$ ko chia hết cho m nên ta chọn đc $x_1,x_2,\dots,x_m$ là hoán vị của $1,2,\dots,m$ thỏa $x_1Sum(S_1)+x_2Sum(S_2)+\dots+x_mSum(S_m)$ chia hết cho m.

Bây giờ ta các số $= x_i \pmod m$ mà $<= mp$ ta ghép đại chúng với các phần tử của S_i với $i>=2$, rồi tổng chúng lại, đặt tổng này là S, để ý theo cách chọn $S+x_1Sum(S_1)=0 \pmod m$. Còn các phần tử $= x_1 \pmod m$, ta xét là mc_1+x_1, $mc_2+x_1,\dots,mc_p+x_1$, với $c_1,c_2,\dots,c_p$ là hoán vị của $\{1,2,\dots,p\}$ theo (mod p) ,ta cần là $m(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_pa_p) + x_1Sum(S_1)+S=0 \pmod{mp}$, hay là $(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_pa_p)+(x_1Sum(S_1)+S)/m=0 \pmod p$. Để ý là vì $a_1+a_2+\dots+a_p$ ko chia hết cho p nên ta chọn đc $c_1,c_2,\dots,c_p$ để $(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_pa_p) = j \pmod p$ với j tùy ý, xong.

Step 2) Nếu n là lũy thừa số nguyên tố, xét $n=p^k$, và xét số i thỏa $p^{k-i} \mid a_1+a_2+\dots+a_{p^\wedge k}$ và p^{k-i+1} ko chia hết $a_1+a_2+\dots+a_{p^\wedge k}$ với $i>=1$.

Bây giờ ta cm bổ đề: Với p^k số $a_1,a_2,\dots,a_{p^\wedge k}$ ta có thể chọn hoán vị $x_1,x_2,\dots,x_{p^\wedge k}$ của $1,2,\dots,p^k$ thỏa mãn $x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_{p^\wedge k}a_{p^\wedge k}$ chia hết cho p^{k-1}.

CM bổ đề: Thật vậy, nếu các số a_i đều $= c \pmod p$ với c nào đó thì xét $a_i=pb_i+c$ và quy nạp. (Ở đây ta sẽ thấy p^{k-1} là chặt trong trường hợp p=2 để quy nạp được)

Còn nếu ko, ta phân hoạch được các a_i thành p tập hợp, mỗi tập p^{k-1} phần tử là $T_1,T_2,...,T_p$ thỏa mãn $Sum(T_1)$ ko chia hết cho p.

Bây giờ vì $Sum(T_1)$ ko chia hết cho p nên, đầu tiên, với 1 số $>p^{k-1}$ ta ghép đại với 1 phần tử ko thuộc T_1 rồi tổng chúng lại, thu đc số $=j \pmod{p^{k-1}}$, mặt khác với mỗi j ta chọn được 1 hoán vị của $x_1,x_2,...,x_{p^\wedge(k-1)}$ của $1,2,...,p^{k-1}$ thỏa mãn $x_1a_1+x_2a_2+...+x_{p^\wedge(k-1)}a_{p^\wedge(k-1)}$ chia hết cho p^{k-1}, từ đó chọn đc hoán vị thỏa mãn.

Trở lại bài toán khi n là lũy thừa số nguyên tố, theo định lí Erdos-Gizburg-Ziv, ta có thể phân hoạch các số $a_1,a_2,...,a_{p^\wedge k}$ vào p^i tập hợp, mỗi tập p^{k-i} phần tử là $S_1,S_2,...,S_{p^\wedge i}$ và tổng mỗi phần tử chia hết cho p^{k-i}. Bây h ta sẽ xét các số $x_1,x_2,...,x_{p^\wedge i}$ là hoán vị của $1,2,...,p^i$, ta sẽ chọn sau.

Xét S_1 có các phần tử là $a_1,a_2,...,a_{p^\wedge(k-i)}$, theo bổ đề ta chọn được các số $c_1,c_2,...,c_{p^\wedge(k-i)}$ là hoán vị của $1,2,...,p^{k-i}$ thỏa mãn $a_1c_1+a_2c_2+...+a_{p^\wedge(k-i)}c_{p^\wedge(k-i)}$ chia hết cho p^{k-i-1}. Khi này ta sẽ ghép $p^ic_1+x_1$ với a_1, $p^ic_2+x_1$ với a_2, ..., $p^ic_{p^\wedge(k-i)}+x_1$ với $a_{p^\wedge(k-i)}$ và để ý $p^ic_1+x_1$, $p^ic_2+x_1,...,p^ic_{p^\wedge(k-i)}+x_1$ là tất cả các số $= x_1 \pmod{p^i}$ và $<= p^k$. Tương tự ta sẽ ghép với S_2 ,$S_3,...,S_{p^\wedge i}$. Khi này ta sẽ thu đc tổng có dạng $p^{k-1}T+x_1Sum(S_1)+x_2Sum(S_2)+...+x_{p^\wedge i}Sum(S_{p^\wedge i})$. Cuối cùng ta cần là $p^{i-1}T+ x_1Sum(S_1)/(p^{k-i})+x_2Sum(S_2)/(p^{k-i})+...+x_{p^\wedge i}Sum(S_{p^\wedge i})/(p^{k-i})$ chia hết cho p^i. Bây giờ theo cách chọn theo Erdos-Gizburg-Ziv, các số $Sum(S_1)/(p^{k-i})$, $Sum(S_2)/(p^{k-i})$,..., $Sum(S_{p^\wedge i})/(p^{k-i})$ đều là các số nguyên và tổng của chúng ko chia hết cho p, nên ta chọn đc hoán vị x_1, $x_2,...,x_{p^\wedge i}$ của $1,2,...,p^i$ thỏa mãn $x_1Sum(S_1)/(p^{k-i})+x_2Sum(S_2)/(p^{k-i})+...+x_pSum(S_{p^\wedge i})/(p^{k-i}) = -Tp^{i-1} \pmod{p^i}$ và từ đó ta đã chọn thành công.

Xong bài toán.