**5.** Chứng minh rằng phương trình $n!=a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$ chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Ta sẽ chỉ xét n chẵn thôi.

Trước tiên ta có $\log(1)+\log(2)+\ldots+\log(n-1)<n\log(n)-n+1$, điều này có từ diện tích của hình bị chắn bởi hàm $\log(x)$, $x=1$ và $x=n$.

Từ đó ta có $(n-1)!<n^n/e^{n-1}$, hay $n! < (n+1)^{n+1}/e^n < n^n(n+1)/e^{n-1}$

Nói chung thì $n!=a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$ nên a,b,c đều phải $< n/2$ khi n đủ lớn.

**Step 1)** Nếu n là lũy thừa của 2 và cả a,b,c đều chẵn:

Khi này ta đưa về $n!=2^{n-1}(a_1^{n-1}+b_1^{n-1}+c_1^{n-1})$, với $a_1,b_1,c_1$ đều $< n/4$.

**Step 1.1)** Cả $a_1,b_1$ và $c_1$ đều lẻ. Khi này nếu cả $a_1+b_1,b_1+c_1,c_1+a_1$ là lũy thừa của 2 thì phải có 2 số bằng 1. giả sử là $a_1$ và $b_1$, khi này $n!=2^{n-1}(2+c_1^{n-1})$. Xét mod $c_1$ thì $c_1=1$, thì khi này $n=4$.

Nếu a+b ko là lũy thừa của 2 thì xét $p \mid a_1+b_1$ và p lẻ thì $p< n/4$. Để ý $p|c_1$ và $v_p(a_1^{n-1}+b_1^{n-1})=v_p(a_1+b_1)+v_p(n-1)$ và cái này cần>= $[n/p]$, từ đó $v_p(a_1+b_1)>n/p-1-v_p(n-1)$ hay $a_1+b_1>p^{n/p-1}/n > (n/4)^3/n$ và nó rất lớn so với n (do $x^{1/x}$ nghịch biến).

**Step 1.2)** Nếu $a_1,b_1$ chẵn và $c_1$ lẻ. Xét $a_1+c_1$ nếu nó có ước nguyên tố lẻ $> n/4$ thì $b_1$ cũng phải chia hết cho ước nguyên tố lẻ này nên $b_1>n/4$ và tạch.

Nếu mọi ước nguyên tố lẻ của $a_1+c_1$ đều $< n/4$ thì xét đại 1 ước nguyên tố lẻ của nó rồi làm tương tự **Step 1.1**.

**Step 2)** Nếu a lẻ, b lẻ và c chẵn.

Khi này xét $v_2(a^{n-1}+b^{n-1})=v_2(a+b)$ nên $v_2(a+b) > n/2-1$ nên $a+b > 2^{n/2-1}$ nên a+b rất lớn với n, xong.

Vậy ta xét xong mọi th và có đpcm.