Với số thực a, đặt $N_q(a)=\min\left\{\left|a-\frac{p}{q}\right|, p \in Z\right\}$, tức là khoảng cách nhỏ nhất từ a đến một phân số (**không** nhất thiết là phân số tối giản) có mẫu số là q. Cmr dãy số $a_n=\frac{1}{log(n)}\ \sum_{i=1}^{n} N_i(a)$ hội tụ

Lời giải:

Một trong những bài toán hay nhất mình từng làm. Ta sẽ cm bài toán này from scratch, ko sử dụng định lí nào.

Ta có: $N_q(a)=\frac{\|aq\|}{q}$, trong đó $\|m\|$ là khoảng cách giữa m là số nguyên gần nhất với nó (vậy nên $0\leq \|m\| \leq \frac{1}{2}$)

Có một trick quen thuộc trong số học giải tích là nếu cần tính tổng $\frac{b_i}{i}$ thì ta có thể sử dụng khai triển Abel rồi tính tổng $b_1+b_2+...+b_i$, và có lẽ bài toán này là một ví dụ rất tốt cho việc khai triển này.

Đầu tiên, ta sẽ phát biểu về khai triển Abel: Cho 2 dãy số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $b_1,b_2,,\ldots,b_n$

Đặt $c_i=b_1+b_2+...+b_i$. Khi này ta có:

$a_1b_1 + a_2b_2 +...+ a_nb_n=(a_1-a_2)c_1+(a_2-a_3)c_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)c_{n-1}+a_nc_n$

Ý tưởng là ta sẽ sử dụng khai triển Abel, đặt $S(n)=\sum_{i=1}^{n}\|ai\|$, thay vì tính dãy a_n, ta sẽ tính $S(n)$. Bây h ta sẽ xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: a là số vô tỉ, cũng là trường hợp khó. Ta sẽ cm rằng $\lim_{n->+\infty}\frac{S(n)}{n}=\frac{1}{4}$

Để cm đc ta sẽ cần 1 vài bổ đề:

Bổ đề 1: Cho số vô tỉ a và số thực dương ε, tồn tại số nguyên dương N sao cho $\{Na\}\in(0;\varepsilon)$

Cm: Chọn số nguyên dương M lớn (lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$), xét các khoảng $\left(0;\frac{1}{M}\right)$, $\left(\frac{1}{M};\frac{2}{M}\right)$,...,

$\left(\frac{M-1}{M};1\right)$ sẽ có 2 số khi này sẽ có 2 số N_1 và N_2 trong [1;M+1] sao cho $\{N_1a\}$ và $\{N_2a\}$ nằm trong cùng 1 khoảng. Khi này $|\{N_1a\}-\{N_2a\}|<\frac{1}{M}$ và từ đây $\{(N_2-N_1)a\}$ sẽ nằm trong khoảng $\left(0;\frac{1}{M}\right)$ hoặc $\left(\frac{M-1}{M};1\right)$

Đặt $N_3=N_2-N_1$, nếu $\{N_3a\}\in\left(0;\frac{1}{M}\right)$ thì xong, nếu ko, xét $\{-N_3a\}$, nó sẽ nằm trong khoảng $\left(0;\frac{1}{M}\right)$, khi này $\{-CN_3a\}=C\{-N_3a\}$ với mọi C nguyên dương thỏa $C\{-N_3a\}<1$ và ta có thể chọn C sao cho $C\{-N_3a\}\in\left(\frac{M-1}{M};1\right)$, khi này $\{CN_3a\}\in\left(0;\frac{1}{M}\right)$ và ta đc điều phải cm.

Bổ đề 2 (bổ đề chính của trường hợp $\boldsymbol{a}$ vô tỉ): Cho số vô tỉ a và 2 số thực dương c và d thỏa c<d, gọi S(c,d) là tập các số nguyên dương N thỏa $\{Na\}\in$ (c;d), khi này

$$\lim_{n->+\infty}\frac{|S(c,d)\cap\{1,2,\dots,n\}|}{n}=d-c$$

Cm: WLOG $a>0$, vì $a<0$ chẳng qua là đối xứng qua số 0 mà thôi. Bây h, xét số ε rất nhỏ. Xét số thực dương ε_2 rất nhỏ so với ε và sử dụng **Bổ đề 1**, ta chọn đc số N sao cho $\{Na\}\in(0;\varepsilon_2)$. Với số nguyên dương n đủ lớn, và với mỗi i=0,1,…,N−1, đặt $m_i=\left\lfloor\frac{n-i}{Na}\right\rfloor$, thì m_i là số các số ≡ i (mod N) và ko vượt quá n, và đặt t_i là các số n_2 ≡ i (mod N), ko vượt quá n và $\{n_2a\}\in$ (c;d). Ta chỉ cần cm rằng $\frac{t_i}{m_i}\sim$ d−c

Đặt $b=\{Na\}$, thì $b<\varepsilon_2$. khi này ta xét $\{kb+i\}$, với k=0,1,…,m_i để xem có bao nhiêu số k thỏa $\{kb+i\}\in$(c;d). Đặt $T=\lfloor m_ib+i\rfloor+1$ thì T là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $T>m_ib+i$ nên $m_i=\left\lfloor\frac{T-i}{b}\right\rfloor$. Bây h, $\{kb+i\}\in$(c;d) khi và chỉ khi $\{kb+i\}\in$ (M+c;M+d) với M nguyên dương và M<T hay $k\in\left(\frac{M+c-i}{b};\frac{M+d-i}{b}\right)$ với M<T, vậy số các t_i là $t_i=\left(\sum_{j=i}^{T-2}\left\lfloor\frac{j+d-i}{b}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{j+c-i}{b}\right\rfloor\right)+O(1)$.

Lúc này thì $t_i>T\frac{d-c}{b}-T+O(1)$ và $t_i<T\frac{d-c}{b}+T+O(1)$ nên $\frac{t_i}{m_i}\in$(d−c-ε;d−c+ε) khi b rất nhỏ với ε. Bây giờ tổng hết các số $t_0+t_1+\dots+t_{N-1}$ và để ý rằng $n=m_0+m_1$

$+ \ldots + m_{N-1}$ thì ta đc ĐPCM.

Trở lại bài toán, Xét số thực dương ε rất nhỏ và số nguyên dương M rất lớn . Giờ với mọi n rất lớn với M, theo **Bổ đề 2** với mỗi i$\leq \frac{M}{2}$, ta có ít nhất $2(1-\varepsilon)\frac{n}{M}$ và ko quá $2(1+\varepsilon)\frac{n}{M}$ số nguyên dương n_2 ko vượt quá n thỏa $\|n_2 a\| \in \left(\frac{i}{M};\frac{i+1}{M}\right)$(có thêm nhân 2 vì nếu $\{n_2 a\} \in \left(\frac{M-i-1}{M};\frac{M-i}{M}\right)$ thì $\|n_2 a\| \in \left(\frac{i}{M};\frac{i+1}{M}\right)$**).** Vậy ta đánh giá đc 2 bđt sau đây: $\frac{S(n)}{n} > 2(1-\varepsilon)\frac{1}{M}(\frac{0}{M}+\frac{1}{M}+\ldots+\frac{M/2-1}{M})$ và $\frac{S(n)}{n} <$ $2(1+\varepsilon)\frac{1}{M}(\frac{1}{M}+\frac{2}{M}+\ldots+\frac{M/2}{M})$**.** Để ý khi ε rất nhỏ và M rất lớn thì cả 2 vế đều tiến về $\frac{1}{4}$ từ đó ta được $\lim_{n->+\infty} \frac{S(n)}{n} = \frac{1}{4}$

Cuối cùng để kết thúc, ta sẽ sử dụng khai triển Abel cho 2 dãy $\frac{1}{n}$ và $\|an\|$. Khi này , ta có $\sum_{i=1}^{n} N_i(a) = (\sum_{i=1}^{N} \frac{S(i)}{i(i+1)}) + \frac{S(n)}{n}$. Vì $\lim_{n->+\infty} \frac{S(n)}{n} = \frac{1}{4}$ nên $\sum_{i=1}^{n} N_i(a)$ $\sim \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4(i+1)} \sim \frac{1}{4}log(n)$ hay dãy a_n hội tụ về $\frac{1}{4}$.

Trường hợp 2: a là số hữu tỉ, trường hợp này thì dễ. Đặt $a=\frac{p}{q}$. Ta lại xét tiếp $S(n)$.

Để ý rằng $\left\{\frac{(k+q)p}{q}\right\} = \left\{\frac{kp}{q}\right\}$ với mọi k nguyên, vậy đặt n=mq+r thì ta có $S(m\text{q} + \text{r}) = m \sum_{i=1}^{q} \left\|\frac{ip}{q}\right\| + O(1)$, tới đây là cm đc $\frac{S(n)}{n}$ hội tụ rồi. Còn kết quả cụ thể thì là $x_q = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \left\|\frac{ip}{q}\right\|$, để tính tổng này thì ta có kết quả cơ bản là các số p,2p,…,qp khi chia cho q sẽ ra các số dư là 0,1,2,…,q-1 theo thứ tự nào đó, từ đó với mỗi i$<\frac{q}{2}$ thì $\frac{i}{q}$ xuất hiện đúng 2 lần trong $\left\|\frac{p}{q}\right\|, \left\|\frac{2p}{q}\right\|, \ldots, \left\|\frac{qp}{q}\right\|$, nếu q chẵn thì thêm số $\frac{1}{2}$ xuất hiện thêm 1 lần nữa, vậy $x_q = \frac{2}{q}\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{q/2-1}{q}\right) + \frac{1}{2q} = \frac{1}{4}$ nếu q chẵn

, và $x_q = \frac{2}{q}\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{(q-1)/2}{q}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4q^2}$ nếu q lẻ.

Tới đây, sử dụng khai triển Abel như **trường hợp 1** ta được ĐPCM.