4. Có 2 hạt trang sức màu xanh và màu đỏ đc đặt trên trục số. Hạt màu đỏ đặt ở vị trí 0, hạt màu xanh đc đặt vị trí 1. Xét số hữu tỉ α, ở mỗi lượt, ta chọn 1 số nguyên k và chọn 1 trong 2 hạt đang ở vị trí là y và giữ nguyên nó, và xét hạt còn lại có vị trí là x, thì ta di chuyển hạt này đến vị trí x' sao cho (y-x')=α^k(y-x). Tìm tất cả các α sao cho ta cần ko quá 2021 lượt để di chuyển hạt màu đỏ đến vị trí 1.

Gọi x_n,y_n lần lượt là tọa độ viên trang sức màu đỏ và màu xanh. Ta có $x_1=0$ và $y_1=1$.

Xét mod α-1 ta thấy x_n luôn = 0 (mod α-1) nên α có dạng $\frac{k+1}{k}$. Đây là bất biến phải thấy.

Bây h, để ý là tồn tại dãy c_n sao cho ở mỗi lượt thì $x_{n+1}-y_{n+1}=-\alpha^{c_n}$

Nên với mọi n ta có: $x_{n+1}-x_n=-\alpha^{c_{n+1}}+\alpha^{c_n}$ hoặc $x_{n+1}=x_n$

Do đó ta có thể hình dung như sau: Xét dãy số c_n. Ban đầu có số 0 trên bảng, ở mỗi lượt, ta sẽ giữ nguyên số hiện tại trên bảng là x, hoặc xóa nó đi và thay bằng số $x-\alpha^{c_{n+1}}+\alpha^{c_n}$. Tìm số m nhỏ nhất để tồn tại dãy c_n sao cho ta có thể viết lên bảng số 1 sau m lượt.

Để ý rằng, để để tối thiểu số lượt cần thực hiện, thì ko thể thực hiện 2 thao tác giống nhau trong 2 lượt liên tiếp. Tức là ta phải giữ nguyên rồi thay đổi số xen kẽ nhau.

Bây h), ta xét 2 trường hợp, ta chỉ làm trường hợp đầu, trường hợp thứ 2 ta làm tương tự.

Trường hợp 1: x_2 khác x_1, tức ta không giữ nguyên x_1.

Khi này để ý nếu xét số m nhỏ nhất sao cho tồn tại các số $d_1,d_2,\dots,d_{2m}$ thỏa d_i là lũy thừa của α với mọi i và $d_1=1$ và $d_1-d_2+d_3-d_4+\dots+d_{2m-1}-d_{2m}=1$ thì 2m-1 là số lượt nhỏ nhất cần thực hiện nếu đi trong trường hợp 1.

Vậy $d_3+d_5+\dots+d_{2m-1}=d_2+d_4+\dots+d_{2m}$. Để ý rằng nếu m nhỏ nhất thì ko thể có 2 số bằng nhau ở 2 vế.

Nếu các số đều là lũy thừa KO DƯƠNG của α thì các số d đều có dạng $\left(\frac{k}{k+1}\right)^c$ với c ko âm. Xét số $\left(\frac{k}{k+1}\right)^c$ với c lớn nhất xuất hiện trong dãy, thì nó chỉ có thể xuất hiện ở một trong 2 vế. WLOG nó xuất hiện ở vế phải thì nhân 2 vế với $(k+1)^c$ thì xét mod (k+1) ta có VT=0 nên cần ít nhất k+1 số có dạng $\left(\frac{k}{k+1}\right)^c$ ở vế phải. Nên khi này m ≥ k+1 hay cần ít nhất 2k+1 lượt. Tương tự nếu số $\left(\frac{k}{k+1}\right)^c$ xuất hiện ở vế trái thì cần ít nhất 2k+3 lượt.

Nếu có số lũy thừa dương của α thì $\left(\frac{k+1}{k}\right)^c$ xuất hiện trong dãy với c lớn nhất. WLOG nếu nó xuất hiện ở vế phải thì nhân 2 vế với k^c thì xét mod k ta có VT=0 nên cần ít nhất k số có dạng $\left(\frac{k+1}{k}\right)^c$ ở vế phải, tuy nhiên, các số ở vế phải ko thể toàn là $\left(\frac{k+1}{k}\right)^c$ đc do các số ở VT đều $<\left(\frac{k+1}{k}\right)^c$ và VT ít số hơn VP. Nên khi này m $\geq$k+1 hay cần ít nhất 2k+1 lượt. Tương tự $\left(\frac{k+1}{k}\right)^c$ uất hiện ở vế trái thì cần ít nhất 2k+1 lượt.

Trường hợp 2: $x_2 = x_1$, tức ta giữ nguyên x_1.

Khi này để ý nếu xét số m nhỏ nhất sao cho tồn tại các số $d_1, d_2, \ldots, d_{2m}$ thỏa d_i là lũy thừa của α với mọi i và $d_1-d_2+d_3-d_4+\ldots+d_{2m-1}-d_{2m}=1$ thì 2m là số lượt nhỏ nhất cần thực hiện nếu đi trong trường hợp 1.

Làm tương tự như trường hợp 1, nếu các số đều là lũy thừa KO DƯƠNG của α thì xét $\left(\frac{k}{k+1}\right)^c$ với c lớn nhất xuất hiện trong dãy, thì m$\geq$k+1, còn ngược lại thì $\left(\frac{k+1}{k}\right)^c$ với c lớn nhất xuất hiện trong dãy thì m$\geq$k, nên ta cần ít nhất 2k lượt.

Do đó nếu $\alpha=\frac{k+1}{k}$ thì cần ít nhất 2k lượt đi để từ số 0 tới số 1.

Vậy tất cả các số thỏa mãn là các số $\frac{k+1}{k}$ với k=1,2,...,1011.