5. Với số nguyên dương n,k gọi f(n,2k) là số cách phủ một bảng 2k x n bằng các domino 2 x 1 sao cho không có 2 domino nào chồng lên nhau. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho f(n,2k) chẵn với mọi số nguyên dương k.

Ta có f(2n+1,2k)≡f(n,2k) (mod 2)

Cm: Với cách phủ T, gọi a(T) là cách phủ được tạo ra bằng cách lật ngược bảng lại, để ý a(a(T))=T, ta sẽ ghép cặp T với a(T). Vậy nên f(2n+1,2k) ≡ số cách phủ T mà a(T)=T (mod 2), khi này T là cách phủ đối xứng qua cột trung tâm Mà bảng 2k x (2n+1) được phủ đối xứng qua cột trung tâm khi và chỉ khi cột thứ n+1 được phủ bởi domino dọc, còn bảng con 2k x n bên trái được phủ thế nào thì bảng con 2k x n bên phải được phủ đối xứng y như thế, và phủ domino vào bảng 2k x n bên trái thì dĩ nhiên có f(n,2k) cách phủ.

Ta cmr f(2n,2n) ≡ 0 $(mod\ 2)$

Cm: Với cách phủ T, gọi b(T) là cách phủ được tạo ra bằng cách lật ngược bảng và xoay 90 độ cùng chiều kim đồng hồ. Để ý b(b(T))=T và b(T) khác T do ô bên phải trên cùng nếu đc phủ bằng domino dọc trong T thì nó sẽ được phủ bằng domino ngang trong b(T). Ghép cặp T với b(T) lại thì ta đc số cách phủ là chẵn.

Từ 2 điều trên, n phải lẻ và vì f(2n+1,2k)≡f(n,2k) (mod 2) nên dễ thấy n phải có dạng 2^t-1 với t nguyên dương.