Chúng ta sẽ giải 2 bài toán sau:

Bài 1 (Mathematical Reflection): Tìm tất cả các số thực a và b sao cho tập

S={$(\{na\},\{nb\})$ | n ∈ ℕ} có mật độ là 1 trên $(0;1)^2$

Bài 2 (China TST 2017): Cho tập hợp M thỏa mãn các tính chất sau:

a) Nếu r ∈ M thì -r ∈ M

b) Nếu r ∈ M thì với mọi số nguyên m, (r+m) ∈ M

c) Tồn tại các số thực m,n,p,q sao cho $m<n$, $p<q$ và với mọi x ∈ $(m;n)$ thì x ∈ M và với mọi x ∈ $(p;q)$ thì x ∈ R\\M

Với số vô tỉ a, đặt $M(a)=\{n \in \mathbb{N} | na \in M\}$. Cmr nếu a và b là những số vô tỉ thỏa mãn $M(a)=M(b)$ thì $a+b$ hoặc $a-b$ là số nguyên

Lời giải bài 1:

Đây là trường hợp đặc biệt của định lí Kronecker kinh điển khi m=1 và n=2, có thể xem tại đây: https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker%27s_theorem

Theo như wikipedia thì ta phải có $a, b, 1$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$, một kết quả khá ảo và thú vị.

Bước 1: Đầu tiên ta sẽ cm nếu $a, b, 1$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$ thì S có mật độ 1 trên $(0;1)^{2}$. Ta có S có mật độ 1 trên $(0;1)^2$ khi và chỉ khi với mọi m,n,p,q thỏa mãn $0<m,n,p,q<1$, ta chọn được số nguyên dương t sao cho $\{ta\} \in (m;n)$ và $\{tb\} \in (p;q)$. Muốn làm vậy, ta cần bổ đề sau:

Bổ đề: Cho 2 số vô tỉ a, b, và số nguyên dương M khi này tồn tại số nguyên dương N sao cho $\|Na\|<\frac{1}{M}$ và $\|Nb\|<\frac{1}{M}$

Cm: Xét các khoảng $\left(0;\frac{1}{M}\right)$, $\left(\frac{1}{M};\frac{2}{M}\right),\ldots,\left(\frac{M-1}{M};1\right)$ và xét M^2+1 số nguyên dương đầu tiên. Khi này theo nguyên lí chuồng và thỏ, trong M^2+1 số đó tồn tại 2 số nguyên dương phân biệt N_1 và N_2 trong sao cho $\{N_1 a\}$ và $\{N_2 a\}$ nằm trong cùng 1 khoảng, và $\{N_1 b\}$ và $\{N_2 b\}$ cũng nằm trong cùng 1 khoảng. Khi này xét $N_3 = N_2 - N_1$ thì số N_3 thỏa mãn điều kiện, xong.

Trở lại bài toán, ta đã chọn được số N sao cho $\|Na\|$ đều $\|Nb\|$ rất nhỏ. Wlog, khi này $\{Na\}$ và $\{Nb\}$ đều rất gần so với 0. Ta chọn có t có dạng kN và đặt $\alpha = \{Na\}$ và $\beta = \{Nb\}$. Khi này ta cần chọn số nguyên dương k sao cho $\{k\alpha\} \in (m;n)$ và $\{k\beta\} \in (p;q)$. Đầu tiên ta cần $k\alpha \in (M+m;M+n)$. Khi này ta sẽ chọn k có dạng $\left\lfloor \frac{M+n}{\alpha} \right\rfloor$. Khi này vì α đủ nhỏ nên $k\alpha > M + n - \alpha$ nên $k\alpha \in (M+m;M+n)$. Bây giờ ta cần $k\beta \in (T+p;T+q)$, để ý là $k\beta > \beta\left(\frac{M+n}{\alpha}\right) - \beta$ và $k\beta < \beta\left(\frac{M+n}{\alpha}\right)$, do đó ta chỉ cần chọn m sao cho $\beta\left(\frac{M+n}{\alpha}\right) > T+p+\beta$ và $\beta\left(\frac{M+n}{\alpha}\right) < T+q$ là được, đến đây để ý rằng $\frac{\beta}{\alpha}$ là số vô tỉ (do $a,b,1$ độc lập tuyến tính)

Lời giải bài 2: Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $a, b, 1$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Q}$. WLOG, theo điều kiện tập S, ta chỉ cần xét $m,n,u,v \in (0;1)$. Khi này, từ **Lời giải bài 1**, ta có thể chọn số nguyên dương N sao cho $\{Na\} \in (m; n)$ và $\{Nb\} \in (u;v)$ khi này $Na \in M$ và Nb ko $\in M$, mâu thuẫn.

Trường hợp 2: $a, b, 1$ phụ thuộc tuyến tính trên $\mathbb{Q}$. Khi này ta có thể giả sử luôn $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ. Dĩ nhiên ta sẽ xét a=pα và b=qα. Ta có $\{Np\alpha\} \in M$ khi và chỉ khi $\{Nq\alpha\} \in M$. Từ đây, để ý $\{Np^2\alpha\} \in M \Leftrightarrow \{Npq\alpha\} \in M$ và $\{Nq^2\alpha\} \in M \Leftrightarrow \{Npq\alpha\} \in M$, do đó $\{Np^2\alpha\} \in M \Leftrightarrow \{Nq^2\alpha\} \in M$. WLOG $p<q$.

Tương tự $\{Np^k\alpha\} \in M \Leftrightarrow \{Nq^k\alpha\} \in M$ với mọi số nguyên dương k. Bây giờ xét số nguyên dương N_2 thỏa mãn $\{N_2\alpha\}$=c rất nhỏ, khi này ta chọn N=zN_2. Ta chọn z để zp^kc$\in (m; n)$ và zq^kc$\in (T + u; T + v)$ với số nguyên dương T nào đó. Lúc này, ta chỉ cần chọn T sao cho $\frac{m}{p^k c}<\frac{T+u}{q^k c}<\frac{T+v}{q^k c}<\frac{n}{p^k c}$ và q^kc rất nhỏ với 1 là xong.