Chương 5

Kiểm định giả thuyết thống kê

BÀI 13 (2 tiết)

Một dạng khác của quy nạp thống kê là kiểm định giả thuyết thống kê. Đây là một phương pháp quan trọng cho phép giải quyết nhiều bài toán trong thực tế. Nội dung của kiểm định giả thuyết thống kê là dựa vào mẫu cụ thể và các quy tắc hay thủ tục quyết định dẫn đến bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết của tổng thể.

5.1 Các khái niệm

Thông thường ta nghiên cứu biến ngẫu nhiên trong trường hợp thông tin không đầy đủ, thể hiện ở nhiều mặt. Cụ thể là:

1. Chưa biết chính xác tham số θ, hoặc quy luật phân phối xác xuất của biến ngẫu nhiên X, nhưng có cơ sở nào đó để nêu lên giả thuyết, chẳng hạn $\theta = \theta_0$ (θ_0 đã biết), hoặc X tuân theo quy luật phân phối chuẩn.

2. Khi nghiên cứu hai hay nhiều biến ngẫu nhiên, một trong những vấn đề cần quan tâm nhất là: các biến ngẫu nhiên này độc lập với nhau hay có sự phụ thuộc tương quan? Hơn nữa, các tham số của chúng có bằng nhau hay không? Những câu hỏi này thường chưa được trả lời khẳng định mà mới chỉ nêu lên như một giả thuyết.

5.1.1 Giả thuyết thống kê

Giả thuyết thống kê là giả thuyết về biến ngẫu nhiên gốc của tổng thể, bao gồm: dạng phân phối xác suất, các đặc trưng tham số của biến ngẫu nhiên gốc hoặc giả thuyết về sự độc lập của các biến ngẫu nhiên gốc.

(a) Giả thuyết thống kê. Kiểm định giả thuyết thống kê

1. Bất kỳ giả thuyết nào nói về tham số, dạng quy luật phân phối xác suất hay tính độc lập của các biến ngẫu nhiên, đều được gọi là giả thuyết thống kê.

2. Việc tìm ra kết luận về tính thừa nhận được hay không thừa nhận được của giả thuyết gọi là kiểm định giả thuyết thống kê.

Trong khuôn khổ của chương trình, ta chỉ đề cập đến giả thuyết về tham số của biến ngẫu nhiên.

(b) Giả thuyết cơ bản. Giả thuyết đối

1. Giả sử cần nghiên cứu tham số θ của biến ngẫu nhiên X và có cơ sở nào đó để nêu lên giả thuyết $\theta = \theta_0$. Giả thuyết này ký hiệu là H_0, còn gọi là giả thuyết cơ bản hay giả thuyết không (null hypothesis).

2. Mệnh đề đối lập với giả thuyết H_0 ký hiệu là H_1, còn gọi là đối thuyết (alternative hypothesis). Dạng tổng quát nhất của H_1 là $\theta \neq \theta_0$. Trong nhiều trường hợp giả thuyết đối được phát biểu cụ thể là $H_1 : \theta > \theta_0$ hoặc $H_1 : \theta < \theta_0$.

Như vậy, giả thuyết cơ bản hay giả thuyết đối thường được phát biểu thành cặp:

Giả thuyết H_0	$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_0$
Đối thuyết H_1	$\theta \neq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$\theta < \theta_0$

Nhiệm vụ của lý thuyết kiểm định giả thuyết thống kê là kiểm tra bằng thực nghiệm, thông qua mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tính đúng sai của giả thuyết H_0.

5.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ

Quy tắc kiểm định dựa trên hai nguyên lý sau:

1. Nguyên lý xác suất nhỏ: "Nếu một sự kiện có xác rất nhỏ thì trong một phép thử sự kiện đó coi như không xảy ra".

2. Phương pháp phản chứng: "Để bác bỏ A ta giả sử A đúng; nếu A đúng dẫn đến một điều vô lý thì bác bỏ A".

Dựa vào hai nguyên lý này ta đưa ra phương pháp chung để kiểm định một giả thuyết thống kê như sau.

(a) Cơ sở lập luận

Giả sử giả thuyết H_0 đúng. Trên cơ sở đó xây dựng một sự kiện A nào đó, sao cho xác suất xảy ra A bằng α bé đến mức có thể sử dụng nguyên lý xác suất nhỏ, tức là có thể coi A không xảy ra trong phép thử về sự kiện này. Thực hiện một phép thử đối với sự kiện A:

1. Nếu A xảy ra thì bác bỏ giả thuyết H_0.

2. Nếu A không xảy ra thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Các bước tiến hành

Bước 1 Từ biến ngẫu nhiên X, lập mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ cỡ n và chọn thống kê G phụ thuộc vào tham số θ:

$$G(X, \theta) = f(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) \tag{5.1}$$

sao cho nếu H_0 đúng thì quy luật phân phối xác suất của G hoàn toàn xác định. Thống kê G gọi là tiêu chuẩn kiểm định.

Bước 2 Tìm miền W_α sao cho $P(G \in W_\alpha) = \alpha$ với giả thuyết H_0 đúng, tức là

$$P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha. \tag{5.2}$$

Vì α nhỏ, nên theo nguyên lý xác suất nhỏ có thể coi G không nhận giá trị trong miền W_α đối với một phép thử.

Bước 3 Thực hiện một phép thử đối với mẫu ngẫu nhiên W_X ta thu được mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và tính được giá trị cụ thể của tiêu chuẩn kiểm định G trong (5.1), gọi là giá trị quan sát, ký hiệu là g hay g_{qs}.

Bước 4 Xét xem giá trị quan sát g có thuộc miền W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $g \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0 thừa nhận H_1.

(b) Nếu $g \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Xác suất α được gọi là mức ý nghĩa của tiêu chuẩn kiểm định (thông thường yêu cầu $\alpha \le 0,05$). Miền W_α được gọi là miền bác bỏ giả thuyết H_0 với mức ý nghĩa α nếu $P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha$.

Chú ý 5.1. Cùng mức ý nghĩa α đối với một tiêu chuẩn kiểm định G có thể có vô số miền bác bỏ giả thuyết H_0.

5.1.3 Sai lầm loại I. Sai lầm loại II

(a) Sai lầm loại I

Bác bỏ giả thuyết H_0 trong khi H_0 đúng. Xác suất mắc sai lầm này chính bằng α:

$$P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha.$$

Sai lầm loại I phát sinh do kích thước mẫu quá nhỏ, do phương pháp lấy mẫu ...

(b) Sai lầm loại 2

Thừa nhận H_0 trong khi H_0 sai, hay giá trị quan sát g không thuộc miền bác bỏ W_α trong khi H_1 đúng. Xác suất mắc sai lầm loại II là

$$\beta = P(G \notin W_\alpha | H_1) = 1 - P(G \in W_\alpha | H_1). \tag{5.3}$$

Suy ra xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 nếu nó sai là $P(G \in W_\alpha | H_1) = 1 - \beta$. Xác suất này gọi là hiệu lực của kiểm định, nó chính là xác suất "không mắc sai lầm loại II".

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I Xác suất bằng α	Quyết định đúng Xác suất bằng $1 - \beta$
Không bác bỏ H_0	Quyết định đúng Xác suất bằng $1 - \alpha$	Sai lầm loại II Xác suất bằng β

Bảng 5.1: Các tình huống có thể xảy ra trong kiểm định giả thuyết thống kê

Trong xã hội văn minh, người ta có xu hướng thừa nhận rằng "việc kết án nhầm người vô tội" là một sai lầm nghiêm trọng hơn nhiều so với sai lầm "tha bổng kẻ có tội". Trong bài toán kiểm định giả thuyết cũng vậy, ta coi sai lầm loại I là nghiêm trọng hơn sai lầm loại II. Do đó ta cố định trước xác suất mắc sai lầm loại I ở mức α, còn gọi là mức ý nghĩa và tìm cách cực tiểu sai lầm loại II.

Cần lưu ý khi kiểm định thống kê dẫn tới việc chấp nhận H_0 thì xác suất mắc sai lầm loại II ta không biết (thường là khó biết) và có thể khá lớn. Do đó việc chấp nhận H_0 là một quyết định dè dặt. Nói khác đi, khi chấp nhận H_0 ta không nên hiểu H_0 đúng mà chỉ nên hiểu rằng các chứng cứ và số liệu đã có chưa đủ để bác bỏ H_0, cần phải nghiên cứu tiếp. Còn nếu kết luận bác bỏ H_0 thì hoặc kết luận đó là đúng hoặc ta mắc sai lầm loại I với xác suất nhỏ. Do đó kết luận này là kết luận đáng tin cậy.

Một kiểm định thống kê lý tưởng là kiểm định làm cực tiểu cả hai sai lầm. Tuy nhiên, điều đó là không thực hiện được. Do đó, người ta tìm cách cố định sai lầm loại I và cực tiểu sai lầm loại II.

(c) Lựa chọn miền bác bỏ để xác suất mắc sai lầm loại II là bé nhất

Khi kiểm định giả thuyết thống kê, nếu mức ý nghĩa α đã chọn, cỡ mẫu n đã xác định, vấn đề còn lại là trong vô số miền bác bỏ, ta chọn miền W_α sao cho xác suất mắc sai lầm loại II là nhỏ nhất hay hiệu lực của kiểm định lớn nhất.

Định lý Neymann–Pearson chỉ ra rằng nhiều bài toán quan trọng trong thực tiễn có thể tìm được miền bác bỏ W_α thỏa mãn yêu cầu trên, nghĩa là

$$\boxed{P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha \quad \text{và} \quad P(G \in W_\alpha | H_1) = 1 - \beta \to \max} \tag{5.4}$$

Trong thực hành, quy tắc được xây dựng dưới đây có miền bác bỏ thỏa mãn tính chất trên.

(d) Các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê

Qua nội dung trình bày ở trên, các bước giải một bài toán kiểm định giả thuyết thống kê bao gồm:

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1.
2. Chọn tiêu chuẩn kiểm định.
3. Định rõ mức ý nghĩa α (xác suất mắc sai lầm loại I) và xác định miền bác bỏ giả thuyết H_0.
4. Tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định từ mẫu quan sát được.
5. Kết luận bác bỏ H_0 hay chưa có cơ sở để bác bỏ H_0.

5.2 Kiểm định giả thuyết về tham số của một tổng thể

5.2.1 Kiểm định giả thuyết về kỳ vọng/giá trị trung bình

Bài toán 5.1. Giả sử biến ngẫu nhiên gốc X tuân theo quy luật phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, trong đó giá trị trung bình $E(X) = \mu$ chưa biết nhưng có cơ sở để nêu lên giả thuyết

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{với } \mu_0 \text{ là tham số đã biết.}$$

Hãy kiểm định giả thuyết này với các thuyết đối $H_1 : \mu \neq \mu_0$ hoặc $\mu > \mu_0$ hoặc $\mu < \mu_0$.

Tiêu chuẩn kiểm định và miền bác bỏ giả thuyết H_0 phụ thuộc các trường hợp sau.

(a) Trường hợp đã biết phương sai

Giả sử phương sai σ^2 của biến ngẫu nhiên gốc X trong tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ đã biết. Từ tổng thể rút ra một mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kích thước n.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$. Nếu giả thuyết H_0 đúng thì

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}} \tag{5.5}$$

Thống kê U có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Xây dựng miền bác bỏ W_α phụ thuộc vào thuyết đối H_1.

(a) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ **(bài toán kiểm định hai phía).** Với mức ý nghĩa α cho trước, giả thuyết H_0 bị bác bỏ nếu $P\left\{|U| > u_{1-\alpha/2}\middle|(\mu = \mu_0)\right\} = \alpha$, trong đó $u_{1-\alpha/2}$ được xác định từ hệ thức $\Phi(u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. Do đó, miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty).$$

(b) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ **(bài toán kiểm định một phía).** Với mức ý nghĩa α cho trước, ta tìm giá trị $u_{1-\alpha}$ sao cho $P\left\{U > u_{1-\alpha}\middle|(\mu = \mu_0)\right\} = \alpha$ từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc (Phụ lục 3) và xác định được miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty).$$

(c) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ **(bài toán kiểm định một phía).** Với mức ý nghĩa α cho trước, ta tìm giá trị $u_{1-\alpha}$ sao cho $P\left\{U < -u_{1-\alpha}\middle|(\mu = \mu_0)\right\} = \alpha$ và xác định được miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha}).$$

Tóm lại, miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, .., x_n)$, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}} \tag{5.6}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.1. Một hãng bảo hiểm thông báo rằng số tiền trung bình hãng chi trả cho khách hàng bị tai nạn ô tô là 8500 USD. Để kiểm tra lại, người ta kiểm tra ngẫu nhiên hồ sơ chi trả của 25 khách hàng thì thấy số tiền trung bình chi trả là 8900 USD. Giả sử số tiền chi trả tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 2600 USD. Hãy kiểm định lại thông báo của hãng bảo hiểm trên với mức ý nghĩa 5%.

Lời giải Ví dụ 5.1 Gọi X là số tiền hãng bảo hiểm chi trả cho khách hàng. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với $\sigma = 2600$. Số tiền trung bình hãng chi trả cho khách hàng là $E(X) = \mu$ chưa biết. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trường hợp đã biết phương sai.

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$ với $\mu_0 = 8500$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là
$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty).$$
- Từ số liệu của đầu bài ta có $n = 25$, $\mu_0 = 8500$, $\overline{x} = 8900$, $\sigma = 2600$ suy ra giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định (5.5)
$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{8900 - 8500}{2600}\sqrt{25} \simeq 0,77.$$
- Vì $u_{qs} = 0,77 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0. Tức là chưa có cơ sở để bác bỏ thông báo của hãng bảo hiểm với mức ý nghĩa 5%.

Ví dụ 5.2. Nếu máy móc hoạt động bình thường thì trọng lượng sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với trọng lượng trung bình là 100 gam, độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 2$ gam. Qua một thời gian sản xuất người ta nghi ngờ trọng lượng sản phẩm có xu hướng tăng lên, cân thử 100 sản phẩm thì trọng lượng trung bình của chúng là 100,4 gam. Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ hãy kết luận về điều nghi ngờ trên.

Lời giải Ví dụ 5.2 Gọi X là trọng lượng sản phẩm thì $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với $\sigma = 2$. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trường hợp đã biết phương sai.

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu > \mu_0$ với $\mu_0 = 100$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,65; +\infty)$.
- Từ số liệu đầu bài với $n = 100$, $\mu_0 = 100$, $\sigma = 2$, $\overline{x} = 100,4$ suy ra giá trị quan sát
$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{100,4 - 100}{2}\sqrt{100} = 2.$$
- Vì $u_{qs} = 2 \in W_\alpha$ nên bác bỏ giả thuyết H_0. Tức là điều nghi ngờ nói trên là có cơ sở với mức ý nghĩa 5%.

(b) Trường hợp chưa biết phương sai, cỡ mẫu lớn $(n \geq 30)$

Trong trường hợp này ta vẫn dùng tiêu chuẩn kiểm định như trên trong đó độ lệch tiêu chuẩn σ được thay bằng độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh mẫu. Các bài toán trong trường trượng hợp này vẫn giải được ngay cả khi biến X của tổng thể không có phân phối chuẩn.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$. Nếu giả thuyết H_0 đúng thì

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}} \tag{5.7}$$

Vì $n \geq 30$ nên U có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Xây dựng miền bác bỏ giả thuyết H_0 phụ thuộc vào thuyết đối H_1:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể $W_x = (x_1, \ldots, x_n)$, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}} \tag{5.8}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.3. Một công ty có một hệ thống máy tính có thể xử lý 1200 hóa đơn trong một giờ. Công ty mới nhập một hệ thống máy tính mới. Hệ thống này khi chạy kiểm tra trong 40 giờ cho thấy số hóa đơn được xử lý trung bình trong một giờ là 1260 với độ lệch chuẩn hiệu chỉnh 215. Với mức ý nghĩa 5% hãy nhận định xem hệ thống mới có tốt hơn hệ thống cũ hay không?

Lời giải Ví dụ 5.3 Gọi X là số hóa đơn mà hệ thống máy tính mới xử lý được trong vòng một giờ, $E(X) = \mu$ là số hóa đơn trung bình mà hệ thống máy tính mới xử lý được trong một giờ.

- Kiểm tra giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu > \mu_0$ với $\mu_0 = 1200$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,65; +\infty)$.
- Từ số liệu đầu bài ta có $\mu_0 = 1200$, $n = 40$, $\overline{x} = 1250$, $s = 215$ suy ra giá trị quan sát
$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{1260 - 1200}{215}\sqrt{40} = 1,76.$$
- Vì $u_{qs} = 1,76 \in W_\alpha$ nên bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là với số liệu này có thể coi hệ thống máy mới tốt hơn hệ thống máy cũ với mức ý nghĩa 5%.

Ví dụ 5.4. Một nhà máy sản xuất săm lốp ô tô tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình một chiếc lốp ô tô của họ là 30000 dặm. Cơ quan giám định chất lượng nghi ngờ lời tuyên bố này đã kiểm tra 100 chiếc lốp và tìm được trung bình mẫu $\overline{x} = 29000$ dặm với độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh $s = 5000$ dặm. Với mức ý nghĩa 5% cơ quan giám định có bác bỏ được lời quảng cáo của nhà máy nói trên hay không?

Lời giải Ví dụ 5.3 Gọi X là tuổi thọ của một chiếc lốp ô tô của nhà máy, $E(X) = \mu$ là tuổi thọ trung bình của một chiếc lốp ô tô.

- Kiểm tra giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu < \mu_0$ với $\mu_0 = 30000$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (-\infty; -1,65)$.

- Từ số liệu đầu bài ta có $\mu_0 = 3000$, $n = 100$, $\overline{x} = 29000$, $s = 5000$ suy ra giá trị quan sát
$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{29000 - 30000}{5000}\sqrt{100} = -2.$$
- Vì $u_{qs} = -2 \in W_\alpha$ nên bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là quảng cáo của nhà máy này là rất sự thật với mức ý nghĩa 5%.

(c) Trường hợp chưa biết phương sai, cỡ mẫu nhỏ $(n < 30)$

Để giải các bài toán kiểm định giả thuyết ở trên ta thực hiện các bước sau.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$. Nếu giả thuyết H_0 đúng thì
$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}} \tag{5.9}$$

Thống kê T có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xây dựng phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left(-\infty; -t^{(n-1)}_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(t^{(n-1)}_{1-\alpha/2}; +\infty\right)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\left(t^{(n-1)}_{1-\alpha}; +\infty\right)$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\left(-\infty; -t^{(n-1)}_{1-\alpha}\right)$

trong đó $t^{(n-1)}_{1-\alpha/2}$ và $t^{(n-1)}_{1-\alpha}$ được tra từ bảng phân phối Student (Phụ lục 4).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:
$$\boxed{t_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}} \tag{5.10}$$

Bước 4 Xét xem t_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $t_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $t_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.5. Một công ty sản xuất hạt giống tuyên bố rằng một loại giống mới của họ có năng suất trung bình là 21,5 tạ/ha. Gieo thử hạt giống mới này tại 16 vườn thí nghiệm và thu được kết quả:

$$19,2; 18,7; 22,4; 20,3; 16,8; 25,1; 17,0; 15,8; 21,0; 18,6; 23,7; 24,1; 23,4; 19,8; 21,7; 18,9.$$

Dựa vào kết quả này hãy xác nhận xem quảng cáo của công ty có đúng không với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$. Biết rằng năng suất giống cây trồng là một biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Lời giải Ví dụ 5.5 Gọi X là năng suất giống cây trồng. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n = 16 < 30$.

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu = \mu_0$, đối thuyết $H_1 : \mu \neq \mu_0$ với $\mu_0 = 21,5$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. $T \sim t(n-1)$ (phân phối Student với $n-1$ bậc tự do).
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng phân phối Student được $t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} = t_{0,975}^{(15)} = 2,131$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là
$$W_\alpha = \Big(-\infty; -t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}\Big) \cup \Big(t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}; +\infty\Big) = (-\infty; -2,131) \cup (2,131; +\infty).$$
- Từ số liệu đầu bài tính được $n = 16$, $\overline{x} = 20,406$, $s = 3,038$ với $\mu_0 = 21,5$ suy ra giá trị quan sát
$$t_{qs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{20,406 - 21,5}{3,038}\sqrt{16} = -1,44.$$
- Vì $t_{qs} = -1,44 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là với số liệu này có thể chấp nhận lời quảng cáo của công ty với mức ý nghĩa 5%.

Nhận xét 5.1. 1. Nếu tổng thể của biến ngẫu nhiên X không tuân theo quy luật phân phối chuẩn thì ta có thể tiến hành chọn mẫu có kích thước lớn $n \geq 30$, khi đó ta có thể tiến hành kiểm định tương tự như tiến hành kiểm định đối với biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Do đó, trong nhiều trường hợp người ta có thể bỏ qua giả thiết chuẩn của biến ngẫu nhiên gốc X (khi mẫu kích thước lớn).

2. Nếu kích thước mẫu $n < 30$ thì ta phải có điều kiện $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

5.2.2 Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ hay xác suất

Bài toán 5.2. Giả sử ta quan tâm đến một đặc trưng A nào đó mà mỗi cá thể của tổng thể có thể có tính chất này hoặc không. Gọi p là tần suất có đặc trưng A của tổng thể (p cũng là xác suất cá thể có đặc trưng A của tổng thể). Dấu hiệu nghiên cứu này là một biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối Bernoulli với kỳ vọng bằng p. Nếu p chưa biết, nhưng có cơ sở để nêu lên giả thuyết
$$H_0 : p = p_0 \quad \text{với} \quad p_0 \text{ là tỷ lệ đã biết.}$$
Hãy kiểm định giả thuyết này với thuyết đối
$$H_1 : p \neq p_0 \quad \text{hoặc} \quad p > p_0 \quad \text{hoặc} \quad p < p_0.$$

Do không biết p nên người ta thực hiện n phép thử độc lập, cùng điều kiện, trong đó có m phép thử xảy ra A. Tần suất mẫu $f = m/n$ là ước lượng điểm không chệch cho p. Ta có f có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn với kỳ vọng $E(f) = p$ và phương sai $V(f) = \dfrac{p(1-p)}{n}$. Từ đó bài toán kiểm định giả thuyết về tỷ lệ không có khác biệt căn bản so với bài toán kiểm định giả thuyết về kỳ vọng.

Người ta chứng minh được rằng nếu $np_0 \geq 5$ và $n(1-p_0) \geq 5$ thì các bài toán kiểm định trên giải được theo các bước sau.

Bước 1 Với giả thuyết H_0 đúng xét thống kê

$$\boxed{U = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}} \tag{5.11}$$

Khi n đủ lớn thống kê (5.11) xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$. Trong thực tế khi $np_0 \geq 5$ và $n(1-p_0) \geq 5$ thì có thể xem thống kê U trong (5.11) tuân theo luật phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Xây dựng miền bác bỏ giả thuyết H_0 phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$
$p = p_0$	$p > p_0$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$p = p_0$	$p < p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Lập mẫu cụ thể, tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}, \quad f = \frac{m}{n}} \tag{5.12}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.6. Một công ty A sản xuất bánh kẹo tuyên bố rằng $\dfrac{1}{2}$ số trẻ em thích ăn bánh kẹo của công ty. Trong một mẫu gồm 100 trẻ em được hỏi, có 47 em tỏ ra thích ăn bánh của công ty. Với mức ý nghĩa 5%, số liệu trên có chứng tỏ là tuyên bố của công ty là đúng hay không?

Lời giải Ví dụ 5.6 Gọi p là tỷ lệ trẻ em thích bánh của công ty. Đây là bài toán kiểm định giả thuyết về tỷ lệ của tổng thể.

- Đặt giả thuyết $H_0 : p = p_0$, đối thuyết $H_1 : p \neq p_0$ với $p_0 = 0,5$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$ nếu giả thuyết H_0 đúng.
  Vì $np_0 = n(1-p_0) = 100 \times 0,5 = 50$ khá lớn nên $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là
  $$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty).$$
- Từ số liệu đã cho ta có $n = 100$, $m = 47$ tính được $f = \dfrac{m}{n} = \dfrac{47}{100} = 0,47$, với $p_0 = 0,5$ suy ra giá trị quan sát
  $$u_{qs} = \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0 \times (1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{0,47 - 0,5}{\sqrt{0,5 \times 0,5}}\sqrt{100} = -0,6.$$
- Vì $u_{qs} = -0,6 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0 hay tuyên bố của công ty là có cơ sở với mức ý nghĩa 5%.

TÓM TẮT các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê:

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1.
2. Từ tổng thể nghiên cứu lập mẫu ngẫu nhiên kích thước n. Chọn tiêu chuẩn kiểm định và xác định quy luật phân phối xác suất của tiêu chuẩn kiểm định với điều kiện giả thiết H_0 đúng.
3. Với mức ý nghĩa α cho trước, xác định miền bác bỏ (giả thuyết H_0) W_α tốt nhất tùy thuộc vào đối thuyết H_1.
4. Từ mẫu cụ thể tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định.
5. So sánh giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định với miền bác bỏ W_α và kết luận.

Trường hợp	Tiêu chuẩn kiểm định nếu H_0 đúng	H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
σ^2 đã biết	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$ $(u_{1-\alpha}; +\infty)$ $(-\infty; -u_{1-\alpha})$
σ^2 chưa biết $n < 30$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$\left(-\infty; -t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}\right) \cup \left(t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}; +\infty\right)$ $\left(t_{1-\alpha}^{(n-1)}; +\infty\right)$ $\left(-\infty; -t_{1-\alpha}^{(n-1)}\right)$
σ^2 chưa biết $n \geq 30$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$ $(u_{1-\alpha}; +\infty)$ $(-\infty; -u_{1-\alpha})$
$np_0 \geq 5$ $n(1-p_0) \geq 5$	$U = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$	$p = p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$(-\infty; -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; +\infty)$ $(u_{1-\alpha}; +\infty)$ $(-\infty; -u_{1-\alpha})$

BÀI 14 (2 tiết)

5.3 Kiểm định giả thuyết về tham số của hai tổng thể

Trong cuộc sống hàng ngày cũng như trong công tác nghiên cứu ta thường phải làm phép so sánh: so sánh chất lượng của hai loại sản phẩm, so sánh hai cơ hội đầu tư, so sánh hai phương pháp học tập... Trong Mục 5.2 ta đã xét bài toán kiểm định giả thuyết về tham số của tổng thể. Trong mục này ta sẽ xét bài toán so sánh các tham số của hai tổng thể.

5.3.1 So sánh giá trị trung bình của hai tổng thể

Ví dụ 5.7 (Ví dụ mở đầu)**.** Ở một quốc gia người ta tiến hành một nghiên cứu để so sánh mức lương trung bình của nữ giới với mức lương trung bình của nam giới trong một ngành sản xuất. Chọn ngẫu nhiên 100 nữ giới và 80 nam giới và tính toán được mức lương trung bình của nhóm nữ giới là 57,84 USD/ngày với độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh là 13,12 USD/ngày; mức lương trung bình của nhóm nam giới là 64,48 USD/ngày với độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh là 14,8 USD/ngày. Số liệu này có chứng minh được rằng mức lương trung bình của nữ giới thấp hơn mức lương trùng bình của nam giới trong ngành sản xuất đó hay không?

Bài toán 5.3. Giả sử X và Y là mô hình hóa của hai dấu hiệu $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ của hai tổng thể. Giả thiết X và Y có phân phối chuẩn với $E(X) = \mu_1$, $V(X) = \sigma_1^2$, $E(Y) = \mu_2$, $V(Y) = \sigma_2^2$, trong đó μ_1 và μ_2 chưa biết. Bài toán đặt ra là cần so sánh giá trị μ_1 với μ_2. Tương tự như trên ta có các cặp giả thuyết cần kiểm định sau đây:

1. Giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; đối thuyết $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.
2. Giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; đối thuyết $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.
3. Giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$; đối thuyết $H_1 : \mu_1 < \mu_2$.

Từ hai tổng thể rút ra hai mẫu ngẫu nhiên tương ứng $W_X = (X_1, X_2, \ldots, X_{n_1})$ kích thước n_1, $W_Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2})$ kích thước n_2. Hai mẫu này được giả thiết là lấy độc lập với nhau.

(a) Trường hợp phương sai σ_1^2, σ_2^2 đã biết

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $\mu_1 - \mu_2 = 0$, khi đó tiêu chuẩn kiểm định có dạng:

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}} \tag{5.13}$$

Vì X và Y độc lập nên U có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Từ hai mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$, $W_y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định (5.13):

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}} \tag{5.14}$$

Nếu ký hiệu σ là độ lệch tiêu chuẩn hợp nhất thì $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$, khi đó (5.14) trở thành $u_{qs} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sigma}$.

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận:

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Trường hợp phương sai σ_1^2, σ_2^2 chưa biết, cỡ mẫu lớn ($n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$)

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $\mu_1 - \mu_2 = 0$, khi đó tiêu chuẩn kiểm định có dạng:

$$\boxed{U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}} \tag{5.15}$$

Vì X và Y độc lập nên U có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định cho ba trường hợp như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Từ hai mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$, $W_y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định (5.15):

$$\boxed{u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}} \tag{5.16}$$

Nếu ký hiệu s là độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh hợp nhất thì $s = \sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$, khi đó $u_{qs} = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{s}$.

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.8. Hai máy tự động dùng để cắt những thanh kim loại do cùng một kỹ thuật viên phụ trách và căn chỉnh. Từ mỗi máy lấy ra 31 thanh kim loại để kiểm tra và thu được kết quả sau:

Máy 1: Trung bình mẫu là 12 cm, độ lệch chuẩn hiệu chỉnh là 1,2 cm.

Máy 2: Trung bình mẫu là 12,3 cm, độ lệch chuẩn hiệu chỉnh là 1,4 cm.

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ có thể cho rằng chiều dài của các thanh kim loại do Máy 2 sản xuất khác chiều dài do Máy 1 sản xuất hay không. Biết chiều dài thanh kim loại do các máy sản xuất có phân phối chuẩn.

Lời giải Ví dụ 5.8 Gọi X, Y lần lượt là chiều dài các thanh kim loại do Máy 1, 2 sản xuất. Ta có X và Y độc lập và $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Đây là bài toán so sánh hai kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn trường hợp chưa biết phương sai, mẫu cỡ $n_1 = n_2 = 31 > 30$.

- Đặt giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, đối thuyết $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định (5.15) nếu giả thuyết H_0 đúng. $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- Với $\alpha = 0,01$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2,58$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty) = (-\infty; -2,58) \cup (2,58; +\infty).$$

- Từ số liệu đã cho ta có $n_1 = n_2 = 31$, $\overline{x} = 12$, $s_1 = 1,2$, $\overline{y} = 12,3$, $s_2 = 1,4$, suy ra giá trị quan sát

$$u_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{12 - 12,3}{\sqrt{\dfrac{1,44}{31} + \dfrac{1,94}{31}}} = -0,9085.$$

- Vì $u_{qs} = -0,9085 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, hay có thể xem chiều dài các thanh kim loại do hai nhà máy sản xuất là như nhau với mức ý nghĩa 1%.

(c) Trường hợp phương sai σ_1^2, σ_2^2 chưa biết, cỡ mẫu nhỏ ($n_1 < 30, n_2 < 30$)

Trong trường hợp này ta cần giả thiết sau:

($\mathcal{H}$) Hai tổng thể đều có phân phối chuẩn và phương sai của hai tổng thể (dù chưa biết) nhưng bằng nhau, tức là $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.17}$$

Nếu giả thiết ($\mathcal{H}$) thỏa mãn thì thống kê T trong (5.17) có phân phối Student với $n_1 + n_2 - 2$ bậc tự do, $T \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\Big(-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\Big) \cup \Big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}; +\infty\Big)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\Big(t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}; +\infty\Big)$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\Big(-\infty; -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\Big)$

trong đó $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ và $t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ được tra từ bảng phân phối Student (Phụ lục 4).

Bước 3 Từ hai mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$, $W_y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định (5.17):

$$\boxed{t_{qs} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.18}$$

Nếu ký hiệu độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh s_p là ước lượng cho phương sai chung σ^2 thì

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}},$$

khi đó độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh hợp nhất s được tính theo công thức $s = s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}$ suy ra $t_{qs} = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{s}$.

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận:

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(a) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.9. Người ta ghi lại sản lượng lúa mì, tính bằng tạ/héc-ta của các mảnh ruộng đã bón lót 50 và 100 đơn vị đạm trên một héc-ta.

1. Bón 50 đơn vị: 47,2; 43,1; 35,7; 47,0; 5,7; 42,6; 46,7; 42,3.

2. Bón 100 đơn vị: 47,9; 48,9; 43,5; 53,1; 50,8; 46,1; 41,1; 43,0; 41,0; 48,5; 47,7.

Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận rằng bón lót 100 đơn vị đạm cho năng suất cao hơn bón lót 50 đơn vị đạm hay không? Giả sử phương sai của sản lượng lúa mì do bón 50 đơn vị và 100 đơn vị đạm/héc-ta là như nhau.

Lời giải Ví dụ 5.9 Gọi X, Y tương ứng là sản lượng lúa mì của các mảnh ruộng đã bón lót 100 đơn vị đạm và 50 đơn vị đạm trên một héc-ta. $E(X) = \mu_1$, $E(Y) = \mu_2$ là sản lượng lúa mì trung bình khi bón lót 100 đơn vị đạm và 50 đơn vị đạm tương ứng.

- Cần kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ với đối thuyết $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

- Chọn tiêu chuẩn kiểm định theo (5.17) với giả thuyết H_0 đúng. Vì giả thiết $(\mathcal{H})$ thỏa mãn nên T có phân phối Student với $n_1 + n_2 - 2 = 8 + 11 - 2 = 17$ bậc tự do.

- Với $\alpha = 5\%$, tra bảng phân phối Student ta được $t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} = t_{0,95}^{(17)} = 1,74$ suy ra miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (1,74; +\infty)$.

- Tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định (5.17) với $\overline{x} = 46,54$, $\overline{y} = 43,85$, $s_p = 3,84$, $s = 1,784$ suy ra
$$t_{qs} = \frac{46,54 - 43,85}{1,784} = 1,51.$$

- Vì $t_{qs} = 1,51 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ H_0, nghĩa là chưa khẳng định được việc bón lót 100 đơn vị đạm cho năng suất cao hơn bón lót 50 đơn vị đạm với mức ý nghĩa 5%.

Chú ý 5.2. (a) Nếu cỡ mẫu n_1, n_2 nhỏ thì ta phải thêm giả thuyết biến ngẫu nhiên gốc tuân theo phân phối chuẩn; nếu n_1 và n_2 khá lớn ta có thể bỏ qua giả thiết chuẩn của đầu bài.

(b) Hai đối thuyết $\mu_1 > \mu_2$ và $\mu_1 < \mu_2$ dễ dàng chuyển đổi cho nhau bằng cách thay đổi thứ tự của hai mẫu.

(d) So sánh từng cặp

Chú ý 5.3 (So sánh từng cặp)**.** Xét tổng thể $\mathcal{X}$ là tập hợp $\{(x_i; y_i), i = 1, 2, \ldots, N\}$ trong đó giá trị trung bình μ của tổng thể gồm hai thành phần $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ với

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i; \quad \mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i.$$

Giả thiết tổng thể $\mathcal{X}$ có phân phối chuẩn. Từ tổng thể lập mẫu nhiên

$$W_{XY} = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)\}$$

kích thước n. Thiết lập hiệu $Z = X - Y$. Với mẫu cụ thể $W_{xy} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$, từ $z_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ nhận được mẫu mới $W_z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Ta đưa bài toán so sánh hai giá trị trung bình μ_1 với μ_2 về bài toán kiểm định giả thuyết $H_0 : E(Z) = 0$ với đối thuyết $H_1 : E(Z) \neq 0$ hoặc $H_1 : E(Z) > 0$ hoặc $H_1 : E(Z) < 0$ (xem Mục 5.2). Phương pháp này được gọi là phương pháp so sánh từng cặp.

Ví dụ 5.10. Để khảo sát tác dụng tăng sản lượng hoa màu A của việc bón thêm một loại phân đạm B ta so sánh năng suất hoa màu A trung bình trên một héc-ta khi bón phân B với năng suất hoa màu A trung bình trên một héc-ta khi không bón phân B. Gọi μ_1 là năng suất hoa màu A trung bình trên một héc-ta khi bón phân B, μ_2 là năng suất hoa màu A trung bình trên một héc-ta khi không bón phân B. Khi đó ta có bài toán kiểm định giả thuyết $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ với đối thuyết $H_1 : \mu_1 > \mu_2$. Để giải quyết bài toán này, ta sẽ bố trí thí nghiệm theo hai cách.

Cách 1: Chọn n thửa ruộng thí nghiệm diện tích 1 héc-ta, trồng hoa màu A bón phân B và n mảnh đất thí nghiệm diện tích 1 héc-ta, trồng hoa màu A không bón phân B. Ngoài việc bón phân, tất cả các yếu tố canh tác khác đều như nhau. Cuối vụ ta thu được sản lượng của n thửa ruộng có bón phân là $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và sản lượng của n thửa ruộng không bón phân là $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Ta sử dụng phương pháp so sánh hai kỳ vọng với hai mẫu độc lập. Chú ý rằng nếu $n_1 < 30, n_2 < 30$ thì ta cần thêm điều kiện là giả thiết $(\mathcal{H})$ thỏa mãn.

Cách 2: Chọn n thửa ruộng thí nghiệm diện tích 2 héc-ta, chia mỗi thửa làm 2 mảnh, mỗi mảnh diện tích 1 héc-ta. Một mảnh bón phân B và một mảnh không bón phân B. Cuối vụ thu hoạch ta có sản lượng của hai nửa tương ứng là $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Khi đó ta sẽ sử dụng phương pháp so sánh từng cặp. Cách này có ưu điểm hơn cách 1 ở chỗ: không cần đến giả thiết $(\mathcal{H})$, ngoài ra nó sẽ cho kết quả chính xác hơn vì đã loại bỏ được các nhân tố ngoại lai ảnh hưởng tới giá trị trung bình. Điều kiện canh tác trên mảnh không bón phân và có bón phân gần như đồng nhất, chỉ khác nhau ở việc có bón phân hay không.

Xét một ví dụ cụ thể dưới đây: Để so sánh hai chế độ chăm bón cho một loại cây trồng A, trên 8 mảnh ruộng người ta chia mỗi mảnh thành hai nửa: nửa thứ nhất áp dụng phương pháp chăm bón I, nửa thứ hai theo phương pháp chăm bón II. Sau khi thu hoạch ta được số liệu về năng suất loại cây trồng A như sau:

Mảnh	1	2	3	4	5	6	7	8
Năng suất nửa thứ nhất	5	20	16	22	24	14	18	20
Năng suất nửa thứ hai	15	22	14	25	29	16	20	24

Đánh giá xem hai chế độ chăm bón có giống nhau không với mức ý nghĩa 1%. Biết rằng năng suất loại cây trồng A (sau hai phương pháp chăm bón) có phân phối chuẩn.

Lời giải Ví dụ 5.10 Gọi X, Y lần lượt là năng suất loại cây trồng A ở nửa thứ nhất, thứ hai (sử dụng hai phương pháp chăm bón tương ứng). Ta có $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Đây là bài toán so sánh hai kỳ vọng của hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn cho ở dạng cặp. Sử dụng phương pháp so sánh từng cặp.

Thiết lập hiệu $Z = X - Y$, ký hiệu $E(Z) = \mu_Z$. Bài toán kiểm định được tiến hành theo các bước sau.

- Giả thuyết $H_0 : \mu_Z = \mu_1 - \mu_2 = 0$ với đối thuyết $H_1 : \mu_Z = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định với giả thuyết H_0 đúng:

$$T = \frac{\overline{Z} - 0}{S_Z}\sqrt{n}.$$

  Vì $n = 8 < 30$ nên T có phân phối Student với 7 bậc tự do.

- Với $\alpha = 0,01$ tra bảng phân phối Student ta được $t_{0,995}^{(7)} = 3,499$, suy ra miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (-\infty; -3,499) \cup (3,499; +\infty)$.
- Lập hiệu $z_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Mảnh	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	-10	-2	2	-3	-5	-2	-2	-4

Tính được $\overline{z} = -2,625$, $s_z = 3,4770$, suy ra

$$t_{qs} = \frac{-2,625}{3,4770}\sqrt{8} \simeq -2,1354.$$

- Vì $t_{qs} = -2,1354 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, hay có thể xem hai phương pháp chăm bón cho kết quả như nhau với mức ý nghĩa 1%.

5.3.2 So sánh hai tỷ lệ

Bài toán 5.4. Xét hai tổng thể $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ và một tính chất A nào đó, trong đó mỗi cá thể của tổng thể đó có thể có hay không có tính chất A. Gọi p_1, p_2 tương ứng là tỷ lệ các cá thể có tính chất A nào đó của tổng thể thứ nhất và tổng thể thứ hai. Hai tỷ lệ này chưa biết. Bài toán đặt ra là hãy so sánh p_1 với p_2. Tương tự như trên ta có các cặp giả thuyết cần kiểm định sau đây:

1. Giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$; đối thuyết $H_1 : p_1 \neq p_2$.
2. Giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$; đối thuyết $H_1 : p_1 > p_2$.
3. Giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$; đối thuyết $H_1 : p_1 < p_2$.

Trong tổng thể thứ nhất, ta thực hiện n_1 phép thử độc lập cùng điều kiện, có m_1 cá thể có tính chất A. Trong tổng thể thứ hai ta thực hiện n_2 phép thử độc lập cùng điều kiện, có m_2 cá thể có tính chất A. Đặt

$$\overline{f} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}. \tag{5.19}$$

Bước 1 Chọn tiêu chuẩn kiểm định: $U = \dfrac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$.

Nếu giả thuyết H_0 đúng thì $p_1 = p_2$ và

$$\boxed{U = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.20}$$

Nếu $(n_1 + n_2)\overline{f} > 5$ và $(n_1 + n_2)(1 - \overline{f}) > 5$ thì $U \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Bước 2 Miền bác bỏ giả thuyết H_0 được xác định phụ thuộc vào thuyết đối H_1 như sau:

H_0	H_1	Miền bác bỏ W_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$	$(-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty)$
$p_1 = p_2$	$p_1 > p_2$	$(u_{1-\alpha}; +\infty)$
$p_1 = p_2$	$p_1 < p_2$	$(-\infty; -u_{1-\alpha})$

trong đó $u_{1-\alpha/2}$ và $u_{1-\alpha}$ được tra từ bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc $\Phi(x)$ (Phụ lục 3).

Bước 3 Từ mẫu thu thập, ta tính được giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định:

$$\boxed{u_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}} \tag{5.21}$$

với $f_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$, $f_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$, $\overline{f} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{n_1.f_1 + n_2.f_2}{n_1 + n_2}$.

Ta cũng có thể tính

$$s_p = \sqrt{\bar{f}(1-\bar{f})}; \quad s = s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

suy ra

$$\boxed{u_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{s}} \tag{5.22}$$

Bước 4 Xét xem u_{qs} có thuộc W_α hay không để kết luận.

(a) Nếu $u_{qs} \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0.

(b) Nếu $u_{qs} \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 5.11. Từ kho đồ hộp thứ nhất lấy ngẫu nhiên 1000 hộp để kiểm tra thấy có 20 hộp bị hỏng. Từ kho đồ hộp thứ hai lấy ngẫu nhiên 900 hộp kiểm tra thấy 30 hộp bị hỏng. Hỏi chất lượng bảo quản của 2 kho có thực sự giống nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

Lời giải Ví dụ 5.11 Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỷ lệ hộp hỏng ở kho đồ hộp thứ nhất và thứ hai tương ứng. Đây là bài toán so sánh hai tỷ lệ.

- Đặt giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$, đối thuyết $H_1 : p_1 \neq p_2$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. Vì $(n_1 + n_2)\bar{f} > 5$ và $(n_1 + n_2)(1 - \bar{f}) > 5$ nên $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha/2} = 1,96$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là:

$$W_\alpha = (-\infty; -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty) = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; +\infty).$$

- Theo đầu bài $n_1 = 1000$, $n_2 = 900$, $m_1 = 20$, $m_2 = 30$, $f_1 = \dfrac{2}{100}$, $f_2 = \dfrac{3}{90}$,

$\overline{f} = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{20+30}{1900} = \dfrac{5}{190}$, suy ra

$$u_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = -1,8129.$$

- Vì $u_{qs} = -1,8129 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là có thể xem chất lượng bảo quản của hai kho hàng là như nhau với mức ý nghĩa 5%.

Ví dụ 5.12. Một bệnh viện điều trị loại bệnh A theo hai phương pháp. Sau một thời gian thấy kết quả như sau:

Trong 102 bệnh nhân điều trị phương pháp I có 82 bệnh nhân khỏi bệnh.

Trong 98 bệnh nhân điều trị phương pháp II có 69 bệnh nhân khỏi bệnh.

Hỏi có phải phương pháp I điều trị tốt hơn phương pháp II hai hay không với mức ý nghĩa 5%.

Lời giải Ví dụ 5.12 Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỷ lệ bệnh nhân khỏi bệnh khi điều trị bằng phương pháp I và II tương ứng. Đây là bài toán so sánh hai tỷ lệ.

- Đặt giả thuyết $H_0 : p_1 = p_2$, đối thuyết $H_1 : p_1 > p_2$.
- Chọn tiêu chuẩn kiểm định $U = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ nếu giả thuyết H_0 đúng. Ta thấy $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- Với $\alpha = 0,05$ tra bảng giá trị hàm phân phối chuẩn tắc được $u_{1-\alpha} = 1,65$. Miền bác bỏ giả thuyết H_0 là $W_\alpha = (u_{1-\alpha}; +\infty) = (1,65; +\infty)$.
- Theo đầu bài $n_1 = 102$, $n_2 = 98$, $m_1 = 82$, $m_2 = 69$,
  $f_1 = \dfrac{82}{102}$, $f_2 = \dfrac{69}{98}$, $\overline{f} = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{82+69}{102+98} = \dfrac{151}{200}$, suy ra
  $$u_{qs} = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\overline{f}(1-\overline{f})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = 1,641.$$
- Vì $u_{qs} = 1,641 \notin W_\alpha$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0, nghĩa là chưa thể xem phương pháp I điều trị tốt hơn phương pháp II với mức ý nghĩa 5%.

Ví dụ 5.13 (Ví dụ tổng hợp)**.** Để đánh giá doanh thu của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta điều tra 100 gia đình kinh doanh loại mặt hàng này trong tháng 6/2020 thu được bảng số liệu:

Doanh thu (triệu đồng)	20	24	28	32	36	40	44	48	52
Số gia đình	5	10	17	25	20	10	8	3	2

1. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng doanh thu trung bình của các gia đình kinh doanh loại mặt hàng A. Để độ chính xác của ước lượng là $0,02$ triệu đồng thì cần điều tra ít nhất bao nhiêu gia đình kinh doanh loại mặt hàng này?

2. Theo số liệu điều tra 6/2019 thì tỷ lệ những gia đình kinh doanh mặt hàng A đạt doanh thu dưới 25 triệu đồng là 20%. Theo anh chị tỷ lệ này năm 2020 có giảm đi hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%.

3. Hãy ước lượng tỷ lệ những gia đình kinh doanh mặt hàng A tại địa phương B có doanh thu trên 40 triệu đồng với độ tin cậy 99%? Nếu yêu cầu độ tin cậy 95%, độ chính xác của ước lượng là 0,02 thì cần điều tra ngẫu nhiên bao nhiêu gia đình? Giả sử địa phương B có 3000 gia đình kinh doanh loại mặt hàng A, hỏi có bao nhiêu gia đình có doanh thu trên 40 triệu đồng với độ tin cậy 99%.

4. Điều tra doanh thu của 300 gia đình kinh doanh mặt hàng A tại địa phương C trong tháng 6/2020 thấy 35 gia đình có doanh thu trên 40 triệu đồng và tính được doanh thu trung bình là 38 triệu đồng, độ lệch tiêu chuẩn mẫu là 7,895 triệu đồng.

   (a) Hỏi doanh thu trung bình loại mặt hàng A ở địa phương B và C có như nhau hay không với mức ý nghĩa 1%?

   (b) Có thể xem tỷ lệ những gia đình có doanh thu trên 40 triệu ở địa phương B cao hơn địa phương C hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập Chương 5

Kiểm định giả thuyết cho một mẫu

Bài tập 5.1. Với các thử nghiệm về nhiệt độ nước ở một bình nước sử dụng năng lượng mặt người ta chỉ ra rằng độ lệch tiêu chuẩn là 2^oF. Người ta chọn ra ngẫu nhiên 9 ngày để tiến hành đo đạc thì thấy trung bình mẫu là 98^oF. Giả sử nhiệt độ nước tuân theo luật phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5% có thể kết luận rằng nhiệt độ trung bình sử dụng năng lượng mặt trời là bằng 99^oF hay không?

Bài tập 5.2. Người ta tiến hành thử nghiệm một cải tiến kỹ thuật trong bộ chế hòa khí của một loại xe ôtô với hy vọng sẽ tiết kiệm được xăng hơn. Họ thử nghiệm 16 xe ô tô với bộ hòa khí có cải tiến kỹ thuật và thu được kết quả sau về số km chạy được cho một lít xăng:

$$\begin{array}{cccccccc} 20,5 & 20,9 & 20,3 & 20,2 & 20,6 & 20,6 & 20,5 & 21,0 \\ 21,1 & 21,2 & 20,8 & 20,7 & 20,6 & 20,9 & 20,3 & 20,2 \end{array}$$

Giả thiết số km chạy được cho một lít xăng tuân theo luật phân phối chuẩn. Nếu trước khi cải tiến một lít xăng trung bình chạy được 20,1 km thì có thể kết luận rằng cải tiến trên đã mang lại hiệu quả đáng kể hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.3. Một nhà máy đưa ra định mức thời gian hoàn thành sản phẩm là 24 phút. Khi khảo sát thời gian hoàn thành sản phẩm của 22 công nhân, ta tính được thời gian trung bình hoàn thành sản phẩm trong mẫu là 25,2 phút, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 2,6 phút. Với mức ý nghĩa 5% người quản lý nhà máy có cần phải đổi định mức không. Giả sử rằng thời gian hoàn thành một sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.4. Một dây dây chuyền sản xuất dầu gội đầu, mỗi thùng dầu gội có trọng lượng trung bình là 20kg. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 thùng được chọn ra ngẫu nhiên để cân có trọng lượng (kg) như sau:

$$21,4 \quad 19,7 \quad 19,9 \quad 20,6 \quad 20,8 \quad 20,1 \quad 19,7 \quad 20,3 \quad 20,9 \quad 20,8$$

Giả sử rằng trọng lượng của mỗi thùng dầu gội tuân theo luật phân phối chuẩn. Hãy kiểm định giả thuyết ở mức ý nghĩa 5% với giả thuyết cho rằng quá trình sản xuất hoạt động một cách chính xác.

Bài tập 5.5. Gạo được đóng gói bằng máy tự động có trọng lượng đóng bao theo quy định 25kg. Người ta chọn ngẫu ngẫu nhiên 25 bao được đóng bằng máy tự động trên ra kiểm tra trọng lượng của chúng ta được bảng số liệu sau:

Trọng lượng (kg)	24,6-24,8	24,8-25,0	25,0-25,2	25,2-25,4	25,4-25,6
Tần suất	3	7	8	5	2

Giả sử trọng lượng của các bao gạo tuân theo luật phân phối chuẩn. Hỏi trọng lượng trung bình của các bao gạo được đóng gói tự động giống như yêu cầu hay phải dừng máy để điều chỉnh với mức ý nghĩa 5%?

Bài tập 5.6. Định mức thời gian hoàn thành một sản phẩm là 14 phút. Có cần thay đổi định mức không, nếu theo dõi thời gian hoàn thành một sản phẩm ở 25 công nhân ta thu được bảng số liệu sau:

Thời gian sản xuất 1 sản phẩm (phút)	10-12	12-14	14-16	16-18	20-22
Số công nhân tương ứng	3	6	10	4	2

Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%, biết rằng thời gian hoàn thành một sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.7. Trọng lượng đóng gói bánh loại 250g một gói trên một máy tự động là biến ngẫu nhiên. Kiểm tra ngẫu nhiên 100 gói thu được kết quả sau:

Trọng lượng (gam)	245	247	248	250	252	253	2544
Số gói	8	12	20	32	16	8	4

Có thể coi trọng lượng trung bình của các gói bánh là bằng 250g theo quy định hay không với mức ý nghĩa 5%?

Bài tập 5.8. Kiểm tra lượng điện áp đầu vào của một loại máy tính bảng, người ta tiến hành thử nghiệm 100 lần đo và thu được điện áp trung bình 5,04V với độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 0,064V. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định lượng điện áp trung bình đầu vào của loại máy tính bảng có đúng bằng 5V hay không?

Bài tập 5.9. Gọi X là thời gian sản xuất một sản phẩm (phút). Định mức cũ để sản xuất một sản phẩm là 20 phút. Nay do cải tiến kỹ thuật, người ta sản xuất thử 100 sản phẩm và thu được số liệu:

Thời gian sản xuất sản phẩm (phút)	16-17	17-18	18-19	10-20	20-21	21-22
Số sản phẩm tương ứng	6	10	24	30	18	12

Với mức ý nghĩa 5% có thể nói rằng việc cải tiến kỹ thuật giảm bớt thời gian sản xuất một sản phẩm hay không? Biết rằng thời gian sản xuất một sản phẩm là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.10. Hàm lượng đường trung bình của một loại trái cây lúc đầu là 5(%). Người ta chăm bón bằng một loại NPK mới và sau một thời gian kiểm tra một số trái cây được kết quả sau:

Hàm lượng (%)	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	37-41
Số trái	51	47	39	36	32	8	7	3	2

Hãy cho kết luận về loại NPK trên trên với mức ý nghĩa 5%. Giả thiết hàm lượng đường của loại trái là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn.

Bài tập 5.11. Một nhà phân phối sữa trong một thành phố khẳng định rằng: bằng cách quảng cáo và cách tiếp cận khách hàng mới ở các cửa hàng, mỗi tuần trong các cửa hàng bán trung bình tăng thêm 20 hộp sữa. Người ta tiến hành chọn ra một mẫu ngẫu nhiên gồm 40 cửa hàng để xác định lời khẳng định trên thì thấy trung bình mỗi cửa hàng chỉ bán thêm được 16,4 hộp sữa và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh là 7,2. Kiểm định giả thuyết cho rằng mỗi tuần bán thêm được 20 hộp sữa ở mỗi cửa hàng với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.12. Người ta quan tâm tới việc lây lan dịch sốt xuất huyết ở một phường. Theo số liệu năm ngoái tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết của vùng này là 8%. Người ta tiến hành kiểm tra sức khỏe ngẫu nhiên 200 người ở phường này thì thấy có 17 người mang vi trùng sốt xuất huyết. Tỷ lệ mắc bệnh sốt xuất huyết của phường có tăng lên hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.13. Một hãng xà phòng A tuyên bố rằng 64% số các bà nội trợ thích sử dụng bột giặt của hãng. Người ta chọn ra một mẫu gồm 100 bà nội trợ và hỏi thì có 58 bà tỏ ra là thích sử dụng bột giặt của hãng A. Với mức ý nghĩa 1%, số liệu trên có chứng tỏ là tuyên bố của hãng xà phòng A là đúng hay không?

Bài tập 5.14. Tỷ lệ phế phẩm do một máy tự động sản xuất là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 300 sản phẩm thấy có 24 phế phẩm. Từ đó có ý kiến cho rằng tỷ lệ phế phẩm do máy đó sản xuất có chiều hướng tăng lên. Hãy kết luận ý kiến nêu trên với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.15. Nếu áp dụng phương pháp công nghệ thứ nhất thì tỷ lệ phế phẩm là 6%, còn nếu áp dụng phương pháp công nghệ thứ hai thì trong 100 sản phẩm có 5 phế phẩm. Vậy có thể kết luận áp dụng phương pháp công nghệ thứ hai thì tỷ lệ phế phẩm thấp hơn tỷ lệ phế phẩm của phương pháp công nghệ thứ nhất không? Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.16. Tỷ lệ bệnh nhân khỏi bệnh T khi điều trị bằng thuốc A là 85%. Thí nghiệm dùng loại thuốc B để chữa bệnh thì trong số 900 người mắc bệnh T có 810 người được chữa khỏi. Như vậy có thể kết luận thuốc B hiệu quả hơn thuốc A hay không? Yêu cầu kết luận với mức ý nghĩa 5%.

Kiểm định giả thuyết cho hai mẫu

Bài tập 5.17. Hai công thức khác nhau về nhiên liệu động cơ oxy hóa được tiến hành thử nghiệm để đưa ra chỉ số octan. Phương sai của công thức I là $\sigma_1^2 = (1,5)^2$ của công thức II là $\sigma_2^2 = (1,3)^2$. Người ta chọn ngẫu nhiên $n_1 = 15$ mẫu của công thức I và $n_2 = 18$ mẫu của công thức II thì thấy $\overline{x}_1 = 89,7$ và $\overline{x}_2 = 91,5$. Giả sử rằng chỉ số octan của công thức I và II tuân theo luật phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng công thức I có chỉ số octan ít hơn so với công thức II hay không?

Bài tập 5.18. Chọn ngẫu nhiên 100 thiết bị điện tử của nhà máy I thấy tuổi thọ trung bình là 1658 giờ, độ lệch chuẩn mẫu là 123 giờ. Chọn ngẫu nhiên 110 thiết bị điện tử của nhà máy II thấy tuổi thọ trung bình là 1717 giờ, độ lệch chuẩn mẫu là 107 giờ. Với mức ý nghĩa 1%, hãy cho biết có phải thực sự tuổi thọ trung bình thiết bị điện tử của nhà máy II là lớn hơn nhà máy I hay không?

Bài tập 5.19. Hai máy tự động dùng để cắt những thanh thép do cùng một kỹ thuật viên phụ trách và căn chỉnh. Từ mỗi máy lấy ra 35 thanh thép để kiểm tra thu được kết quả sau:

- Máy 1: Trung bình mẫu 11,7m, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 0,12m.
- Máy 2: Trung bình mẫu 11,6m, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 0,14m.

Giả sử chiều dài thanh thép do các máy sản xuất tuân theo luật phân phối chuẩn và có phương sai như nhau. Với mức ý nghĩa 5% có thể cho rằng chiều dài của các thanh thép do hai máy sản xuất là khác nhau hay không?

Bài tập 5.20. Hai công ty I và II cùng sản xuất ra một loại sản phẩm và cạnh tranh nhau trên thị trường. Người ta chọn ngẫu nhiên ra $n_1 = 11$ ngày và $n_2 = 18$ ngày để khảo sát số lượng sản phẩm được bán ra trong ngày của hai công ty I và II tương ứng và có được kết quả:

- Công ty I: trung bình mẫu 237, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 23;
- Công ty II: trung bình mẫu 247, độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh 27.

Giả sử số lượng hàng bán ra trong một ngày của hai công ty là tuân theo luật phân phối chuẩn, có cùng phương sai. Phải chăng lượng hàng bán ra của công ty II là nhiều hơn so với công ty I với mức ý nghĩa 1%?

Bài tập 5.21. Người ta nghiên cứu trọng lượng của loại trái cây A ở 2 vùng với hai chế độ canh tác khác nhau. Kiểm tra ngẫu nhiên trong lượng 25 trái ở vùng I, 22 trái ở vùng II ở thời điểm thu hoạch thu được kết quả sau (đơn vị tính là kg):

- Vùng I: $2,0$; $2,0$; $1,8$; $1,9$; $1,7$; $1,5$; $1,9$; $2,0$; $1,8$; $1,6$; $1,8$; $1,7$; $1,6$; $1,7$; $2,1$; $1,5$; $1,7$; $2,0$; $1,8$; $1,7$; $1,5$; $1,6$; $1,6$; $1,7$; $1,7$.
- Vùng II: $1,5$; $1,4$; $1,5$; $1,6$; $1,1$; $1,7$; $1,4$; $1,7$; $1,4$; $1,4$; $1,7$; $1,1$; $1,5$; $1,2$; $2,0$; $1,6$; $1,2$; $1,3$; $1,5$; $1,7$; $1,9$; $1,0$.

Hỏi có sự khác nhau đáng kể giữa các trọng lượng trung bình của loại trái cây A của hai vùng trên không? Kết luận với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.22. Thời gian tự học trong một tuần của 12 sinh viên lớp A và 15 sinh viên lớp B được thống kê lại như sau (đơn vị tính là giờ):

- Lớp A: 18; 15; 24; 23; 30; 12; 15; 24; 35; 30; 18 ;20
- Lớp B: 19; 18; 24; 25; 30; 36; 28; 25; 30; 12; 14; 28; 22; 28; 20.

Với mức ý nghĩa 5%, xét xem thời gian tự học của sinh viên hai lớp thực chất là như nhau không?

Bài tập 5.23. Người ta muốn so sánh 2 chế độ bón phân cho một loại cây trồng, họ đã chia 10 mảnh ruộng sao cho mỗi mảnh thành 2 nửa có điều kiện trồng trọt tương đối như nhau. Nửa thứ nhất áp dụng phương pháp bón phân I, nửa thứ hai theo phương pháp bón phân II (các chế độ chăm sóc khác nhau). Sau khi thu hoạch ta được số liệu về năng suất như sau (đơn vị tính là kg/sào)

Mảnh	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Năng suất nửa thứ I	24	14	18	20	21	19	16	18	20	23
Năng suất nửa thứ II	16	20	24	23	25	15	22	24	25	29

Giả sử năng suất của hai chế độ phân bón đều tuân theo luật phân phối chuẩn. Đánh giá xem hai chế độ bón phân có giống nhau không với mức ý nghĩa 1%.

Bài tập 5.24. Quan sát 12 lọ chất hóa học do hai cân khác nhau cân, ta có số liệu (đơn vị tính là gam):

Cân I	0,5	1	2,5	3	4	5	0,7	0,9	1,5	2,3	3,4	4,5
Cân II	1	1,5	2	2	2,5	3	1,8	1,7	2,2	2,4	4,5	3,1

Giả sử cân nặng của lọ hóa chất tuân theo luật phân phối chuẩn. Kiểm định giả thiết hai cân có cân khác nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.25. Một hãng nước giải khát A muốn đưa vào sản xuất một công thức mới để cải tiến sản phẩm của mình. Người ta tiến hành một cuộc khảo sát với công thức cũ cho 600 người uống thử thì thấy có 132 người thích nó và công thức mới cho 400 người uống thử thì thấy có 91 người thích nó. Hãy kiểm định xem liệu với công thức mới có làm tăng tỉ lệ những người ưa thích nước uống của hãng A hay không với mức ý nghĩa 1%.

Bài tập 5.26. Từ kho đồ hộp I, lấy ngẫu nhiên 1000 hộp để kiểm tra thấy có 20 hộp bị hỏng. Từ kho II lấy ngẫu nhiên 900 hộp thấy 30 hộp bị hỏng. Hỏi chất lượng bảo quản của 2 kho có thực sự giống nhau hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.27. Bệnh A được điều trị theo hai phương pháp. Sau một thời gian thấy kết quả như sau:

- Trong 102 bệnh nhân điều trị phương pháp I có 82 bệnh nhân khỏi bệnh.
- Trong 98 bệnh nhân điều trị phương pháp II có 69 bệnh nhân khỏi bệnh.

Hỏi có phải phương pháp I điều trị tốt hơn phương pháp II hai hay không với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.28. Để đánh giá hiệu quả của hai dây chuyền sản xuất người ta tiến hành kiểm tra 1000 sản phẩm do dây chuyền I sản xuất có 10 sản phẩm hỏng, kiểm tra 1000 sản phẩm do dây chuyền II sản xuất thấy có 8 sản phẩm hỏng. Với mức ý nghĩa 5%, có kết luận gì về tỷ lệ sản phẩm hỏng từ hai dây chuyền trên.

Bài tập 5.29. Nghiên cứu về năng suất của loại hoa màu A, người ta kiểm tra năng suất của 64 điểm trồng loại hoa màu này thu được bảng số liệu

Năng suất (tạ/ha)	40–45	45–50	50–55	55-60	60–65	65–70
Số điểm	2	5	15	30	8	4

(a) Giả sử theo tính toán lý thuyết, năng suất trung bình của loại hoa màu A là 55 tạ/ha. Theo anh chị năng suất trung bình loại hoa màu A có xu hướng tăng không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%?

(b) Một tài liệu thống kê cho biết tỷ lệ những điểm có năng suất trên 60 tạ/ha của loại hoa màu A là 15%. Hãy cho kết luận về tài liệu nói trên với mức ý nghĩa 5%.

Bài tập 5.30. Để đánh giá doanh thu của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B, người ta điều tra 100 hộ kinh doanh loại mặt hàng này trong một tháng năm 2019 thu được bảng số liệu

Doanh thu (triệu đồng)	20	24	28	32	36	40	44	48	52
Số hộ gia đình	5	10	17	25	20	10	8	3	2

(a) Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng nói trên. Để độ chính xác của ước lượng nhỏ hơn 2 triệu đồng thì cần điều tra ít nhất bao nhiêu hộ?

(b) Theo số liệu điều tra năm 2018 thì tỷ lệ những hộ gia đình đạt doanh thu dưới 28 triệu đồng là 20%. Theo anh chị tỷ lệ này năm 2019 có giảm đi hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 1%.

(c) Hãy ước lượng tỷ lệ những hộ có doanh thu trên 40 triệu đồng với độ tin cậy 99%? Nếu yêu cầu độ tin cậy 95%, độ chính xác của ước lượng là 0,02 thì cần điều tra ngẫu nhiên bao nhiêu hộ gia đình?

(d) Một tài liệu báo cáo cho biết doanh thu trung bình của các hộ kinh doanh loại mặt hàng A tại địa phương B là 30 triệu đồng trên tháng. Tài liệu báo cáo này có làm giảm doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh mặt hàng A để giảm thuế hay không? Hãy kết luận với mức ý nghĩa 5%.

(e) Theo điều tra cách đây 2 năm thì doanh thu trung bình của các hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng này là 30 triệu đồng/tháng, hãy đánh giá xem doanh thu trung bình sau 2 năm có thay đổi không với mức ý nghĩa 5%.

(f) Điều tra doanh thu của 200 hộ gia đình kinh doanh loại mặt hàng A ở địa phương C năm 2019 người ta tính được doanh thu trung bình/tháng là 37 triệu đồng và độ lệch chuẩn mẫu là 1,1 triệu đồng. Doanh thu trung bình loại mặt hàng A ở địa phương C và B có như nhau hay không? Hãy kết luận với độ tin cậy 95%.