Aufgabe 1: $X, Y, I, J \neq \emptyset$ Mengen

$X_i \subseteq X$ für $i \in I$, $\quad Y_j \subseteq Y$ für $j \in J$.

a) $$\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \left(\bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)\right)$$

Beweis:

„$\subseteq$" Ist $x \in \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right)$, so ist $x \in \bigcap_{i\in I} X_i$ oder $x \in \bigcap_{j\in J} Y_j$. Wegen $\bigcap_{i\in I} X_i \subseteq \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$ (denn $X_i \subseteq X_i \cup Y_j$ für alle $i \in I$, $(i,j) \in I \times J$) und $\bigcap_{j\in J} Y_j \subseteq \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$ folgt dann $x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$

„$\supseteq$" Ist $x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$ dann ist $x \in X_i \cup Y_j$ für jedes $(i,j) \in I \times J$ — also bei fest gewählten $j \in J$ gilt $x \in X_i \cup Y_j$ für alle $i \in I$, d.h. $x \in \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup Y_j$. Da dies für alle $j \in J$

gilt, ist $x \in \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right)$.

b) Für $C \in \mathcal{P}(X \cup Y)$, also $C \subseteq X \cup Y$ ist
$(C \cap X) \subseteq X$, $C \cap Y \subseteq Y$.

„$\subseteq$" Wegen $C \cap X \subseteq C$ und $C \cap Y \subseteq C$ folgt
$$(C \cap X) \cup (C \cap Y) \subseteq C$$

„$\supseteq$" Wegen $C \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$ gilt für $x \in C \subseteq X \cup Y$:
$$x \in \begin{cases} C \cap X & \text{falls } x \in X \\ C \cap Y & \text{falls } x \in Y \end{cases}$$
also $x \in (C \cap X) \cup (C \cap Y)$.

c) Beh: $X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i)$

Beweis:

„$\subseteq$" Sei $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$ so ist $x \notin \bigcup_{i \in I} X_i$; es gibt also kein $i \in I$ mit $x \in X_i$, d.h. $x_i \in X \setminus X_i$ für jedes $i \in I$, d.h. $x \in \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i)$

„$\supseteq$" Ist $x \in \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i)$, dann ist $x \in X \setminus X_i$ für jedes $i \in I$, d.h. es gibt kein $i \in I$ mit $x \in X_i$, weshalb $x \notin \bigcup_{i \in I} X_i$ oder $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right)$

Aufgabe 2:

Aussagen: A = Der Student geht in die Uni
B = Es ist Wochenende
C = Es wird eine Prüfung stattfinden
D = Der Student hat Angst.
E = Der Student geht feiern
F = Der Student hat zu wenig gelernt.

a) $B \Longrightarrow (\neg A)$
Wenn Wochenende ist, geht der Student nicht in die Uni

b) $D \Longleftrightarrow (C \wedge F)$
Der Student hat genau dann Angst, wenn eine Prüfung stattfindet und er zugleich zu wenig gelernt hat.

c) $((\neg F) \vee B) \Longrightarrow E$
Wenn der Student genug gelernt hat oder Wochenende ist, geht er feiern

d) $(B \wedge C) \Longrightarrow (\neg E)$
Wenn Wochenende und zugleich eine Prüfung ist, geht der Student nicht feiern.

e) $\neg((\neg A) \wedge (\neg E))$ entspricht $A \vee E$, also:
Der Student geht in die Uni oder feiern.

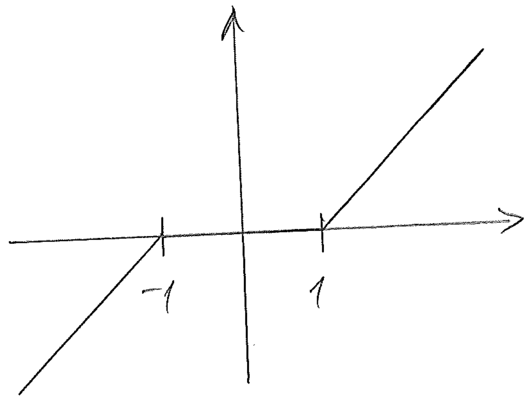
Aufgabe 3:

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x + 2024$

- ist injektiv, denn sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 2024 = f(y) = y + 2024$ so folgt durch Subtraktion von 2024: $x = y$
- ist surjektiv, denn für $y \in \mathbb{R}$ ist $y = f(y - 2024)$.
- Als Funktion, die injektiv und surjektiv ist, ist f_1 bijektiv.

b) $\tilde{f}_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x-1 & \text{für } x > 1 \\ 0 & \text{für } x \in [-1,1] \\ x+1 & \text{für } x < -1 \end{cases}$$



- ist nicht injektiv, denn z.B. $f(-1) = f(1) = 0$.
- ist surjektiv, denn für

$$\begin{cases} y \in]0, \infty[& \text{ist } y = f(y+1) \\ y = 0 & \text{ist } y = f(0) \\ y \in]-\infty, 0[& \text{ist } y = f(y+1) \end{cases}$$

- Weil $\tilde{f}_2$ nicht injektiv ist, ist $\tilde{f}_2$ auch nicht bijektiv.

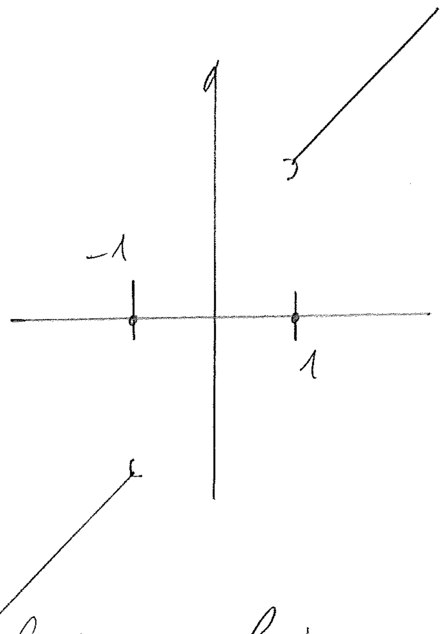
c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^{2024}$

- ist nicht injektiv z.B. $f(-1) = 1 = f(1)$
- ist nicht surjektiv z.B. ist

$$x^{2024} = \left(x^{1012}\right)^2 \geq 0$$

also $f_3(\mathbb{R}) \subseteq [0, \infty[\neq \mathbb{R}$.

- nicht bijektiv.



b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 0 & x \in [-1, 1] \\ x-1 & x < -1 \end{cases}$$

- ist nicht injektiv, denn z.B. $f(-1) = 0 = f(1)$
- ist nicht surjektiv, denn z.B.

$f_2(x) < 1$ für $x \leq 1$
$f_2(x) = x+1 > 1$ für $x > 1$

also ist $1 \notin f_2(\mathbb{R})$