

E1: Mechanik

Übungsblatt 5 (WS24/25)

Thomas Udem & Andrea Alberti

Ausgegeben am 13. November 2024 — Wird besprochen am 20. November - 22. November

Anmerkung: Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

5.1 Reibung

Sie wollen beim Fußball den Ball zusammen mit dem Torwart ins Tor schießen. Der Ball hat eine Masse von $m_B = 1$ kg, der Torwart $m_T = 75$ kg. Der Haftreibungskoeffizient zwischen den Schuhen des Torwarts und dem Boden beträgt $\mu_H = 0,7$.

- (a) Wie schnell muss der Ball mindestens geschossen werden, damit der Torwart ins Rutschen gerät, wenn die Zeitdauer, in der der Ball seine Kraft auf den Torwart überträgt, $\Delta t = 0,1$ s beträgt?

Erklären Sie, warum die Kenntnis der Zeitdauer Δt notwendig ist, um die Frage zu beantworten, obwohl die Impulserhaltung unabhängig von den Details des Stoßes ist.

- (b) Den inoffiziellen Weltrekord für den härtesten Schuss im Fußball hält Roberto Carlos da Silva Rocha (Brasilien). Der nur 1,68 m große Spieler mit einem Unterschenkelumfang von 58 cm erreichte bei einem Freistoß eine Geschwindigkeit von 212 km/h.

Nehmen Sie an, der Torwart steht 1 m vor der Torlinie und beginnt nach dem Fangen des Balls mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 3,1 \pm 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu rutschen. Der Gleitreibungskoeffizient betrage $\mu_G = 0,5$.

Rutscht der Torwart bei einem Schuss von Roberto Carlos über die Torlinie? Mit welcher Unsicherheit im Spielstand muss der Schiedsrichter das Spiel beenden?

- (c) Erklären Sie den Sinn eines Antiblockier-Systems (ABS).
- (d) Sie haben ein Auto mit dem perfekten Bremssystem welches die maximal mögliche Kraft auf die Straße überträgt. Der Haftreibungskoeffizient μ_H von Reifen auf trockener Straße ist in etwa 0.8.
- Ist es möglich, das Auto bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h innerhalb einer Strecke von 2 m zum Stillstand zu bringen? Hängt die Antwort von der Masse des Autos ab? Welche Beschleunigung wäre dafür nötig? Setzen Sie dabei die Näherungen aus der Vorlesung als korrekt voraus. Welche Strecke benötigt das Auto mindestens um zum Stillstand zu kommen?
- (e) Schlagen Sie Werte für verschiedene Haftreibungskoeffizienten μ_H nach. Gibt es ein physikalisches Prinzip, aus dem wir $\mu_H < 1$ folgern könnten?

- (f) Gibt es ein physikalisches Prinzip, aus dem wir folgern können, dass die Haftreibung größer sein muss als die Gleitreibung?

5.2 Saturn V

- (a) Die Saturn V Mondrakete hatte eine Startmasse von $m_0 = 2,764 \times 10^6$ kg, eine Masse von $m_e = 0,726 \times 10^6$ kg bei Brennschluss der ersten Stufe nach $T = 150,7$ s und eine Ausströmgeschwindigkeit der Treibgase von $w = 2,55$ km/s (siehe “flight manual”: <https://history.nasa.gov/afj/ap08fj/pdf/sa503-flightmanual.pdf>). Berechnen Sie die Schubkraft in der ersten Stufe unter der Annahme, dass der Treibstoff gleichmäßig verbrannt wird.
- (b) Der Treibstoff RP-1 hat eine Energiedichte von 43 MJ/kg und wird mit flüssigem Sauerstoff (LOX) im Massenverhältnis $m_{\text{RP-1}}/m_{\text{LOX}} = 1/2,77$. Berechnen Sie die thermische Leistung und vergleichen Sie diese mit der geschätzten Leistung aller Kraftwerke der USA.

Hinweis \mapsto Flüssiger Sauerstoff (LOX) ist ein Oxidationsmittel und trägt nicht direkt zur freigesetzten Energie bei. Er ermöglicht die Verbrennung des RP-1 im Vakuum des Weltraums.

- (c) Sie drosseln die Treibstoffzufuhr, bis die Rakete über dem Boden schwebt, ohne sich zu bewegen. Wie lange kann die Rakete dort bleiben?
- (d) Berechnen Sie unter den Angaben in (a) die Geschwindigkeit und die Beschleunigung vom Zeitpunkt der Zündung bis zum Brennschluss unter Vernachlässigung des Luftwiderstand. Wann ist die Beschleunigung maximal?
- (e) Nehmen Sie an, die Saturn V Rakete fliegt senkrecht nach oben und brennt lediglich die erste Stufe ab. Wie hoch kommt sie?

Hinweis \mapsto Machen Sie die Annahme eines homogenen Gravitationsfeldes mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- (f) Die dritte Stufe kann einen Schub von 890 kN entwickeln und hat eine Startmasse von $1,2 \times 10^5$ kg. Kann diese Stufe allein von der Erdoberfläche abheben?
- (g) Kann man bei Neumond auf dem Mond landen?

5.3 Keplerbahn

- (a) Ist es denkbar, dass die Kraft zwischen zwei Punkten (bei Vernachlässigung aller anderen Einflüsse) nicht entlang der Verbindungslinie der beiden Punkte verläuft?
- (b) Die Alltagserfahrung zeigt, dass bewegliche Objekte ohne kontinuierliche Energiezufuhr früher oder später stets zur Ruhe kommen und in den Zustand geringster potenzieller Energie übergehen. Somit verbringen sie die meiste Zeit im Zustand geringster potenzieller Energie. Anders formuliert: das Minimum der potenziellen Energie wirkt wie ein Attraktor. Wie verhält sich dies auf einer Kepler-Bahn?
- (c) Nach dem 1. Keplerschen Gesetz bewegen sich die Planeten auf Ellipsen, wobei in einem ihrer Brennpunkte die Sonne steht. Macht es für die Planetenbewegung einen Unterschied, in welchem der beiden Brennpunkte die Sonne steht?

5.4 Sagittarius A (*)

Es soll das 3. Keplersche Gesetz

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

abgeleitet werden.

- (a) In der Vorlesung wurde der folgende Ausdruck für die Fläche \vec{A} , die der Fahrstrahl beim Kepler-Orbit eines Körpers mit der Masse m und dem Drehimpuls \vec{L} pro Zeiteinheit überstreicht abgeleitet:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m}.$$

Finden Sie die Beziehung zwischen der Umlaufzeit T und der von der Bahn eingeschlossenen Fläche bestimmt, indem Sie das Verhältnis A/T berechnen.

Hinweis \mapsto Trennen Sie die variablen $d\vec{A}$ und dt , wie bei der Herleitung der Raketengleichung, und integrieren Sie über einen ganzen Umlauf.

- (b) Zeichnen Sie einen Kepler-Orbit in Form einer Ellipse mit den Brennpunkten und den großen und kleinen Halbachsen a und b .
- (c) Verwenden Sie die Darstellung der Ellipse in Polarkoordinaten, die Beziehung $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$ zwischen den Halbachsen und der Elliptizität des Kepler-Orbits und die Beziehung für die Fläche der Ellipse $A = \pi ab$, um mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) das dritte Kepler-Gesetz abzuleiten (in der Vorlesung wurde dies nur für eine Kreisbahn getan).

Hinweis \mapsto Für den Fall $\varphi = 0$ beträgt die Länge des Radiusvektors $r(\varphi) = a(1 - \epsilon)$.

- (d) Mithilfe der in Teilaufgabe (c) hergeleiteten Beziehung zwischen der großen Halbachse und der Umlaufzeit (3. Keplersches Gesetz) können Sie die Bahnparameter aus den beobachteten Positionen des Sterns S2, welcher sich in einer Umlaufbahn um das supermassereiche Schwarze Loch Sagittarius A* (SgrA*) im galaktischen Zentrum befindet, bestimmen. Wie groß ist die Masse des supermassereichen Schwarzen Lochs im Zentrum?

Im Jahr 2020 erhielt Reinhard Genzel (Professor an der LMU und Direktor am Max-Planck-Institut für Astrophysik) den Physiknobelpreis für die Bestimmung der zentralen Masse in Sagittarius A*. Nobel-Vorlesung: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2020/genzel/lecture/>.

Hinweis \mapsto Ermitteln Sie die benötigten Größen aus der Grafik und berücksichtigen Sie, dass wir die Bahnebene von S2 unter einem Winkel von 46° nach Norden gekippt sehen. Der Abstand r zum galaktischen Zentrum beträgt 8 kpc.

