Dirk-André Deckert & Jago Silberbauer Wintersemester 2024/25

Mathematik 3 für Physiker - Übung 5

Aufgabe 1 (Gronwall'sche Ungleichung)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei und $\beta \geq 0$. Angenommen es gilt

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \tag{1}$$

für alle $t \in [a, b]$. Zeigen Sie:

a) Für alle $t \in [a, b]$ gilt

$$u(t) \leq \alpha(t) + e^{\int_a^t \beta(r)dr} \cdot \int_a^t \alpha(s)\beta(s)ds. \tag{2}$$

b) Falls α zusätzlich monoton steigend ist, so gilt für alle $t \in [a, b]$, dass

$$u(t) \leq \alpha(t) \cdot e^{\int_a^t \beta(r)dr}. \tag{3}$$

Aufgabe 2
Es sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{y}(t) = V(y(t)), \quad t \in]0, \infty[, \tag{4}$$
$$y(0) = y_0. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass das AWP eine eindeutige Lösung $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ hat.

Hinweis: Zerlegen Sie $[0, \infty[$ geschickt in abzählbar viele Intervale, auf denen Sie das Resultat aus Übungsblatt 4 Aufgabe 2 anwenden können. So erhalten sie auf jedem dieser Intervale eine Lösung. Zeigen Sie anschließend mit Hilfe der Gronwall'schen Ungleichung, dass Sie all diese Lösungen zu einer einzigen Lösung des AWPs auf $[0, \infty[$ zusammensetzen können.

Aufgabe 3
Es sei Ω eine abzählbare Menge und $\mathcal{E} := \{\{w\} \mid w \in \Omega\}$. Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$.

Aufgabe 4 (Co-Abzählbare σ-Algebra)
Es sei Ω eine Menge. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist abzählbar } \vee A^c \text{ ist abzählbar}\}. \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ über Ω eine σ-Algebra definiert.

b) Es sei nun $\Omega = \mathbb{R}$ und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. Finden Sie eine notewendige und hinreichende Bedingung dafür, dass f eine messbare Funktion ist.

Hinweis: Endliche Mengen fallen hier auch unter den Begriff 'abzählbar'.

Aufgabe 5 (Erzeuger der Borel-σ-algebra)
Zeigen Sie $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}}\left(\{]-\infty, b] \mid b \in \mathbb{Q}\}\right)$.

Aufgabe 6 (Lebesgue-Maße der Rationalen, Cantor-Menge etc.)
Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda_1)$ als Maßraum der reellen Zahlen mit Borel-σ-Algebra und eindimensionalem Lebesgue-Maß gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ und berechnen Sie $\lambda_1(\mathbb{Q})$.

b) Es sei C die Cantor-Menge von Übungsblatt 2. Zeigen Sie, dass $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ und berechnen Sie $\lambda_1(C)$.

Aufgabe 7
Beweisen Sie *Theorem 6* im Abschnitt *The Lebesgue Integral* im *Hitchhiker's Guide to Mathematics*.