Blatt 04: Mehrdimensionales Differenzieren und Integrieren I

Ausgabe: Mo 04.11.24 Zentralübung: 07.11.24 Abgabe: Do 14.11.24, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 3, 4(a,b), 7(a-c), 9.
Videos existieren für Beispielaufgaben 7 (V2.3.3), 8 (V2.3.5).

Beispielaufgabe 1: Partielle Ableitungen [1]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E,Bonus).

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x,y)$ und $\partial_y f(x,y)$ folgender Funktionen.
[Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an.]

(a) $f(x,y) = x^2y^3 - 2xy$ $\qquad [\partial_x f(2,1) = 2, \quad \partial_y f(1,2) = 10]$

(b) $f(x,y) = \sin\big[x\mathrm{e}^{2y}\big]$ $\qquad \big[\partial_x f(0,\frac{1}{2}) = \mathrm{e}, \quad \partial_y f(\pi,0) = -2\pi\big]$

Beispielaufgabe 2: Kettenregel für Funktionen von zwei Variablen [2]
Punkte: [2](E)

Diese Aufgabe soll die Funktionsweise der Kettenregel für eine Funktion von mehreren Variablen illustrieren. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2)^T \mapsto f(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^2$ und das Vektorfeld $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2)^T \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\ln x^2, 3\ln x^1)^T$, Dann beschreibt $f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ die Norm von $\mathbf{g}$ als Funktion von $\mathbf{x}$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ und $\partial_2 f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ als Funktionen von x^1 und x^2 auf zwei Weisen,

(a) indem Sie zuerst $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ als Funktion von $\mathbf{x}$ explizit berechnen und dann partiell ableiten;

(b) durch Verwendung der Kettenregel $\frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial x^k} = \sum_j \frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\mathbf{x})}{\partial x^k}$.

Warum führen beide Wege zum selben Ergebnis? Finden Sie die Ähnlichkeiten in beiden Rechnungen! [Ergebniskontrolle: falls $x^1 = 9$, $x^2 = 2$, dann $\partial_{x^1} f = 4\ln 3$, $\partial_{x^2} f = \ln 2$.]

Beispielaufgabe 3: Zweidimensionale Integration (kartesische Koordinaten) [Bonus]
Punkte: [2](M,Bonus)

Berechnen Sie das Flächenintegral $I(a) = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = xy$ über dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y \le 1;\ 1 \le x \le a - y\}$, mit $2 \le a \in \mathbb{R}$.
[Kontrollergebnis: $I(2) = \frac{5}{24}$].

Beispielaufgabe 4: Durch Kurven begrenzte Fläche (kartesische Koordinaten) [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](M)

Gegeben seien die Kurve $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, b(1 - t/a))^T$ sowie die geschlossene Kurve $\gamma_2 : (0, 2\pi) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (a\cos t, b\sin t)^T$ in kartesischen Koordinaten, mit $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie die von γ_2 umschlossene Fläche $S(a,b)$. [Kontrollergebnis: $S(1,1) = \pi$.]

(c) Die Kurve γ_1 teilt die von γ_2 umschlossene Fläche in zwei Teile. Bestimmen sie die Fläche $A(a,b)$ des kleineren Teilstücks mittels Berechnung eines Flächenintegrals. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geometrischen Überlegung.

Beispielaufgabe 5: Flächenintegral für Volumen einer Pyramide (kartesische Koordinaten) [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Betrachten Sie die von der xy-Ebene, der yz-Ebene, der xz-Ebene, und der Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = c(1 - x/a - y/b)\}$ eingeschlossene Pyramide, mit $0 < a,b,c \in \mathbb{R}$.

(a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Pyramide. Finden Sie ihr Volumen $V(a,b,c)$ mittels geometrischen Überlegungen. [Kontrollergebnis: $V(1,1,1) = \frac{1}{6}$.]

(b) Berechnen Sie $V(a,b,c)$ indem Sie Höhe $h(x,y)$ der Pyramide über ihre Grundfläche in der xy-Ebene integrieren.

Beispielaufgabe 6: Koordinatentransformation [3]
Punkte: [3](E)

Die kartesischen Koordinaten (x,y,z) von drei Punkten seien P_1: $(3,-2,4)$, P_2: $(1,1,1)$ und P_3: $(-3,0,-2)$. Wie lauten die Zylinderkoordinaten (ρ,ϕ,z) und die Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) dieser drei Punkte? (Winkel sind in Radiant anzugeben.)

Beispielaufgabe 7: Zylinderkoordinaten: Geschwindigkeit, kinetische Energie, Drehimpuls [3]
Punkte: (a)[2](E); (b)[1](E,Bonus); (c)[1](E); (d)[0,5](E,Bonus); (e)[0,5](E,Bonus)

Der Bezug zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten ist gegeben durch $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $z = z$, mit $\rho \in (0,\infty)$, $\phi \in (0,2\pi)$, $z \in (-\infty,\infty)$.
Lokale Basis: Konstruieren Sie die Basisvektoren der lokalen Basis, $\{\mathbf{e}_{y_i}\} = \{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z\}$, und zeigen Sie explizit, dass
(a) $\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij}$ und (b) $\mathbf{e}_{y_i} \times \mathbf{e}_{y_j} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_{y_k}$.
Physikalische Größen: Zeigen Sie, dass in Zylinderkoordinaten (c) der Geschwindigkeitsvektor, $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}$, (d) die kinetische Energie, $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$, und (e) der Drehimpulsvektor, $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$, wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\rho}\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\,\mathbf{e}_z, \qquad T = \tfrac{1}{2}m\big[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\big], \\ \mathbf{L} &= m\big[-z\rho\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\rho + (z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\,\mathbf{e}_\phi + \rho^2\dot{\phi}\,\mathbf{e}_z\big]\,. \end{aligned}$$

Beispielaufgabe 8: Linienintegral in Polarkoordinaten: Spirale [2]
Punkte: (a)[2](E); (b)[1](E)

Die Kurve $\gamma_S = \{\mathbf{r}(\rho,\phi) \in \mathbb{R}^2 |\ \rho = R + \frac{1}{2\pi}\phi\Delta,\ \phi \in (0,2\pi)\}$, mit $0 < R, \Delta \in \mathbb{R}$, beschreibt einen Spiralweg in zwei Dimensionen, parametrisiert mittels Polarkoordinaten.

(a) Skizzieren Sie den Spiralweg γ_S und berechnen Sie das Linienintegral $W_1[\gamma_S] = \int_{\gamma_S} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1$ des Feldes $\mathbf{F}_1 = \mathbf{e}_\phi$ entlang γ_S. [Kontrollergebnis: für $R = \Delta = 1$ gilt $W_1[\gamma] = 3\pi$.]

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W_2[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2$ des Feldes $\mathbf{F}_2 = \mathbf{e}_x$ entlang des geraden Wegs γ_G vom Punkt $(R, 0)^T$ zum Punkt $(R + \Delta, 0)^T$, sowie entlang des Spiralwegs γ_S. Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen? Erläutern Sie!

Beispielaufgabe 9: Linienintegral in Kugelkoordinaten: Satellit auf Umlaufbahn [Bonus]

Punkte: (a)[0,5](E,Bonus); (b)[1](E,Bonus); (c)[0,5](E,Bonus); (d)[1](M,Bonus)

Ein Satellit fliege auf einer die Nord-Süd-Achse umkreisenden Bahn γ von einem Punkt über dem Nordpol zu einem Punkt über dem Südpol. In Kugelkoordinaten ist die Bahn beschrieben durch $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \omega_1 t$, $\phi(t) = \omega_2 t$, mit $t \in (0, \pi/\omega_1)$. Dabei übe die Erdatmosphäre aufgrund der Erdrotation eine Windkraft $\mathbf{F} = -F_0 \sin\theta\, \mathbf{e}_\phi$ auf ihn aus.

(a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Bahn, für $\omega_2 = 20\omega_1$. Wie oft windet sich die Spirale um die Nord-Süd-Achse?

(b) Wie lautet die Kurvengeschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ in Kugelkoordinaten?

(c) Geben Sie die Länge $L[\gamma]$ der Bahn in Form eines Integrals an. (Sie brauchen es nicht zu lösen.)

(d) Berechnen Sie mittels des Linienintegrals $W[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ die Arbeit, die die Windkraft entlang der Bahn geleistet hat. [Kontrollergebnis: für $F_0 = r_0 = \omega_1 = \omega_2 = 1$ gilt $W[\gamma] = -\frac{\pi}{2}$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 17]

Hausaufgabe 1: Partielle Ableitungen [1]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E,Bonus).

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x, y)$ und $\partial_y f(x, y)$ folgender Funktionen.
[Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an.]

(a) $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2 \cos(y)}$ $\qquad \left[\partial_x f(1, \pi) = 2\mathrm{e}, \quad \partial_y f(1, \tfrac{\pi}{2}) = 1\right]$

(b) $f(x, y) = \sinh\!\left(\frac{x}{y}\right)$ $\qquad \left[\partial_x f(\ln 2, 1) = \tfrac{5}{4}, \quad \partial_y f(\ln 2, 1) = -\tfrac{5}{4}\ln 2\right]$

Hausaufgabe 2: Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen [2]
Punkte: [2](E)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2)^T \mapsto f(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{a}$, mit $\mathbf{a} = (a^1, a^2)^T \in \mathbb{R}^2$, und das Vektorfeld $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2)^T \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})$, mit $\mathbf{b} = (b^1, b^2)^T \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^k} f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ (mit $k = 1, 2$) als Funktion von x^1 und x^2.

(a) indem Sie zuerst $f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ explizit berechnen und dann partiell ableiten;

(b) durch Verwendung der Kettenregel $\frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial x^k} = \sum_j \frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\mathbf{x})}{\partial x^k}$.

[Ergebniskontrolle: für $\mathbf{a} = (0,1)^T$, $\mathbf{b} = (1,0)^T$ gilt $\partial_{x^1} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = x^2$, $\partial_{x^2} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = x^1$.]
Hinweis: Falls eine kompakte Notation benutzt wird, z.B. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = a_l x^l$ und $\frac{\partial}{\partial x^k} x^l = \delta^l_k$, sind die Rechnungen recht kurz.

Hausaufgabe 3: Zweidimensionale Integration (kartesische Koordinaten) [Bonus]
Punkte: [2](M,Bonus)

Berechnen Sie das Flächenintegral $I(a) = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = y^2 + x^2$ über dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \mathrm{e}^{ax}\}$, mit $a \in \mathbb{R}$. *Hinweis:* für $\int \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{ax}$, zwei mal partiell integrieren! [Kontrollergebnis: $I(1) = \mathrm{e} + (\mathrm{e}^3 - 19)/9$.]

Hausaufgabe 4: Durch Kurven begrenzte Fläche (kartesische Koordinaten) [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Gegeben seien die Kurven $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto ((t-2a)^2 + 2a^2, t)^T$ sowie $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (2(t-a)^2, t)^T$ in kartesischen Koordinaten, mit $0 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie die endliche von diesen beiden Kurven eingeschlossene Fläche $S(a)$. Kontrollergebnis: $S(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$.

Hausaufgabe 5: Flächenintegral für Volumen eines ellipsförmigen Zeltes (kartesische Koordinaten) [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Ein Zelt hat einen flachen, ellipsförmigen Boden, beschrieben durch die Ungleichung $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1$; die Form des Zeltdaches wird beschrieben durch die Höhenfunktion $h(x,y) = c\big[1 - (x/a)^2 - (y/b)^2\big]$.

(a) Skizzieren Sie die Form des Zeltes qualitativ, für $a = 2$, $b = 1$ und $c = 2$.

(b) Berechnen Sie das Volumen V des Zeltes als Flächenintegral der Höhenfunktion. Benutzen Sie kartesische Koordinaten. [Kontrollergebnis: für $a = b = c = 1$ ist $V = \pi/2$.]

Hinweis: Zeigen Sie mittels einer trigonometrischen Substitution, dass $\int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x^2)^{3/2} = \frac{3}{16}\pi$.

Hausaufgabe 6: Koordinatentransformation [2]
Punkte: [2](E)

Der Punkt P_1 habe Kugelkoordinaten $(r,\theta,\phi) = (2, \pi/6, 2\pi/3)$. Wie lauten seine kartesischen und Zylinderkoordinaten, (x,y,z) bzw. (ρ,ϕ,z)? Der Punkt P_2 habe Zylinderkoordinaten $(\rho,\phi,z) = (4, \pi/4, 2)$. Wie lauten seine kartesischen und Kugelkoordinaten? (Winkel sind in Radiant anzugeben.)

Hausaufgabe 7: Kugelkoordinaten: Geschwindigkeit, kinetische Energie, Drehimpuls [3]

Punkte: (a)[2](E); (b)[1](E,Bonus); (c)[1](E); (d)[0,5](E,Bonus); (e)[0,5](E,Bonus)

Der Bezug zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten ist gegeben durch $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, mit $r \in (0,\infty)$, $\theta \in (0,\pi)$, $\phi \in (0,2\pi)$.
Lokale Basis: Konstruieren Sie die Basisvektoren der lokalen Basis, $\{\mathbf{e}_{y_i}\} = \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$, und

zeigen Sie explizit, dass
(a) $\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij}$ und (b) $\mathbf{e}_{y_i} \times \mathbf{e}_{y_j} = \varepsilon_{ijk}\, \mathbf{e}_{y_k}$.
Physikalische Größen: Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten (c) der Geschwindigkeitsvektor, $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$, (d) die kinetische Energie, $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$, und (e) der Drehimpulsvektor, $\mathbf{L} = m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$, wie folgt lauten:

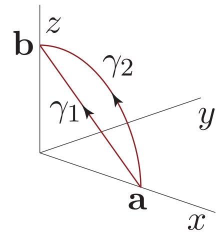
$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi, \quad T = \tfrac{1}{2}m\big[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\big], \quad \mathbf{L} = mr^2\big[\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\big].$$

Hausaufgabe 8: Linienintegral in kartesischen und Kugelkoordinaten [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](E)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} = (0, 0, fz)^T$, mit $f \in \mathbb{R}$. Berechen Sie explizit das Linienintegral $W[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ von $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^T$ nach $\mathbf{b} = (0, 0, 1)^T$ entlang den folgenden zwei Wegen:

(a) γ_1: eine gerade Linie. [Kontrollergebnis: Für $f = 2$ ist $W[\gamma_1] = 1$.]

(b) γ_2: ein Segment eines Kreises mit Radius $R = 1$ um den Ursprung. Nutzen Sie Kugelkoordinaten. [Kontrollergebnis: Für $f = 3$ ist $W[\gamma_2] = \frac{3}{2}$.]



Hausaufgabe 9: Linienintegral in Zylinderkoordinaten: Badewannenabfluss [Bonus]
Punkte: (a)[0,5](E,Bonus); (b)[1](E,Bonus); (c)[0,5](M,Bonus); (d)[1](M,Bonus)

Eine Seifenblase treibt entlang einer spiralförmigen Bahn γ auf das Abflussloch der Badewanne zu. In Zylinderkoordinaten ist die Bahn beschrieben durch $\rho(t) = \rho_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, $\phi(t) = \omega t$, $z(t) = z_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, mit $\rho_0 > \rho_\mathrm{a}$ und $t \in (0, t_\mathrm{a})$, wobei ρ_a der Radius des Abflusslochs ist, und $t_\mathrm{a} = \tau \ln(\rho_0/\rho_\mathrm{a})$ die Zeit, nach der das Abflussloch erreicht wird.

(a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Bahn (z.B. für $\omega = 6\pi/\tau$ und $\rho_0 = 10\rho_\mathrm{A}$).

(b) Wie lautet die Kurvengeschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ in Zylinderkoordinaten? Was ist der Betrag der Endgeschwindigkeit, $v_\mathrm{a} = \|\mathbf{v}(t_\mathrm{a})\|$?

(c) Zeigen Sie, dass die Länge der Bahn durch $L[\gamma] = \tau v_\mathrm{a}\,(\rho_0/\rho_\mathrm{a} - 1)$ gegeben ist.

(d) Berechnen Sie mittels des Linieningetrals $W[\gamma] = \int_\gamma d\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$ die Arbeit, die die Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$ entlang der Bahn geleistet hat. Interpretieren Sie das Ergebnis für $W[\gamma]$ physikalisch!

[Kontrollergebnisse für $\tau = 2/\omega$, $z_0 = 2\rho_0$ und $\rho_\mathrm{a} = \rho_0/3$: (b) $v_\mathrm{a} = \rho_0/\tau$, (c) $L = 2\rho_0$, (d) $W[\gamma] = mg\rho_0 4/3$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 17]
