Blatt 02: Vektorräume, Euklidische Geometrie

Lösung Beispielaufgabe 1: $\sqrt{1-x^2}$-Integrale mittels trigonometrischer Substitution [3]

(a) Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ist die Stammfunktion des Integranden bekannt, und wir können direkt folgern, dass $I(z) = [\arcsin x]_0^z = \arcsin z$.

Alternativ können wir das Integral mittels der Substitution $x = \sin y$ berechnen, mit $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{d}y \sin' y = \mathrm{d}y\cos y$ und $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} = \cos y$. Die neuen Integralgrenzen bestimmen wir durch Auswerten von $y = \arcsin x$ bei $x = 0$ und $x = z$:

$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin z} \mathrm{d}y\, \cos y \frac{1}{\cos y} = \int_0^{\arcsin z} \mathrm{d}y = \boxed{\arcsin z}.$$

Kontrollergebnis: $I\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \arcsin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \frac{\pi}{4}$, da $\sin\big(\frac{\pi}{4}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ✓

Überprüfung durch Ableitung: $\dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arcsin z = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}}$. ✓

(b) Wir substituieren $x = \frac{1}{a}\sin y$, mit $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{d}y\frac{1}{a}\cos y$ und $\sqrt{1-a^2x^2} = \cos y$:

$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, \sqrt{1-a^2x^2} = \frac{1}{a}\int_{\arcsin 0}^{\arcsin(az)} \mathrm{d}y\, \cos y \cos y \equiv \frac{1}{a}\tilde{I}(b).$$

Wir berechnen das $\cos^2 y$-Integral, mit Obergrenze $b = \arcsin(az)$, mittels partieller Integration, mit $u = \cos y$, $v = \sin y$, $u' = -\sin y$, $v' = \cos y$:

$$\tilde{I}(b) = \int_0^b \mathrm{d}y\ \overset{u}{\cos} y \overset{v'}{\cos} y \overset{uv-\int u'v}{=} \Big[\cos y\, \sin y\Big]_0^b - \int_0^b \mathrm{d}y\ \underbrace{[-\sin y]\sin y}_{\cos^2 y - 1}$$

$$= b + \cos b \sin b - \tilde{I}(b)$$

$$\Rightarrow \tilde{I}(b) = \tfrac{1}{2}\big[b + \sin b\cos b\big] = \tfrac{1}{2}\Big[b + \sin b\sqrt{1-\sin^2 b}\Big].$$

Wir haben die rechte Seite durch $\sin$ ausgedrückt, denn das Argument von $\tilde{I}(b)$ ist $b = \arcsin(az)$.

$$\Rightarrow I(z) = \frac{1}{a}\tilde{I}\big(\arcsin(az)\big) = \boxed{\frac{1}{2a}\Big[\arcsin(az) + az\sqrt{1-a^2z^2}\Big]}.$$

Kontrollergebnis: für $a = \frac{1}{2}$, $I\big(\sqrt{2}\big) = \arcsin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. ✓

Überprüfung durch Ableitung: $\dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} \overset{\text{(a)}}{=} \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2z^2}} + \sqrt{1-a^2z^2} + az\dfrac{-az}{\sqrt{1-a^2z^2}}\Big] = \sqrt{1-a^2z^2}$. ✓

Lösung Beispielaufgabe 2: Vektorraumaxiome: rationale Zahlen [3]

(a) Zunächst zeigen wir, dass $(\mathbb{Q}^2, +)$ eine Abelsche Gruppe ist.

(i) Abgeschlossenheit per Definition erfüllt. ✓

(ii) Assoziativität:
$$\left[\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x^1 + y^1 + z^1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 + z^1 \\ y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}\right] . \checkmark$$

(iii) Neutrales Element: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element. ✓

(iv) Additives Inverses: $\begin{pmatrix} -x^1 \\ -x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$ ist das additive Inverse von $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$. ✓

(v) Kommutativität: folgt (komponentenweise) aus der Kommutativität von $\mathbb{Q}$. ✓

Nun zeigen wir, dass die skalare Multiplikation, $\cdot$, ebenfalls die notwendigen Eigenschaften erfüllt, damit $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ einen Vektorraum bildet. Da das Produkt zweier rationaler Zahlen immer rational ist $\left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{(p_1 p_2)}{(q_1 q_2)}\right)$, ist die Abgeschlossenheit per Definition erfüllt. Weiterhin:

(vi) Multiplikation einer Summe von Skalaren mit einem Vektor ist distributiv:
$$(\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x^1 \\ (\lambda + \mu)x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 + \mu x^1 \\ \lambda x^2 + \mu x^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \checkmark$$

(vii) Multiplikation eines Skalars mit einer Summe von Vektoren ist distributiv:
$$\lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \lambda x^1 + \lambda y^1 \\ \lambda x^2 + \lambda y^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} . \checkmark$$

(viii) Multiplikation eines Produkts von Skalaren mit einem Vektor ist assoziativ:
$$(\lambda\mu) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu x^1 \\ \lambda\mu x^2 \end{pmatrix} = \lambda \left[\mu \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\right] . \checkmark$$

(ix) Neutrales Element: $1 \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$. ✓

Daher bildet das Tripel $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist kein Körper, da nicht für jedes $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ existiert (z.B. hat die Gleichung $2 \cdot a = 1$ innerhalb der ganzen Zahlen keine Lösung). Daher ist es auch *nicht* möglich, einen Vektorraum über den ganzen Zahlen zu konstruieren.

Lösung Beispielaufgabe 3: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln [Bonus]

Zunächst zeigen wir, dass $(V_a, \boldsymbol{+})$ eine abelsche Gruppe bildet.

(i) Abgeschlossenheit gilt per Definition. ✓

(ii) Assoziativität:
$$(\mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \mathbf{v}_y) \boldsymbol{+} \mathbf{v}_z = \mathbf{v}_{x+y+a} \boldsymbol{+} \mathbf{v}_z = \mathbf{v}_{(x+y+a)+z+a} = \mathbf{v}_{x+y+z+2a}$$
$$= \mathbf{v}_{x+(y+z+a)+a} = \mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \mathbf{v}_{y+z+a} = \mathbf{v}_x \boldsymbol{+} (\mathbf{v}_y \boldsymbol{+} \mathbf{v}_z) \, . \checkmark$$

(iii) Neutrales Element: $\mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \mathbf{v}_{-a} = \mathbf{v}_{x+(-a)+a} = \mathbf{v}_x \, , \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \mathbf{v}_{-a} \, . \checkmark$

(iv) Additive Inverse: $\mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \mathbf{v}_{-x-2a} = \mathbf{v}_{x+(-x-2a)+a} = \mathbf{v}_{-a} = \mathbf{0} \, , \Rightarrow \, -\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{-x-2a} \, . \checkmark$

(v) Kommutativität : $\mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_{x+y+a} = \mathbf{v}_{y+x+a} = \mathbf{v}_y \boldsymbol{+} \mathbf{v}_x \, . \checkmark$

Auch die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar in $(V_a, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ erfüllt alle für einen Vektorraum erforderlichen Eigenschaften. Abgeschlossenheit gilt per Definition. Ferner:

(vi) Multiplikation von einer Summe von Skalaren und einem Vektor ist distributiv:

$$\begin{aligned}(\gamma + \lambda) \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x &= \mathbf{v}_{(\gamma+\lambda)x+a(\gamma+\lambda-1)} = \mathbf{v}_{\gamma x+a(\gamma-1)+\lambda x+a(\lambda-1)+a} \\ &= \mathbf{v}_{\gamma x+a(\gamma-1)} \boldsymbol{+} \mathbf{v}_{\lambda x+a(\lambda-1)} = \gamma \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x \, . \checkmark\end{aligned}$$

(vii) Multiplikation von einem Skalar und einer Summe von Vektoren ist distributiv:

$$\begin{aligned}\lambda \boldsymbol{\cdot} (\mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y) &= \lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_{x+y+a} = \mathbf{v}_{\lambda(x+y+a)+a(\lambda-1)} = \mathbf{v}_{\lambda x+a(\lambda-1)+\lambda y+a(\lambda-1)+a} \\ &= \mathbf{v}_{\lambda x+a(\lambda-1)} \boldsymbol{+} \mathbf{v}_{\lambda y+a(\lambda-1)} = \lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_y \, . \checkmark\end{aligned}$$

(viii) Multiplikation von einem Produkt von Skalaren und einem Vektor ist assoziativ:

$$(\gamma\lambda) \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{(\gamma\lambda)x+a(\gamma\lambda-1)} = \mathbf{v}_{\gamma(\lambda x+a(\lambda-1))+a(\gamma-1)} = \gamma \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_{\lambda x+a(\lambda-1)} = \gamma \boldsymbol{\cdot} (\lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x) \, . \checkmark$$

(ix) Neutrales Element: $1 \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{x+a(1-1)} = \mathbf{v}_x \, . \checkmark$

Folglich ist das Triple $(V_a, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lösung Beispielaufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit [3]

(a) Die drei Vektoren sind linear unabhänig wenn, und nur wenn, die einzige Lösung der Gleichung

$$\mathbf{0} = a^1 \mathbf{v}_1 + a^2 \mathbf{v}_2 + a^3 \mathbf{v}_3 = a^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a^3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \text{with} \quad a^j \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

die triviale ist, $a^1 = a^2 = a^3 = 0$. Die Vektorgleichung (1) liefert ein System von drei Gleichungen, (i)-(iii), je eine für jede der drei Komponenten von (1), das wir wie folgt lösen:

(i)	$0a^1 + 1a^2 + 2a^3 = 0$	$\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow}$	(iv)	$\boxed{a^2 = -2a^3}$
(ii)	$1a^1 - 1a^2 - 1a^3 = 0$	$\overset{\text{(iv) in (ii)}}{\Rightarrow}$	(v)	$\boxed{a^1 = -a^3}$
(iii)	$2a^1 + 1a^2 + 4a^3 = 0$	$\overset{\text{(iv,v) in (iii)}}{\Rightarrow}$	(vi)	$0 = 0$

(i) liefert (iv): $a^2 = -2a^3$. (iv) in (ii) eingesetzt liefert (v): $a^1 = -a^3$. (iv) und (v) in (iii) eingesetzt liefern keine neue Information. Somit existieren unendlich viele nicht-triviale Lösungen (eine für jeden Wert von $a^3 \in \mathbb{R}$), also sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ $\boxed{\text{nicht}}$ linear unabhängig.

(b) Der gesuchte Vektor $\mathbf{v}_2' = (x, y, z)^T$ soll linear unabhängig von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_3$ sein, d.h. seine Komponenten x, y und z sind so zu wählen, dass die Gleichung $\mathbf{0} = a^1\mathbf{v}_1 + a^2\mathbf{v}_2' + a^3\mathbf{v}_3$ keine nicht-triviale Lösung hat, also $a^1 = a^2 = a^3 = 0$ impliziert:

$$\begin{array}{llcll}
\text{(i)} & 0a^1 + xa^2 + 2a^3 = 0 & \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} & \text{(iv)} & \text{wähle } \boxed{x=0}\text{, dann } a^3 = 0. \\
\text{(ii)} & 1a^1 + ya^2 - 1a^3 = 0 & \overset{\text{(iv) in (ii)}}{\Rightarrow} & \text{(v)} & \text{wähle } \boxed{y=0}\text{, dann } a^1 = 0. \\
\text{(iii)} & 2a^1 + za^2 + 4a^3 = 0 & \overset{\text{(iv),(v) in (iii)}}{\Rightarrow} & \text{(vi)} & \text{wähle } \boxed{z=1}\text{, dann } a^2 = 0.
\end{array}$$

(i) liefert (iv): $2a^3 = -xa^2$; um $a^3 = 0$ zu erzwingen, wählen wir $x = 0$. (iv) in (ii) eingesetzt liefert (v): $a^1 = -ya^2$; um $a^1 = 0$ zu erzwingen wählen wir $y = 0$. (iv,v) in (iii) eingesetzt liefert $za^2 = 0$; um $a^2 = 0$ zu erzwingen wählen wir $z = 1$. Folglich ist $\boxed{\mathbf{v}_2' = (0, 0, 1)^T}$ eine Wahl, für die $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2'$ und $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind. Diese Wahl ist nicht eindeutig – es gibt unendlich viele Alternativen; eine davon ist z.B. $\mathbf{v}_2' = (0, 1, 0)^T$.

Lösung Beispielaufgabe 5: Einsteinsche Summenkonvention [2]

(a) $a_i b^i = b^j a_j$ ist $\boxed{\text{korrekt}}$, da i und j Dummy-Variablen sind, über die summiert wird. Daher können wir nach Belieben umbenennen:

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^{2} a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 = b^1 a_1 + b^2 a_2 = \sum_{j=1}^{2} b^j a_j = b^j a_j \,. \checkmark$$

(b) $a_i \delta^i{}_j b^j = a_k b^k$ ist $\boxed{\text{korrekt}}$, da $\delta^i{}_j$ nur für $i = j$ ungleich null (und gleich 1) ist:

$$a_i \delta^i{}_j b^j = a_1 \underbrace{(\delta^1{}_1)}_{=1} b^1 + a_1 \underbrace{(\delta^1{}_2)}_{=0} b^2 + a_2 \underbrace{(\delta^2{}_1)}_{=0} b^1 + a_2 \underbrace{(\delta^2{}_2)}_{=1} b^2 = a_1 b^1 + a_2 b^2 = a_k b^k \,. \checkmark$$

(c) $a_i b^j a_j b^k \overset{?}{=} a_k b^l a_l b^i$ ist $\boxed{\text{falsch}}$, da sich die Indizes i und k *nicht* wiederholen, d.h. es wird nicht über sie summiert und sie können daher nicht umbenannt werden. Beispielsweise für $i = 1$ und $k = 2$ sind die linke Seite, $a_1(b^1 a_1 + b^2 a_2)b^2$, und die rechte Seite, $a_2(b^1 a_1 + b^2 a_2)b^1$, klar verschieden.

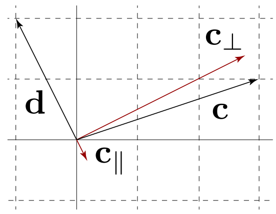
(d) $a_1 a_i b^1 b^i + b^2 a_j a_2 b^j = (a_i b^i)^2$ ist $\boxed{\text{korrekt}}$, da die Multiplikation assoziativ und kommutativ ist und wir Dummy-Indizes nach Belieben umbenennen können:

$$a_1 a_i b^1 b^i + b^2 a_j a_2 b^j = a_1 b^1 a_i b^i + a_2 b^2 a_i b^i = (a_1 b^1 + a_2 b^2)(a_i b^i) = (a_j b^j)(a_i b^i) = (a_i b^i)^2. \checkmark$$

In der Praxis müssen die oben aufgeführten Argumente nicht explizit aufgeschrieben werden. Zusammenhänge wie (a), (b) und (d) können einfach ohne weitere Bemerkungen verwendet werden.

Lösung Beispielaufgabe 6: Winkel, orthogonale Zerlegung [2]

(a) $\cos(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \dfrac{3\cdot 7 + 4\cdot 1}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{49+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$



(b) $$\mathbf{c}_\parallel = \frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|^2} = \frac{3\cdot(-1)+1\cdot 2}{1+4}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{c}_\perp = \mathbf{c} - \mathbf{c}_\parallel = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \boxed{\frac{7}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}$$

Konsistenzcheck: $\mathbf{c}_\perp\cdot\mathbf{c}_\parallel = \frac{7}{25}\big(1\cdot 2 - 2\cdot 1\big) = 0.$ ✓

Lösung Beispielaufgabe 7: Projektion auf eine Orthonormalbasis [2]

(a) $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1\rangle = \frac{1}{2}\big[1\cdot 1 + 1\cdot 1\big] = 1\,, \qquad \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\rangle = \frac{1}{2}\big[1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\big] = 0\,.$

$\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2\rangle = \frac{1}{2}\big[1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\big] = 1$

Die beiden Vektoren sind normiert und orthogonal zueinander, $\boxed{\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j\rangle = \delta_{ij}}$, bilden also eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^2$. ✓

(b) Da die Vektoren $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ eine Orthonormalbasis bilden, ist die Komponente w^i des Vektors $\mathbf{w} = (-2,3)^T = \mathbf{e}'_i w^i$ bezüglich dieser Basis durch die Projektion $w^i = \langle \mathbf{e}'^i, \mathbf{w}\rangle$ (mit $\mathbf{e}'^i = \mathbf{e}'_i$), gegeben:

$$w^1 = \langle \mathbf{e}'^1, \mathbf{w}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big[1\cdot(-2) + 1\cdot 3\big] = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{2}}},$$
$$w^2 = \langle \mathbf{e}'^2, \mathbf{w}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big[1\cdot(-2) - 1\cdot 3\big] = \boxed{-\tfrac{5}{\sqrt{2}}}.$$

Lösung Beispielaufgabe 8: Gram-Schmidt-Verfahren [2]

Strategie: iterative Orthogonalisierung und Normierung, ausgehend von $\mathbf{v}_{1,\perp} = \mathbf{v}_1$:

Startvektor: $\mathbf{v}_{1,\perp} = \mathbf{v}_1 = (1,-2,1)^T$

Normierung $\mathbf{v}_{1,\perp}$: $\mathbf{e}'_1 = \dfrac{\mathbf{v}_{1,\perp}}{\|\mathbf{v}_{1,\perp}\|} = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T} = \mathbf{e}'^1\,.$

Orthogonalisierung $\mathbf{v}_2$: $\mathbf{v}_{2,\perp} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{e}'_1\langle \mathbf{e}'^1, \mathbf{v}_2\rangle = (1,1,1)^T - \mathbf{e}'_1(0)$

Normierung $\mathbf{v}_{2,\perp}$: $\mathbf{e}'_2 = \dfrac{\mathbf{v}_{2,\perp}}{\|\mathbf{v}_{2,\perp}\|} = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T} = \mathbf{e}'^2\,.$

Orthogonalisierung $\mathbf{v}_3$: $\mathbf{v}_{3,\perp} = \mathbf{v}_3 - \mathbf{e}'_1\langle \mathbf{e}'^1, \mathbf{v}_3\rangle - \mathbf{e}'_2\langle \mathbf{e}'^2, \mathbf{v}_3\rangle$

$= (0,1,2)^T - \mathbf{e}'_1(0) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T\left(3\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = (-1,0,1)^T$

Normierung $\mathbf{v}_{3,\perp}$: $$\mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{v}_{3,\perp}}{\|\mathbf{v}_{3,\perp}\|} = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T} = \mathbf{e}'^3\,.$$

Lösung Beispielaufgabe 9: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik [4]

(a) $$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \boxed{\tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{v}}_1},\ \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \boxed{-\tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\mathbf{v}}_2}\,.$$

Die Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_1$ und $\hat{\mathbf{v}}_2$ bilden eine Basis, da sich beide Standardbasisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\hat{\mathbf{e}}_2$ durch sie ausdrücken lassen.

(b) Eine Darstellung der Vektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$ als Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ finden wir wie folgt:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{v}}_1 x^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 x^2, \quad x^1 = 3,\ x^2 = -4 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}3 + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(-4) = \boxed{\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}}\,.$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{v}}_1 y^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 y^2, \quad y^1 = -1,\ y^2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}3 = \boxed{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}\,.$$

Skalarprodukt: $$\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 2\cdot 1 + (-4)\cdot 3 = \boxed{-10}\,.$$

(c) $$g_{11} = \langle \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \boxed{4}\,, \qquad g_{12} = \langle \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \boxed{2}\,,$$
$$g_{21} = \langle \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{v}}_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \boxed{2}\,, \qquad g_{22} = \langle \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{v}}_2 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \boxed{2}\,.$$

(d) $$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_g = x^i g_{ij} y^j \\ &= 3\cdot 4\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot 3 + (-4)\cdot 2\cdot(-1) + (-4)\cdot 2\cdot 3 = \boxed{-10}\,.\ \checkmark\ \text{[= (b)]}\end{aligned}$$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 21]
