E1: Mechanik

Übungsblatt 1 (WS24/25)

Thomas Udem & Andrea Alberti

Ausgegeben am *16. Oktober 2024* — Wird besprochen am *23. Oktober - 25. Oktober*

Anmerkung: Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem ($*$) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

1.1 Energie: schätzen und googeln Sie mal ...

Der Physiker Enrico Fermi war ein Meister im schnellen Kopfrechnen und hatte die Antwort schwieriger physikalischer Probleme, lange bevor seine Kollegen mit ihren exakten Rechnungen fertig waren. Er ging dabei so vor, dass er das Problem auf das Wesentliche reduzierte und nur die Größenordnung der beteiligten physikalischen Größen abschätzte. Bestimmen Sie in diesem Sinne die folgenden Größen.

(a) Das Fröttmaninger Windrad der Stadtwerke München erzeugt jährlich eine Energie $E_W \approx 2000\,\mathrm{MWh}$; siehe den Link. Wie viel Benzin / TNT / Restmüll müsste ständig verbrannt werden, um die gleiche Leistung zu erzeugen? Drücken Sie die Menge pro Zeiteinheit aus (z. B. in Einheiten von [g/s]).

(b) Schätzen Sie, wie viel Benzin alle Autos in München im zeitlichen Mittel verbrauchen. Wie viele Windräder vom Fröttmaninger Typ bräuchte man, um alle Autos in München mit dieser Energiequelle betreiben zu können?

(c) Wie viel Fläche wird benötigt, um den gesamten Energiebedarf eines Bundesbürgers zu decken? Welcher Anteil an der Gesamtfläche der Bundesrepublik Deutschland (BRD) wird benötigt, um alle Bundesbürger auf diese Weise mit **Solarenergie** zu versorgen? Gehen Sie von einem Endenergieverbrauch in der BRD von $9\,\mathrm{EJ/a}$ aus ($1\,\mathrm{EJ} = 10^{18}\,\mathrm{J}$).

1.2 Längenskalen und Einheiten

Eine der genauesten Längenmessungen weltweit wird derzeit mit Gravitationswellendetektoren wie dem LIGO-Experiment durchgeführt. Dabei wird die Länge zweier 4 km langer Messstrecken mit einer relativen Genauigkeit von 3×10^{-22} verglichen.

(a) Bestimmen Sie die absolute Genauigkeit der Messung in Metern.

(b) Wie vielen Atomdurchmessern entspricht dies? Wie vielen Protonendurchmessern?

Sie sollen als Gutachter LIGO besuchen und fliegen dazu nach Seattle. Die 197 Meilen zum Hanford Research Site fahren Sie in 3 Stunden und 10 Minuten.

(c) Was ist die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit in km/h?

(d) Was ist Ihr Durchschnittsverbrauch in Liter/100 km wenn Sie 11,7 Gallonen Benzin verbraucht haben?

Ihr Fahrzeug hat einen Benzinverbrauch der auf Grund der Luftreibung quadratisch mit der Geschwindigkeit zunimmt, gemäß der Funktion $S = a + bv^2$ mit $a = 0{,}03\,\mathrm{L/km}$.

(a) Schätzen Sie b und bestimmen dessen Einheiten.

(b) Um wie viel hätten Sie den Benzinverbrauch reduzieren können, wenn Sie die Strecke in 5 Stunden gefahren wären?

(c) Sie werden für die Dienstreise bezahlt und sollen die Kosten minimieren. Welche Reisegeschwindigkeit optimiert die Kosten, wenn Sie neben den Benzinkosten (2, 48 USD/Gallone) Ihre Fahrzeit mit 20 Euro/Std. ansetzen sollen? Ist das mit der Rechtslage in Washington (speed limit 70 mph) kompatibel?

1.3 Statistik

Eine Messung ergibt folgende Werte:

$$x^{\mathrm{exp}} = \{11{,}9;\ 11{,}4;\ 11{,}8;\ 11{,}4;\ 12{,}3;\ 11{,}5;\ 11{,}2;\ 11{,}4;\ 12{,}8;\ 12{,}1\}.$$

Bestimmen Sie den Mittelwert, die mittlere Abweichung, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwertes. Geben Sie die Konfidenzintervalle 1σ, 2σ und 3σ an, unter der Annahme, dass die Größe einer Gaußschen Verteilung folgt. Was ist die Häufigkeit bei einer unendlichen Anzahl von Messungen, ein Messwert innerhalb des jeweiligen Konfidenzintervalls zu finden? Wie groß ist der Anteil der Messwerte x^{exp} innerhalb der jeweiligen Konfidenzintervalle?

1.4 Fehlerfortpflanzung (∗)

Es sollen Größen y_i aus Messwerten u_i und v_i über die bekannte Funktion $y_i = f(u_i, v_i)$ bestimmt werden. Dazu werden jeweils N Werte u_i und $v_i (i = 1 \ldots N)$ gemessen und deren Mittelwerte $\overline{u} = \sum u_i/N$ und $\overline{v} = \sum v_i/N$ sowie deren Varianzen $\sigma_u^2 = \sum(u_i - \overline{u})^2/(N-1)$ und $\sigma_v^2 = \sum(v_i - \overline{v})^2/(N-1)$ berechnet. Ferner soll angenommen werden, dass die Funktion $f(u, v)$ am Punkt $(\overline{u}, \overline{v})$ nicht zu stark variiert, so dass die folgende Taylorentwicklung für eine Abschätzung der Varianz von y_i ausreichend ist:

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[f(\overline{u}, \overline{v}) - f(u_i, v_j)\right]^2 \\
&= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\left.\frac{\partial f(u, \overline{v})}{\partial u}\right|_{\overline{u}} (\overline{u} - u_i) + \left.\frac{\partial f(\overline{u}, v)}{\partial v}\right|_{\overline{v}} (\overline{v} - v_j) + \ldots \right)^2 \\
&\approx \sigma_u^2 \left[\frac{\partial f(u, \overline{v})}{\partial u}\right]_{\overline{u}}^2 + \sigma_v^2 \left[\frac{\partial f(\overline{u}, v)}{\partial v}\right]_{\overline{v}}^2 + 2\sigma_{uv}^2 \left[\left.\frac{\partial f(u, \overline{v})}{\partial u}\right|_{\overline{u}} \left.\frac{\partial f(\overline{u}, v)}{\partial v}\right|_{\overline{v}} \right],
\end{aligned}
$$

mit der Kovarianz

$$
\sigma_{uv}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i,j} (u_i - \overline{u})(v_j - \overline{v}).
$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt $\overline{y} = f(\overline{u}, \overline{v})$.

Hinweis ↦ Lesen Sie Demtröder, „Experimental Physik 1“.

(b) Erklären Sie warum die Kovarianz für statistisch unabhängige Größen u_i und v_i für $N \to \infty$ verschwindet.

(c) Erläutern Sie wie man die beschriebene Fehlerfortpflanzung auf mehr als zwei Variablen erweitern kann (ohne Herleitung).