Dirk-André Deckert & Jago Silberbauer Wintersemester 2024/25

Mathematik 3 für Physiker - Übung 1

Aufgabe 1 (Dominierte Konvergenz)
Zeigen Sie

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)^k}{n^2}=0. \tag{1}$$

Aufgabe 2 (Monotone Konvergenz)
Zeigen Sie, dass für alle $q\in]-1,1[$ gilt

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{m}q^k=\frac{1}{1-q}\cdot\left(\frac{1}{1-q}-1\right). \tag{2}$$

Aufgabe 3
Betrachten Sie eine stetige Funktion $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$. Angenommen $L:=\lim_{x\to\infty}f(x)$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

b) Finden Sie ein Beispiel für eine solche Funktion f, die auf jedem Interval $[1,a]$ mit $a>1$ Riemann-integrierbar ist, aber nicht uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[1,\infty[$, d.h. $\lim_{a\to\infty}\int_1^a f(x)dx$ existiert nicht.

Bemerkung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervalen durch Stufenfunktionen approximiert werden können, was wiederum zur Riemann-Integrierbarkeit führt. Für diese Approximation ist die gleichmäßige Stetigkeit essentiell, welche aus diesen Annahmen gefolgert werden kann. Teilaufgabe b) sagt uns, dass die (uneigentliche) Riemann-Integrierbarkeit verloren gehen kann auf unbeschränkten Mengen, selbst wenn der Integrand gleichmäßig stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Diskrete Version von Partieller Integration)
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie

a) Für alle $m,n\in\mathbb{N}$ mit $m\le n$ gilt

$$\sum_{j=m}^{n}a_j\cdot(b_{j+1}-b_j)=(a_{n+1}b_{n+1}-a_mb_m)-\sum_{j=m}^{n}b_{j+1}\cdot(a_{j+1}-a_j). \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n} \tag{4}$$

in $\mathbb{C}$ konvergent ist.

Hinweis: Nutzen Sie Teilaufgabe a) mit

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\quad\text{und}\quad b_n=\frac{1}{n}. \tag{5}$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Funktion

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x):=\begin{cases}0, & \text{falls } x\in\mathbb{Q},\\ 1, & \text{sonst.}\end{cases} \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass f nicht Riemann-integrierbar ist.