E1: Mechanik

Übungsblatt 3 (WS24/25)

Thomas Udem & Andrea Alberti

Ausgegeben am *30. Oktober 2024* — Wird besprochen am *06. November - 08. November*

Anmerkung: Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem ($*$) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

3.1 Boot fahren

Ein Boot durchquert mit einer Geschwindigkeit $v_B = 4\,\mathrm{m/s}$ einen 200 m breiten Fluss. Sein Bug zeigt zum gegenüberliegenden Ufer. Das Wasser fließt mit einer Geschwindigkeit $v_W = 2\,\mathrm{m/s}$.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit v_g bewegt sich das Boot über Grund?

(b) Wie lange braucht das Boot für die Durchquerung des Flußes?

(c) Wie weit wird das Boot den Fluss hinunter abgetrieben?

Jetzt soll das Boot auf der gleichen Höhe wie beim Start auf der anderen Uferseite ankommen.

(d) Unter welchem Winkel α senkrecht zur Flussrichtung muss es sich durch den Fluss bewegen?

(e) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_g des Bootes in diesem Fall?

(f) Wie lange braucht das Boot um das andere Ufer zu erreichen?

(g) Es herrscht Windstille und zwei Segelboote treiben den Fluss hinunter. Das Segel eines Bootes ist beschädigt und kann nicht benutzt werden, das Segel des anderen Bootes ist in Ordnung. Welches Boot kann schneller stromabwärts fahren?

3.2 Fallversuche

Eine Kugel K_1 bewegt sich im waagrechten Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit $\overline{v}_1 = 10\,\mathrm{m/s}$. Eine zweite, gleichschwere Kugel K_2 fällt aus der gleichen Höhe ($h = 1\,\mathrm{m}$) im freien Fall zu Boden (d.h. Anfangsgeschwindigkeit $\overline{v}_2 = 0\,\mathrm{m/s}$). Die Luftreibung soll vernachlässigt werden.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit kommen die Kugeln jeweils am Boden an?

(b) Welche Kugel kommt zuerst am Boden an?

3.3 Teilchenbahn

Die Bahn $\vec{r}_1(t)$ von Teilchen 1 ist gegeben durch:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} R\,\cos(\omega t) \\ R\,\sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Bahn und berechnen Sie die Länge der Bahn von $t = 0$ bis $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

(b) Teilchen 2 befindet sich im freien Fall:

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die relative Geschwindigkeit und die relative Beschleunigung zwischen Teilchen 1 und 2.

3.4 Wurfparabel (∗)

Eine Wurfparabel wird wie folgt in einem Koordinatensystem beschrieben, in dem die x-Achse horizontal und die y-Achse vertikal nach oben gerichtet ist:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Ersichtlich ist die gleichförmige horizontale Bewegung unabhängig von der beschleunigten vertikalen Bewegung zu beschreiben.

(a) Finden Sie die Transformation, die die Koordinaten (x, y) in (x', y') umrechnet, die zu einem Koordinatensystem gehören, welches um 45° um eine Achse, die senkrecht auf der xy-Ebene steht, gedreht ist.

(b) Beschreiben Sie die Wurfparabel mit den Koordinaten (x', y'). Sind die Komponenten immer noch unabhängig und was bedeutet das genau?

(c) Die Bahn soll jetzt in einem schiefwinkeligen Koordinatensystem beschrieben werden. Die beiden Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ des schiefwinkeligen Koordinatensystems sind in der kartesischen Basis gegeben durch:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3/4} \\ \sqrt{1/4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1/4} \\ \sqrt{3/4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \neq 0$$

Wie lautet die Transformation, die die rechtwinkeligen Koordinaten x, y in die schiefwinkeligen Koordinaten x', y' transformiert? Beschreiben Sie die Wurfparabel mit den Koordinaten dieses schiefwinkeligen Systems. Sind die Komponenten jetzt noch unabhängig?

(d) Skizzieren Sie die folgende Bahn, die in Zylinderkoordinaten gegeben ist, in ein xy-Koordinatensystem:

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

wobei ρ der Abstand und $\varphi = 0 \ldots 2\pi$ der Polarwinkel ist. Dabei ist $\epsilon = 0{,}5$.

(e) Der Winkel φ variiere nun linear mit der Zeit: $\varphi = \omega\, t$. Transferieren Sie die Bahn in kartesische Koordinaten als Funktion der Zeit t.

(f) Nehmen Sie wie früher an, der Winkel φ variiert linear mit der Zeit wie $\varphi = \omega\, t$, und berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung in kartesischen Koordinaten.

Hinweis ↦ Als Alternative zur manuellen Berechnung können Sie auch ein Computeralgebrasystem verwenden, z.B. Wolfram Mathematica oder das Modul "sympy" in Python. Wir empfehlen die Software Wolfram Mathematica, die allen Studierenden mit einer Unicampus-Lizenz zur Verfügung steht.

(g) Erklären Sie, wie Sie die Tangential- und Normalkomponente der Beschleunigung berechnen würden. Das tatsächliche Ausrechnen führt zu einem langen Ausdruck.