Mathematisches Institut der Universität München 19.10.2023

Tutorium 1 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Sei $A := \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Beweise, daß

$$\mathcal{O} := \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\big\}$$

eine Topologie auf A ist. Finde alle $x \in A$, für welche die Identitätsabbildung zwischen zwei topologischen Räumen

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : (A, \mathcal{O}) &\to \big(A, \mathcal{P}(A)\big) \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

stetig in x ist.

Aufgabe 2:
Es sei $X := \{\triangleleft, \bigcirc, \triangleright\}$, $Y := \{\blacktriangleleft, \bullet, \blacktriangleright\}$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(\bigcirc) := \bullet$, $f(\triangleleft) := \blacktriangleleft$ und $f(\triangleright) := \blacktriangleright$. Zeige:

$$\mathcal{O}_X := \{\emptyset, \{\triangleleft\}, X\}$$

ist eine Topologie auf X und

$$\mathcal{O}_Y := \{\emptyset, \{\bullet\}, \{\blacktriangleleft\}, \{\bullet, \blacktriangleleft\}, Y\}$$

eine Topologie auf Y. Zeige weiter:

a) $\bigcirc$ ist ein Häufungspunkt von $\{\triangleleft, \triangleright\}$.

b) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist nicht hausdorffsch.

c) f ist in $\bigcirc$ nicht stetig.

Aufgabe 3:
Versehe $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie und zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (x+1)^2 & \text{für } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

in -1 stetig, aber in 1 nicht stetig ist.

Tutorium 2 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Zeige:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{dist}(\cdot, Y) : X & \to & [0, \infty[\\ x & \mapsto & \operatorname{dist}(x, Y) := \inf\{d(x, y) : y \in Y\} \end{array}$$

ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 2:
Bestimme den punktweisen Grenzwert $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ der Funktionenfolge

$$\left(\begin{array}{rcl} f_n : [1, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^2}{n^2 + x^2} \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Konvergiert f_n gleichmäßig?

Aufgabe 3:
Versehe $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie und zeige, daß
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{array}$$
stetig ist.

Tutorium 3 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es seien $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} \frac{p}{q} : \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{p(z)}{q(z)} \end{array}$$

stetig ist.

Aufgabe 2:
Zeige den eindimensionalen Fixpunktsatz von Brouwer: Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ besitzt einen Fixpunkt.

Aufgabe 3:
Es sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeige:

$$V := \{(x, y) \in I \times I : x < y\} \tag{1}$$

ist eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
Anleitung: Fixiere $z = (z_1, z_2) \in V$ und betrachte zu $w = (w_1, w_2) \in V$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \alpha_w : [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & tz + (1-t)w \end{array}$$

Aufgabe 4:
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, daß

a) f ist injektiv

b) f ist streng monoton

äquivalent sind.

Tutorium 4 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to Y$ sei stetig und bijektiv. Zeige, daß dann f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2:
Zeige oder widerlege:

a) Sind X, Y metrische Räume, $f : B \to Y$ stetig und $B \subseteq X$ beschränkt, so ist $f(B)$ beschränkt.

b) Ist $B \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann besitzt $f(B)$ Infimum und Supremum.

Aufgabe 3:
Zeige, daß die Menge $K := \{(-1)^{n^2}(1 + \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 1\}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie kompakt ist.

Mathematisches Institut der Universität München 15.11.2023

Tutorium 5 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Wir wissen, daß es solche Konstanten gibt – aber wie sehen sie aus? Finde explizite Konstanten $0 < m \leqslant M < \infty$, so daß

$$m\|\underline{x}\|_1 \leqslant \|\underline{x}\|_2 \leqslant M\|\underline{x}\|_1$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Aufgabe 2:
Nach Lemma 13.8.6 ist $\begin{array}{rcl} \cos|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ nullstellenfrei, deshalb ist der Tangens(zweig)

$$\begin{array}{rcl} \tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan[x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

wohldefiniert. Zeige:

a) tan ist punktsymmetrisch und streng monoton steigend.

b) tan ist stetig und bijektiv und die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ist stetig.

Tutoriumsblatt 7 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1: Es sei $\emptyset \neq X$ eine endliche Menge. Zeige:

a) Für das Zählmaß $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty[$ und die Diracmaße δ_x gilt:

$$\nu = \sum_{x \in X} \delta_x$$

b) Jedes Maß $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ hat die Form

$$\mu = \sum_{x \in X} \mu(\{x\})\delta_x.$$

Aufgabe 2:
Es sei $\emptyset \neq X$ eine nicht abzählbare Menge und

$$\mathcal{A} = \{U \subseteq X : U \text{ abzählbar oder } X \backslash U \text{ abzählbar }\}$$

die σ-Algebra aus Beispiel 14.1.3. Zeige:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\to [0, 1] \\ Y &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } Y \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{für } X \backslash Y \text{ abzählbar} \end{cases} \end{aligned}$$

definiert einen Wahrscheinlichkeitsraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Aufgabe 3: Es seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ und $(Z, \mathcal{C})$ Meßräume und $f : X \to Y$ sei $\mathcal{A} - \mathcal{B}-$meßbar, $g : Y \to Z$ sei $\mathcal{B} - \mathcal{C}-$meßbar. Zeige, daß $g \circ f$ $\mathcal{A} - \mathcal{C}-$meßbar ist.

Tutoriumssblatt 8 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $X = \{0,1,2,3\}$, $\mathcal{E} = \{\{0,1\},\{1,2\},\{1\}\}$, $\mathcal{F} = \{\{0,1\},\{1,2\}\}$ und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ die davon erzeugten $\sigma-$Algebren.

a) Zeige $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(X)$.

b) Zeige, daß durch $p(\{0,1\}) = p(\{1,2\}) = \frac{2}{3}$ und $p(\{1\}) = \frac{1}{3}$ ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathcal{E})$ definiert wird.

c) Zeige, daß die Bedingungen $q(\{0,1\}) = q(\{1,2\}) = \frac{2}{3}$ nicht reichen, um ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathcal{F})$ zu definieren.

Aufgabe 2: Es sei $\mathcal{E} := \{\{1,...,2k-1\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

a) Zeige, daß die von $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma-$Algebra die Form

$$\sigma(\mathcal{E}) = \left\{ \bigcup_{j\in J} V_j : J \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

mit $V_j := \begin{cases} \{1\} & \text{für } j = 1 \\ \{2j-2, 2j-1\} & \text{für } j \geq 2 \end{cases}$ hat.

b) Es sei $\lambda > 0$. Zeige, daß durch

$$\mu(A) := e^{-\lambda} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ A\cap V_j \neq \emptyset}} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathcal{E})$ definiert wird.

Tutoriumsblatt 9 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und $\delta_{\frac{1}{3}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Diracmaß zum Punkt $\frac{1}{3}$. Sei $M_0 := [0,1]$ und für $n \geq 0$ entstehe M_{n+1} aus M_n durch Entfernen aller mittleren Drittel, also

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ M_2 &= M_1 \setminus \left( ]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\right) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Berechne $\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_3} d\lambda$ und $\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_3} d\delta_{\frac{1}{3}}$. Was erhält man allgemein bei $n \in \mathbb{N}$ für $\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_n} d\lambda$?

Aufgabe 2:

a) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum $f : X \to [0,\infty]$ meßbar und $x \in X$. Zeige, daß für das Dirac-Maß δ_x gilt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\delta_x = f(x) \ .$$

b) Zeige, daß die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ bezüglich der Borel-Lebesgueschen $\sigma-$Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar ist und berechne $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \mathrm{d}\lambda$ mit dem Borel-Lebesguemaß λ.

Aufgabe 3: Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeige, daß

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathcal{P}(X) &\to [0,\infty] \\ Q &\mapsto \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, Q \subseteq A\} \end{aligned}$$

ein äußeres Maß auf X definiert.

Tutoriumsblatt 10 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

a) Berechne für die Funktionenfolge $f_n = \mathbf{1}_{[\frac{5+n}{3}, \frac{7+n}{3}]}$ das Integral $\int\limits_{\mathbb{R}} (\lim\limits_{n\to\infty} f_n) d\lambda$ und den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$. Warum kommt nicht das gleiche heraus?

b) Zeige für $g_n = \mathbf{1}_{[-1+\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}]} \frac{21(n+1)}{n}$ die Gleichheit

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} g_n) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n d\lambda$$

und berechne diesen Wert.

Aufgabe 2:
Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Poissonmaß μ zu einem Parameter $\lambda > 0$ gegeben durch $\mu(\{j\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.
Bestimme die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} f_n d\mu$ für die Funktionenfolgen

a) $$\begin{aligned} f_n : \mathbb{N} &\to \mathbb{C} \\ k &\mapsto \exp\left(\frac{i\pi \sqrt[n]{n} k}{2}\right) \cos\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f_n : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ k &\mapsto -\frac{3}{2} + \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^l} \end{aligned}$$

Tutoriumsblatt 11 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Sind X und Y $\mathbb{K}$-Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$, $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ und $g : U \to Y$ differenzierbar in $a \in U$. Dann ist für jedes $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Abbildung $\begin{array}{rcl} \lambda f + \mu g : U & \to & Y \\ x & \mapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array}$ in a differenzierbar mit

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a). \tag{1}$$

Aufgabe 2: Es sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, Y ein Banchraum und $f : I \to Y$ in $a \in I$ differenzierbar. Zeige, daß f in a stetig ist.

Aufgabe 3: Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ und $\underline{b} \in \mathbb{C}^m$. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^m \\ \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} + \underline{b} \end{array}$$

in jedem Punkt $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ differenzierbar ist und berechne $(Df)(\underline{a})$.

Tutoriumsblatt 12 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es seien Y_1, Y_2, Z Banachräume und $\phi : Y_1 \times Y_2 \to Z$ eine stetige bilineare Abbildung.

a) Zeige, daß $C > 0$ existiert, so daß für alle $y = (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ gilt:

$$||\phi[(y_1, y_2)]|| \leq C||y_1|| \cdot ||y_2||.$$

b) Zeige, daß ϕ in jedem Punkt $b = (b_1, b_2) \in Y_1 \times Y_2$ differenzierbar ist und für alle $y = (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ gilt :

$$\phi'(b)[y] = \phi[(b_1, y_2)] + \phi[(y_1, b_2)].$$

Aufgabe 2:
Es sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum. Zeige $\begin{array}{rcl} F : \mathcal{H}\backslash\{\mathbf{0}\} & \to &]0, \infty[\\ \varphi & \mapsto & \|\varphi\| \end{array}$ ist differenzierbar und bestimme die Ableitung.

Aufgabe 3:
Es sei λ das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : [-10, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x^2} \end{array}$ $\lambda-$integrierbar ist und berechne $\int\limits_{-10}^{\infty} xe^{-x^2} dx$.

Tutoriumsblatt 13 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:

a) Bestimme für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ den Wert des Integrals $\int\limits_a^b e^{-x}\sin(x)dx$.

b) Zeige, daß für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $\begin{array}{rcl} f : [a,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x}\sin(x) \end{array}$ integrierbar (bezüglich Lebesguemaß) ist und berechne $\int\limits_a^\infty e^{-x}\sin(x)dx$.

Aufgabe 2:

a) Bestimme die Ableitung von $\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$.

b) Zeige, daß für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $\begin{array}{rcl} f_a : [a,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+e^x} \end{array}$ integrierbar ist und bestimme $\int\limits_a^\infty \frac{1}{1+e^x}dx$.

Aufgabe 3:
Es sei X ein $\mathbb{K}-$Banachraum, $U \subseteq X$ offen und $f_1 : U \to \mathbb{K}^d$,...,$f_d : U \to \mathbb{K}^d$ seien stetig differenzierbar. Zeige, daß $\begin{array}{rcl} H : U & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(f_1(x), ..., f_d(x)) \end{array}$ stetig differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Tutoriumsblatt 14 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Berechne zu $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (1+xye^{z^2}, \dfrac{xy}{1+z^2}) \end{array}$ die Jacobimatrix in jedem $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ und zeige damit, daß f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2:
Zeige, daß die Abbildung $\begin{array}{rcl} T: C([0,1],\mathbb{R}) & \to & C([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & e^f \end{array}$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Aufgabe 3:
Es sei $U\subseteq\mathbb{K}^n$ offen, $a\in U$ und $f=(f_1,...,f_m):U\to\mathbb{K}^m$ in a differenzierbar. Zeige: Jede der Koeffizientenfunktionen $f_1,...,f_m$ ist partiell differenzierbar in a und die Jacobimatrix $(Jf)(a)$ ist die darstellende Matrix der Ableitung $(Df)(a)$ von f in a bezüglich der Standardbasen.