Aufgabe 1:

$A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ Mengen

Beh: $(A_1 \times \dots \times A_n) \cap (B_1 \times \dots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_n)$

Beweis:

„$\subseteq$" Ist $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (A_1 \times \dots \times A_n) \cap (B_1 \times \dots \times B_n)$,

dann gilt:

- $x_1 \in A_1$ und $x_1 \in B_1$, also $x_1 \in A_1 \cap B_1$

$\vdots$

- $x_n \in A_n$ und $x_n \in B_n$, also $x_n \in A_n \cap B_n$,

weshalb insgesamt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_n)$ ist.

„$\supseteq$" Ist $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_n)$, dann ist $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n \supseteq (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_n)$ und $(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \supseteq (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_n)$

also $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (A_1 \times \dots \times A_n) \cap (B_1 \times \dots \times B_n)$.

Aufgabe 2: X, Y Mengen

a) Beh: $\phi : \mathcal{P}(X \cup Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$
$A \longmapsto (A \cap X, A \cap Y)$

ist injektiv.

Beweis: Sind $A, B \subseteq X \cup Y$, dann gilt nach Definition von ϕ:

$$\phi(A) = \phi(B) \Longleftrightarrow (A \cap X = B \cap X \text{ und } A \cap Y = B \cap Y)$$

Insbesondere folgt aus $\phi(A) = \phi(B)$ auch

$$(A \cap X) \cup (A \cap Y) = (B \cap X) \cup (B \cap Y). \quad (1)$$

Nach Lemma 1.1.10 gilt für die Vereinigung von Durchschnitten: $\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cup Y_j)$

also hier

$$(A \cap X) \cup (A \cap Y) =$$
$$= \underbrace{(A \cup A)}_{= A \subseteq X \cup Y} \cap (A \cup Y) \cap (X \cup A) \cap (X \cup Y)$$
$$= \underbrace{A \cap (A \cup Y)}_{= A} \cap (X \cup A) = A$$

Analog folgt
$(B \cap X) \cup (B \cap Y) = B$,
womit aus (1) die Injektivität von Φ folgt.

b) Beh: Es sind äquivalent
i) Φ ist surjektiv
ii) $X \cap Y = \emptyset$.

Beweis:

i) $\Longrightarrow$ ii)
Ist Φ surjektiv, so gibt es für jedes $(B_1, B_2) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ ein $C \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ mit:
$$(B_1, B_2) = \Phi(C) = (C \cap X, C \cap Y),$$
d.h. $B_1 = C \cap X$ und $B_2 = C \cap Y$
Insbesondere muß dies für $(X, \emptyset) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ gelten, d.h. es gibt $C \subseteq X \cup Y$ mit
(2) $C \cap X = X$ und (3) $C \cap Y = \emptyset$

Nach (2) ist $C \supseteq X$, also

$$\emptyset \subseteq X \cap Y \subseteq C \cap Y = \emptyset \qquad (4)$$

In der Inklusionskette (4) steht links und rechts dieselbe Menge (hier $\emptyset$), also muß jedes „$\subseteq$" sogar ein „$=$" sein, d.h. $X \cap Y = \emptyset$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Ist $X \cap Y = \emptyset$, $(D_1, D_2) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ dann ist $D_1 \cup D_2 \subseteq X \cup Y$ also

$$\Phi(D_1 \cup D_2) = ((D_1 \cup D_2) \cap X, (D_1 \cup D_2) \cap Y)$$

$$= ((D_1 \cap X) \cup (D_2 \cap X), (D_1 \cap Y) \cup (D_2 \cap Y))$$

$$\underset{\uparrow}{=} (D_1 \cup \emptyset, \emptyset \cup D_2) = (D_1, D_2)$$

$D_1 \in \mathcal{P}(X) \Longrightarrow D_1 \cap X = D_1$

$\emptyset \subseteq D_1 \cap Y \subseteq X \cap Y = \emptyset$

$D_2 \in \mathcal{P}(Y) \Longrightarrow D_2 \cap Y = D_2$

$\emptyset \subseteq D_2 \cap X \subseteq X \cap Y = \emptyset$

d.h. Φ ist surjektiv.

Aufgabe 3:

Vorbemerkung: Ist $f: X \longrightarrow Y$ eine Funktion, dann gilt immer (egal ob f injektiv/surjektiv ist oder nicht)

- sind $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$, dann ist
  $$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$
  denn wegen $A \cap B \subseteq A$ ist auch
  $$f(A \cap B) = \{f(x) : x \in A \cap B\} \subseteq \{f(x) : x \in A\} = f(A)$$
  und ebenso $f(A \cap B) \subseteq f(B)$. Insgesamt
  $$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$
- ist $A \subseteq X$, dann gilt $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, denn nach Definition des Urbildes ist
  $$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X : f(x) \in f(A)\}$$
  und da für jedes $x \in A$ dann auch $f(x) \in f(A)$ ist, folgt $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
- sind $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ mit $B \subseteq A$, gilt
  $$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B),$$ denn
  $$f(A) = f((A \setminus B) \cup B) = f(A \setminus B) \cup f(B)$$
  also ist $f(A) \setminus f(B) = (f(A \setminus B) \cup f(B)) \setminus f(B) \subseteq$

$$\subseteq \left(f(A\setminus B) \setminus f(B)\right) \cup \left(f(B) \setminus f(B)\right) \subseteq f(A \setminus B)$$

<u>Beh:</u> Es sind äquivalent:

a) f ist injektiv

b) Für jedes $y \in Y$ gilt:

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y \in Y \setminus f(X) \\ \{x\} & \text{falls } y = f(x) \in f(X) \end{cases}$$

c) Für jedes $A \subseteq X$ gilt: $f^{-1}(f(A)) = A$

d) Für $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ gilt: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

e) Für $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$

f) Für $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ mit $B \subseteq A$ gilt:

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

<u>Beweis:</u>

a) $\Longrightarrow$ b)

Ist f injektiv, $y = f(x) \in f(X)$

und $w \in X$ mit $f(w) = f(x)$ so gilt $w = x$ (denn f ist injektiv), also
$f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$.

b) $\Longrightarrow$ c) Ist $A \subseteq X$, dann ist nach Lemma 1.3.10

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}\Big(f\Big(\bigcup_{x \in A} \{x\}\Big)\Big) =$$
$$= \bigcup_{x \in A} f^{-1}(f(\{x\}))$$
$$\overset{b)}{=} \bigcup_{x \in A} \{x\} = A$$

c) $\Longrightarrow$ a) Ist $x \in X$, so folgt aus c) angewandt auf $A = \{x\}$:

$$f^{-1}(f(\{x\})) = \{y \in X : f(y) \in \{f(x)\}\} =$$
$$= \{y \in X : f(y) = f(x)\} = \{x\}$$

dh. für $y \in X$ mit $f(y) = f(x)$ folgt $x = y$ und daher ist f injektiv.

a) $\Longrightarrow$ d) Ist f injektiv, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ und $y \in f(A) \cap f(B)$, so gibt es $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ mit $f(x_1) = y = f(x_2)$. Da f injektiv ist, folgt daraus $x_1 = x_2$, d.h. es gilt also $x_1 = x_2 \in A \cap B$ also $y \in f(A \cap B)$. Das zeigt $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ für injektives f und nach Vorbemerkung folgt dann $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

d) $\Longrightarrow$ e) Sind $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ so ist nach Definition $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ und nach d) dann $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = \emptyset$.

e) $\Longrightarrow$ f) Sind $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ mit $B \subseteq A$, dann ist $A = (A \setminus B) \cup B$ mit $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ also ist nach Voraussetzung in e):

$$f(A \setminus B) \cap f(B) = \emptyset.$$

Da immer $f(A \setminus B) \subseteq f(A)$ gilt, folgt

$f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$
und die andere Inklusion ist laut Vorbemerkung immer erfüllt.

f) $\Longrightarrow$ a) Sind $x, w \in X$ mit $f(x) = f(w)$, dann gilt für $A := \{x, w\}$, $B := \{w\}$
$f(A) = \{f(x)\} = f(B)$.
Anwenden der Voraussetzung auf f gibt:
$\emptyset = f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$,
was sich nur mit $A \setminus B = \emptyset$ erfüllen läßt, d.h. für $w = x$. Dies zeigt, daß f injektiv ist.