Übungsblatt 1 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 99: (10 Punkte) Für $j \in \{1,2,3\}$ seien

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[,\ \varphi \in]0, 2\pi/3[\right\}, \\ M_2 &:= \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[,\ \varphi \in]2\pi/3, 4\pi/3[\cap \mathbb{Q} \right\}, \\ M_3 &:= \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[\cap \mathbb{Q},\ \varphi \in]4\pi/3, 2\pi[\right\}, \\ M &:= M_1 \cup M_2 \cup M_3. \end{aligned}$$

In der Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ bestimme den offenen Kern, den Rand und den Abschluß von M.

Aufgabe 100: (10 Punkte)

a) Beweise, dass die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ die kleinste (gröbste) Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, in welcher für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Halbachsen $]-\infty, \alpha[$ und $]\alpha, \infty[$ offen sind.

b) Finde die kleinste (gröbste) Topologie auf $\mathbb{R}$, in welcher alle zweielementige Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h. $\left\{ \{x, y\} : x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \right\}$, offen sind.

Aufgabe 101: (10 Punkte)

a) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ seien offen mit $U \cap V = \emptyset$. Zeige, daß $\overline{V} \cap U = \emptyset$ gilt.

b) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ seien offen mit $U \cap V = \emptyset$. Gilt auch $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$?

Aufgabe 102: (10 Punkte) Es seien X und Y Hausdorffräume, $A \subseteq X$, $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ stetig. Zeige: $\begin{aligned} h : X &\to Y \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ g(x) & \text{für } x \in x \in X \backslash A \end{cases} \end{aligned}$ ist auf der Menge

$$\mathring{A} \cup (X \backslash A)^\circ \cup \{x \in \partial A : f(x) = g(x)\}$$

stetig.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 25.10.23, 8.30 Uhr – vor der Übung.

Mathematisches Institut der Universität München 31.10.2023

Übungsblatt 2 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 103: (10 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{8}(1-2x)y - \frac{1}{8}y^2 - x = -\frac{1}{8} \\ \left(\frac{1}{16}(1-2x)^2 - 1\right)y + \frac{1}{4}(x-1)y = \frac{1}{16} \end{cases}$$

auf der Menge $M = [-1,1] \times [-1,1]$ genau eine Lösung besitzt, mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

ii) Von $(x,y) = (0,0)$ startend, wieviele Iterationen sind notwendig, um sicher zu sein, dass sich die Koordinaten der approximativen und tatsächlichen Lösung um weniger als 10^{-6} unterscheiden?

iii) Berechnen Sie die Approximation nach 2 Iterationschritten.

Hinweis: Verwenden der Maximumsnorm kann die Rechnungen vereinfachen.

Aufgabe 104: (10 Punkte) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2 + y^6 + x^{30}y^{210} + (xy)^{2310} & \text{, falls } x^2+y^2 \geq 4 \\ e^{-\frac{3}{4-x^2-y^2}} & \text{, falls } 1 \leq x^2+y^2 < 4 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^n}{n!} & \text{, falls } x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 105: (10 Punkte) $\mathbb{R}$ werde mit der Standardtopologie $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ versehen und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Ringhomomorphismus dh. $f(1) = 1, f(0) = 0$ und $f(w+z) = f(w) + f(z)$, $f(wz) = f(w)f(z)$ für alle $w, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ der einzige bezüglich $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ stetige Ringhomomorphismus auf $\mathbb{R}$ ist.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Donnerstag 02.11.23, 08:25 Uhr.

Übungsblatt 3 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 106: (10 Punkte) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, sodass

$$f(x_0) = \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Aufgabe 107: (10 Punkte) Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_n \subseteq X$. Für $n \in \mathbb{N}$, gelte:

a) $A_n \neq \emptyset$,

b) A_n abgeschlossen,

c) $A_{n+1} \subseteq A_n$,

d) $\delta(A_n) := \left\{ \begin{array}{ll} \sup\{d(x,y) : \; x, y \in A_n\}, & \text{falls } \{d(x,y) : \; x, y \in A_n\} \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, & \text{sonst,} \end{array} \right\}$

erfüllt $\delta(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Zeigen Sie, dass es ein $a \in X$ gibt mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Aufgabe 108: (10 Punkte) Ein topologischer Raum X ist *wegzusammenhängend*, falls für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Zeigen Sie:

i) Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend,

ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend,

iii) $\mathbb{R}^2$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 08.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Übungsblatt 4 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 109: (10 Punkte) Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung mit

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass T genau einen Fixpunkt $a \in X$ hat.
Gilt dieselbe Behauptung, falls (X, d) nicht kompakt ist?

Aufgabe 110: (10 Punkte) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und

$$C_0 := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}, \lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass jede $f \in C_0$ ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

Aufgabe 111: (10 Punkte) Sei X ein kompakter metrischer Raum. Sei $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von reellwertigen stetigen Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gleichmäßig auf X gegen f konvergiert.

Aufgabe 112: (10 Punkte) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen, $X \setminus U \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq K \subseteq X$ relativ kompakt in U. Zeigen Sie, dass $\operatorname{dist}(\overline{K}, X \setminus U) > 0$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 15.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Mathematisches Institut der Universität München 15.11.2023

Übungsblatt 5 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 113: (10 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ und $\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv sind.

ii) Wie definieren den *Arkussinus* bzw. *Arkuskosinus* als

$$\arcsin := \big(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\big)^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

bzw.

$$\arccos := \big(\cos|_{[0,\pi]}\big)^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Zeigen Sie, dass

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 114: (20 Punkte)

i) Betrachten Sie die *Riemannsche Zahlenkugel* $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}$, die

$$\mathcal{B}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}} := \{D(z, r) : z \in \mathbb{C}, r > 0\} \cup \{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(z, r)} : z \in \mathbb{C}, r > 0\}$$

als Basis hat. Zeigen Sie:

a) ∞ ist ein Berührungspunkt von $\mathbb{C}$,

b) $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}})$ ist kompakt,

c) $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat keinen Grenzewert in $\widehat{\mathbb{C}}$ für $z \to \infty$.

ii) Betrachten Sie die Einheitssphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ mit der Relativtopologie $\mathcal{O}_{S^2} := \{U \cap S^2 : U \in \mathcal{O}^{\mathrm{std}}_{\mathbb{R}^3}\}$. Wir definieren die *stereografische Projektion* als

$$\begin{aligned} P_N : S^2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} & \text{, für } x \in S^2 \setminus \{N\} \\ \infty & \text{, für } x = N \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei $N := (0, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass P_N ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass P_N Kreise in der Einheitssphäre, die den Punkt N nicht enthalten, auf Kreise in $\mathbb{C}$ abbildet.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 22.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Mathematisches Institut der Universität München 22.11.2023

Übungsblatt 6 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 115: (10 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$X := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} := \left\{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\,\exists I \subset \mathbb{N}, |I| < \infty : z_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus I)\right\}$$

mit der ℓ_∞-Norm

$$\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|.$$

Wir definieren

$$T : X \longrightarrow X, \qquad\qquad S : X \longrightarrow X.$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (z_n - z_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad\qquad (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(\sum_{k=n}^{\infty} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

i) Zeigen Sie, dass $T \in L(X, X)$ aber $S \notin L(X, X)$.

ii) Bestimmen Sie den Kern und die Operatornorm von T und S.

iii) Zeigen Sie, dass $S = T^{-1}$.

Aufgabe 116: (10 Punkte)

i) Seien I eine Indexmenge, $(X, \mathcal{A}), (Y_i, \mathcal{B}_i), i \in I$ Messräume und $f_i : X \to Y_i, i \in I$ Abbildungen. Bestimmen Sie die kleinste (bzgl. Inklusion) σ-Algebra auf X, sodass alle Abbildungen f_i $\mathcal{A} - \mathcal{B}_i$-messbar sind.

ii) Ist $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ eine σ-Algebra auf X für alle $I, (X, \mathcal{A}), (Y_i, \mathcal{B}_i), i \in I$?

Aufgabe 117: (10 Punkte) Gibt es eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbare Bijektion $f : X \to Y$ für alle Messräume $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ mit $|X| = |Y| =: n \in \mathbb{N}$ und $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| =: m \in \mathbb{N}$?

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 29.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Übungsblatt 7 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 118: (25 Punkte) Seien $X \neq \varnothing$ eine Menge und $\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \sigma(\mathcal{F})$ eine abzählbare Familie $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}$ gibt, sodass $A \in \sigma(\mathcal{F}_A)$.

Aufgabe 119: (25 Punkte) Seien $X \neq \varnothing$ eine Menge und $\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen eine Familie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *Algebra auf* X, falls:

a) $\varnothing, X \in \mathcal{G}$,

b) $X \setminus G \in \mathcal{G}$ für alle $G \in \mathcal{G}$,

c) $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G}$ für alle $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$.

Bezeichne $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ die kleinste (bzgl. Inklusion) Algebra auf X, die $\mathcal{F}$ enthält.
Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F}$ abzählbar, so ist $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ auch abzählbar.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 06.12.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Mathematisches Institut der Universität München 06.12.2023

Übungsblatt 8 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 120: (10 Punkte)

a) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{R}^n$ mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ versehen. $f_1 : X \to \mathbb{R}$ und $f_2 : X \to \mathbb{R}$ seien zwei messbare Abbildungen. Man zeige, dass dann auch $f := (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2$ messbar ist. Man zeige weiterhin, dass auch $f_1 + f_2 : X \to \mathbb{R}$ und $f_1 \cdot f_2 : X \to \mathbb{R}$ messbare Abbildungen sind.

b) Man gebe ein Beispiel einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{R}$ sowie messbaren Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass $f_1 + f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht messbar ist.

Aufgabe 121: (10 Punkte) Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ hausdorffsche topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so dass die Menge

$$U(f) := \{x \in X : f \text{ ist nicht stetig in } x\}$$

eine abzählbare Menge ist. Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist.

Aufgabe 122: (10 Punkte) Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : I \to J$ Borel-messbar ist.

Aufgabe 123: (10 Punkte) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_1) < \infty, ..., \mu(A_n) < \infty$. Man zeige, dass dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n} \mu\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{j_l}\right) .$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 13.12.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Übungsblatt 9 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 124: (10 Punkte) Es sei $\alpha > 0$.

a) Zeigen Sie, dass durch die Bedingung

$$\mu(\{k\}) := \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-\frac{k}{\alpha}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ definiert wird und zwar

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-\frac{k}{\alpha}} \delta_k$$

mit den Diracmaßen δ_k in den Punkten $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Betrachten Sie die nichtnegative $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$-Stufenfunktionen

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{N}_0 & \to & [0, \infty[\\ k & \mapsto & \begin{cases} e^{\frac{k}{\alpha}} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{N}_0 & \to & [0, \infty[\\ k & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{k}{\alpha}} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases} \end{array}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{N}_0} f_n \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{N}_0} g_n \, d\mu.$$

c) Betrachten Sie die positive Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}_0 & \to &]0, \infty[\\ k & \mapsto & e^{\frac{k}{\alpha}} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{N}_0 & \to &]0, \infty[\\ k & \mapsto & e^{-\frac{k}{\alpha}} \end{array}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{N}_0} f \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{N}_0} g \, d\mu.$$

Aufgabe 125: (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $y \geq 0$ die Folge $\left(\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

b) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty[$ $\mathcal{A}-$meßbar. Berechnen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \int_X n \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu.$$

Aufgabe 126: (10 Punkte)

a) Es sei $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{A}-$meßbar. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0, \infty] \\ A & \mapsto & \int_X f \mathbf{1}_A \, d\nu \end{array}$$

ein Maß definiert.

b) Es sei nun konkret $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ und ν das Zählmaß. Für

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow [0, \infty] \\ n &\longmapsto e^{-|n|} \end{aligned}$$

sei μ das in a) definierte Maß. Berechnen Sie für

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\longrightarrow [0, \infty] \\ n &\longmapsto \frac{|n|}{2} \end{aligned}$$

das Integral $\int\limits_{\mathbb{Z}} g \, d\mu$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 20.12.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Übungsblatt 10 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 127: (10 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b, \lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktionenfolgen $(g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$\begin{aligned} g(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \end{cases}, \\ g_n(x) &:= g(nx), \\ h_n(x) &:= g_n(x-a) \cdot g_n(b-x) \end{aligned}$$

definiert werden. Zeigen Sie, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen ist und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \, d\lambda$.

Aufgabe 128: (15 Punkte) Betrachten Sie das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu := \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-\frac{k}{\alpha}} \delta_k$$

auf $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$.

a) Sei $f : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty[$ eine nicht-negative Funktion. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{\mathbb{N}_0} f \, d\mu = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-\frac{k}{\alpha}}.$$

b) Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Wann ist g μ-integrierbar? Falls g μ-integrierbar ist, zeigen Sie, dass dann ebenfalls gilt:

$$\int_{\mathbb{N}_0} g \, d\mu = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} g(k) e^{-\frac{k}{\alpha}}.$$

c) Sei

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}_0 &\longrightarrow]0, \infty[\\ n &\longmapsto \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Integral $\int_{\mathbb{N}_0} h \, d\mu$ konvergiert, und berechnen Sie dessen Wert.

Aufgabe 129: (15 Punkte) Es sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\cos(x)}\, d\lambda(x)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \frac{ne^{x^2}}{1+n^{\frac{3}{2}}}\, d\lambda(x)$.

Frohe Weihnachten und ein schönes Neues Jahr!

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 10.01.24, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Übungsblatt 11 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 130: (15 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$l^2(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

versehen mit

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{l^2(\mathbb{N})} : l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n \end{array}$$

einen separablen Hilbertraum bildet.

Aufgabe 131: (15 Punkte) Es sei $\widetilde{\lambda}$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ x & \longmapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(x^2+1)}} \right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

$\widetilde{\lambda}$−integrierbar ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-N}^{N} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(N) - \arctan(-N).$$

b) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f d\widetilde{\lambda}$.

Hinweis: Definieren Sie die Folge

$$\left(\begin{array}{rcl} h_m : \mathbb{R} & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ x & \longmapsto & g_m(x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}, 0, ... \right) \end{array} \right)_{m\in\mathbb{N}},$$

wobei $(g_m : \mathbb{R} \to [0,\infty[)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$-Stufenfunktionen mit $0 \le g_m(x) \nearrow \frac{1}{1+x^2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 132: (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 14 \end{array}$$

und zeigen Sie, dass sie sich im Punkt $a := (1,2,3)$ berühren.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 17.01.24, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Mathematisches Institut der Universität München 17.01.2024

Übungsblatt 12 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 133: (10 Punkte) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, X ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $U \subseteq X$ offen, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{K}$ und $g : U \to \mathbb{K}$ stetige Abbildungen, die in a differenzierbar mit $g(a) \neq 0$ sind. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

auf der offenen Menge $V := g^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ wohldefiniert und in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

ist.

Aufgabe 134: (15 Punkte) Berechnen Sie folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_c^d \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < c < d < b$,

ii) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$,

iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\,dx$.

Aufgabe 135: (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (2x - x^2)e^{-x}. \end{aligned}$$

i) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_0^n |f(x)|\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^\infty |f(x)|\,dx < \infty$.

ii) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 24.01.24, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Übungsblatt 13 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 136: (10 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,\infty[&\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto \sin(e^{-x}) \end{aligned}$$

integrierbar auf $[0,\infty[$ ist.

Aufgabe 137: (10 Punkte) Es sei $A \in M_d(\mathbb{C})$, $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{C}^d$.

a) Zeigen Sie, dass $\begin{array}{rcl} \lambda : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^d \\ t & \mapsto & e^{i(t-\tau)A}\xi \end{array}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = iAy, y(\tau) = \xi$ ist, dh. dass λ differenzierbar ist, $\lambda'(t) = iA\lambda(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda(\tau) = \xi$ erfüllt sind.

b) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\tau = 1$ und $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ explizit diese Lösung.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 89 verwenden.

Aufgabe 138: (10 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ die Funktion

$$\begin{aligned} f_\alpha :]0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{-\alpha x}\frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)} \end{aligned}$$

bezüglich des Borel-Lebesguemaßes λ integrierbar ist und dass die Funktion

$$\begin{aligned} F :]0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha x}\frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)}\, d\lambda(x) \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 139: (10 Punkte) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$\begin{aligned} f :]-1,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

um $x_0 = 0$. Für welche $x \in]-1,\infty[$ konvergiert diese Reihe?

Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung von f.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 31.01.24, 08:25 Uhr – vor der Übung.

Übungsblatt 14 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 140: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Entscheiden Sie, ob die Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow 0} x^x \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}$$

existieren, und berechnen Sie alle Grenzwerte, die existieren.

Aufgabe 141: Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^6+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

a) in $(0,0)$ nicht stetig ist,

b) in $(0,0)$ die Ableitungen von f in Richtung $(1,0)$ und $(0,1)$ existieren,

c) es Richtungen $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gibt, sodass f in $(0,0)$ keine Richtungsableitung in Richtung (v_1, v_2) besitzt,

d) f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 142: Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : D^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} e^{x_1^2+x_2^2} \\ \ln(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ 4\cos^3(x_1 + 2x_2) - 3\cos(x_1 + 2x_2), \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass f stetig partiell-differenzierbar auf D^2 ist.

b) Berechnen Sie für alle $a \in D^2$ die Jacobimatrix und die Ableitung von f in a.