https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

# Blatt 03: Vektorprodukt, Raumkurven, Linienintegrale

Ausgabe: Mo 28.10.24 Zentralübung: 31.10.24 Abgabe: Do 07.11.24, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 3, 6, 7, 4.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (L4.3.1), 8 (V1.4.1).

**Beispielaufgabe 1: $1/(1-x^2)$-Integrale mittels hyperbolischer Substitution [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Für Integrale, die $1/(1-x^2)$ enthalten, empfiehlt sich die hyperbolische Substitution $x = \tanh y$, denn dadurch erhält man $1 - x^2 = \mathrm{sech}^2\, y$. Berechnen Sie mittels dieser Substitution folgende Integrale $I(z)$; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.
$\big[$Kontrollergebnis: (a) $I\left(\frac{3}{5}\right) = \ln 2$; (b) für $a = 3$, $I\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}\ln 2 + \frac{5}{32}$.$\big]$

(a) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x\, \frac{1}{1-x^2} \quad (|z|<1)$, (b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x\, \frac{1}{(1-a^2x^2)^2} \quad (|az|<1)$.

*Hinweis:* Das in (b) nach der Substitution auftretende $\cosh^2 y$-Integral lässt sich partiell integrieren.

**Beispielaufgabe 2: Elementare Vektorrechnung [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = (4,3,1)^T$ und $\mathbf{b} = (1,-1,1)^T$.

(a) Berechnen Sie $\|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

(b) Zerlegen Sie $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp$ in zwei Vektoren parallel und senkrecht zu $\mathbf{b}$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{a}_\parallel\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_\perp\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_\parallel\times\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}_\perp\times\mathbf{b}$. Entsprechen die Ergebnisse der Erwartung?

[Ergebniskontrolle: (a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \sum_i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^i = -4$, (b) $\sum_i(\mathbf{a}_\parallel)^i = \frac{2}{3}$, $\sum_i(\mathbf{a}_\perp)^i = 7\frac{1}{3}$.]

**Beispielaufgabe 3: Levi-Civita-Symbol [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E).

(a) Ist die Aussage $a^i b^j \epsilon_{ij2} \stackrel{?}{=} -a^k \epsilon_{k2l} b^l$ wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Drücken Sie die folgenden $k$-Summen über Produkte von zwei Levi-Civita-Symbolen durch Kronecker-delta-Symbole aus. Überprüfen Sie ihre Ergebnisse, indem Sie die $k$-Summen explizit ausführen und jeden Term separat auswerten.

(b) $\epsilon_{1ik}\epsilon_{kj1}$, (c) $\epsilon_{1ik}\epsilon_{kj2}$.

**Beispielaufgabe 4: Grassmann-Identität (BAC-CAB) und Jacobi-Identität [5]**
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](E); (c)[2](M)

(a) Beweisen Sie die Grassmann (oder 'BAC-CAB') Identität für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,.$$

*Hinweis:* Entwickeln Sie die drei Vektoren in einer Orthonormalbasis, z.B. $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i a^i$, und nutzen Sie die Eigenschaft $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ des Levi-Civita-Symbols. Sie können auch alle Indizes unten schreiben, z.B. $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i a_i$, da in einer Orthonormalbasis $a_i = a^i$ gilt.

(b) Beweisen Sie mittels der Grassmann-Identität die Jacobi-Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

(c) Überprüfen Sie beide Identitäten explizit für $\mathbf{a} = (1,1,2)^T$, $\mathbf{b} = (3,2,0)^T$, $\mathbf{c} = (2,1,1)^T$, indem Sie alle in ihnen vorkommenden Terme separat berechnen.

test

| $\epsilon_{111}$ | $\epsilon_{112}$ | $\epsilon_{113}$ | $\epsilon_{121}$ | $\epsilon_{122}$ | $\epsilon_{123}$ | $\epsilon_{131}$ | $\epsilon_{132}$ | $\epsilon_{133}$ | $\epsilon_{211}$ | $\epsilon_{212}$ | $\epsilon_{213}$ | $\epsilon_{221}$ | $\epsilon_{222}$ | $\epsilon_{223}$ | $\epsilon_{231}$ | $\epsilon_{232}$ | $\epsilon_{233}$ | $\epsilon_{311}$ | $\epsilon_{312}$ | $\epsilon_{313}$ | $\epsilon_{321}$ | $\epsilon_{322}$ | $\epsilon_{323}$ | $\epsilon_{331}$ | $\epsilon_{332}$ | $\epsilon_{333}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Beispielaufgabe 5: Spatprodukt [2]**
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](E); (c)[0.5](E)

Diese Aufgabe illustriert einen wichtigen Bezug zwischen dem Spatprodukt und der Frage, ob drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind oder nicht.

(a) Berechnen Sie das Spatprodukt, $S(y) = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$, von $\mathbf{v}_1 = (1,0,2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (3,2,1)^T$ und $\mathbf{v}_3 = (-1,-2,y)^T$ als Funktion der Variablen $y$. $\big[$Kontrollergebnis: $S(1) = -4\ \big]$.

(b) Finden Sie durch Lösen der Vektorgleichung $\mathbf{v}_i a^i = \mathbf{0}$ denjenigen Wert von $y$ für den $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ *nicht* linear unabhängig sind.

(c) Welchen Wert hat $S(y)$ für den in (b) gefundenen Wert von $y$? Interpretieren Sie das Ergebnis!

**Beispielaufgabe 6: Geschwindigkeit und Beschleunigung [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](E)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t)\,|\,t \in (0, 2\pi/\omega)\}$, $\mathbf{r}(t) = (aC(t), S(t))^T \in \mathbb{R}^2$, mit $C(t) = \cos\left[\pi\left(1 - \cos\omega t\right)\right]$, $S(t) = \sin\left[\pi\left(1 - \cos\omega t\right)\right]$, und $0 < a, \omega \in \mathbb{R}$.

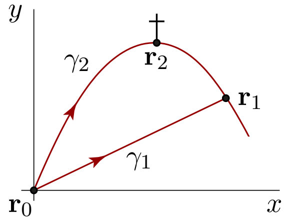
(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor, $\dot{\mathbf{r}}(t)$, und den Beschleunigungsvektor, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. Lässt sich $\mathbf{r}(t)$ durch $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ ausdrücken?

(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter $t$ durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $a = 2$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$. Für welchen Wert von $a$ gilt $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ für alle $t$?

**Beispielaufgabe 7: Linienintegral: Bergwanderung [3]**
Punkte: [3](M)

Zwei Wanderer wollen vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0,\, 0)^T$ im Tal zu einer Berghütte am Punkt $\mathbf{r}_1 = (3,\, 3a)^T$ wandern. Wanderer 1 wählt den geraden Weg zwischen Tal und Hütte, $\gamma_1$. Wanderer 2 wählt einen parabolischen Weg, $\gamma_2$, über den Gipfel bei $\mathbf{r}_2 = (2,\, 4a)^T$, dem Scheitel der Parabel (vgl. Skizze). Auf sie wirkt die Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -10\,\mathbf{e}_y$, sowie eine höhenabhängige Windkraft, $\mathbf{F}_w = -y^2\,\mathbf{e}_x$.




Finden Sie die von den Wanderern entlang $\gamma_1$ und $\gamma_2$ verrichtete Arbeit, $W[\gamma_i] = -\int_{\gamma_i} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$, als Funktion des Parameters $a$. $\big[$Kontrollergebnisse: für $a = 1$ gilt $W[\gamma_1] = 39$, $W[\gamma_2] = 303/5.\big]$

---

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 22]

---

**Hausaufgabe 1: $1/(1+x^2)$-Integrale mittels trigonometrischer Substitution [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Für Integrale, die $1/(1+x^2)$ enthalten, empfiehlt sich die trigonometrische Substitution $x = \tan y$, denn dadurch erhält man $1 + x^2 = \sec^2 y$. Berechnen Sie mittels dieser Substitution folgende Integrale $I(z)$; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.
$\big[$Kontrollergebnis: (a) $I(1) = \frac{\pi}{4}$; (b) für $a = \frac{1}{2}$, $I(2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.\big]$

(a) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x\, \frac{1}{1+x^2}$ (b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x\, \frac{1}{(1+a^2x^2)^2}$.

**Hausaufgabe 2: Elementare Vektorrechnung [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Seien die Vektoren $\mathbf{a} = (2, 1, 5)^T$ und $\mathbf{b} = (-4, 3, 0)^T$ gegeben.

(a) Berechnen Sie $\|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(b) Zerlegen Sie $\mathbf{a}$ in einen Vektor $\mathbf{a}_{\|}$ parallel zu $\mathbf{b}$ and einen Vektor $\mathbf{a}_{\perp}$ senkrecht zu $\mathbf{b}$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{a}_{\|} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a}_{\|} \times \mathbf{b}$ und $\mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{b}$. Entsprechen die Ergebnisse ihren Erwartungen?

[Ergebniskontrolle: (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \sum_i (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = -30$, (b) $\sum_i (\mathbf{a}_{\|})^i = \frac{1}{5}$, $\sum_i (\mathbf{a}_{\perp})^i = 7\frac{4}{5}$.]

**Hausaufgabe 3: Levi-Civita-Symbol [2]**
Punkte: (a)[0,5](E); (b)[0,5](E); (c)[0,5](E); (d)[0,5](E).

(a) Ist die Aussage $a^i a^j \epsilon_{ij3} \overset{?}{=} b^m b^n \epsilon_{mn2}$ wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Drücken Sie die folgenden $k$-Summen über Produkte von zwei Levi-Civita-Symbole durch Kronecker-delta-Funktionen aus:

(b) $\epsilon_{1ik}\epsilon_{23k}$, (c) $\epsilon_{2jk}\epsilon_{ki2}$, (d) $\epsilon_{1ik}\epsilon_{k3j}$.

**Hausaufgabe 4: Lagrange-Identität [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

(a) Beweisen Sie die Lagrange-Identität für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \, .$$

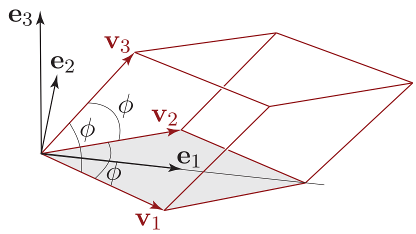
*Hinweis:* Nutzen Sie das Levi-Civita-Symbol!

(b) Berechnen Sie [mittels (a)] den Betrag $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ und drücken Sie das Ergebnis aus durch $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ und den Winkel $\phi$, den die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ einschliessen.

(c) Überprüfen Sie die Lagrange-Identität explizit für $\mathbf{a} = (2, 1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (3, -1, 2)^T$, $\mathbf{c} = (3, 0, 2)^T$, $\mathbf{d} = (1, 3, -2)^T$, indem Sie alle Terme darin separat berechnen.

**Hausaufgabe 5: Spatprodukt [3]**
Punkte: [3](M)

Berechnen Sie das Volumen $V(\phi)$ eines Parallelepipeds, das durch drei Einheitsvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ aufgespannt wird, die paarweise jeweils den Winkel $\phi$ einschließen (mit $0 \leq \phi \leq \frac{2}{3}\pi$; warum ist diese Einschränkung nötig?).
Kontrollergebnisse: (i) Was erwarten Sie für $V(\frac{\pi}{2})$ bzw. $V(\frac{2}{3}\pi)$? (ii): $V(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.




*Hinweis:* Wählen Sie die Orientierung des Parallelepipeds so, dass $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ beide in der durch $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ aufgespannten Ebene liegen und $\mathbf{e}_1$ den Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ halbiert (siehe Skizze).

**Hausaufgabe 6: Kurvengeschwindigkeit und Beschleunigung [2]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \,|\, t \in (0, \infty)\}$, $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^{-t^2}, a\mathrm{e}^{t^2})^T \in \mathbb{R}^2$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$ ($0 < a < 1$ für (c)).

(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor, $\dot{\mathbf{r}}(t)$, und den Beschleunigungsvektor, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. Lässt sich $\mathbf{r}(t)$ als Linearkombination von $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ ausdrücken?

(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter $t$ durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $a = 2$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$. Finden Sie die Zeit, $t(a)$, bei der $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ gilt? [Kontrollergebnis: $t(\mathrm{e}^{-2}) = \pm 1$.

**Hausaufgabe 7: Linienintegrale in kartesischen Koordinaten [4]**
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](E); (c)[1](M)

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2, z, y)^T$ ein dreidimensionales Vektorfeld in kartesischen Koordinaten, mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ entlang folgender Wege von $\mathbf{r}_0 \equiv (0, 0, 0)^T$ nach $\mathbf{r}_1 \equiv (0, -2, 1)^T$:

(a) $\gamma_a = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ist der zusammengesetzte Weg aus $\gamma_1$, der geraden Linie von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_2 \equiv (1, 1, 1)^T$, und $\gamma_2$, der geraden Linie von $\mathbf{r}_2$ nach $\mathbf{r}_1$.

(b) $\gamma_b$ ist parametrisiert durch $\mathbf{r}(t) = (\sin(\pi t), -2t^{1/2}, t^2)^T$, mit $0 < t < 1$.

(c) $\gamma_c$ ist eine in der $yz$-Ebene liegende Parabel der Form $z(y) = y^2 + \frac{3}{2}y$.

[Ergebniskontrolle: die Summe der Antworten aus (a), (b) und (c) ist $-6$.]

---

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 20]

---