Lösungsskizzen zu Übungsblatt 1 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 99:

- Wir werden zeigen, dass $\overset{\circ}{M} = M_1$.
  - Seien $z \in M_1 \subset M$ und $r = \min\{\mathrm{Im}(z), \mathrm{Im}(ze^{i\pi/3}), |z|, 1-|z|\} > 0$. Dann gilt $D(z,r) := \{w \in \mathbb{C} : |w-z| < r\} \subseteq M_1 \subset M$, was $M_1 \subseteq \overset{\circ}{M}$ zeigt.
  - Seien $z = re^{i\varphi} \in M \setminus M_1 = M_2 \cup M^3$ mit $r \in]0,1[$, $\varphi \in]2\pi/3, 2\pi[$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} := (r_n e^{i\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{cases} r_n \in]0,1[\setminus \mathbb{Q} & \text{, für alle } n \in \mathbb{N}, \\ r_n \xrightarrow{n\to\infty} r & , \\ \varphi_n \in]2\pi/3, 2\pi[\setminus \mathbb{Q} & \text{, für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi & . \end{cases}$$

  Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $z_n \in D(z,\epsilon) \setminus (M_2 \cup M_3)$ für alle $n \geq N$, wobei $D(z,\epsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \epsilon\}$. Dies zeigt, dass $M \setminus M_1 \subseteq M \setminus \overset{\circ}{M} \iff M_1 \supseteq \overset{\circ}{M}$.

- Wir werden zeigen, dass $\overline{M} = \overline{D(1,0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
  - Für alle $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in [0,1]$ und $\varphi \in [0,2\pi]$ gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} := (r_n e^{i\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{cases} r_n \in]0,1[\cap \mathbb{Q} & \text{, für alle } n \in \mathbb{N}, \\ r_n \xrightarrow{n\to\infty} r & , \\ \varphi_n \in]0, 2\pi[\cap \mathbb{Q} & \text{, für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi & . \end{cases}$$

  Dies zeigt, dass $\overline{D(0,1)} \subseteq \overline{M}$.
  - Seien $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ und $r := |z| - 1 > 0$. Dann gilt $D(z,r) \cap M = \varnothing$, was $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{M}$. Insgesamt erhalten wir $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)} \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{M} \iff \overline{D(0,1)} \supseteq \overline{M}$.

- Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial M &:= \overline{M} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus M} = \overline{M} \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{M}\right) = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M} = \overline{D(0,1)} \setminus M_1 \\ &= \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in [0,1],\ \varphi \in [2\pi/3, 2\pi]\} \cup \{e^{i\varphi} : \varphi \in]0, 2\pi/3[\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 100:

a) Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$, die $]-\infty, \alpha[$ und $]\alpha, \infty[$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ enthält. Dann enthält $\mathcal{O}$ auch

$$]\alpha, \beta[=]\alpha, \infty[\cap]-\infty, \beta[$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha < \beta$. Somit enthält $\mathcal{O}$

$$]x, y[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]x_n, y_n[$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{cases} x_n > x & \text{, für alle } n \in \mathbb{N}, \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} x, & \\ y_n < y & \text{, für alle } n \in \mathbb{N}, \\ y_n \xrightarrow{n\to\infty} y. & \end{cases}$$

Dies zeigt, dass $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{\text{std}} \subseteq \mathcal{O}$.

b) Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$, die $\{x, y\}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ enthält. Dann enthält $\mathcal{O}$ auch

$$\{x\} = \{x, y\} \cap \{x, z\},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y \neq z \neq x$. Somit enthält $\mathcal{O}$

$$M = \bigcup_{x\in M} \{x\}$$

für alle $M \subseteq \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{O}$, woraus folgt, dass $\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, weil jede Topologie auf $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 101:

a) Angenommen $\overline{V} \cap U \neq \varnothing$. Dann gibt es $x_0 \in \overline{V} \cap U$ aber

$$\overline{V} := \{x \in X \,:\, V \cap W \neq \varnothing \text{ für jede Umgebung } W \text{ von } x\}$$

und U ist eine Umgebung von x_0, woraus folgt dass $U \cap V \neq \varnothing$, was die Annahme $U \cap V = \varnothing$ widerspricht.

b) Nein, wir können z.B. $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{\text{std}})$, $U =]-1, 0[$ und $V =]0, 1[$ wählen. Dann gilt $U, V \in \mathcal{O}_X$ mit $U \cap V = \varnothing$ aber $\overline{U} \cap \overline{V} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\} \neq \varnothing$.

Aufgabe 102:

- Es sei $x \in \mathring{A}$ und U eine Umgebung von $h(x) = f(x)$, dann gilt

  $$h^{-1}(U) \supseteq h^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(U) \cap A,$$

  da $h|_A = f|_A$ ist. Weil f in x stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x und weil $x \in \mathring{A}$ innerer Punkt von A ist, ist auch A eine Umgebung von x. Somit ist $h^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(U) \cap A$ eine Umgebung von x, weshalb h in jedem $x \in \mathring{A}$ stetig ist.

- Es sei $x \in (X \backslash A)^\circ$ und U eine Umgebung von $h(x) = g(x)$, dann gilt

  $$h^{-1}(U) \supseteq h^{-1}(U) \cap (X \backslash A) = g^{-1}(U) \cap (X \backslash A),$$

  da $h|_{X\backslash A} = g|_{X\backslash A}$ ist. Weil g in x stetig ist, ist $g^{-1}(U)$ eine Umgebung von x und weil $x \in (X \backslash A)^\circ$ innerer Punkt von $X \backslash A$ ist, ist auch $X \backslash A$ eine Umgebung von x. Somit ist $h^{-1}(U) \supseteq g^{-1}(U) \cap (X \backslash A)$ eine Umgebung von x, weshalb h in jedem $x \in (X \backslash A)^\circ$ stetig ist.

- Es sei $x \in \{a \in \partial A : f(a) = g(a)\}$ und U eine Umgebung von $h(x) = g(x) = f(x)$, so gilt wegen $f|_A = h|_A$ und $g|_{X\setminus A} = h|_{X\setminus A}$:

  $$\begin{aligned} h^{-1}(U) = (h^{-1}(U) \cap A) \cup (h^{-1}(U) \cap (X\setminus A)) &= (f^{-1}(U) \cap A) \cup (g^{-1}(U) \cap (X\setminus A)) \\ \supseteq \quad (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U) \cap (X\setminus A)) &= f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U) \end{aligned}$$

  Da f und g in x stetig sind, sind $f^{-1}(U)$ und $g^{-1}(U)$ Umgebungen von x, also ist auch $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U)$ Umgebung von x, daher $h^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U)$ eine Umgebung von x, also ist h in jedem $x \in \{x \in \partial A : f(x) = g(x)\}$ stetig.

Aufgabe 103:

a) Jede Lösung von

$$\frac{1}{8}(1-2x)y - \frac{1}{8}y^2 - x = -\frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{16}(1-2x)^2 - 1\right)y + \frac{1}{4}(x-1)y = \frac{1}{16}$$

ist Lösung von

$$\frac{1}{8}(1-2x)y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8} = x$$

$$\frac{1}{16}(1-2x)^2 y + \frac{1}{4}(x-1)y - \frac{1}{16} = \frac{1-4x+4x^2}{16}y + \frac{1}{4}xy - \frac{y}{4} - \frac{1}{16} =$$

$$= -\frac{3}{16}y + \frac{1}{4}x^2y - \frac{1}{16} = y$$

und umgekehrt.

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1-2x)y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x^2y - \frac{3}{16}y - \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Für $x, y \in [-1,1]$ ist

$$\left|\frac{1}{8}(1-2x)y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\right| \leq \frac{1}{8}|1-2x||y| + \frac{1}{8}|y|^2 + \frac{1}{8} \leq$$

$$\leq \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} < 1$$

$$\left|\frac{1}{4}x^2y - \frac{3}{16}y - \frac{1}{16}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} < 1$$

also $F([-1,1]^2) \subseteq [-1,1]^2$

und damit $T: [-1,1]^2 \longrightarrow [-1,1]^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1-2x)y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x^2 y - \frac{3}{16}y - \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

wohldefiniert.

Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [-1,1]^2$ ist

$$\left| \frac{1}{8}(1-2x_1)y_1 - \frac{1}{8}y_1^2 - \left(\frac{1}{8}(1-2x_2)y_2 - \frac{1}{8}y_2^2 \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{8}(y_1 - y_2) + \frac{1}{4}x_2(y_2 - y_1) + \frac{1}{4}y_1(x_2 - x_1) + \frac{1}{8}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) \right|$$

$$\leq \frac{1}{8}|y_1 - y_2| + \frac{1}{4}|y_2 - y_1| + \frac{1}{4}|x_2 - x_1| + \frac{1}{4}|y_2 - y_1|$$

$$\leq \frac{7}{8} \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$\left| \frac{1}{4}x_1^2 y_1 - \frac{3}{16}y_1 - \left(\frac{1}{4}x_2^2 y_2 - \frac{3}{16}y_2 \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{3}{16}(y_2 - y_1) + \frac{1}{4}x_1^2(y_1 - y_2) + \frac{1}{4}y_2(x_1^2 - x_2^2) \right|$$

$$\leq \frac{3}{16}|y_2 - y_1| + \frac{1}{4}|y_1 - y_2| + \frac{1}{4}|x_1 - x_2||x_1 + x_2|$$

$$\leq \frac{15}{16} \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

weshalb für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [-1,1]^2$ folgt:

$$\| T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2) \|_\infty \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right\} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty = \frac{15}{16} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty$$

also ist T bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ eine Kontraktion.
$[-1,1]^2$ ist als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raums $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig, deshalb hat T nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt.

b) Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in [-1,1]^2$ Fixpunkt von T, dann ist

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} \end{pmatrix}, \quad \text{also } \left\| T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{1}{8}\right|, \left|-\frac{1}{16}\right|\right\} = \frac{1}{8}$$

also $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{8}$ und für die Approximationen

$\vec{x}_n := T(\vec{x}_{n-1})$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt dann

$$\|\vec{a} - \vec{x}_n\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{15}{16}\right)^n}{1 - \frac{15}{16}} \|\vec{x}_0 - \vec{x}_1\|_\infty = 16 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^n \cdot \frac{1}{8}$$

Damit $\|\vec{a} - \vec{x}_n\|_\infty < 10^{-6}$ ist, ist

$$\left(\frac{15}{16}\right)^n < 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{oder} \quad n \ln\left(\frac{15}{16}\right) < \ln(2 \cdot 10^{-6})$$

$$n > \frac{\ln(2 \cdot 10^{-6})}{\ln\left(\frac{15}{16}\right)} \text{ zu wählen}$$

c) Ausgehend von $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist

$$T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{16}\end{pmatrix} =: \vec{x}_1$$

die erste Approximation

$$T(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix}\frac{1}{8}\left(1-\frac{2}{8}\right)\left(-\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8^2}\left(-\frac{1}{16}\right) - \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}\end{pmatrix} =: \vec{x}_2$$

die zweite Approximation

Aufgabe 104:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2+y^6+x^{30}y^{210}+(xy)^{2310} & \text{für } x^2+y^2 \geq 4 \\ e^{-\frac{3}{4-x^2-y^2}} & \text{für } 1 \leq x^2+y^2 < 4 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^n}{n!} & \text{für } x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-(x^2+y^2))^n}{n!} = e^{-(x^2+y^2)}$$

- Da $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (konvergente Potenzreihe) und $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto -x^2-y^2$ (Polynom) stetig sind ist auch $\exp \circ g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und damit auch $f|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}} = (\exp \circ g)|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}}$ stetig.

- Für $1 \leq x^2+y^2 < 4$ ist $0 < 4-x^2-y^2 \leq 3$ also

$$h: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 < 4\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto -\frac{3}{4-x^2-y^2}$$

Quotient von Polynomen mit nullstellenfreiem Nenner. Für $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 < 4\}$ und jede Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 < 4\}$ mit $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$ ist $4-x_n^2-y_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 4-x^2-y^2 \neq 0$ (wegen Stetigkeit des Polynoms $4-x^2-y^2$) und

$$h(x_n, y_n) = -\frac{3}{4-x_n^2-y_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{3}{4-x^2-y^2} = h(x,y)$$

(wegen Regel für Quotienten konvergenter Folgen)

also ist h stetig. Damit ist

$$f|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 < 4\}} = \exp \circ h$$

stetig. Als Einschränkung eines Polynoms ist

$f|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 4\}}$ stetig.

Nach Aufgabe 102 ist f auf

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}^\circ \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 < 4\}^\circ \cup$$

$$\cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 4\}^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \in \{1,4\}\}$$

stetig.

• Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2=1$ ist

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-1} = e^{-\frac{3}{4-x^2-y^2}}$$

also ist f laut Aufgabe 102 auch stetig in jedem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2=1$.

• Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2<4$ ist $4-x^2-y^2>0$ also

$4-x^2-y^2 \xrightarrow[x^2+y^2\to 4]{} 0$. Da $\exp|_{\mathbb{R}}(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$

und $-\frac{3}{4-x^2-y^2} \xrightarrow[x^2+y^2\to 4]{} -\infty$

(denn für $(x_n,y_n) \in \mathbb{R}^2$, $x_n^2+y_n^2<4$ mit $x_n^2+y_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$ ist

$$d\left(-\infty, -\frac{3}{4-x_n^2-y_n^2}\right) = \left| -1 - \frac{-\frac{3}{4-x_n^2-y_n^2}}{1+\left|-\frac{3}{4-x_n^2-y_n^2}\right|} \right|$$

$$= \frac{\left| -1 - \frac{3}{4-x_n^2-y_n^2} + \frac{3}{4-x_n^2-y_n^2} \right|}{1+\frac{3}{4-x_n^2-y_n^2}} = \frac{4-x_n^2-y_n^2}{7-x_n^2-y_n^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0}{3} = 0 \Big)$$ ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2=4$

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(x,y)\\ u^2+v^2<4}} f(u,v) = 0 \neq f(x,y) = x^2+y^6+x^{30}y^{210}+(xy)^{2310}$$

also f da nicht stetig.

Aufgabe 105:

$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$, wobei $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ die von $|\cdot|$ erzeugte Topologie ist.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetiger Ringhomomorphismus

Beh: $f = id_{\mathbb{R}}$

Beweis:

- Wegen $f(0)=0$, $f(1)=1$ und $f(w+z)=f(w)+f(z)$ für alle $w,z \in \mathbb{R}$ folgt:

(1) $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang $n=0$: $f(0)=0$

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$f(n+1) = f(n) + f(1) \overset{(IV)}{=} n+1$$

(2) $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$,

denn ist $n \in \mathbb{N}_0$, so ist

$$0 = f(0) = f(n+(-n)) = f(n) + f(-n) \overset{(1)}{=} n + f(-n)$$

also $f(-n) = -n$

und daher $f(z)=z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.

(3) $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

denn $1 = f(1) = f\left(z \cdot \frac{1}{z}\right) = f(z) \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) \overset{(2)}{=} z \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)$ für alle $z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

also $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

(4) $f(q) = q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$

denn schreibe $q = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

so ist

$$f(q) = f\left(\frac{z}{n}\right) = f\left(z \cdot \frac{1}{n}\right) = f(z) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} z \cdot \frac{1}{n} = q \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Q}.$$

Dies zeigt $f|_{\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$ für jeden Ringhomomorphismus $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ (das folgt z.B. mit Beispiel 13.1.10); ist also f auch stetig, so stimmen die stetigen Funktionen f und $id_{\mathbb{R}}$ auf der dichten Menge $\mathbb{Q}$ überein, also folgt $f = id_{\mathbb{R}}$ aus Lemma 13.1.22.

Mathematisches Institut der Universität München 08.11.2023

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 3 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 106:

- Falls $f(0) = f(1)$, dann gilt

$$f(0) = f(1) = \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

und wir können $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$ wählen.

- Falls $f(0) \neq f(1)$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - \frac{f(0) + f(1)}{2} \end{aligned}$$

Wir betrachten, dass g stetig als Differenz stetiger Funktionen ist. Ausserdem gilt

$$g(0)g(1) = \left(f(0) - \frac{f(0) + f(1)}{2}\right)\left(f(1) - \frac{f(0) + f(1)}{2}\right) = -\left(\frac{f(0) - f(1)}{2}\right)^2 < 0.$$

Es folgt aus Satz 13.5.5 oder Rezept 13.5.6, dass ein $x_0 \in]0,1[$ existiert, sodass $g(x_0) = 0$ oder äquivalent

$$f(x_0) = \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Insgesamt folgt, dass es ein $x_0 \in [0,1]$ gibt, sodass

$$f(x_0) = \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Aufgabe 107:

- Wir werden zeigen, dass $\left|\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| \leq 1$. Angenommen $\left|\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right| \geq 2$ gibt es $a, a' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $a \neq a'$ und somit

$$\delta\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) > d(a, a') > 0. \tag{1}$$

Aber $\delta(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, was impliziert, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\delta(A_n) < d(a, a')$ für alle $n \geq N$ und somit

$$\delta\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \delta(A_N) < d(a, a'),$$

was (1) widerspricht.

· Wir werden zeigen, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$. Wir wählen $a_n \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus

$$\begin{cases} A_{n+1} \subseteq A_n & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \delta(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{cases}$$

folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. X ist vollständig und deswegen gibt es ein $a \in X$ mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. A_n ist abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$, was zeigt, dass $a \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Insgesamt folgt, dass es ein $a \in X$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}$ gibt.

Aufgabe 108:

i) Ist X nicht zusammenhängend, so gibt es $\varnothing \neq U, V \subset X$ offene Teilmenge mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \varnothing$. Seien $x \in U, y \in V$ und $\gamma : [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann schreiben wir

$$\gamma([0,1]) = \gamma([0,1]) \cap X = \gamma([0,1]) \cap (U \cup V) = (\gamma([0,1]) \cap U) \cup (\gamma([0,1]) \cap V)$$

mit $\varnothing \neq (\gamma([0,1]) \cap U), (\gamma([0,1]) \cap V) \subset \gamma([0,1])$ offene Teilmenge und

$$(\gamma([0,1]) \cap U) \cap (\gamma([0,1]) \cap V) = \gamma([0,1]) \cap (U \cap V) = \varnothing.$$

Dies zeigt, dass $\gamma([0,1])$ nicht zusammenhängend ist, was den Zusammenhang von $[0,1]$ im Hinblick auf Satz 13.5.3 widerspricht.

ii) Seien $x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $y = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $r, \rho > 0$ und $\varphi, \theta \in [0, 2\pi[$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ t &\longmapsto \big(((1-t)r + t\rho)\cos\varphi, ((1-t)r + t\rho)\sin\varphi\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ t &\longmapsto \big(\rho\cos((1-t)\varphi + t\theta), \rho\sin((1-t)\varphi + t\theta)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ t &\longmapsto (\gamma_1 * \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{, für } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{, für } t \in]1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

und betrachten, dass $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ ist. Dies zeigt, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist.

iii) Angenommen ein Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert. Dann ist

$$f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{t\}$$

ebenfalls ein Homöomorphismus, wobei $t := f(0)$. Aus ii) ist $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ wegzusammenhängend und somit zusammenhängend, wegen i). Aber aus Satz 13.5.3 muss $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{t\}$ zusammenhängend sein, was nicht gilt, da

$$\mathbb{R} \setminus \{t\} =]-\infty, t[\cup]t, \infty[$$

und $\varnothing \neq]-\infty, t[,]t, \infty[\subset \mathbb{R}$ offen mit $]-\infty, t[\cap]t, \infty[= \varnothing$ sind.

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 4 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 109: Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $A_n := T^{n-1}(X)$, wobei $T^n := T \circ T^{n-1}, T^0 := \mathrm{id}_X$. Wir betrachten, dass T stetig ist. Es folgt, dass A_n kompakt und abgeschlossen ist, $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $0 \leq \delta(A_{n+1}) \leq \delta(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$\delta(A_n) := \begin{cases} \sup\{d(x,y): \ x, y \in A_n\}, & \text{falls } \{d(x,y): \ x, y \in A_n\} \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir folgern, dass es ein $\delta \geq 0$ gibt, sodass $\delta(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} \delta$. Aus der Kompaktheit von A_{n+1} folgt, dass $x_n, y_n \in A_n$ mit $\delta(A_{n+1}) = d(T(x_n), T(y_n))$ gibt. Deswegen gilt, dass

$$\delta(A_{n+1}) = d(T(x_n), T(y_n)) < d(x_n, y_n) \leq \delta(A_n)$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} d(T(x_n), T(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \delta.$$

Da X kompakt ist, gibt es konvergente Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_\infty \in X$ und $y_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} y_\infty \in X$. Wir erhalten, dass

$$d(T(x_\infty), T(y_\infty)) = d(x_\infty, y_\infty) = \delta. \tag{1}$$

Angenommen $x_\infty \neq y_\infty$. Dann gilt

$$d(T(x_\infty), T(y_\infty)) < d(x_\infty, y_\infty),$$

was (1) widerspricht. Dies zeigt, dass $x_\infty = y_\infty$, woraus $\delta = 0$ folgt. Wir haben eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ konstruiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$:

a) $A_n \neq \emptyset$,

b) A_n ist abgeschlossen,

c) $A_{n+1} \subseteq A_n$,

d) $\delta(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Aus Aufgabe 107 folgt, dass

$$\mathrm{Fix}(T) := \{x \in X : T(x) = x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\},$$

was heißt, dass T genau einen Fixpunkt $a \in X$ hat.

Dieselbe Behauptung gilt *nicht*, falls (X, d) nicht kompakt ist. Seien $X :=]1, \infty[$,

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow [0, \infty[\\ (x, y) &\longmapsto |x - y| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, dass

$$d(T(x), T(y)) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < \frac{|x-y|}{2} < |x-y| = d(x,y)$$

aber $T(x) := \sqrt{x} < x$, was zeigt, dass T keinen Fixpunkt hat.

Aufgabe 110: Falls $f \equiv 0$, dann gilt

$$\max_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) = 0.$$

Falls $f \not\equiv 0$, dann gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $f(x_0) \neq 0$. Aus $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$ folgt, dass es ein $R > 0$ gibt, sodass $|f(x)| < |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| > R$. Die Menge $B := \overline{B(0,R)} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq R\}$ ist kompakt und aus der Stetigkeit von f folgt, dass f ein Maximum $M := f(x_1)$ und ein Minimum $m := f(x_2)$ in B für gewisse $x_1, x_2 \in B$ hat.

- Falls $f(x_0) > 0$, dann gilt $f(x) \leq |f(x)| < f(x_0) \leq \max\{f(x_0), M\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus B$. Außerdem gilt $f(x) \leq M \leq \max\{f(x_0), M\}$ für alle $x \in B$ und somit folgt

$$\max_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) = \max\{f(x_0), f(x_1)\}.$$

- Falls $f(x_0) < 0$, dann gilt $f(x) \geq -|f(x)| > f(x_0) \geq \min\{f(x_0), m\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus B$. Außerdem gilt $f(x) \geq m \geq \min\{f(x_0), m\}$ für alle $x \in B$ und somit folgt

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) = \min\{f(x_0), f(x_2)\}.$$

Aufgabe 111: Aus der punktweisen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f folgt, dass es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in X$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall\, n \geq n(x). \tag{2}$$

Da f und $f_{n(x)}$ stetig sind, gibt es eine offene Umgebung $U(x) \subseteq X$ von x, sodass für alle $x' \in U(x)$ gilt

$$\begin{cases} |f(x) - f(x')| \leq \frac{\epsilon}{3} \\ |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(x')| \leq \frac{\epsilon}{3}. \end{cases} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\begin{aligned} |f(x') - f_{n(x)}(x')| &= |f(x') - f(x) + f(x) - f_{n(x)}(x) + f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(x')| \\ &\leq |f(x') - f(x)| + |f(x) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(x')| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

für alle $x' \in U(x)$. $\{U(x) : x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung von X. Aus der Kompaktheit von X folgt, dass es $x_1, ..., x_k \in X$ für ein gewisses $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\{U(x_i) : 1 \leq i \leq k\}$ ebenfalls eine offene Überdeckung von X ist. Wir setzen $n_0 := \max\limits_{1 \leq i \leq k} n(x_i)$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$, $1 \leq i \leq k$ und $x \in U(x_i) \subseteq X$ im Hinblick auf die Monotonie von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dass

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n_0}(x) \leq f(x) - f_{n(x_i)}(x) = |f(x) - f_{n(x_i)}(x)| \leq \epsilon \\
\implies &\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in X} \epsilon = \epsilon,
\end{aligned}
$$

was die gleichmäßige Konvergenz zeigt.

Aufgabe 112: Wir wissen aus Aufgabe 1 vom Tutoriumsblatt 2, dass $\mathrm{dist}(\cdot, X \setminus U)$ gleichmäßig stetig ist. Aus der Kompaktheit von $\overline{K}$ folgt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dist}(\overline{K}, X \setminus U) &:= \inf_{(k,x) \in \overline{K} \times (X \setminus U)} d(k, x) = \inf_{k \in \overline{K}} \inf_{x \in X \setminus U} d(k, x) \\
&= \inf_{k \in \overline{K}} \mathrm{dist}(k, X \setminus U) = \min_{k \in \overline{K}} \mathrm{dist}(k, X \setminus U) \\
&= \mathrm{dist}(\widehat{k}, X \setminus U)
\end{aligned}
$$

für ein gewisses $\widehat{k} \in \overline{K}$. $\widehat{k} \in \overline{K} \subseteq U$ und $U \subset X$ ist offen, was zeigt, dass ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass $B(\widehat{k}, \epsilon) := \{x \in X : d(\widehat{k}, x) < \epsilon\} \subseteq U$. Wir folgern, dass $d(\widehat{k}, x) \geq \epsilon$ für alle $x \in X \setminus U$ und somit

$$
\mathrm{dist}(\overline{K}, X \setminus U) = \mathrm{dist}(\widehat{k}, X \setminus U) := \inf_{x \in X \setminus U} d(\widehat{k}, x) \geq \inf_{x \in X \setminus U} \epsilon = \epsilon > 0.
$$

Mathematisches Institut der Universität München 18.12.2023

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 5 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 113:

i) Aus Lemma 13.8.6 wissen wir, dass $\cos|_{[0,\pi/2]}$ streng monoton fallend ist. Aus Satz 13.8.7 folgt

$$\cos|_{[\pi/2,\pi]}(x) = \cos(x) = \cos(-x) = -\cos(-x+\pi) = -\cos|_{[0,\pi/2]}(\pi - x)$$

für alle $x \in [\pi/2, \pi]$, was zeigt, dass $\cos|_{[\pi/2,\pi]}$ ebenfalls streng monoton fallend ist. Insgesamt erhalten wir, dass $\cos|_{[0,\pi]}$ streng monoton fallend und somit injektiv ist. Die Surjektivität folgt aus $\cos(0) = 1, \cos(\pi) = -\cos(0) = -1$ im Hinblick auf die Stetigkeit von cos. Aus Satz 13.8.7 folgt auch

$$\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}(x) = \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos|_{[0,\pi]}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Somit folgt die Bijektivität von $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ aus der Bijektivität von $\cos|_{[0,\pi]}$.

ii) Aus i) wissen wir, dass es für alle $x \in [-1, 1]$ genau ein $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ mit $\sin(t) = x$ gibt. Außerdem gilt aus Satz 13.8.7, dass

$$\arccos(x) = \arccos(\sin(t)) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \frac{\pi}{2} - t = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$
$$\implies \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$. Beachten Sie, dass $\pi/2 - t \in [0, \pi]$ für alle $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Aufgabe 114:

i) a) $\mathcal{B}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, wobei $\mathcal{B}_1 := \{D(z, r) : z \in \mathbb{C}, r > 0\}$ und $\mathcal{B}_2 := \{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(z, r)} : z \in \mathbb{C}, r > 0\}$. Wie betrachten, dass $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \varnothing$ und $\infty \notin U$ für alle $U \in \mathcal{B}_1$ aber $\infty \in V$ für alle $V \in \mathcal{B}_2$. Es folgt, dass es für jede Umgebung U_∞ von ∞ ein $V \in \mathcal{B}_2$ mit $V \subseteq U_\infty$ gibt. Dies zeigt, dass ∞ ein Behrürungspunkt von $\mathbb{C}$ ist.

b) Sei $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$. Aus a) wissen wir, dass $U_{i_0} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{B}_2$ für ein gewisses $i_0 \in I$ gibt. Dann gibt es $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r_0 > 0$, sodass $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U_{i_0} = \overline{D(z_0, r_0)}$ gilt. $\mathcal{U}$ ist auch eine offene Überdeckung von $\overline{D(z_0, r_0)}$. Aus der Kompaktheit von $\overline{D(z_0, r_0)}$ folgt, dass eine endliche Menge $J \subseteq I$ gibt, sodass $\{U_i\}_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von $\overline{D(z_0, r_0)}$ ist, was zeigt, dass $\{U_i\}_{i \in J \cup \{i_0\}}$ eine endliche offene Überdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$ ist

c) Angenommen $\sin(z) \xrightarrow{z \to \infty} L$ für irgendein $L \in \widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt für jede $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $z_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$, dass $\sin(z_n) \xrightarrow{n \to \infty} L$. Wir definieren $z_n := \frac{(2n+1)\pi}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und betrachten, dass $z_n := \frac{(2n+1)\pi}{2} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ aber $\sin(z_n) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$, welche in $\widehat{\mathbb{C}}$ nicht konvergiert.

ii) Zuerst zeigen wir, dass P_N bijektiv ist. Einerseits

$$P_N(x) = \infty \iff x = N.$$

Andererseits

$$P_N(x) = z \in \mathbb{C} \iff \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \dfrac{x_1}{1-x_3} \\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{x_2}{1-x_3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \mathrm{Re}(z)(1-x_3) \\ x_2 = \mathrm{Im}(z)(1-x_3) \end{cases}.$$

Somit folgt aus $x \in S^2 \setminus \{N\}$, dass

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 &\iff \mathrm{Re}(z)^2(1-x_3)^2 + \mathrm{Im}(z)^2(1-x_3)^2 + x_3^2 = 1 \\ &\iff (\|z\|^2+1)x_3^2 - 2\|z\|^2 x_3 + \|z\|^2 - 1 = 0 \\ &\iff \big((\|z\|^2+1)x_3 - (\|z\|^2-1)\big)(x_3-1) = 0 \\ &\iff x_3 = \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \end{aligned}$$

und somit

$$x = \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{\|z\|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{\|z\|^2+1}, \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1}\right).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} Q_N : \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow S^2 \\ \mathbb{C} \ni z &\longmapsto \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{\|z\|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{\|z\|^2+1}, \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1}\right) \\ \infty &\longmapsto N. \end{aligned}$$

Einerseits berechnen wir

$$(P_N \circ Q_N)(\infty) = P_N(Q_N(\infty)) = P_N(N) = \infty \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} (P_N \circ Q_N)(z) = P_N(Q_N(z)) &= P_N\left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{\|z\|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{\|z\|^2+1}, \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1}\right) \\ = \frac{\frac{2\mathrm{Re}(z)}{\|z\|^2+1}}{1 - \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1}} + i\frac{\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{\|z\|^2+1}}{1 - \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1}} &= \frac{2\mathrm{Re}(z)}{\|z\|^2+1-(\|z\|^2-1)} + i\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{\|z\|^2+1-(\|z\|^2-1)} \\ = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = z \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h.

$$(P_N \circ Q_N)(z) = z \tag{2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus (1) und (2) folgt

$$P_N \circ Q_N = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}. \tag{3}$$

Andererseits berechnen wir

$$(Q_N \circ P_N)(N) = Q_N(P_N(N)) = Q_N(\infty) = N \tag{4}$$

und

$$\begin{aligned}
(Q_N \circ P_N)(x) = Q_N(P_N(x)) = Q_N\left(\frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}\right)& \\
= \left(\frac{\frac{2x_1}{1-x_3}}{\frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} + 1}, \frac{\frac{2x_2}{1-x_3}}{\frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} + 1}, \frac{\frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} - 1}{\frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} + 1}\right)& \\
= \left(\frac{2x_1(1-x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2}, \frac{2x_2(1-x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 - (1-x_3)^2}\right)& \\
= \left(\frac{2x_1(1-x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + 1}, \frac{2x_2(1-x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - (x_3^2 - 2x_3 + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 + 1}\right)& \\
= \left(\frac{2x_1(1-x_3)}{2-2x_3}, \frac{2x_2(1-x_3)}{2-2x_3}, \frac{2x_3 - 2x_3^2}{2-2x_3}\right) = (x_1, x_2, x_3) = x&
\end{aligned}$$

für alle $x \in S^2 \setminus \{N\}$, d.h.

$$(Q_N \circ P_N)(x) = x \tag{5}$$

für alle $x \in S^2 \setminus \{N\}$. Aus (4) und (5) folgt

$$Q_N \circ P_N = \mathrm{id}_{S^2}. \tag{6}$$

Aus (3) und (6) folgern wir, dass P_N bijektiv mit $P_N^{-1} = Q_N$ ist.

Zunächst zeigen wir, dass P_N stetig ist. Sei $U \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}$. Für alle $z \in U \cap \mathbb{C}$ gibt es ein $r_z > 0$, sodass $D(z, r_z) \subseteq U$. Falls $\infty \in U$, dann gibt es ein $r_\infty > 0$, sodass $D(\infty, r_\infty) := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D\left(0, \frac{1}{r_\infty}\right)} \subseteq U$. Es folgt, dass

$$U = \bigcup_{z \in U} D(z, r_z).$$

Wir definieren für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ die Funktion

$$\begin{aligned}
\iota_z :]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\
x &\longmapsto \begin{cases} x & , z \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{x} & , z = \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Außerdem definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned}
c : \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\
z &\longmapsto \begin{cases} z & , z \in \mathbb{C} \\ 0 & , z = \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Bezeichne $C(z,r) := \partial\overline{D(z,r)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Dann gilt

$$\begin{cases} D(z,r_z) = \{z\} \cup \left(\bigcup\limits_{0<\rho<r_z} C(z,\rho) \right) = \{z\} \cup \left(\bigcup\limits_{0<\iota_z(\rho)<r_z} C(c(z),\rho) \right) \ \forall\, z \in \mathbb{C}, r_z > 0 \\ D(\infty,r_\infty) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D\left(0,\dfrac{1}{r_\infty}\right)} = \{\infty\} \cup \left(\bigcup\limits_{\rho>\frac{1}{r_\infty}} C(0,\rho) \right) = \{\infty\} \cup \left(\bigcup\limits_{0<\iota_z(\rho)<r_\infty} C(c(\infty),\rho) \right). \end{cases}$$

Sei $x \in S^2$. Dann

$$\begin{aligned}
&P_N(x) \in C(z,\rho) \\
\iff &\left(\frac{x_1}{1-x_3} - \mathrm{Re}(z) \right) + \left(\frac{x_2}{1-x_3} - \mathrm{Im}(z) \right) = \rho^2 \\
\iff &\left(\frac{x_1}{1-x_3} \right)^2 - 2\mathrm{Re}(z)\frac{x_1}{1-x_3} + \mathrm{Re}(z)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3} \right)^2 - 2\,\mathrm{Im}(z)\frac{x_2}{1-x_3} + \mathrm{Im}(z)^2 = \rho^2 \\
\iff &\frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} - 2\mathrm{Re}(z)\frac{x_1}{1-x_3} - 2\,\mathrm{Im}(z)\frac{x_1}{1-x_3} + \|z\|^2 - \rho^2 = 0 \\
\iff &1 + x_3 - 2\mathrm{Re}(z)x_1 - 2\,\mathrm{Im}(z)x_2 + \|z\|^2(1-x_3) - \rho^2(1-x_3) = 0 \\
\iff &2\mathrm{Re}(z)x_1 + 2\,\mathrm{Im}(z)x_2 + (\|z\|^2 + \rho^2 - 1)x_3 = \|z\|^2 + \rho^2 - 1 \\
\iff &x \in E(z,\rho),
\end{aligned}$$

wobei

$$E(z,\rho) := \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : 2\mathrm{Re}(z)y_1 + 2\,\mathrm{Im}(z)y_2 + (\|z\|^2 - \rho^2 + 1)y_3 = \|z\|^2 - \rho^2 - 1 \right\}.$$

Es folgt, dass

$$P_N(E(z,\rho) \cap S^2) = C(z,\rho),$$

und aus der Bijektivität von P_N, dass

$$E(z,\rho) \cap S^2 = P_N^{-1}\big(C(z,\rho)\big).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
P_N^{-1}(U) &= P_N^{-1}\left(\bigcup_{z\in U} D(z,r_z) \right) = P_N^{-1}\left(\bigcup_{z\in U} \left(\{z\} \cup \left(\bigcup_{0<\iota_z(\rho)<r_z} C(c(z),\rho) \right) \right) \right) \\
&= \bigcup_{z\in U} P_N^{-1}\left(\{z\} \cup \left(\bigcup_{0<\iota_z(\rho)<r_z} C(c(z),\rho) \right) \right) = \bigcup_{z\in U} \bigcup_{0\le\iota_z(\rho)<r_z} \big(E(c(z),\rho) \cap S^2\big) \\
&= \bigcup_{z\in U} \bigcup_{-r_z<\iota_z(\rho)<r_z} \big(E(c(z),\rho) \cap S^2\big) = \bigcup_{z\in U} \bigcup_{x\in E(c(z),0)} \big(B(x,r_z) \cap S^2\big) \in \mathcal{O}_{S^2},
\end{aligned}$$

wobei $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y-x\|_2 < r\} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^3}^{\mathrm{std}}$. Dies zeigt, dass P_N stetig ist.

Zuletzt machen wir zwei topologische Beobachtungen. Aus dem Satz von Heine-Borel folgt, dass S^2 kompakt ist. $\widehat{\mathbb{C}}$ ist hausdorffsch, weil

– für alle $z, w \in \mathbb{C}, z \neq w$ und $r \in \left]0, \frac{\|z-w\|}{2}\right]$ gilt

$$\begin{cases} z \in D(z,r) \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}, \\ w \in D(w,r) \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}, \\ D(z,r) \cap D(w,r) = \varnothing, \end{cases}$$

– für alle $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ gilt

$$\begin{cases} z \in D(z,r) \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}, \\ \infty \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(z,r)} \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}, \\ D(z,r) \cap \big(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(z,r)}\big) = \varnothing. \end{cases}$$

Somit folgt die Behauptung aus dem folgenden Lemma für $(X, \mathcal{O}_X) = (S^2, \mathcal{O}_{S^2})$, $(Y, \mathcal{O}_Y) = (\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}})$ und $f = P_N$.

Lemma 0.1. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Dann ist jede bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Siehe Aufgabe 1 von Tutoriumsblatt 4. $\square$

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 6 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 115:

i) T ist linear, da

$$\begin{aligned}T(\lambda(z_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= T((\lambda z_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \big((\lambda z_{n+1} + w_{n+1}) - (\lambda z_n + w_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda(z_{n+1} - z_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_{n+1} - w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda T\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) + T\big((w_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\big\|T\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\big\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_{n+1} - z_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|z_n\| + \|z_{n+1}\|) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_{n+1}\|\\ &\le 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\| = 2\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty\end{aligned}$$

für alle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Insgesamt erhalten wir $T \in L(X, X)$.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $(z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} := (\mathbf{1}_{\{n\le k\}})_{n\in\mathbb{N}} \in X$, wobei $\mathbf{1}_{\{n\le k\}} := \begin{cases} 1 & \text{, falls } n \le k \\ 0 & \text{, sonst}\end{cases}$.
Dann gilt

$$S((z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}) = \big((k - n + 1)\mathbf{1}_{\{n\le k\}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

und somit

$$\big\|\big(S(z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}\big)\big\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S(z_{k,n})\| = k = k\|(z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

Angenommen $S \in L(X, X)$. Dann gibt es ein $C \in \mathbb{R}$, sodass

$$\big\|S\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\big\|_\infty \le C\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$$

für alle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Aber

$$\big\|\big(S(z_{\lceil C\rceil+1,n})\big)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_\infty = (\lceil C\rceil + 1)\|(z_{\lceil C\rceil+1,n})_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty > C\|(z_{\lceil C\rceil+1,n})_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

Dies zeigt, dass $S \notin L(X, X)$.

ii) Einerseits gilt

$$T\big((0)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (0 - 0)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} & T\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (0)_{n\in\mathbb{N}}\\ \iff\ & (z_n - z_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}\\ \iff\ & z_n = z_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\\ \iff\ & \exists\, z \in \mathbb{C} : z_n = z \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\\ \implies\ & 0 = \lim_{n\to\infty} z_n = z = z_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\ker T = \{0\}$.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&S\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
\iff\quad & \left(\sum_{k=n}^{\infty} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
\iff\quad & \sum_{k=n}^{\infty} z_k = 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \\
\iff\quad & z_n = \sum_{k=n}^{\infty} z_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\ker S = \{0\}$.

Aus i) wissen wir, dass $\|T\| \le 2$ und $\|S\| = \infty$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} := \big((-1)^{n-1}\mathbf{1}_{\{n\le 2\}}\big)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Dann gilt

$$T\left((w_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \big((-1)^{n-1}(3-n)\mathbf{1}_{\{n\le 2\}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

und somit

$$\big\|T\big((w_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\big\|_\infty = 2 = 2\|(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty,$$

woraus folgt $\|T\| = 2$.

iii) Aus der Definition von X folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ für alle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Außerdem gilt für alle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, dass

$$\begin{aligned}
(S\circ T)\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &= S\big(T\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\big) = S\big((z_n - z_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\big) \\
&= \left(\sum_{k=n}^{\infty}(z_k - z_{k+1})\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(z_n - \lim_{k\to\infty} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (z_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(T\circ S)\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &= T\big(S\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\big) = T\left(\left(\sum_{k=n}^{\infty} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
&= \left(\sum_{k=n}^{\infty} z_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(z_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= (z_n)_{n\in\mathbb{N}},
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $S = T^{-1}$.

Aufgabe 116:

i) f_i ist $\mathcal{A}-\mathcal{B}_i$-messbar für alle $i \in I$, weshalb

$$f_i^{-1}(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathcal{A} \quad \forall\, i\in I \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

ii) *Nein.* Seien $I = \{1, 2\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $Y_1 = Y_2 = \{1, 2\}$ und

$$\begin{aligned} f_1 : X &\longrightarrow Y_1 \ , \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 2 \\ 3 &\longmapsto 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_2 : X &\longrightarrow Y_2 \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 1 &\longmapsto 2 \\ 1 &\longmapsto 2. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(\mathcal{B}_1) \cup f_2^{-1}(\mathcal{B}_2) &= \big\{\varnothing, \{1,3\}, \{2\}, \{1,2,3\}\big\} \cup \big\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\} \\ &= \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}, \end{aligned}$$

welche keine σ-Algebra auf X ist, weil $\{1\}, \{2\} \in f_1^{-1}(\mathcal{B}_1) \cup f_2^{-1}(\mathcal{B}_2)$ aber $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin f_1^{-1}(\mathcal{B}_1) \cup f_2^{-1}(\mathcal{B}_2)$.

Aufgabe 117: *Nein.* Seien

$$\begin{cases} (X, \mathcal{A}) = \big(\{1,2,3,4\}, \big\{\varnothing, \{1\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\big\}\big) \\ (Y, \mathcal{B}) = \big(\{1,2,3,4\}, \big\{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\big\}\big). \end{cases}$$

Dann gilt $|X| = |Y| = 4$ und $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 4$ aber für alle Bijektionen $f : X \to Y$ gilt, dass $f^{-1}(\{1, 2\}) \notin \mathcal{A}$, weil $|f^{-1}(\{1, 2\})| = 2$ und $\mathcal{A}$ keine zweielementige Menge enthält.

Mathematisches Institut der Universität München 08.12.2023

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 7 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 118: Die Familie

$$\mathcal{A} := \big\{A \subseteq X : \big(\exists \text{ abzählbare } \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F} : A \in \sigma(\mathcal{F}_A)\big)\big\}$$

ist eine σ-Algebra auf X:

a) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$, weil für jede abzählbare Familie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ gilt, dass $\varnothing, X \in \sigma(\mathcal{G})$.

b) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gibt es eine abzählbare Familie $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}$, sodass $A \in \sigma(\mathcal{F}_A)$. Es folgt, dass $X \setminus A \in \sigma(\mathcal{F}_A)$, was zeigt, dass $X \setminus A \in \mathcal{A}$ mit $\mathcal{F}_{X\setminus A} := \mathcal{F}_A$.

c) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Familie $\mathcal{F}_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$, sodass $A_n \in \sigma(\mathcal{F}_{A_n})$. Die Familie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ ist abazählbar und wir erhalten

$$A_n \in \sigma(\mathcal{F}_{A_n}) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}\right) \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mathcal{F}_{A_n}) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{A_n}\right).$$

Außerdem gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, weil wir für alle $F \in \mathcal{F}$ haben, dass $F \in \sigma(\mathcal{F}_F)$, wobei $\mathcal{F}_F := \{F\} \subseteq \mathcal{F}$. Es folgt, dass $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, was zeigt, dass für alle $A \in \sigma(\mathcal{F})$ eine abzählbare Familie $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}$ gibt, sodass $A \in \sigma(\mathcal{F}_A)$.

Aufgabe 119: Wir definieren $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_{n+1} := \{F_1 \cup F_2 : F_1, F_2 \in \mathcal{F}_n\} \cup \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}_n\}$. Wir haben $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weil $F = F \cup F \in \mathcal{F}_{n+1}$ für alle $F \in \mathcal{F}_n$. Falls $\mathcal{F} = \{F\}$, dann ist $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \{\varnothing, F, X \setminus F, X\}$ abzählbar. Wir zeigen induktiv, dass $\mathcal{F}_n$ abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, falls $|\mathcal{F}| \geq 2$:

<u>$n = 1$:</u> $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}$ ist abzählbar.

<u>$n \rightsquigarrow n+1$:</u> Ist $\mathcal{F}_n$ abzählbar, so ist $\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$ abzählbar. Wir haben die surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n &\longrightarrow \mathcal{F}_{n+1} \\ (F_1, F_2, F_1) &\longmapsto F_1 \cup F_2, \\ F_1 \neq F_3 : \quad (F_1, F_2, F_3) &\longmapsto X \setminus F_3, \end{aligned}$$

was zeigt, dass $\mathcal{F}_{n+1}$ abzählbar ist.

Induktiv zeigen wir auch, dass $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

<u>$n = 1$:</u> $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ per Definition.

<u>$n \rightsquigarrow n+1$:</u> Sei $F \in \mathcal{F}_{n+1}$. Dann gibt es $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ mit $F = F_1 \cup F_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ oder $F' \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ mit $F = X \setminus F' \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Es folgt, dass

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}). \tag{1}$$

$\mathcal{A}$ ist eine Algebra auf X:

a) Es gibt $F \in \mathcal{F} =: \mathcal{F}_1$ und wir erhalten

$$X \setminus F \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad X = F \cup (X \setminus F) \in \mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \varnothing = X \setminus X \in \mathcal{F}_4 \subseteq \mathcal{A}.$$

b) Sei $F \in \mathcal{A}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $F \in \mathcal{F}_n$. Aus der Definition von $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, dass $X \setminus F \in \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}$.

c) Seien $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $F_1 \in \mathcal{F}_{n_1}, F_2 \in \mathcal{F}_{n_2}$. Bezeichne $n := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt $F_1 \in \mathcal{F}_{n_1} \subseteq \mathcal{F}_n, F_2 \in \mathcal{F}_{n_2} \subseteq \mathcal{F}_n$. Aus der Definition von $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, dass $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}$.

Es folgt, dass $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt, und aus (1), dass $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$ abzählbar ist.

Mathematisches Institut der Universität München 12.02.2024

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 8 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 120:

a) Die Menge $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} := \{]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[: a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}\}$ ist eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}^{\text{std}}_{\mathbb{R}^2}$ und somit gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$. Aus Satz 14.1.11 reicht es zu zeigen, dass $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Sei $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Dann gibt es $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ mit $U =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ und es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U) = f^{-1}(]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[) &\iff f_1(x) \in]a_1, b_1[\quad \text{und} \quad f_2(x) \in]a_2, b_2[\\ &\iff x \in \underbrace{f_1^{-1}(]a_1, b_1[)}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{f_2^{-1}(]a_2, b_2[)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$, was zeigt, dass f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar ist. Die Funktionen

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

sind stetig und somit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Es folgt, dass $f_1 + f_2 = \alpha \circ f$ und $f_1 \cdot f_2 = \mu \circ f$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar als Verknüpfungen einer $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktion mit einer $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbaren Funktion sind.

b) Wir definieren $\mathcal{A} := \{\varnothing, \{0\}, \mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R}\}$, $f_1 := \chi_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2 := \chi_{]0,+\infty[} - \chi_{]-\infty,0[} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f_1 und f_2 sind $\mathcal{A} - \mathcal{A}$-messbar, weil

$$\begin{cases} f_1^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{A} \\ f_1^{-1}(\{0\}) = \{0\} \in \mathcal{A} \\ f_1^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \in \mathcal{A} \\ f_1^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{A} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} f_2^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{A} \\ f_2^{-1}(\{0\}) = \{0\} \in \mathcal{A} \\ f_2^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \in \mathcal{A} \\ f_2^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{A} \end{cases}.$$

$f_1 + f_2 = 2\chi_{]0,+\infty[}$ ist aber nicht $\mathcal{A} - \mathcal{A}$-messbar, weil $\{0\} \in \mathcal{A}$ aber $(f_1 + f_2)^{-1}(\{0\}) =] - \infty, 0] \notin \mathcal{A}$.

Aufgabe 121: Sei $x \in X$. Weil $(X, \mathcal{O}_X)$ hausdorffsch ist, gibt es für alle $y \in X \setminus \{x\}$ eine offene Menge $U_y \in \mathcal{O}_X$ mit $y \in U_y$ aber $x \notin U_y$. Es folgt, dass

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} U_y,$$

und somit, dass

$$\{x\} = X \setminus \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} U_y \in \mathcal{B}(X), \tag{1}$$

weil $\bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} U_y \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Einerseits ist $f|_{X\setminus U(f)}$ stetig, d.h. $\left(f|_{X\setminus U(f)}\right)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{X\setminus U(f)} := \{U \cap (X \setminus U(f)) : U \in \mathcal{O}_X\}$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$. Andererseits berechnen wir

$$\left(f|_{X\setminus U(f)}\right)^{-1}(V) = \left\{x \in X \setminus U(f) : f|_{X\setminus U(f)}(x) = f(x) \in V\right\} = f^{-1}(V) \cap (X \setminus U(f)).$$

Aus (1) folgt, dass $\{x\}$ abgeschlossen in X für alle $x \in X$ ist. Somit gilt

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \mathcal{B}(X)$$

für alle abzählbare $A \subseteq X$. Insbesondere:

$$f^{-1}(V) \cap U(f), U(f) \in \mathcal{B}(X)$$

und somit $X \setminus U(f) \in \mathcal{B}(X)$, woraus folgt, dass $\mathcal{O}_{X \setminus U(f)} \subseteq \mathcal{B}(X)$. Schliesslich folgt aus (???), dass

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \left(f^{-1}(V) \cap U(f)\right) \cup \left(f^{-1}(V) \cap (X \setminus U(f))\right) \\ &= \underbrace{\left(f^{-1}(V) \cap U(f)\right)}_{\in \mathcal{B}(X)} \cup \underbrace{\left(f|_{X \setminus U(f)}\right)^{-1}(V)}_{\in \mathcal{O}_{X \setminus U(f)} \subseteq \mathcal{B}(X)} \in \mathcal{B}(X), \end{aligned}$$

was zeigt, dass f messbar ist.

Aufgabe 122: Ohne Einschränkung sei f monoton steigend. (Falls f monoton fallend ist, betrachten wir $-f$, die monoton steigend ist.) Für jedes $x \in \overset{\circ}{I}$ ist $\{y \in I : y < x\} \neq \varnothing$ und $f(x)$ eine obere Schranke von $\{f(y) : y \in I, y < x\}$. Deshalb existiert $\sup\{f(y) : y \in I, y < x\}$. Da f monoton steigend ist, gilt

$$f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \sup\{f(y) : y \in I, y < x\}$$

für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (I \cap]-\infty, x[)^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$, weshalb

$$\lim_{y \nearrow x} f(y) = \sup\{f(y) : y \in I, y < x\}$$

folgt. Analog ergibt sich

$$\lim_{z \searrow x} f(z) = \inf\{f(z) : z \in I, x < z\}$$

und, da f monoton steigend ist, gilt $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ für $y, z \in I, y \leq x \leq z$ also

$$\lim_{y \nearrow x} f(y) = \sup\{f(y) : y \in I, y < x\} \leq f(x) \leq \lim_{z \searrow x} f(z) = \inf\{f(z) : z \in I, x < z\}.$$

Im Fall $\lim\limits_{y \nearrow x} f(y) = \lim\limits_{z \searrow x} f(z)$ existiert, gilt $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$ und f ist in x stetig. Deshalb ist

$$\begin{aligned} & x \in \widetilde{U}(f) := \left\{x \in \overset{\circ}{I} : f \text{ nicht stetig in } x\right\} \\ \Longleftrightarrow & \lim_{y \nearrow x} f(y) < \lim_{y \searrow x} f(y) \end{aligned}$$

und, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, lässt sich

$$q_x \in \mathbb{Q} \cap \left] \lim_{y \nearrow x} f(y), \lim_{y \searrow x} f(y) \right[$$

wählen. Sind $x_1, x_2 \in \widetilde{U}(f)$ mit $x_1 < x_2$, dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{y \nearrow x_1} f(y) &\leq \lim_{y \searrow x_1} f(y) = \inf\{f(y) : y \in I, x_1 < y\} \\ &\leq \sup\{f(y) : y \in I, y \leq x_2\} = \lim_{y \nearrow x_2} f(y) \leq f(x_2) \leq \lim_{y \searrow x_2} f(y) \end{aligned}$$

und wegen $q_{x_1} \in \left] \lim_{y \nearrow x_1} f(y), \lim_{y \searrow x_1} f(y) \right[$ und $q_{x_2} \in \left] \lim_{y \nearrow x_2} f(y), \lim_{y \searrow x_2} f(y) \right[$ ist $q_{x_1} < q_{x_2}$, also sind die gewählten Punkte $q_x, x \in \widetilde{U}(f)$ paarweise verschieden. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist $\{q_x : x \in \widetilde{U}(f)\} \subseteq \mathbb{Q}$ auch abzählbar. Da $\left| I \setminus \mathring{I} \right| \leq 2$, ist

$$U(f) := \{x \in I : f \text{ nicht stetig in } x\} \subseteq \widetilde{U}(f) \cup \left(I \setminus \mathring{I} \right)$$

abazählbar und somit ist f Borel-messbar nach Aufgabe 121.

Aufgabe 123: Es reicht zu zeigen, dass

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

gilt, weil

$$\begin{aligned}
\sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \mu\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{j_l}\right).
\end{aligned}$$

Wir beweisen die Behauptung induktiv:

<u>$n = 1$:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{1\}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) &= \sum_{J=\{1\}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = (-1)^{|\{1\}|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in \{1\}} A_j\right) \\
&= \mu(A_1) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right).
\end{aligned}$$

<u>$n = 2$:</u>

$$\begin{aligned}
&\mu(A_2) = \mu((A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)) = \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2) \\
\Longrightarrow\ &\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) &= \mu(A_1 \cup A_2) = \mu\left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \\
&= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \\
&= \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\} \\ |J|=1}} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) - \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\} \\ |J|=2}} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
&= \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\} \\ |J|=1}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\} \\ |J|=2}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
&= \sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right).
\end{aligned}
$$

$\underline{n \rightsquigarrow n+1}$:

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \mu(A_{n+1}) - \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \mu(A_{n+1}) + \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J \cup \{n+1\}|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J \cup \{n+1\}} A_j\right) \\
&= \sum_{n+1 \notin J \subseteq \{1,\ldots,n+1\}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \mu(A_{n+1}) + \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \in J \\ |J| \geq 2}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
&= \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \sum_{\substack{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \in J}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\
&= \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n+1\}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right).
\end{aligned}
$$

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 9 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 124:

a) Sei $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. Dann ist A abzählbar und wir berechnen

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k\in A}\{k\}\right) = \sum_{k\in A}\mu(\{k\}) = \sum_{k\in A}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)e^{-\frac{k}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)e^{-\frac{k}{\alpha}}\delta_k(A) \geq 0.$$

Außerdem erhalten wir wegen $\alpha > 0 \implies 0 < e^{-\frac{1}{\alpha}} < 1$, dass

$$\mu(\mathbb{N}_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)e^{-\frac{k}{\alpha}}\delta_k(\mathbb{N}_0) = \left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^k = \left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{\alpha}}} = 1,$$

was zeigt, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

b)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}_0} f_n\,d\mu &= \sum_{k=0}^{n} f_n(k)\mu(\{k\}) + 0\cdot\mu(\mathbb{N}_{>n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k}{\alpha}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)e^{-\frac{k}{\alpha}} \\ &= (n+1)\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}_0} g_n\,d\mu &= \sum_{k=0}^{n} g_n(k)\mu(\{k\}) + 0\cdot\mu(\mathbb{N}_{>n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{k}{\alpha}}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)e^{-\frac{k}{\alpha}} \\ &= \left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-\frac{2}{\alpha}}\right)^k = \left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\frac{1-\left(e^{-\frac{2}{\alpha}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{2}{\alpha}}} \\ &= \frac{1-e^{-\frac{2(n+1)}{\alpha}}}{1+e^{-\frac{1}{\alpha}}}.\end{aligned}$$

c) Wir betrachten, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigende Folgen von nicht-negativen Stufenfunktionen mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ sind. Somit berechnen wir

$$\int_{\mathbb{N}_0} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}_0} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = +\infty$$

und

$$\int_{\mathbb{N}_0} g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}_0} g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\frac{2(n+1)}{\alpha}}}{1+e^{-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{\alpha}}}.$$

Aufgabe 125:

a) Mit Hilfe von der Ungleichung von Bernoulli erhalten wir

$$\frac{\left(1+\frac{y}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n}} = \left(\frac{1+\frac{y}{n+1}}{1+\frac{y}{n}}\right)^{n}\left(1+\frac{y}{n+1}\right) = \left(\frac{n(n+1)+ny}{n(n+1)+(n+1)y}\right)^{n}\left(1+\frac{y}{n+1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{y}{(n+1)(n+y)}\right)^{n}\left(1+\frac{y}{n+1}\right) \geq \left(1-\frac{ny}{(n+1)(n+y)}\right)\left(1+\frac{y}{n+1}\right)$$

$$= 1+\frac{y}{n+1}-\frac{ny}{(n+1)(n+y)}-\frac{ny^2}{(n+1)^2(n+y)} = 1+\frac{(n+1)(n+y)y-(n+1)ny-ny^2}{(n+1)^2(n+y)}$$

$$= 1+\frac{(n+1)ny+(n+1)y^2-(n+1)ny-ny^2}{(n+1)^2(n+y)} = 1+\frac{y^2}{(n+1)^2(n+y)} \geq 1,$$

woraus folgt, dass die Folge $\left((1+\frac{y}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

b) Wir definieren die Folge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\ln\left(\left(1+\frac{f}{n}\right)^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

und betrachten, dass f_n nichtnegativ und $\mathcal{A}$-messbar für alle $n\in\mathbb{N}$ ist. Aus a) folgt

$$f_n(x) = \ln\left(\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n\right) \leq \ln\left(\left(1+\frac{f(x)}{n+1}\right)^{n+1}\right) = f_{n+1}(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$. Außerdem berechnen wir

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n\right) = \ln e^{f(x)} = f(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Somit erhalten wir aus Satz 14.3.8 (monotone Kovergenz)

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\ln\left(1+\frac{f}{n}\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \ln\left(\left(1+\frac{f}{n}\right)^n\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Aufgabe 126:

a)
- $\mu(\varnothing) := \int_X f\mathbf{1}_\varnothing\,d\nu = \int_X f\cdot 0\,d\nu = 0\cdot\int_X f\,d\nu = 0$
- $f(x)\geq 0\ \forall x\in X \implies \mu(A) = \int_X f\mathbf{1}_A\,d\nu \geq 0\ \forall A\in\mathcal{A}$
- Sei $(A_n)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit $A_i\cap A_j=\varnothing$, falls $i\neq j$. Wir definieren die monoton steigende Folge $\left(f_N := f\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen Stufenfunktionen und betrachten, dass $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)\mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n}(x)$ für alle $x\in X$. Somit berechnen wir

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right) := \int_X f\mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n}\,d\nu = \lim_{N\to\infty}\int_X f_N\,d\nu = \lim_{N\to\infty}\int_X f\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n}\,d\nu$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_X f\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{A_n}\,d\nu = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\int_X f\mathbf{1}_{A_n}\,d\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X f\mathbf{1}_{A_n}\,d\nu$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n).$$

b) Wir definieren die monoton steigende Folge $\big(g_N := g\mathbf{1}_{\{-N,\dots,N\}}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen Stufenfunktionen mit $\lim\limits_{N\to\infty} g_N = g\mathbf{1}_{\mathbb{Z}} = g$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}} g\,d\mu &= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{Z}} g_N\,d\mu = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{N} g(n)\mu(\{n\}) + 0\cdot\mu\big(\{n\in\mathbb{Z} : |n| > N\}\big)\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{|n|}{2}\int_{\mathbb{Z}} f\mathbf{1}_{\{n\}}\,d\nu = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{|n|}{2}\Big(f(n)\nu\big(\{n\}\big) + 0\cdot\nu\big(\mathbb{Z}\setminus\{n\}\big)\Big)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{|n|}{2}e^{-|n|} = \lim_{N\to\infty} 2\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2}e^{-n} = \lim_{N\to\infty} e^{-1}\sum_{n=1}^{N} ne^{-(n-1)}\\
&= \lim_{N\to\infty} e^{-1}\frac{1-(N+1)e^{-N}+Ne^{-(N+1)}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{e}{(e-1)^2}.
\end{aligned}$$

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 10 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 127: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
& g(x) = e^{-\frac{1}{x}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \\
\implies & g_n(x) := g(nx) = e^{-\frac{1}{nx}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(nx) = e^{-\frac{1}{nx}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \\
\implies & h_n(x) := g_n(x-a)g_n(b-x) = e^{-\frac{1}{n(x-a)}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x-a)e^{-\frac{1}{n(b-x)}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(b-x) \\
& \qquad = e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{b-x}\right)}\mathbf{1}_{]a,\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,b[}(x) = e^{-\frac{b-a}{n(x-a)(b-x)}}\mathbf{1}_{]a,b[}(x) \nearrow \mathbf{1}_{]a,b[}(x)
\end{aligned}$$

$h_n\big|_{]-\infty,a[\,\cup\,]b,\infty[}$ ist stetig als konstanste Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$. $h_n\big|_{]a,b[}$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x\searrow a} h_n(x) = \lim\limits_{x\searrow a} e^{-\frac{b-a}{n(x-a)(b-x)}} = 0 = \lim\limits_{x\nearrow a} h_n(x) = h_n(a) \\
\lim\limits_{x\nearrow b} h_n(x) = \lim\limits_{x\nearrow b} e^{-\frac{b-a}{n(x-a)(b-x)}} = 0 = \lim\limits_{x\searrow b} h_n(x) = h_n(b)
\end{cases},$$

woraus folgt, dass h_n stetig in a und b für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Insgesamt haben wir gezeigt, dass h_n stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Insbesonderse ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Aus dem Satz der monotonen Konvergenz folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]a,b[} \, d\lambda = \lambda\big(]a,b[\big) = b-a.$$

Aufgabe 128:

a) Wir definieren die Folge $\big(f_n := f\mathbf{1}_{\{0,\dots,n\}} : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty[\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen und betrachten, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(m) = f(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}_0} f \, d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}_0} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} f(m)\mu\big(\{k\}\big) + 0\cdot\mu\left(\mathbb{N}_{>n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n} f(m)\mu\big(\{m\}\big) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)e^{-\frac{k}{\alpha}}\delta_k\big(\{m\}\big) = \left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(m)e^{-\frac{k}{\alpha}}\delta_{km} \\
&= \left(1-e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-\frac{m}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

b) Per Definition ist g integrierbar, falls $\int_{\mathbb{N}_0} |g| \, d\mu < \infty$. Aus a) und $0 < 1-e^{-\frac{1}{\alpha}} < \infty$ können wir diese Bedingung äquivalent folgendermaßen umschreiben:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |g(m)|e^{-\frac{m}{\alpha}} < \infty.$$

Falls g integrierbar ist, erhalten wir aus a), dass

$$\int_{\mathbb{N}_0} |\mathrm{Re}(g)_+|\, d\mu = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left|\left(\mathrm{Re}(g)_+\right)(m)\right| e^{-\frac{m}{\alpha}} \leq \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} |g(m)| e^{-\frac{m}{\alpha}} < \infty,$$

was zeigt, dass $\mathrm{Re}(g)_+$ integrierbar ist. Ähnlicherweise folgt, dass auch $\mathrm{Re}(g)_-, \mathrm{Im}(g)_+$ und $\mathrm{Im}(g)_-$ integrierbar sind. Somit berechnen wir mit Hilfe von a)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}_0} g\, d\mu &= \int_{\mathbb{N}_0} \left(\mathrm{Re}(g)_+ - \mathrm{Re}(g)_- + i\mathrm{Im}(g)_+ - i\mathrm{Im}(g)_-\right) d\mu \\
&= \int_{\mathbb{N}_0} \mathrm{Re}(g)_+\, d\mu - \int_{\mathbb{N}_0} \mathrm{Re}(g)_-\, d\mu + i \int_{\mathbb{N}_0} \mathrm{Im}(g)_+\, d\mu - i \int_{\mathbb{N}_0} \mathrm{Im}(g)_-\, d\mu \\
&= \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathrm{Re}(g)_+\right)(m) e^{-\frac{m}{\alpha}} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathrm{Re}(g)_-\right)(m) e^{-\frac{m}{\alpha}} \\
&\quad + i \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathrm{Im}(g)_+\right)(m) e^{-\frac{m}{\alpha}} - i \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathrm{Im}(g)_-\right)(m) e^{-\frac{m}{\alpha}} \\
&= \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathrm{Re}(g)_+ - \mathrm{Re}(g)_- + i\mathrm{Im}(g)_+ - i\mathrm{Im}(g)_-\right)(m) e^{-\frac{m}{\alpha}} \\
&= \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} g(m) e^{-\frac{m}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

c) Aus a) erhalten wir

$$\int_{\mathbb{N}_0} h\, d\mu = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e^{-\frac{m}{\alpha}} = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^m}{m!} = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) e^{e^{-\frac{1}{\alpha}}} < \infty.$$

Aufgabe 129:

a) Wir definieren die Folge

$$\left(\begin{array}{rl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt[n]{\cos(x)} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

von Funktionen und betrachten, dass

- $f_n(x) \leq \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)\, d\lambda(x) = \lambda\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \pi < \infty$,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos(x)^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) = \cos(x)^0 \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) = \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Somit folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\cos(x)}\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)\, d\lambda(x) = \pi.$$

b) Wir definieren die Folge

$$\left(\begin{array}{rl} g_n : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{ne^{x^2}}{1+n^{\frac{3}{2}}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \end{array} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

von Funktionen.

- Aus $n^{\frac{3}{2}} \geq 1$ und $\sqrt{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $e^{x^2} \leq e$ für alle $x \in [-1,1]$ folgt, dass

$$g_n(x) \leq \frac{ne}{n^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = \frac{e}{2\sqrt{n}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \leq \frac{e}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\, d\lambda(x) = \frac{e}{2} \lambda\big([-1,1]\big) = e < \infty$,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ne^{x^2}}{1+n^{\frac{3}{2}}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{e^{x^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}+1}} = 0 \cdot \frac{e^{x^2}}{0+1} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aus dem Satz der majorisierten Konvergenz erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{ne^{x^2}}{1+n^{\frac{3}{2}}}\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\lambda(x) = 0.$$

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 11 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 130: Als erstes zeigen wir, dass $\big(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}\big)$ ein Hilbertraum ist.

- $\ell^2(\mathbb{N})$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, denn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist

$$|\alpha x_n + \beta y_n|^2 \leq 2|\alpha|^2|x_n|^2 + 2|\beta|^2|y_n|^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n + \beta y_n|^2 \leq 2|\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2|\beta|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty,$$

was zeigt, dass $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

-

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} : \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n\end{aligned}$$

definiert ein Skalarprodukt, denn wegen

$$|\overline{x_n} y_n| = |x_n||y_n| \leq \frac{1}{2}\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)$$

ist für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ die Reihe $\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Majorante für $\left(\sum_{n=1}^{N} \overline{x_n} y_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$, was daher (absolut) konvergiert. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ gelten

$$\big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

dh. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}$ ist positiv definit.

Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ ist

$$\big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n} x_n} = \overline{\big\langle (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}},$$

also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}$ hermitsch.

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ gilt

$$\begin{aligned}\big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda(y_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}(\lambda y_n + \mu z_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} z_n \\ &= \lambda\big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} + \mu\big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}\end{aligned}$$

und da $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}$ hermitsch ist, ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}$ sesquilinear.

- Es sei

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})} : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow [0,\infty[\\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \sqrt{\big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}}\end{aligned}$$

die von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}$ induzierte Norm. Sei $\big(x^{(m)}\big)_{m\in\mathbb{N}} := \left(\left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$-Cauchyfolge, dh. für alle $\epsilon > 0$ gibt es $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left\|x^{(l)} - x^{(m)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 < \epsilon \quad \text{für alle } l, m \geq M(\epsilon).$$

Insbesondere ist jede Folge $\left(x_n^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, also gibt es $y_n = \lim\limits_{m\to\infty} x_n^{(m)}$. Sei $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Wahl von $M(\epsilon)$ gilt

$$\sum_{j=1}^{N} \left|x_j^{(l)} - x_j^{(m)}\right|^2 \leq \left\|x^{(l)} - x^{(m)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 < \epsilon \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}, l, m \geq M(\epsilon).$$

Da $y_n = \lim\limits_{m\to\infty} x_n^{(m)}$ ist, folgt im Limes $m \to \infty$ (da Quadrate und (endliche) Summen stetig sind)

$$\sum_{j=1}^{N} \left|x_j^{(l)} - y_j\right|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left|x_j^{(l)} - x_j^{(m)}\right|^2 \leq \lim_{m\to\infty} \left\|x^{(l)} - x^{(m)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 < \epsilon$$

für alle $N \in \mathbb{N}, l \geq M(\epsilon)$, woraus im Limes $N \to \infty$ folgt, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(l)} - y_j\right|^2 < \epsilon \quad \text{für alle } l \geq M(\epsilon).$$

Damit ist insbesondere $\left(x_j^{(l)} - y_j\right)_{j\in} N \in \ell^2(\mathbb{N})$ für $l \geq M(\epsilon)$ und $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} = \left(x_j^{(l)}\right)_{j\in\mathbb{N}} - \left(x_j^{(l)} - y_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ und $\left\|\left(x_j^{(\ell)} - y_j\right)_{j\in\mathbb{N}}\right|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 < \epsilon$ für $l \geq M(\epsilon)$, woraus folgt, dass $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} = \lim_{l\to\infty} \left(x_j^{(l)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, dh. $\big(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})}\big)$ ist vollständig, also $\big(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}\big)$ ist ein Hilbertraum.

Zunächst zeigen wir, dass $\ell^2(\mathbb{N})$ separabel ist.

- $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ ist dicht und somit ist auch $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^d \subset \mathbb{C}^d$ für jedes $d \in \mathbb{N}$ dicht. Zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ und ϵ wählen wir $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit
$$\sum_{n=M(\epsilon)+1}^{\infty} |x_n|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$
und $\big(z_1, ..., z_{M(\epsilon)}\big) \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{M(\epsilon)}$ mit
$$\sum_{n=1}^{M(\epsilon)} |x_n - z_n| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{M(\epsilon)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{M(\epsilon)} \end{pmatrix} \right\|_2^2 < \frac{\epsilon^2}{2}.$$
Dann ist
$$\big(z_1, ..., z_{M(\epsilon)}, 0, ...\big) \in \mathcal{D} := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \big\{(y_1, ..., y_N, 0, ...) \in \ell^2(\mathbb{N}) : y_1, ..., y_N \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\big\} \subset \ell^2(\mathbb{N})$$
und $\big\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - \big(z_1, ..., z_{M(\epsilon)}, 0, ...\big)\big\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 < \epsilon$, dh. $\mathcal{D} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ ist dicht. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, sind auch $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ und $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^d$ als Produkte aus endlich vielen abzählbaren Mengen abzählbar. $\mathcal{D}$ ist als Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen abzählbar, dh. $\ell^2(\mathbb{N})$ hat mit $\mathcal{D}$ eine abzählbare dichte Teilmenge und somit ist $\ell^2(\mathbb{N})$ separabel.

Aufgabe 131:

a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(x^2+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, denn
$$\|f(x)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2} < \infty,$$
da $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 1$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist
$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 &= \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right)^2 = \left(\frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}\right)^2 \\ &\leq (y-x)^2(y+x)^2 \xrightarrow{x\to y} 0 \end{aligned}$$
und daher ist f stetig. Als stetige Funktion ist f $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$-messbar und wegen $\mathcal{B}(R) \subseteq \widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ auch $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})} - \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$-messbar. Da $\ell^2(\mathbb{N})$ nach Aufgabe 130 separabel ist, ist f nach Korollar 14.5.3 auch $\widetilde{\lambda}$-messbar. Wir definieren
$$\begin{aligned} \|f\|_{\ell^2(\mathbb{N})} : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty[\\ x &\longmapsto \|f(x)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$
und erhalten aus dem Satz der monotonen Konvergenz für $\mathbf{1}_{[-N,N]}(x)\frac{1}{1+x^2} \nearrow \frac{1}{1+x^2}$, dass
$$\int_{\mathbb{R}} \|f\|_{\ell^2(\mathbb{N})}\, d\widetilde{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty} \int_{[-N,N]} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty} \big(\arctan(N) - \arctan(-N)\big) = \pi < \infty,$$
was nach Satz 14.5.9 zeigt, dass f Bochner-$\widetilde{\lambda}$-integrierbar ist.

b) Zu der $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$-messbaren Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow [0,\infty[\\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

wählen wir eine Folge $\big(g_m : \mathbb{R} \to [0,\infty[\big)_{m\in\mathbb{N}}$ von $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$-Stufenfunktionen mit $0 \le g_m(x) \nearrow \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt $\widetilde{\lambda}\big(g_m^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\big) < \infty$, weil

$$\underbrace{\min\big\{g_m(x) : x \in g_m^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\big\}}_{>0}\widetilde{\lambda}\big(g_m^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})\big) \le \int_{\mathbb{R}} g_m \, d\widetilde{\lambda} \le \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi < \infty.$$

Wir definieren die Folge

$$\begin{aligned} h_m : \mathbb{R} &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto \left(\frac{g_m(x)\mathbf{1}_{\{n\le m\}}}{\sqrt{n(n+1)}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

von $\widetilde{\lambda}$-einfachen Funktionen und berechnen

$$\begin{aligned} &\|f(x) - h_m(x)\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ &= \left|g_m(x) - \frac{1}{1+x^2}\right|^2 \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\right|^2 + \left|\frac{1}{1+x^2}\right|^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\right|^2 \\ &= \left|g_m(x) - \frac{1}{1+x^2}\right|^2 \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)^2 + \left|\frac{1}{1+x^2}\right|^2 \lim_{N\to\infty} \sum_{j=m+1}^{N} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) \\ &= \left|g_m(x) - \frac{1}{1+x^2}\right|^2 \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) + \left|\frac{1}{1+x^2}\right|^2 \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= \left|g_m(x) - \frac{1}{1+x^2}\right|^2 \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) + \left|\frac{1}{1+x^2}\right|^2 \frac{1}{m+1} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}$-Cauchyfolge, da für $m, l \in \mathbb{N}$, $m \le l$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|h_m - h_l\| \, d\widetilde{\lambda} = &\int_{\mathbb{R}} \left(|g_m(x) - g_l(x)|^2 \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} + |g_l(x)|^2 \sum_{j=m+1}^{l} \frac{1}{j(j+1)}\right)^{\frac{1}{2}} d\widetilde{\lambda}(x) \\ &\xrightarrow{m,l\to\infty} 0 \end{aligned}$$

nach dem Satz der majorisierten Konvergenz, da

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} \le 1,$
- $\displaystyle|g_m(x) - g_l(x)|^2 \le \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2,$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2 d\widetilde{\lambda}(x) \le \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1+x^2} \, d\widetilde{\lambda}(x) = 4\pi < \infty.$

Ist $g_m = \sum_{j=1}^{M_m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ mit $A_1, ..., A_{M_m} \in \widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, $\alpha_1, ..., \alpha_{M_m} \in]0, \infty[$, so ist

$$\int_{\mathbb{R}} h_m(x)\, d\widetilde{\lambda}(x) = \left(\frac{\mathbf{1}_{\{n\leq m\}}}{\sqrt{n(n+1)}} \sum_{j=1}^{M_m} \alpha_j \widetilde{\lambda}(A_j) \right)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\xrightarrow{m\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\widetilde{\lambda}(x)}{1+x^2} \right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}} \right)_{n\in\mathbb{N}},$$

da $\int_{\mathbb{R}} g_m\, d\widetilde{\lambda} = \sum_{j=1}^{M_m} \alpha_j \widetilde{\lambda}(A_j) \overset{m\to\infty}{\nearrow} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\widetilde{\lambda}}{1+x^2} = \pi$, $\left(\frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ und

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} h_m\, d\widetilde{\lambda} - \left(\frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}} \right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} \left| \int_{\mathbb{R}} g_m\, d\widetilde{\lambda} - \pi \right|^2 + \lim_{N\to\infty} \sum_{j=m+1}^{N} \frac{\pi^2}{j(j+1)}$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \left| \int_{\mathbb{R}} g_m\, d\widetilde{\lambda} - \pi \right|^2 + \lim_{N\to\infty} \sum_{j=m+1}^{N} \pi^2 \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \left| \int_{\mathbb{R}} g_m\, d\widetilde{\lambda} - \pi \right|^2 + \lim_{N\to\infty} \pi^2 \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{N+1} \right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \left| \int_{\mathbb{R}} g_m\, d\widetilde{\lambda} - \pi \right|^2 + \frac{\pi^2}{m+1} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

da $\int_{\mathbb{R}} g_m\, d\widetilde{\lambda} - \pi \xrightarrow{m\to\infty} 0$.

Aufgabe 132: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)-g(x)|}{\|x-a\|} &= \frac{|(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(2x_1+4x_2+6x_3-14)|}{\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2}} \\
&= \frac{|(x_1^2-2x_1+1)+(x_2^2-4x_2+4)+(x_1^2-6x_3+9)|}{\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2}} \\
&= \frac{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2}{\sqrt{x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2}} \\
&= \sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2} \\
&\xrightarrow[x\neq a]{x\to a} \sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(3-3)^2} = 0,
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die Funktionen f und g sich im Punkt a berühren.

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 12 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 133: Für alle $x \in V$ gilt, dass $g(x) \in g\big(g^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})\big) \subseteq \mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathbb{K}^\times$, weil $\mathbb{K}$ ein Körper ist. Es folgt, dass $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{K}$ für alle $x \in V$ wohldefiniert ist. Für alle $x \neq a$ berechnen wir

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{g(a)-g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$\xrightarrow[x\neq a]{x\to a} \frac{-1}{g(a)g(a)} \cdot g'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)},$$

was nach Satz 15.1.9 zeigt, dass die Funktion $\frac{1}{g} : V \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

ist. Aus Lemma 15.1.14 (Produktregel) folgt, dass auch die Funktion $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} : V \to \mathbb{K}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right)$$
$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

ist.

Aufgabe 134:

i)

$$\begin{aligned}\int_c^d \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx &= \int_c^d \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_c^d \frac{1}{x-a}\,dx - \frac{1}{b-a}\int_c^d \frac{1}{x-b}\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\ln|x-a|\Big|_c^d - \frac{1}{b-a}\ln|x-b|\Big|_c^d \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\ln|d-a| - \ln|c-a|\right) - \frac{1}{b-a}\left(\ln|d-b| - \ln|c-b|\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\ln\frac{(d-a)(b-c)}{(c-a)(b-d)}.\end{aligned}$$

ii) *Lösung 1.* Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}}{-4} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,dx\\ &= -\frac{1}{4}\int_0^\pi \cos(2x)(2x)'\,dx + \frac{1}{2}x\Big|_0^\pi = -\frac{1}{4}\int_0^\pi \big(\sin(2x)\big)'\,dx + \frac{1}{2}(\pi-0)\\ &= -\frac{1}{4}\sin(2x)\Big|_0^\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4}(\sin(2\pi)-\sin(0)) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Lösung 2.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &= \int_0^\pi (-\cos)'(x)\sin(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos(x))\sin'(x)\,dx\\ &= (-\cos(\pi)\sin(\pi)+\cos(0)\sin(0)) + \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi (1-\sin^2(x))\,dx\\ &= \int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx,\end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

iii) *Lösung 1.* Diese Lösung wurde während der Zentralübung von zwei Studentinnen vorgeschlagen.

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} + \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\right)dx\\ =&\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{(\sin(x)+\cos(x))'}{\sin(x)+\cos(x)}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (x+\ln(\sin(x)+\cos(x)))'\,dx\\ =&\frac{1}{2}\left(x+\ln(\sin(x)+\cos(x))\right)\Big|_0^{\pi/2}\\ =&\frac{1}{2}\Big(\big(\pi/2+\ln(\sin(\pi/2)+\cos(\pi/2))\big) - \big(0+\ln(\sin(0)+\cos(0))\big)\Big) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Lösung 2. Wir definieren

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow]-\pi,\pi[\\ t &\longmapsto 2\arctan(t)\end{aligned}$$

und setzen $x := \varphi(t)$, woraus folgt, dass

$$t = \varphi^{-1}(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}}{2}} = -i\cdot\frac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1}$$

für alle $x \in [0,\pi/2]$. Dann gilt für alle $x \in [0,\pi/2]$, dass

$$\begin{aligned}&t^2 = -\frac{e^{i2x}-2e^{ix}+1}{e^{i2x}-2e^{ix}+1} = \frac{e^{ix}}{e^{i2x}-2e^{ix}+1} - 1 = \frac{2}{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+1} - 1 = \frac{2}{\cos(x)+1} - 1\\ \Longrightarrow\ &\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir auch für alle $x \in [0, \pi/2]$, dass

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sqrt{1-\cos^2(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{(1+t^2-(1-t^2))(1+t^2+1-t^2)}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2t^2\cdot 2}}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(\varphi(t))}{\sin(\varphi(t))+\cos(\varphi(t))}\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)(1+2t-t^2)}\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}-1}+\frac{1}{t+\sqrt{2}-1}\right)+\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2+1}{t^2-2t-1}\right|+\arctan(t)\right)'dt = \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2+1}{t^2-2t-1}\right|+\arctan(t)\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1^2+1}{1^2-2\cdot 1-1}\right|+\arctan(1)\right)-\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{0^2+1}{0^2-2\cdot 0-1}\right|+\arctan(0)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln(1)+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\ln(1)+0\right) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Lösung 3. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto \frac{\pi}{2}-t
\end{aligned}$$

und setzen $x := \psi(t)$. Somit berechnen wir

$$\begin{aligned}
I := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx &= \int_{\psi(\pi/2)}^{\psi(0)} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx \\
&= \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin(\psi(t))}{\sin(\psi(t))+\cos(\psi(t))}\psi'(t)\,dt = \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}(-1)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,dt,
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 135:

i) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (2x - x^2)e^{-x}\,dx = \int_a^b (2x - x^2)(-e^{-x})'\,dx \\ &= (2x - x^2)(-e^{-x})\Big|_a^b - \int_a^b (2 - 2x)(-e^{-x})\,dx \\ &= (2x - x^2)(-e^{-x})\Big|_a^b + \int_a^b (2 - 2x)(-e^{-x})'\,dx \\ &= (2x - x^2)(-e^{-x})\Big|_a^b + (2 - 2x)(-e^{-x})\Big|_a^b - \int_a^b (-2)(-e^{-x})\,dx \\ &= (2 - x^2)(-e^{-x})\Big|_a^b + 2\int_a^b (e^{-x})'\,dx = (x^2 - 2)e^{-x}\Big|_a^b + 2e^{-x}\Big|_a^b \\ &= x^2 e^{-x}\Big|_a^b = b^2 e^{-b} - a^2 e^{-a}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für alle $n \geq 2$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^n |f(x)|\,dx &= \int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^n f(x)\,dx = (2^2 e^{-2} - 0^2 e^{-0}) - (n^2 e^{-n} - 2^2 e^{-2}) \\ &= \frac{8}{e^2} - \frac{n^2}{e^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8}{e^2} - 0 = \frac{8}{e^2},\end{aligned}$$

weil für alle $n > 0$ gilt, dass

$$\begin{aligned}0 < \frac{n^2}{e^n} = \frac{n^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}} < \frac{n^2}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{n^k}{k!}} = \frac{n^2}{\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + n + 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \\ \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{6} + 0 + 0 + 0} = 0.\end{aligned}$$

ii) Aus der Berechnungen in i) erhalten wir

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \lim_{n\to\infty} \int_2^n f(x)\,dx = \frac{4}{e^2} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{e^n} - \frac{4}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2} + 0 - \frac{4}{e^2} = 0.$$

Mathematisches Institut der Universität München 02.02.2024

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 13 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 136: Für alle $x > 0$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} [0, x] &\longrightarrow [-1, 1] \\ t &\longmapsto \sin(t) \end{aligned}$$

stetig und auf $]0, x[$ differenzierbar. Aus dem Mittelwertsatz gibt es für alle $x > 0$ ein $\xi \in]0, x[$, sodass

$$\cos(\xi) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Somit gilt

$$|\sin(x)| = |x \cos(\xi)| = |x||\cos(\xi)| \leq |x|$$

für alle $x > 0$. Da $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir aus dem Satz der monotonen Konvergenz für $e^{-x}\mathbf{1}_{[0,n[}(x) \nearrow e^{-x}$, $x > 0$, dass

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(x)|\, dx &= \int_0^\infty \left|\sin\left(e^{-x}\right)\right| dx \leq \int_0^\infty |e^{-x}|\, dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} e^{-x}\mathbf{1}_{[0,n[}(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x}\mathbf{1}_{[0,n[}(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (-e^{-x})'\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} (-e^{-x})\Big|_0^n = \lim_{n\to\infty} \left((-e^{-n}) - (-e^0)\right) = 1 < \infty, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Funktion f auf $[0, \infty[$ integrierbar ist.

Aufgabe 137:

a) Aus Korollar 15.1.14 (Produktregel) und Lemma 15.3.7 erhalten wir, dass λ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= \left(e^{i(t-\tau)A}\xi\right)' = \left(e^{itA}e^{-i\tau A}\xi\right)' = \left(e^{tiA}\right)' e^{-i\tau A}\xi = iAe^{tiA}e^{-i\tau A}\xi = iAe^{i(t-\tau)A}\xi \\ &= iA\lambda(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Außerdem gilt

$$\lambda(\tau) = e^{i(\tau-\tau)A}\xi = e^{0_d}\xi = E_d\xi = \xi.$$

b) Nach Aufgabe 89 gilt $A = TJT^{-1}$ mit Jordanmatrix $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\lambda(t) = e^{i(t-\tau)A}\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(i(t-1)TJT^{-1}\big)^n}{n!}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} T\frac{\big(i(t-1)J\big)^n}{n!}T^{-1}\xi \\
&= T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(i(t-1)J\big)^n}{n!}\right)T^{-1}\xi \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(t-1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(t-1)} & i(t-1)e^{i(t-1)} \\ 0 & 0 & e^{-i(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(t-1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(t-1)} & i(t-1)e^{i(t-1)} \\ 0 & 0 & e^{-i(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(t-1)} \\ -e^{-i(t-1)} - i(t-1)e^{i(t-1)} \\ -e^{-i(t-1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -e^{-i(t-1)} \\ -i(t-1)e^{i(t-1)} \\ e^{-i(t-1)} + i(t-1)e^{i(t-1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, weil für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(i(t-1)J\big)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(t-1)^n}{n!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(t-1)^n}{n!} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-i(t-1)\big)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-i(t-1)\big)^n}{n!} & i(t-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(i(t-1)\big)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-i(t-1)\big)^n}{n!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i(t-1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(t-1)} & i(t-1)e^{i(t-1)} \\ 0 & 0 & e^{-i(t-1)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 138: Für alle $\alpha > 0$ erhalten wir aus dem Satz der monotonen Konvergenz für $e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{]0,n[}(x) \nearrow e^{-\alpha x}$, $x > 0$, dass

$$\int_{]0,\infty[} |f_\alpha(x)|\, d\lambda(x) = \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha x} \frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)}\, d\lambda(x) \leq \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha x}\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{]0,\infty[} \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{]0,n[}(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{]0,n[}(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{]0,n[} e^{-\alpha x}\, d\lambda(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right)\Bigg|_0^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(-\frac{e^{-\alpha n}}{\alpha}\right) - \left(-\frac{e^0}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

was zeigt, dass f_α integrierbar auf $]0,\infty[$ ist. Seien $\alpha, \beta \in]0,\infty[$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann erhalten wir aus dem Satz der monotonen Konvergenz für $xe^{-\xi x}\mathbf{1}_{[0,n[}(x) \nearrow xe^{-\xi x}$, $x > 0$, dass

$$|F(\beta) - F(\alpha)| = \left| \int_{]0,\infty[} f_\beta(x)\, d\lambda(x) - \int_{]0,\infty[} f_\alpha(x)\, d\lambda(x) \right|$$

$$= \left| \int_{]0,\infty[} e^{-\beta x} \frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)}\, d\lambda(x) - \int_{]0,\infty[} e^{-\alpha x} \frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)}\, d\lambda(x) \right|$$

$$= \left| \int_{]0,\infty[} \left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) \frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)}\, d\lambda(x) \right| \leq \int_{]0,\infty[} \left|e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right| \left| \frac{4x^3}{(1+x^2)(1+x^4)} \right| d\lambda(x)$$

$$\leq \int_{]0,\infty[} \left|e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right| d\lambda(x) = \int_{]0,\infty[} \left|(\beta - \alpha)\left(-xe^{-\xi x}\right)\right| d\lambda(x)$$

$$= |\beta - \alpha| \int_{]0,\infty[} \lim_{n\to\infty} xe^{-\xi x}\mathbf{1}_{]0,n[}(x)\, d\lambda(x) = |\beta - \alpha| \lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} xe^{-\xi x}\mathbf{1}_{]0,n[}(x)\, d\lambda(x)$$

$$= |\beta - \alpha| \lim_{n\to\infty} \int_{]0,n[} xe^{-\xi x}\, d\lambda(x) = |\beta - \alpha| \lim_{n\to\infty} \left(x\frac{e^{-\xi x}}{\xi}\Bigg|_0^n - \int_0^n \left(-\frac{e^{-\xi x}}{\xi}\right) d\lambda(x) \right)$$

$$= |\beta - \alpha| \lim_{n\to\infty} \left(\left(n\frac{e^{-\xi n}}{\xi} - 0\frac{e^{-\xi 0}}{\xi}\right) - \left(\frac{e^{-\xi x}}{\xi^2}\Bigg|_0^n\right) \right) = |\beta - \alpha| \lim_{n\to\infty} \left(n\frac{e^{-\xi n}}{\xi} - \left(\frac{e^{-\xi n}}{\xi^2} - \frac{e^0}{\xi^2}\right) \right)$$

$$= \frac{|\beta - \alpha|}{\xi^2} \xrightarrow{\beta\to\alpha} 0,$$

was zeigt, dass F stetig ist. Wir haben benutzt, dass ein $\xi \in \big]\min\{\alpha,\beta\}, \max\{\alpha,\beta\}\big[$ existiert, sodass

$$-xe^{-\xi x} = \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}}{\beta - \alpha}.$$

Dies folgt aus dem Mittelwertsatz für die Funktion

$$g_x : \big[\min\{\alpha,\beta\}, \max\{\alpha,\beta\}\big] \longrightarrow]0,\infty[$$
$$t \longmapsto e^{-xt},$$

die stetig und auf $\big]\min\{\alpha,\beta\}, \max\{\alpha,\beta\}\big[$ differenzierbar mit $g_x'(t) = -xe^{-xt}$ für alle $t \in \big]\min\{\alpha,\beta\}, \max\{\alpha,\beta\}\big[$ ist.

Aufgabe 139: *Lösung 1.* Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

die aus dem Quotientenkriterium wegen

$$\left|\frac{(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}}\right| = |x|\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} |x|$$

für alle $x \in]-1,1[$ konvergiert und für alle $x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ divergiert. Für $x=-1$ erhalten wir die Reihe $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, welche divergiert, weil die harmonische Reihe divergiert. Für $x=1$ erhalten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Somit erhalten wir die stetige Funktion

$$\begin{aligned} g :]-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$

die nach Korollar 15.3.5 differenzierbar auf $]-1,1[$ mit

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = f'(x)$$

für alle $x \in]-1,1[$ ist. Weil zusätzlich $g(0)=0=f(0)$ und $g(1)=\lim_{x\nearrow 1} g(x) = \lim_{x\nearrow 1} f(x) = f(1)$, folgt, dass $g = f|_{]-1,1]}$.

Lösung 2. Für alle $x \in]-1,1[$ gelten, dass

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

und aus dem Satz der monotonen Konvergenz für $\sum_{n=0}^{2N+1}(-1)^n t^n \nearrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, dass

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\,dt = \int_0^x \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{2N+1}(-1)^n t^n\,dt \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^x \sum_{n=0}^{2N+1}(-1)^n t^n\,dt = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{2N+1}(-1)^n\int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

Für $x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ erhalten wir

$$\left| \frac{(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}} \right| = |x| \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} |x| > 1,$$

was nach dem Quotientenkriterium zeigt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ für alle solche x divergiert. Für $x = -1$ erhalten wir die Reihe $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, welche divergiert, weil die harmonische Reihe divergiert. Für $x = 1$ erhalten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Weil zusätzlich

$$f(1) = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

folgt, dass

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

für alle $x \in]-1,1]$.

Mathematisches Institut der Universität München 15.02.2024

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 14 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 140: Für $x > 0$ ist $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$. Da $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ stetig ist, folgt:

$$\left(\lim_{x \searrow 0} x \ln x = L \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x\searrow 0} x \ln x} = e^L \right). \tag{1}$$

Wir definieren die differenzierbaren Funkionen

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -\ln x \qquad \text{und} \qquad g :]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

und berechnen

- $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (-\ln x) = \infty$,
- $\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$,
- $\lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} x = 0 \in \mathbb{R}$.

Aus dem Regel von l'Hôpital folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \\ \Longrightarrow \quad &\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \left(-\frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{aligned}$$

und aus (1) erhalten wir

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = e^0 = 1.$$

Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} h : [-a, \infty[&\longrightarrow [0, \infty[\\ x &\longmapsto \sqrt[n]{a + x} \end{aligned}$$

und betrachten, dass h auf $]-a, \infty[$ differenzierbar mit

$$h'(x) = \left(\sqrt[n]{a + x} \right)' = \left(e^{\frac{1}{n} \ln(a+x)} \right)' = e^{\frac{1}{n} \ln(a+x)} \left(\frac{1}{n} \ln(a + x) \right)' = (a+x)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \frac{1}{a + x} = \frac{1}{n} (a+x)^{\frac{1}{n} - 1}$$

für alle $x \in]-a, \infty[$ ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned} &\lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt[n]{a + x} - \sqrt[n]{a - x}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{\sqrt[n]{a + x} - \sqrt[n]{a}}{x} - \frac{\sqrt[n]{a - x} - \sqrt[n]{a}}{x} \right) \\ =&\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} - \frac{h(-x) - h(0)}{x - 0} \right) = \frac{d}{dx}\bigg|_{x=0} h(x) - \frac{d}{dx}\bigg|_{x=0} h(-x) \\ =&h'(x)\Big|_{x=0} - h'(-x)(-x)'\Big|_{x=0} = 2h'(0) = \frac{2}{n} a^{\frac{1}{n} - 1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 141:

a) f ist in $(0,0)$ nicht stetig, da

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^6}}=\frac{n^2}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty\neq 0=f(0,0)$$

obwohl $f\left(0,\frac{1}{n}\right)=0\xrightarrow{n\to\infty}f(0,0)$.

b)

$$\frac{f\big(t(1,0)\big)-f(0,0)}{t}=\frac{\frac{t\cdot 0}{0^6+t^6}}{t}=0\xrightarrow[t\neq 0]{t\to 0}0$$

also ist $\big(D_{(1,0)}f\big)(0,0)=0$.

$$\frac{f\big(t(0,1)\big)-f(0,0)}{t}=\frac{\frac{0\cdot t^3}{0^6+t^6}}{t}=0\xrightarrow[t\neq 0]{t\to 0}0$$

also ist $\big(D_{(0,1)}f\big)(0,0)=0$.

c) Für alle $v\in\mathbb{R}^2$ mit $f(v)\neq 0$ gilt

$$\frac{f(tv)-f(0,0)}{t}=\frac{tv_1(tv_2)^3}{(tv_1)^6+(tv_2)^6}=\frac{1}{t^2}f(v).$$

Falls $\big(D_vf\big)(0,0)$ existiert, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(v)}{t^2}$ und somit auch der Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{f(v)}\frac{f(v)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}$. Da $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}=\infty\notin\mathbb{R}$, erhalten wir einen Widerspruch zur Existenz von $\big(D_vf\big)(0,0)$ für alle $v\in\mathbb{R}^2$ mit $f(v)\neq 0$.

d) Auf $\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ ist f als Quotient stetiger Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner wieder stetig und die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}D_1f:\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}&\longrightarrow L(\mathbb{R},\mathbb{R})\\(x,y)&\longmapsto\left(a\longmapsto a\big(\widetilde{D_1f}\big)(x,y)=a\frac{(x^6+y^6)y^3-6x^8y}{(x^6+y^6)^2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}D_2f:\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}&\longrightarrow L(\mathbb{R},\mathbb{R})\\(x,y)&\longmapsto\left(a\longmapsto a\big(\widetilde{D_2f}\big)(x,y)=a\frac{3(x^6+y^6)xy^2-6x^3y^8}{(x^6+y^6)^2}\right).\end{aligned}$$

Wir betrachten, dass $\widetilde{D_1f}$ und $\widetilde{D_2f}$ stetig für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ sind, d.h. für alle $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ und $\epsilon>0$ gibt es $\delta_1,\delta_2>0$, sodass

$$\|\big(\widetilde{D_1f}\big)(x_1,y_1)-\big(\widetilde{D_1f}\big)(x_2,y_2)\|<\epsilon$$

für alle $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ mit $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta_1$ und

$$\|\big(\widetilde{D_2f}\big)(x_1,y_1)-\big(\widetilde{D_2f}\big)(x_2,y_2)\|<\epsilon$$

für alle $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta_2$.
Bezeichne $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Für alle $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $\epsilon > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|(D_1 f)(x_1, y_1) - (D_1 f)(x_2, y_2)\right|\right|\right| &= \sup_{x \in S^1} \left\|\left(\big(\widetilde{D_1 f}\big)(x_1, y_1) - \big(\widetilde{D_1 f}\big)(x_2, y_2)\right)(x)\right\| \\
&\leq \left\|\big(\widetilde{D_1 f}\big)(x_1, y_1) - \big(\widetilde{D_1 f}\big)(x_2, y_2)\right\| < \epsilon
\end{aligned}$$

für alle $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta_1$ und

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|(D_2 f)(x_1, y_1) - (D_2 f)(x_2, y_2)\right|\right|\right| &= \sup_{x \in S^1} \left\|\left(\big(\widetilde{D_2 f}\big)(x_1, y_1) - \big(\widetilde{D_2 f}\big)(x_2, y_2)\right)(x)\right\| \\
&\leq \left\|\big(\widetilde{D_2 f}\big)(x_1, y_1) - \big(\widetilde{D_2 f}\big)(x_2, y_2)\right\| < \epsilon
\end{aligned}$$

für alle $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta_2$, woraus folgt, dass f stetig partiell-differenzierbar ist. Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, folgt aus Satz 15.5.9, dass f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 142:

a) Zuerst betrachten wir, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
4\cos^3(x) - 3\cos(x) &= 4\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 - 3\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
&= 4\frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}}{8} - 3\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} = \cos(3x),
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
f : D^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} e^{x_1^2 + x_2^2} \\ \ln(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \cos(3x_1 + 6x_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen

- $\dfrac{\partial}{\partial x_1} e^{x_1^2 + x_2^2} = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2}$,
- $\dfrac{\partial}{\partial x_2} e^{x_1^2 + x_2^2} = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$,
- $\dfrac{\partial}{\partial x_1} \ln(1 - x_1^2 - x_2^2) = \dfrac{-2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}$,
- $\dfrac{\partial}{\partial x_2} \ln(1 - x_1^2 - x_2^2) = \dfrac{-2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$,
- $\dfrac{\partial}{\partial x_1} \cos(3x_1 + 6x_2) = -3\sin(3x_1 + 6x_2)$,
- $\dfrac{\partial}{\partial x_2} \cos(3x_1 + 6x_2) = -6\sin(3x_1 + 6x_2)$

und betrachten, dass sie stetig für alle $x \in D^2$ sind, woraus analog zu Aufgabe 141.d) folgt, dass f stetig partiell-differenzierbar ist.

b) Für $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in D^2$ berechnen wir die Jacobimatrix von f in a

$$\begin{aligned}
\big(Jf\big)(a) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x=a} e^{x_1^2+x_2^2} & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{x=a} e^{x_1^2+x_2^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x=a} \ln(1-x_1^2-x_2^2) & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{x=a} \ln(1-x_1^2-x_2^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x=a} \cos(3x_1+6x_2) & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{x=a} \cos(3x_1+6x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}\Big|_{x=a} & 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2}\Big|_{x=a} \\ \dfrac{-2x_1}{1-x_1^2-x_2^2}\Big|_{x=a} & \dfrac{-2x_2}{1-x_1^2-x_2^2}\Big|_{x=a} \\ -3\sin(3x_1+6x_2)\Big|_{x=a} & -6\sin(3x_1+6x_2)\Big|_{x=a} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a_1 e^{a_1^2+a_2^2} & 2a_2 e^{a_1^2+a_2^2} \\ \dfrac{-2a_1}{1-a_1^2-a_2^2} & \dfrac{-2a_2}{1-a_1^2-a_2^2} \\ -3\sin(3a_1+6a_2) & -6\sin(3a_1+6a_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und die Ableitung von f in a

$$\begin{aligned}
\big(Df\big)(a) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \big(Jf\big)(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 e^{a_1^2+a_2^2} & 2a_2 e^{a_1^2+a_2^2} \\ \dfrac{-2a_1}{1-a_1^2-a_2^2} & \dfrac{-2a_2}{1-a_1^2-a_2^2} \\ -3\sin(3a_1+6a_2) & -6\sin(3a_1+6a_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$