Aufgabe 1:

$A = \{a, b, c\}$

$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$

ist eine Topologie auf A:

- $\emptyset, A \in \mathcal{O}$
- Vereinigung von (beliebig vielen) Mengen aus $\mathcal{O}$ gibt eine Menge aus $\mathcal{O}$
- Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{O}$ gibt eine Menge aus $\mathcal{O}$.

$\mathrm{id}_A : \overset{\text{mit } \mathcal{O}}{A} \longrightarrow \overset{\text{mit } \mathcal{P}(A)}{A}$ ist in

- a stetig, denn $a \in \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ also ist $\{a\}$ eine Umgebung von a bzgl. $\mathcal{P}(A)$ und $\mathrm{id}_A^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \mathcal{O}$. Für jede Umgebung V von a bzgl. $\mathcal{P}(A)$ ist $\{a\} \subseteq V$ also $\{a\} = \mathrm{id}_A^{-1}(\{a\}) \subseteq \mathrm{id}_A^{-1}(V)$ und wegen $\{a\} \in \mathcal{O}$ ist $\mathrm{id}_A^{-1}(V)$ eine Umgebung von a, weshalb id_A (laut Definition) in a stetig ist.

- b nicht stetig, denn $b \in \{b\} \in \mathcal{P}(A)$, also ist $\{b\}$ Umgebung von b bzgl. $\mathcal{P}(A)$, $id_A^{-1}(\{b\}) = \{b\} \notin \mathcal{V}$ und weil es auch kein $U \in \mathcal{V}$ mit $b \in U$ und $U \subseteq \{b\}$ gibt, ist $id_A^{-1}(\{b\}) = \{b\}$ keine Umgebung von b bzgl. $\mathcal{V}$, also id_A laut Definition nicht stetig in b.
- c nicht stetig — das geht wegen $c \in \{c\} \in \mathcal{P}(A)$ analog wie eben.

Aufgabe 2:

$X := \{\triangleleft, \circ, \triangleright\}$, $Y := \{\blacktriangleleft, \bullet, \blacktriangleright\}$

$\mathcal{O}_X := \{\emptyset, \{\triangleleft\}, X\}$, $\mathcal{O}_Y := \{\emptyset, \{\bullet\}, \{\blacktriangleleft\}, \{\bullet, \blacktriangleleft\}\}$

sind Topologien auf X bzw. Y, denn

$\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$, $\emptyset, Y \in \mathcal{O}_Y$

und offenbar sind beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{O}_X$ (bzw. $\mathcal{O}_Y$) wieder in $\mathcal{O}_X$ (bzw. $\mathcal{O}_Y$).

a) $\circ$ ist ein Häufungspunkt von $\{\triangleleft, \triangleright\}$

__Beweis:__ Jede Umgebung U von $\circ$ enthält ein $V \in \mathcal{O}_X$ mit $\circ \in V \subseteq U$. Nach Wahl von $\mathcal{O}_X$ ist X die einzige offene Umgebung von $\circ$ und somit auch die einzige Umgebung von $\circ$ (bzgl. $\mathcal{O}_X$). Die Bedingung $(U \setminus \{\circ\}) \cap \{\triangleleft, \triangleright\} \neq \emptyset$ die für jede Umgebung U von $\circ$ erfüllt sein soll, ist für die einzige Umgebung $U = X$ hier erfüllt und damit $\circ$ Häufungspunkt von $\{\triangleleft, \triangleright\}$.

b) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist nicht hausdorffsch.

<u>Beweis:</u>

Y ist die einzige offene Menge, die $\blacktriangleright$ enthält, also ist Y die einzige Umgebung von $\blacktriangleright$. Für jede Umgebung U von $\bullet$ ist $U \cap Y = \{\bullet\} \neq \emptyset$ also gibt es zu $\blacktriangleright$ und $\bullet$ keine disjunkten Umgebungen und Y ist nicht hausdorffsch.

c) f ist in $\circ$ nicht stetig.

<u>Beweis:</u>

$f(\circ) = \bullet \in \{\bullet\}$ und da $\{\bullet\} \in \mathcal{O}_Y$ ist $\{\bullet\}$ Umgebung von $f(\circ) = \bullet$ mit $f^{-1}(\{\bullet\}) = \{\circ\}$. Da $\{\circ\} \notin \mathcal{O}_X$ und es kein $V \in \mathcal{O}_X$ mit $\circ \in V$ und $V \subseteq \{\circ\}$ gibt, ist $\{\circ\}$ keine Umgebung von $\circ$ (bzgl. $\mathcal{O}_X$) und daher f in $\circ$ nicht stetig.

Aufgabe 3

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} (x+1)^2 & \text{für } x < 1 \\ -x^2+1 & \text{für } x \in [-1,1] \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

dann ist $f(-1) = -(-1)^2+1 = 0$,
$f(1) = -(1)^2+1 = 0$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt

$$1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{und} \quad f(x_n) = 2\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \neq f(1)$$

also ist f in 1 nicht stetig (denn mit dieser Folge hat man insbesondere ein Netz angegeben, durch das die Bedingung für Stetigkeit in 1 aus Satz 13.1.16 verletzt ist.)

Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ und ~~betrachte~~ dazu die Teilfolgen

$(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$y_{\varphi(n)} \in]-\infty, -1[$ bzw. $y_{\psi(n)} \in [-1, 1]$

dann ist $f(y_{\varphi(n)}) = (y_{\varphi(n)} + 1)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1+1)^2 = 0$

(denn als Teilfolge der konvergenten Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls denselben Grenzwert, also -1) und

$f(y_{\psi(n)}) = -(y_{\psi(n)})^2 + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -(-1)^2 + 1 = 0.$

Für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ gilt also $f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f(-1)$ und damit ist f laut Satz 13.2.1 in -1 stetig.

Aufgabe 1:

(X,d) metrischer Raum, $\emptyset \neq Y \subseteq X$

$$\operatorname{dist}(\cdot, Y) : X \longrightarrow [0, \infty[$$
$$x \longmapsto \operatorname{dist}(x, Y) := \inf\{d(x,y) : y \in Y\}$$

ist gleichmäßig stetig.

Beweis:

Nach Dreiecksungleichung gilt:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \text{für alle } x, y, z \in X$$

daher läßt sich auf der linken Seite $\inf\limits_{y \in Y}$ bilden

$$\inf\{d(x,y) : y \in Y\} = \operatorname{dist}(x, Y) \leq$$
$$\leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \text{für alle } x, z \in X, \; y \in Y$$

d.h. $\operatorname{dist}(x, Y) - d(z,y) \leq d(x,z)$ — " —

Bildet man nun $\sup\limits_{y \in Y}$ auf der linken Seite, so ist

$$\sup\{\operatorname{dist}(x,Y) - d(z,y) : y \in Y\} =$$
$$= \operatorname{dist}(x, Y) - \inf\{d(z,y) : y \in Y\} =$$
$$= \operatorname{dist}(x, Y) - \operatorname{dist}(z, Y) \leq d(x,z) \quad \text{für alle } x, z \in X.$$

Vertauscht man die Rollen von x und z, so folgt analog

$$\operatorname{dist}(z,Y)-\operatorname{dist}(x,Y)\le d(z,x)$$
für alle $x,z\in X$

also gilt insgesamt

$$|\operatorname{dist}(x,Y)-\operatorname{dist}(z,Y)|\le d(x,z)$$
für alle $x,z\in X$

woraus die gleichmäßige Stetigkeit von $\operatorname{dist}(\cdot,Y)$ folgt (z.B. mit $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$).

Aufgabe 2:

$$f_n : [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{nx^2}{n^2+x^2}$$

- Für $x \geq 1$ ist $f_n(x) = \dfrac{1}{\frac{n}{x^2}+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

  also $f : [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 0$ punktweiser Grenzwert

  der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \geq 1\} =$

  $= \sup\left\{\dfrac{nx^2}{n^2+x^2} : x \geq 1\right\} = \sup\left\{\dfrac{1}{\frac{n}{x^2}+\frac{1}{n}} : x \geq 1\right\}$

  $= n$ (denn $\frac{n}{x^2} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$ für alle $x \geq 1$

  deshalb ist $\dfrac{1}{\frac{n}{x^2}+\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = n$ — " —

  und damit n obere Schranke von $\left\{\dfrac{nx^2}{n^2+x^2} : x \geq 1\right\}$.

  Für $\varepsilon \in]0,1[$ wähle $\delta \in]0,1[$ mit $\dfrac{1}{\delta^2 + \frac{1}{n}} \geq n - \varepsilon$

und $x := \frac{\sqrt{n}}{\delta} > 1$, dann ist

$$f_n(x) = \frac{1}{\frac{n}{\frac{\sqrt{n}^2}{\delta^2}} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\delta^2 + \frac{1}{n}} \geq n - \varepsilon$$

also $n = \sup \left(\left\{ \frac{nx^2}{n^2 + x^2} ; x \geq 1 \right\} \right)$

Daher konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen f.

Aufgabe 3:

- $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

ist stetig, denn nach Regel für Quotient von konvergenten Folgen gilt $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x}$$

- $\sin|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, denn

$$x \longmapsto \sin(x)$$

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ist der lokal gleichmäßige Grenzwert der Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ der für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, deshalb definiert $\sin|_{\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion.

- $h: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \left((\sin|_{\mathbb{R}}) \circ g\right)(x)$$

ist stetig als Komposition von stetigen Funktionen und damit $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

als punktweise Multiplikation von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ mit h stetig.

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $0 = \lim_{n\to\infty} x_n$

ist $f(x_n) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{falls } x_n = 0 \\ x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) & \text{falls } x_n \neq 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f(0)$

denn $\left|x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq |x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$(\sin(z))^2 + (\cos z)^2 = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$
für $x \in \mathbb{R}$ sind $\sin(x), \cos(x) \in \mathbb{R}$ also
$\sin(x), \cos(x) \in [-1, 1]$

und daher f in 0 stetig.

Aufgabe 1:

$p: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $q: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind als Polynome stetig. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$ ist der Quotient $\frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}$ definiert, daher existiert die Funktion

$$\frac{p}{q} : \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$
$$z \longmapsto \frac{p(z)}{q(z)}$$

Ist nun $z \in \mathbb{C}$ mit $q(z) \neq 0$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $q^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z$. Weil p und q stetig sind gilt $p(z_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} p(z)$ und $q(z_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} q(z)$. Wegen $q(z) \neq 0$ gilt nach Regel für Quotienten von konvergenten Folgen

$$\frac{p(z_n)}{q(z_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{p(z)}{q(z)}$$

weshalb $\frac{p}{q}$ in jedem $z \in \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$ stetig ist.

Aufgabe 2:

Ist $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ stetig, so ist jeder Fixpunkt $a \in [0,1]$ von f — also mit $f(a) = a$ — eine Lösung von $f(a) - a = 0$, d.h. eine Nullstelle von $f - id_{[0,1]}$. Umgekehrt ist jede Nullstelle von $f - id_{[0,1]}$ ein Fixpunkt von f.

Mit f ist auch $f - id_{[0,1]} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig
$x \longmapsto f(x) - x$

mit $(f - id_{[0,1]})(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$

$(f - id_{[0,1]})(1) = f(1) - 1 \leq 0$ $[0,1]$ Wertevorrat von f.

Im Fall $f(0) = 0$ oder $f(1) - 1 = 0$ hat man bereits Nullstellen von $f - id_{[0,1]}$, sonst ist $f(0) < 0$ und $f(1) - 1 > 0$ und laut Zwischenwertsatz hat $f - id_{[0,1]}$ dann (mindestens) eine Nullstelle in $]0,1[$.

Aufgabe 3: $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Beh.: $V := \{(x,y) \in I \times I : x < y\}$

ist zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Bew.: Fixiere $z = (z_1, z_2) \in V$ und betrachte zu $w = (w_1, w_2) \in V$ die Abbildung

$$\alpha_w : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto tz + (1-t)w$$

Dann ist α_w stetig und somit $A_w := \alpha_w([0,1])$ als Bild des Intervalls $[0,1]$ bei der stetigen Funktion α_w zusammenhängend. $z = \alpha_w(1) \in A_w$ und $w = \alpha_w(0) \in A_w$ und wegen $w_1 < w_2$, $z_1 < z_2$ ist $tz_1 + (1-t)w_1 < tz_2 + (1-t)w_2$ also $\alpha_w(t) \in V$ für alle $t \in [0,1]$ oder $A_w \subseteq V$. Damit ist $V = \bigcup_{w \in V} A_w$, $z \in \bigcap_{w \in V} A_w$ und daher V als Vereinigung von zusammenhängenden Mengen mit nichtleerem Durchschnitt nach Lemma 13.5.8 zusammenhängend.

Aufgabe 4:

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann sind äquivalent:

a) f injektiv

b) f ist streng monoton

Beweis:

a) $\Longrightarrow$ b) Ist $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv. Da I ein Intervall ist, so ist laut Aufgabe 3

$V := \{(x,y) \in I \times I : x<y\}$

zusammenhängend. Weil f stetig ist, ist auch

$$F: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x)-f(y)$$

als Einschränkung der Differenz von zwei stetigen Funktionen wieder stetig. Weil f injektiv ist, gilt $F(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in V$.

Nach dem Zwischenwertsatz ist $F(V) \subseteq \mathbb{R}$

ein Intervall und mit $0 \notin F(V)$
folgt $F(V) \subseteq]0,\infty[$ oder $F(V) \subseteq]-\infty,0[$.
Im Fall $F(V) \subseteq]0,\infty[$ ist f streng monoton fallend, im Fall $F(V) \subseteq]-\infty,0[$ ist f streng monoton steigend.

b) $\Rightarrow$ a) Da $\mathbb{R}$ und I totalgeordnet sind, gilt für $x, y \in I$ mit $x \neq y$ dann $x < y$ oder $y < x$ und aus der strengen Monotonie folgt daraus $f(x) \neq f(y)$ d.h. f ist injektiv.

Aufgabe 1:

$(X, \mathcal{V}_X)$ kompakter topologischer Raum
$(Y, \mathcal{V}_Y)$ hausdorffscher topologischer Raum
$f: X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv
<u>Beh:</u> f Homöomorphismus (also $f^{-1}: Y \to X$ stetig)

<u>Beweis:</u> $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ stetig
$\Longleftrightarrow (f^{-1})^{-1}(A)$ ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene $A \subseteq X$.

Da f^{-1} Umkehrfunktion von f ist, gilt $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ und weil A als abgeschlossene Teilmenge von X kompakt ist, ist $f(A) \subseteq Y$ kompakt (vgl. Lemma B.6.3 da Y hausdorffsch) also $f(A)$ abgeschlossen (Lemma B.6.2).
Damit ist f^{-1} stetig und f Homöomorphismus.

Aufgabe 2:

a) Gegenbeispiel:

$$f:]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist stetig (nach Regel}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

für Quotienten von konvergenten Folgen gilt

$$x_n \longrightarrow x \neq 0 \Longrightarrow f(x_n) = \frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{x} = f(x))$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{n} \in]0,1]$ und

$1, f(\frac{1}{n}) = n \in f(]0,1])$ also $[1,n] \subseteq f(]0,1])$ laut Zwischenwertsatz und daher $f(]0,1])$ nicht beschränkt.

b) $B \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt ist kompakt nach Satz von Bolzano-Weierstraß. $f(B)$ ist als Bild der kompakten Menge B bei der stetigen Funktion f kompakt, also insbesondere beschränkt, deshalb besitzt die beschränkte Teilmenge $f(B) \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum und ein Supremum.

Aufgabe 3:

Ist (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, dann ist $M := \{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt, denn ist $U_i \subseteq X$ offen für $i\in I$ und

$$M \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

dann gibt es $j\in I$ mit $x\in U_j$ und da U_j offen ist, gibt es $r>0$ mit $K(x,r) := \{y\in X : d(x,y)<r\} \subseteq U_j$. Weil $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ gibt es $N\in\mathbb{N}$ mit $d(x_n,x) < r$ für alle $n>N$. Wählt man für $n\in\{1,\dots,N\}$ ein $i_n\in I$ mit $x_n\in U_{i_n}$, dann ist

$$M \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{N} U_{i_n}\right) \cup U_j$$

und daher M kompakt.

Betrachtet man die beiden konvergenten Folgen $\left(1+\frac{1}{(2n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(-\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, dann ist $M_1 = \left\{1+\frac{1}{(2n)^2} : n\in\mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$ und $M_2 := \left\{-\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}\right) : n\in\mathbb{N}_0\right\} \cup \{-1\}$ kompakt und daher

$$K = \{(-1)^{n^2}(1+\frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 1\}$$

$$= M_1 \cup M_2$$

als Vereinigung von zwei kompakten Mengen wieder kompakt.

Aufgabe 1:

Für $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ gilt

- $$\|\underline{x}\|_2^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_d|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|\right)^2 = \|\underline{x}\|_1^2$$

$$(|x_1| + \ldots + |x_d|)^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_d|^2 + \underbrace{2|x_1||x_2| + \ldots}_{\geq 0}$$

also folgt durch $\sqrt{\cdot}$:

$$\|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1$$

- $$\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_d| = |x_1| \cdot 1 + \ldots + |x_d| \cdot 1 =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_d| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_d|^2} \cdot \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2}$$

$$= \|\underline{x}\|_2 \cdot \sqrt{d}$$

Damit ist

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1 \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgabe 2:

a) Wegen $\sin(x) = -\sin(-x)$ und $\cos(x) = \cos(-x)$ ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan(-x)$ für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sind nun $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$0 \leq \tan(x_1) = \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)} < \frac{\sin(x_2)}{\cos(x_1)}$$

cos auf $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton fallend
$\Longrightarrow \sin(x) = \sqrt{1-(\cos x)^2}$ streng monoton steigend auf $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$< \frac{\sin(x_2)}{\cos(x_2)} = \tan(x_2)$$

$\cos(x_1) > \cos(x_2)$

also tan streng monoton steigend auf $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und

$$\tan(-x_2) = -\tan(x_2) < -\tan(x_1) = \tan(-x_1) \leq 0 \leq \tan(x_1) < \tan(x_2),$$

also tan auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton steigend.

b) Da sin und cos stetige Funktionen sind und $\cos(x) \neq 0$ für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan(x_n) = \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

nach der Regel für Quotienten von konvergenten Folgen mit nullstellenfreiem Nenner und da $\sin(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin(x)$ und $\cos(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(x)$ aufgrund der Stetigkeit von sin und cos.

Damit ist $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Wegen $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ gibt es wegen Stetigkeit von sin und cos eine Umgebung U von $\frac{\pi}{2}$ mit $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \in U$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $\cos(x_n) \leq \frac{1}{n}$. Somit ist $\tan(x_n) \geq \frac{n}{2}$ und damit tan nicht nach oben beschränkt.

Analog gibt es wegen $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n < x_n$, $\tan(y_n) \leq -\frac{n}{2}$.

Nach dem Zwischenwertsatz ist

$$\left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right] \subseteq \tan([y_n, x_n]) \text{ also}$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right] = \mathbb{R} \subseteq \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

also $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ surjektiv.

Da tan streng monoton steigend ist (nach a)) ist tan auch injektiv, also bijektiv und daher existiert die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ist $U \subseteq \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ offen, so ist

$$(\arctan^{-1})(U) = \{y \in \mathbb{R} : \arctan(y) \in U\} =$$
$$= \tan(U).$$

Ferner gibt es abzählbar viele paarweise disjunkte offene Intervalle $]\alpha_n, \beta_n[\subseteq \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\alpha_n, \beta_n[$, denn $U = V \cap \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (nach Definition der Relativtopologie auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) und jedes offene $V \subseteq \mathbb{R}$ (bzgl. Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ hat nach Lemma 13.5.10 diese Form. Da tan streng monoton steigend ist, gilt $\tan(]\alpha_n, \beta_n[) =]\tan(\alpha_n), \tan(\beta_n)[$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist

$$\arctan^{-1}(U) = \tan(U) = \tan\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\alpha_n, \beta_n[\right)$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\tan(\alpha_n), \tan(\beta_n)[$$

als Vereinigung von offenen Intervallen wieder offen, also arctan stetig.

Aufgabe 1

$\emptyset \neq X$ endliche Menge

a) Beh: Für das Zählmaß $\nu: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty[$ und die Diracmaße δ_x gilt:

$$\nu = \sum_{x\in X} \delta_x$$

Beweis: Für jedes $A \subseteq X$ ist $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X \setminus A \end{cases}$

$$\text{also } \left(\sum_{x\in X} \delta_x\right)(A) = \sum_{x\in X} \delta_x(A) = |A|$$

ist gerade die (endliche) Anzahl von Elementen von A und daher gleich $\nu(A)$.

b) Beh: Jedes Maß $\mu: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ hat die Form

$$\mu = \sum_{x\in X} \mu(\{x\})\, \delta_x$$

Beweis: Für jedes $x \in X$ ist $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$, daher ist (für $A \subseteq X$)

$$A = \bigcup_{x\in A} \{x\} \qquad (*)$$

eine Zerlegung in endlich viele, paarweise disjunkte Mengen in $\mathcal{P}(X)$, also folgt aus der Additivität von μ und $(*)$:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{x\in A}\{x\}\right) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}) = \sum_{x\in X} \mu(\{x\})\,\delta_x(A)$$

für alle $A \subseteq X$.

Aufgabe 2:
Es sei $\emptyset \neq X$ eine nicht abzählbare Menge und

$$\mathcal{A} = \{U \subseteq X : U \text{ abzählbar oder } X \backslash U \text{ abzählbar }\}$$

die σ-Algebra aus Beispiel 14.1.3. Zeige:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\rightarrow [0,1] \\ Y &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } Y \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } X \backslash Y \text{ abzählbar} \end{cases} \end{aligned}$$

definiert einen Wahrscheinlichkeitsraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Beweis: $\emptyset$ ist abzählbar, also $\mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{A}$, so unterscheide:

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge A_n ist abzählbar, dann ist auch $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar, dh. in diesem Fall ist $0 = \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.
- Gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $X\backslash A_m$ abzählbar ist, dann ist auch $X \backslash \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (X\backslash A_n) \subseteq X\backslash A_m$ abzählbar, also $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$. Da die Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt sind, ist $\bigcup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq m}} A_n \subseteq X\backslash A_m$, also $\bigcup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq m}} A_n$ und somit auch jedes A_n, $n \neq m$ abzählbar, dh. $\mu(A_m) = 1$ und $\mu(A_n) = 0$ für $n \neq m$, also $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 1$.

Daher ist μ auch σ-additiv, also ein Maß. Da X nicht abzählbar ist, gilt $\mu(X) = 1$ und damit ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Aufgabe 3:

$(X, \mathfrak{A}), (Y, \mathfrak{B}), (Z, \mathfrak{C})$ Meßräume

$f: X \longrightarrow Y$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-meßbar

$g: Y \longrightarrow Z$ $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{C}$-meßbar

Damit ist für jedes $C \in \mathfrak{C}$ dann

$g^{-1}(C) \in \mathfrak{B}$ (wegen $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{C}$-Meßbarkeit von g)

also $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}$

(wegen $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-Meßbarkeit von f).

Insgesamt ist $(g \circ f)^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$ für alle $C \in \mathfrak{C}$

und daher $g \circ f$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{C}$-meßbar

Aufgabe:

$X = \{0,1,2,3\}$

$\mathcal{E} = \{\{0,1\}, \{1,2\}, \{1\}\}$, $\mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{E})$

$\mathcal{F} = \{\{0,1\}, \{1,2\}\}$, $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{F})$

a) $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(X)$

Beweis:

$\{1\} = \{0,1\} \cap \{1,2\} \in \sigma(\mathcal{F})$

$\{3\} = X \setminus (\{0,1\} \cup \{1,2\}) \in \sigma(\mathcal{F})$

$(X \setminus \{1\}) \cap \{0,1\} = \{0,2,3\} \cap \{0,1\} = \{0\} \in \sigma(\mathcal{F})$

$(X \setminus \{1\}) \cap \{1,2\} = \{0,2,3\} \cap \{1,2\} = \{2\} \in \sigma(\mathcal{F})$

Da X endlich, sind alle Teilmengen von X – als Vereinigung von endlich vielen der Mengen $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ und $\{3\}$ in $\sigma(\mathcal{F})$ enthalten, also $\mathcal{P}(X) = \sigma(\mathcal{F})$. Wegen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ist

$\mathcal{P}(X) = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P}(X)$.

b) Durch $p(\{0,1\}) = p(\{1,2\}) = \frac{2}{3}$ und

(1) $p(\{1\}) = \frac{1}{3}$

wird ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß

$p: \sigma(\mathcal{E}) \longrightarrow [0,1]$ definiert.

<u>Beweis:</u>

$$p(\{0,1,2\}) = p(\{0,1\}) + p(\{1,2\}) - p(\{1\}) =$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

also $p(\{3\}) = 0$

$$p(\{0,1,3\}) = p(\{0,1\}) + p(\{3\}) = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow p(\{2\}) = \frac{1}{3}$$

$$p(\{1,2,3\}) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow p(\{0\}) = \frac{1}{3}$$

Damit ist $p(\{0\}) = p(\{1\}) = p(\{2\}) = \frac{1}{3}$

$p(\{3\}) = 0$

konsistent mit (1) und definiert damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(X)$.

c) Durch $q(\{0,1\}) = q(\{1,2\}) = \frac{2}{3}$
wird kein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß
auf $\sigma(\mathcal{J})$ definiert.

Beweis:

$q_1(\{0\}) = q_1(\{1\}) = q_1(\{2\}) = \frac{1}{3}, \quad q_1(\{3\}) = 0$

erfüllt laut b) diese Bedingung

$q_2(\{0\}) = q_2(\{2\}) = q_2(\{3\}) = \frac{1}{6}, \quad q_2(\{1\}) = \frac{1}{2}$

erfüllt auch

$$q_2(\{0,1\}) = q_2(\{0\}) + q_2(\{1\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$q_2(\{1,2\}) = q_2(\{1\}) + q_2(\{2\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2:

$\mathcal{E} := \{\{1,\dots,2k-1\} : k\in\mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

a) <u>Beh:</u> $\sigma(\mathcal{E}) = \{\bigcup_{j\in J} V_j : J\subseteq \mathbb{N}\}$

mit $V_j = \begin{cases} \{1\} & \text{für } j=1 \\ \{2j-2, 2j-1\} & \text{für } j\geq 2 \end{cases}$

<u>Beweis:</u>

Mit $\mathcal{E}$ sind auch alle Durchschnitte von Elementen von $\mathcal{E}$ in $\sigma(\mathcal{E})$ enthalten, somit ist jedes $V_j = \{1,\dots,2j-3\}^c \cap \{1,\dots,2j-1\} \in \sigma(\mathcal{E})$ und daher

$\mathcal{O} := \{\bigcup_{j\in J} V_j : J\subseteq\mathbb{N}\} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

denn jedes $J\subseteq\mathbb{N}$ ist abzählbar, also sind mit $V_j, j\in J$ auch $\bigcup_{j\in J} V_j$ in $\sigma(\mathcal{E})$

$\mathcal{O}$ ist bereits eine σ-Algebra, denn

i) $\emptyset = \bigcup_{j\in\emptyset} V_j \in \mathcal{O}$

ii) Ist $A = \bigcup_{j\in J} V_j \in \mathcal{O}$, dann ist

$\mathbb{N}\setminus A = \bigcup_{j\in \mathbb{N}\setminus J} V_j \in \mathcal{O}$ (da $\mathbb{N}\setminus J \subseteq \mathbb{N}$)

iii) Sind $A_n = \bigcup_{j \in J_n} V_j \in \mathfrak{A}$, dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{j \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n} V_j \in \mathfrak{A}$$

$$\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}$$

$$\Longrightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}}} \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$$

also $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{A} = \{\bigcup_{j \in J} V_j : J \subseteq \mathbb{N}\}$.

b) Weil für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gilt $V_k \cap V_l = \emptyset$, gibt es für jedes $A \in \sigma(\mathcal{E}) = \{\bigcup_{j \in J} V_j : J \subseteq \mathbb{N}\}$ ein eindeutiges $J(A) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit

$$A = \bigcup_{j \in J(A)} V_j$$

und dies gibt eine eindeutige Zerlegung von A in abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen V_j, $j \in J(A)$.

$$\mu(A) := e^{-\lambda} \sum_{j \in J(A)} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ A \cap V_j \neq \emptyset}} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}$$

ist also für jedes $A \in \mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{E})$ wohldefiniert.

$\mu : \sigma(\mathcal{E}) \longrightarrow [0,1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß

i) $\mu(\emptyset) = e^{-\lambda} \sum\limits_{j \in \emptyset} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = 0$

ii) Sind $A_n = \bigcup\limits_{j \in J(A_n)} V_j$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen in $\mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{E})$, dann ist auch $(J(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen in $\mathbb{N}$ und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in J(A_n)} V_j = \bigcup_{j \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J(A_n)} V_j$$

gibt die Zerlegung von $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in paarweise disjunkte Mengen V_j, $j \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} J(A_n)$ an, daher ist

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = e^{-\lambda} \sum_{j \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J(A_n)} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \sum_{j \in J(A_n)} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

also μ σ-additiv.

iii) $\mathbb{N} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$ also

$$\mu(\mathbb{N}) = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

und damit ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathcal{E})$.

Aufgabe 1:

$M_0 = [0,1]$

$M_1 = [0,1] \setminus \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

$M_2 = M_1 \setminus \left(\left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$

$M_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup$

$\left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$ — ist paarweise disjunkte Vereinigung

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{M_3} \, d\lambda = \lambda(M_3) = \lambda\left(\left[0, \tfrac{1}{27}\right]\right) + \lambda\left(\left[\tfrac{2}{27}, \tfrac{1}{9}\right]\right) + \lambda\left(\left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{27}\right]\right) +$$

$$+ \lambda\left(\left[\tfrac{8}{27}, \tfrac{1}{3}\right]\right) + \lambda\left(\left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{19}{27}\right]\right) + \lambda\left(\left[\tfrac{20}{27}, \tfrac{7}{9}\right]\right) + \lambda\left(\left[\tfrac{8}{9}, \tfrac{25}{27}\right]\right) + \lambda\left(\left[\tfrac{26}{27}, 1\right]\right)$$

$$= \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$\delta_{\frac{1}{3}}\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right) = 0$

$$\int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{M_3} \, d\delta_{\frac{1}{3}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3} \mathbb{1}_{\left\{\frac{1}{3}\right\}} \, d\delta_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} \in M_3$, also $\left(id_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{M_3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Da M_n die Vereinigung von 2^n paarweise disjunkten Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$ ist, gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{M_n} \, d\lambda = \lambda(M_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Aufgabe 2:

a) $(X, \mathfrak{A})$ Meßraum, $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ meßbar, $x \in X$

Beh: $\int_X f \, d\delta_x = f(x)$.

Beweis: Da $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ meßbar ist, gibt es eine Folge $(f_n: X \longrightarrow [0,\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathfrak{A}$-Stufenfunktionen mit $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ für alle $x \in X$. Nach Definition des Integrals für nichtnegative meßbare Funktionen ist

$$\int_X f \, d\delta_x = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\delta_x .$$

und $\int_X f_n \, d\delta_x = f_n(x)$ laut Definition des Diracmaßes.

Insgesamt folgt

$$\int_X f d\delta_x = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\delta_x = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Da $\mathbb{Q}$ abzählbar und $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, ist $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ als Vereinigung von abzählbar vielen Elementen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auch in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthalten. Daher ist

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \lambda(\{x\}) =$$

$\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ ist abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Mengen

$$= 0$$

$\lambda(\{x\}) = 0$

Aufgabe 3:

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ Maßraum

Beh: $\mu^*: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$
$$Q \longmapsto \inf\{\mu(A) : A \in \mathfrak{A}, Q \subseteq A\}$$
ist ein äußeres Maß auf X

Beweis:

- Da $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ ist, gilt
$$\mu^*(\emptyset) = \inf\{\mu(A) : A \in \mathfrak{A}, \emptyset \subseteq A\}$$
$$= \mu(\emptyset) = 0$$

- Sind $B, C \in \mathcal{P}(X)$ mit $B \subseteq C$, dann ist
$$\{A \in \mathfrak{A} : B \subseteq A\} \supseteq \{A \in \mathfrak{A} : C \subseteq A\}$$
und damit ist
$$\{\mu(A) : A \in \mathfrak{A}, B \subseteq A\} \supseteq \{\mu(A) : A \in \mathfrak{A}, C \subseteq A\}$$
und damit
$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) : A \in \mathfrak{A}, B \subseteq A\}$$
$$\leq \inf\{\mu(A) : A \in \mathfrak{A}, C \subseteq A\} = \mu^*(C)$$

- Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(X)$. Zum Beweis der σ-Subadditivität dürfen wir o.E. $\mu^*(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen (denn andernfalls ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) = \infty$ und damit

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \le \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)\Big)$$

Da $\mu^*(B_n) = \inf\{\mu(A) : A \in \mathfrak{A},\ B_n \subseteq A\} < \infty$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $A_{n,\varepsilon} \in \mathfrak{A}$ mit $B_n \subseteq A_{n,\varepsilon}$ und

$$\mu(A_{n,\varepsilon}) - 2^{-n}\varepsilon \le \mu^*(B_n) \le \mu(A_{n,\varepsilon}).$$

Wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,\varepsilon}}_{\in \mathfrak{A}}$ ist

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \inf\Big\{\mu(A) : A \in \mathfrak{A},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq A\Big\}$$

$$\le \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,\varepsilon}\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \mu \text{ ist als Maß } \sigma\text{-subadditiv}}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n,\varepsilon})$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(B_n) + 2^{-n} \varepsilon \right)$$

$$= \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n). \qquad (1)$$

Bildet man in (1) den Grenzwert $\varepsilon \downarrow 0$, so folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$$

und somit ist μ^* σ-subadditiv.

Damit ist μ^* ein äußeres Maß.

Aufgabe 1:

a) $f_n = \mathbb{1}_{\left[\frac{5+n}{3}, \frac{7+n}{3}\right]}$ ist eine $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Stufenfunktion

deshalb ist

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \lambda\left(\left[\frac{5+n}{3}, \frac{7+n}{3}\right]\right) = \frac{7+n}{3} - \frac{5+n}{3} = \frac{2}{3}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \frac{2}{3}$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x < 2$ ist $x < \frac{5+n}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(x) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $x < \frac{5+N}{3}$ also ist $x < \frac{5+n}{3}$ für $n \geq N$ und damit $f_n(x) = \mathbb{1}_{\left[\frac{5+n}{3}, \frac{7+n}{3}\right]}(x) = 0$ für $n \geq N$.

Insgesamt ist $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also

$$\int_{\mathbb{R}} (\lim f_n) \, d\lambda = 0$$

- $f_n \geq 0$, aber für $x \geq 2$ ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ keine monotone Folge — der Satz von der monotonen Konvergenz ist also nicht anwendbar.
- Ist $h: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ eine Majorante für alle Funktionen f_n, so gilt $h \geq \mathbb{1}_M$

mit $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{5+n}{3}, \frac{7+n}{3}\right] = [2, \infty[$

und da $\lambda(M) = \infty$ gibt es für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine λ-integrierbare Majorante.

b) $g_n = \mathbb{1}_{\left[-1+\frac{1}{n+1},\, 1-\frac{1}{n+1}\right]} \frac{21(n+1)}{n}$

Weil $\left[-1+\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}\right] \subseteq [-1,1]$ und

$\frac{21(n+1)}{n} = 21 + \frac{21}{n} \leq 42$ gilt

$$0 \leq g_n(x) = \mathbb{1}_{\left[-1+\frac{1}{n+1},\, 1-\frac{1}{n+1}\right]}(x) \frac{21(n+1)}{n} \leq 42 \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

also ist $42 \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}$ eine Majorante für $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die wegen $\int_{\mathbb{R}} |42 \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}| \, d\lambda = 42 \cdot \lambda([-1,1]) = 84 < \infty$

λ-integrierbar ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$g_n(x) = \mathbb{1}_{\left[-1+\frac{1}{n+1},\, 1-\frac{1}{n+1}\right]}(x) \frac{21(n+1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot 21$$

und damit ist $\int_{\mathbb{R}} (\lim g_n) \, d\lambda = 21 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]} \, d\lambda$

$$= 42 \underset{\text{majorisierte Konvergenz}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda$$

Aufgabe 2:

a) $$f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$k \longmapsto \exp\left(\frac{i\pi \sqrt[n]{n}\, k}{2}\right) \cos\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$|f_n(k)| = \Big|\exp\Big(i \underbrace{\frac{\pi \sqrt[n]{n}\, k}{2}}_{\in \mathbb{R}}\Big)\Big| \, \Big|\cos\left(\frac{k}{n}\right)\Big| \le 1$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

Da $$\int_{\mathbb{N}} 1\!\!1_{\mathbb{N}} \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=1}^{m} 1\!\!1_{\{k\}}\Big) d\mu$$

$0 \le \sum_{k=1}^{m} 1\!\!1_{\{k\}} = 1\!\!1_{\{1,\dots,m\}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1\!\!1_{\mathbb{N}}$ also Satz von monotonen Konvergenz anwendbar

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(\{k\}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lim_{m\to\infty} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\lambda^l}{l!} = 1 < \infty$$

ist $1\!\!1_{\mathbb{N}}$ eine μ-integrierbare Majorante für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ und $\frac{k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und exp und cos stetig sind ist $f_n(k) = \exp\left(i\,\frac{\pi \frac{n}{n} k}{2}\right) \cos\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(i\frac{\pi}{2}k\right)\cdot\cos(0) = e^{i\frac{\pi}{2}k} =: f(k).$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz ist

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad k \longmapsto f(k) = e^{i\frac{\pi}{2}k}$$ μ-integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu.$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}k} = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{für gerades } k \\ i(-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{für ungerades } k \end{cases}$$

und $\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{\pi}{2}k} \mathbb{1}_{\{k\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ durch die μ-integrierbare Majorante $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ majorisiert, daher ist

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \exp\left(i\frac{\pi}{2}k\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

b) Da für $k \in \mathbb{N}$ dann $\left|\frac{1}{k+1}\right| < 1$ erhalten wir als Partialsumme der geometrischen Reihe

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^l} = \frac{1-\frac{1}{(k+1)^{n+1}}}{1-\frac{1}{k+1}}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$f_n(k) = -\frac{3}{2} + \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^l} = -\frac{3}{2} + \frac{1-\frac{1}{(k+1)^{n+1}}}{1-\frac{1}{k+1}}$$

monoton steigend

$$f_1(k) = -\frac{3}{2} + \sum_{l=0}^{1} \frac{1}{(k+1)^l} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}$$

$$\leq f_n(k) \leq \lim_{n \to \infty} f_n(k) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{k+1}{k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

also ist $|f_n(k)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und damit ist $\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ eine μ-integrierbare Majorante (vgl. a)) zu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz sind alle Funktionen f_n und auch

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$k \longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(k) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

μ-integrierbar mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu.$$

$$h_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$k \longmapsto \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) \mathbb{1}_{\{1,\dots,n\}}(k) = \sum_{l=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{l}\right) \mathbb{1}_{\{l\}}(k)$$

$h_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(k)$ majorisiert durch $\frac{1}{2} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$

also ist laut dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} h_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{l}\right) \mu(\{l\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{l}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{l-1}}{(l-1)!} =$$

$$= -\frac{e^{-\lambda}}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^l}{l!} + e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda^{l-1}}{l!}$$

$$= -\frac{1}{2} + e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda^l}{l!}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Aufgabe 1: X, Y $\mathbb{K}$-Banachräume, $U \subseteq X$ offen

$f: U \longrightarrow Y$ und $g: U \longrightarrow Y$ differenzierbar in $a \in U$.

Beh: Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ist $\lambda f + \mu g: \begin{array}{l} U \longrightarrow Y \\ x \longmapsto \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array}$

in a differenzierbar mit

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

Beweis: Da f und g in a differenzierbar sind, sind f und g in a stetig und es gibt stetige lineare Abbildungen $S = (Df)(a): X \longrightarrow Y$ und $T = (Dg)(a): X \longrightarrow Y$ so daß $S + f(a)$ die Funktion f in a berührt bzw. $T + g(a)$ die Funktion g in a berührt, d.h.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in U \setminus \{a\}}} \frac{\|f(x) - f(a) + S[x-a]\|}{\|x-a\|} = 0 = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in U \setminus \{a\}}} \frac{\|g(x) - g(a) - T[x-a]\|}{\|x-a\|}$$

Dann ist auch $\lambda f + \mu g$ in a stetig und

$$0 \le \frac{\|\lambda f(x) + \mu g(x) - (\lambda f(a) + \mu g(a) + \lambda S[x-a] + \mu T[x-a])\|}{\|x-a\|} \le$$

$$\le |\lambda| \frac{\|f(x) - f(a) - S[x-a]\|}{\|x-a\|} + |\mu| \frac{\|g(x) - g(a) - T[x-a]\|}{\|x-a\|}$$

$$\xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in U \setminus \{a\}}]{} 0$$

Damit beschreibt $\lambda f(a) + \mu g(a) + \lambda S + \mu T$ die Funktion $\lambda f + \mu g$ im Punkt a, also ist $\lambda f + \mu g$ in a differenzierbar und

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda S + \mu T = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

Aufgabe 2:

$\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, Y Banachraum

$f: I \longrightarrow Y$ in a differenzierbar, dann existiert

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \in I \setminus \{a\}}} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} \in Y$$

und damit ist

$$\varphi: I \longrightarrow Y$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} & \text{für } t \in I \setminus \{a\} \\ \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I \setminus \{a\}}} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} & \end{cases}$$

wohldefiniert, ist in a stetig und erfüllt

$$f(t) - f(a) = (t-a)\,\varphi(t) \qquad \text{für } t \in I \setminus \{a\}$$

bzw. auch für $t = a$. Damit ist

$$f(t) - f(a) = (t-a)\,\varphi(t) \xrightarrow[t \to a]{} 0 \cdot \varphi(a) = \vec{0}$$

und daher ist f in a stetig.

Aufgabe 3:

Für $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ ist

$$\overline{f}_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad \underline{x} \longmapsto A\underline{x}$$

nach Satz 13.9.4 (bezüglich den Normtopologien stetig. Nach Beispiel 15.1.8 ist $\overline{f}_A$ in jedem $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ differenzierbar mit $(D\overline{f}_A)(\underline{a}) = \overline{f}_A$. Die Funktion $h: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $\underline{x} \longmapsto \underline{b}$

ist konstant, also nach Beispiel 15.1.8 differenzierbar mit $(Dh)(\underline{a}) = 0$ für jedes $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$. Nach Aufgabe 1 ist die Summe

$$f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad \underline{x} \longmapsto A\underline{x} + \underline{b}$$

in jedem $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ differenzierbar mit

$$(Df)(\underline{a}) = (D\overline{f}_A)(\underline{a}) + (Dh)(\underline{a}) = \left(\overline{f}_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m, \ \underline{x} \longmapsto A\underline{x}\right)$$

Aufgabe 1:

Y_1, Y_2, Z Banachräume

$\Phi: Y_1 \times Y_2 \longrightarrow Z$ stetig, bilinear

a) Da Φ stetig ist, ist Φ auch in $(\vec{0},\vec{0})$ stetig, also gibt es nach dem ε-δ Kriterium ein $\delta > 0$ mit

$$\sup\{\|y_1\|, \|y_2\|\} \leq \delta \Longrightarrow \|\Phi[(y_1,y_2)]\| \leq 1$$

Fall 1: $\|y_1\|, \|y_2\| > 0$ dann ist für

$$\tilde{y}_1 := \frac{\delta y_1}{\|y_1\|} \quad \text{und} \quad \tilde{y}_2 := \frac{\delta y_2}{\|y_2\|}$$

$$\sup\{\|\tilde{y}_1\|, \|\tilde{y}_2\|\} = \delta \Longrightarrow \|\Phi[(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)]\| \leq 1$$

$$\delta^2 \|\Phi[(y_1,y_2)]\| \cdot \frac{1}{\|y_1\|} \cdot \frac{1}{\|y_2\|}$$

$$\Longrightarrow \|\Phi[(y_1,y_2)]\| \leq \frac{1}{\delta^2}\|y_1\| \cdot \|y_2\|$$

Fall 2: $\|y_1\| = 0$ oder $\|y_2\| = 0 \longrightarrow \Phi[(y_1,y_2)] = 0$

b) Für $b = (b_1, b_2)$, $y = (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ ist

$$F: Y_1 \times Y_2 \longrightarrow Z$$
$$(y_1, y_2) \longmapsto \Phi[(b_1, y_2)] + \Phi[(y_1, b_2)]$$

eine stetige lineare Abbildung (denn Φ stetig und bilinear), also ist $F \in L(Y_1 \times Y_2, Z)$

$$\phi[(b_1+y_1, b_2+y_2)] = \phi[(b_1, b_2+y_2)] + \phi[(y_1, b_2+y_2)]$$

$$= \phi[(b_1, b_2)] + \phi[(b_1, y_2)] + \phi[(y_1, b_2)] + \phi[(y_1, y_2)]$$

$$0 \leq \frac{\|\phi[(b_1+y_1, b_2+y_2)] - \phi[(b_1, b_2)] - F(y_1, y_2)\|}{\|(y_1, y_2)\|_\infty}$$

$$= \frac{\|\phi[(y_1, y_2)]\|}{\|(y_1, y_2)\|_\infty} \overset{a)}{\leq} \frac{C\|y_1\| \cdot \|y_2\|}{\max\{\|y_1\|, \|y_2\|\}} \xrightarrow[\|y_1\|, \|y_2\| \to 0]{} 0$$

weshalb ϕ in $b = (b_1, b_2)$ differenzierbar mit $\phi'(b) = F$ ist.

Aufgabe 2:

$\mathcal{H}$ $\mathbb{R}$-Hilbertraum

Beh: $F : \mathcal{H} \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow]0,\infty[$ ist
$\varphi \longmapsto \|\varphi\|$

differenzierbar

Beweis:

Da $\mathcal{H}$ als normierter Raum eine hausdorffsche Normtopologie hat, ist $\{\vec{0}\}$ abgeschlossen, also $\mathcal{H} \setminus \{\vec{0}\}$ offen. F schreibt sich als Komposition

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}\setminus\{\vec{0}\} & \xrightarrow{f} & (\mathcal{H}\setminus\{\vec{0}\})\times(\mathcal{H}\setminus\{0\}) & \xrightarrow{g} &]0,\infty[& \xrightarrow{h} &]0,\infty[\\ \varphi & \longmapsto & (\varphi,\varphi) & \longmapsto & \langle\varphi,\varphi\rangle & \longmapsto &]0,\infty[\end{array}$$

mit
$$h :]0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$g : (\mathcal{H}\setminus\{0\}) \times (\mathcal{H}\setminus\{0\}) \longrightarrow]0,\infty[, \quad (\varphi,\varphi) \longmapsto \langle\varphi,\varphi\rangle$$

$$f : \mathcal{H}\setminus\{0\} \longrightarrow (\mathcal{H}\setminus\{0\}) \times (\mathcal{H}\setminus\{0\}), \quad \varphi \longmapsto (\varphi,\varphi)$$

Für $x, a \in]0,\infty[$ ist für $x \neq a$:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

d.h. h ist in $a \in]0,\infty[$ differenzierbar mit

$$h'(a) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{a}}\, x$$

Da $\mathcal{H}$ reeller Hilbertraum ist, ist das Skalarprodukt $g = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinear und

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi, \psi \rangle$$

stetig, also

$$(Dg)(\eta, \xi) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \eta, \psi \rangle + \langle \varphi, \xi \rangle$$

nach Aufgabe 1 bzw. Lemma 15.1.13 und $f = \mathrm{id}_{\mathcal{H},\text{föt}} \times \mathrm{id}_{\mathcal{H},\text{föt}}$ ist nach Beispiel 15.1.8 und Satz 15.1.12 differenzierbar mit

$$f'(\varphi) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$
$$\psi \longmapsto (\psi, \psi)$$

Nach der Kettenregel ist $F = h \circ g \circ f$ differenzierbar und für $\varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ ist

$$F'(\varphi) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\psi \longmapsto F'(\varphi)[\psi]$$

gegeben durch

$$F'(\varphi)[\psi] = (h \circ g \circ f)'(\varphi)[\psi] =$$

$$= h'((g \circ f)(\varphi)) \circ g'(f(\varphi)) \circ f'(\varphi)[\psi]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}} \cdot \left(g'(f(\varphi))[(\psi, \psi)] \right) =$$

$$(g \circ f)(\varphi) = \langle \varphi, \varphi \rangle$$

$$= \frac{1}{2 \|\varphi\|} \left(\langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle \right) =$$

$$= \frac{\langle \varphi, \psi \rangle}{\|\varphi\|}$$

Aufgabe 3:

$$f: [-10,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto xe^{-x^2}$$

$\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$ also hat f eine Stammfunktion $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, wonach laut Hauptsatz Differential- und Integralrechnung

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_a^b$$

für jedes kompakte $[a,b] \subseteq [-10,\infty[$ gilt.

$$f(x) = xe^{-x^2} \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in [-10,0[\\ \geq 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

also ist $\displaystyle\int_{[-10,\infty[} |f(x)|\,dx = \int_{-10}^{0} -f(x)\,dx + \int_{[0,\infty[} f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-10}^{0} + \lim_{N\to\infty} \int_0^N f(x)\,dx$$

monotone Konvergenz, denn

$$\left(\mathbb{1}_{[0,N]} f\right)(x) = \left(\mathbb{1}_{[0,N]} |f|\right)(x) \nearrow_{N\to\infty} \left(\mathbb{1}_{[0,\infty[} |f|\right)(x) = \left(\mathbb{1}_{[0,\infty[} f\right)(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-e^{-100}+\lim_{N\to\infty}\left(-e^{-x^2}\Big|_0^N\right)\right)=1-\frac{e^{-100}}{2}<\infty$$

und daher f auf $[-10,\infty[$ λ-integrierbar.

Da $\mathbb{1}_{[-10,N]}f \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{1}_{[-10,\infty[}f$ punktweise und majorisiert durch $|f|$ konvergiert, gilt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\int_{-10}^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-10}^{N} f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-10}^{N}\right)$$

$$= \frac{e^{-100}}{2}.$$

Aufgabe 1:

a) Für $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ folgt mit partieller Integration:

$$\int_a^b \underbrace{e^{-x}}_{\hat{=} f} \underbrace{\sin(x)}_{\hat{=} g'}\,dx = e^{-x}\underbrace{(-\cos(x))}_{\hat{=} g}\Big|_a^b - \int_a^b (-e^{-x})\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$= -e^{-x}\cos(x)\Big|_a^b - \left(e^{-x}\sin(x)\Big|_a^b - \int_a^b (-e^{-x})\cdot\sin(x)\,dx\right)$$

$$= -e^{-x}\cos(x)\Big|_a^b - e^{-x}\sin(x)\Big|_a^b - \int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow 2\int_a^b e^{-x}\sin(x)\,dx = -e^{-x}(\cos(x)+\sin(x))\Big|_a^b$$

b) Für jedes $a\in\mathbb{R}$ ist $f: [a,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}\sin(x)$

λ-integrierbar, denn

$|f(x)| = |e^{-x}\sin(x)| \leq e^{-x}$

$\mathbb{1}_{[a,N]}(x)e^{-x} \xrightarrow[N\to\infty]{\nearrow} \mathbb{1}_{[a,\infty[}(x)e^{-x}$

also nach monotoner Konvergenz

$$\int_a^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N e^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_a^N\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(e^{-a} - e^{-N}\right) = e^{-a} < \infty$$

und daher hat f die $\mathcal{I}$-integrierbare Majorante

$$h: [a,\infty[\longrightarrow [0,\infty[\qquad x \longmapsto e^{-x}$$

und ist damit $\mathcal{I}$-integrierbar.

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz ist

$$\int_a^\infty e^{-x}\sin(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N e^{-x}\sin(x)\,dx \stackrel{a)}{=}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x)+\sin(x))\Big|_a^N\right) = \frac{e^{-a}}{2}(\cos(a)+\sin(a))$$

Aufgabe 2:

a) Nach Ketten- und Quotientenregel ist

$$\left[\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right]' = \frac{1+e^x}{e^x} \cdot \frac{(1+e^x)e^x - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{1+e^x}$$

b) Wegen $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $f: \mathbb{R} \longrightarrow]0,\infty[$, $x \longmapsto \frac{1}{1+e^x}$

wohldefiniert und $\frac{e^x}{1+e^x} \in]0,1[$, also ebenso

$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$ definiert und F eine

Stammfunktion zu f. Für $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{dx}{1+e^x} = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\Big|_a^b.$$

Wegen $f(x) \geq 0$ folgt dann wegen $\mathbb{1}_{[a,N]}(x) f(x) \nearrow f_a(x)$

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N \frac{dx}{1+e^x} \overset{\text{monotone}}{\underset{\text{Konv.}}{=}} \int_a^\infty |f(x)|\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \ln\left(\frac{e^N}{1+e^N}\right) - \ln\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right) = -\ln\left(\frac{e^a}{1+e^a}\right)$$

$$\frac{e^N}{1+e^N} = \frac{1}{1+e^{-N}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

Aufgabe 3:

X $\mathbb{K}$-Banachraum, $U \subseteq X$ offen

$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{K}^d, \ldots, f_d : U \longrightarrow \mathbb{K}^d$

stetig differenzierbar, dann ist

$$H : U \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \det(f_1(x), \ldots, f_d(x))$$

stetig differenzierbar, denn dann ist

$$F = (f_1, \ldots, f_d) : U \longrightarrow (\mathbb{K}^d)^d \cong M_d(\mathbb{K})$$
$$x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_d(x))$$

stetig differenzierbar nach Satz 15.1.12.

$G = \det : M_d(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ ist eine stetige multilineare Abbildung und daher nach Lemma 15.1.13 stetig differenzierbar.

Nach der Kettenregel ist dann auch $G \circ F$ stetig differenzierbar, mit

$$(G \circ F)'(x) = G'(F(x)) \circ F'(x)$$

$$= \det{}'(f_1(x), \dots, f_d(x))\left[(f_1'(x), \dots, f_d'(x))\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \det\big(f_1(x), \dots, f_{j-1}(x), f_j'(x), f_{j+1}(x), \dots, f_d(x)\big)$$

Aufgabe 1

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto \left(1+xye^{z^2}, \frac{xy}{1+z^2}\right)$$

dann ist für jedes $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
$(Jf)(x,y,z) \in M(2\times 3, \mathbb{R})$

$$(Jf)(x,y,z) = \begin{pmatrix} (D_1f_1)(x,y,z) & (D_2f_1)(x,y,z) & (D_3f_1)(x,y,z) \\ (D_1f_2)(x,y,z) & (D_2f_2)(x,y,z) & (D_3f_2)(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ye^{z^2} & xe^{z^2} & xy2ze^{z^2} \\ \frac{y}{1+z^2} & \frac{x}{1+z^2} & \frac{-xy2z}{(1+z^2)^2} \end{pmatrix}$$

also ist jeder der Einträge als Produkt/Quotient mit Nenner $\neq 0$ von stetigen Funktionen wieder stetig. Daher ist auch die matrixwertige Funktion

$$\begin{aligned} Jf : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow M(2\times 3, \mathbb{R}) \\ (x,y,z) &\longmapsto (Jf)(x,y,z) \end{aligned}$$

stetig, damit ist f stetig partiell differenzierbar, also stetig differenzierbar

Aufgabe 2:

Nach Satz 13.6.11 ist $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Weil die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, ist für $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ auch die Komposition

$e^f = \exp \circ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, also

$$T: C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto e^f$$

wohldefiniert. Für $f, h \in C([0,1],\mathbb{R})$ ist

$$\overset{(*)}{}$$

$$\|T(f+h) - T(f) - hT(f)\|_\infty$$

$$= \|e^{f+h} - e^f - he^f\|_\infty =$$

$$= \sup\{|e^{f(x)+h(x)} - e^{f(x)} - h(x)e^{f(x)}| : x \in [0,1]\}$$

$$= \sup\{|e^{f(x)}| \cdot |e^{h(x)} - 1 - h(x)| : x \in [0,1]\}$$

Nach der Definition von exp über die Exponentialreihe ist

$$e^{h(x)} - 1 - h(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(h(x))^n}{n!} =$$

$$= (h(x))^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h(x))^n}{(n+2)!}$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$ hat Konvergenzradius ∞. Da $h([0,1])$ — als Bild der kompakten Menge bei der stetigen Abbildung h — kompakt ist, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(x)^n}{(n+2)!}$$

sogar gleichmäßig und daher definiert

$$F: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(x)^n}{(n+2)!}$$

eine stetige Funktion und daher $\|F\|_\infty < \infty$.
Dies ergibt mit $\|h^2\|_\infty = \sup\{|h(x)|^2 : x \in [0,1]\} = \|h\|_\infty^2$

$$\|T(f+h) - T(f) - hT(f)\|_\infty \leq$$

$$\leq \|e^f\|_\infty \cdot \|F\|_\infty \cdot \|h\|_\infty^2$$

also ist

$$0 \leq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|T(f+h) - T(f) - hT(f)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq$$

$$\leq \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \|e^f\|_\infty \|F\|_\infty \cdot \|h\|_\infty = 0$$

und da

$$C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R})$$
$$h \longmapsto e^f \cdot h$$

linear ist, ist dies die Ableitung von T bei f.

(*) Analog dazu folgt auch

$$\| T(f+h) - T(f) \|_\infty = \| e^{f+h} - e^f \|_\infty =$$

$$= \sup \{ |e^{f(x)}| \cdot |e^{h(x)} - 1| : x \in [0,1] \} \xrightarrow[\|h\|_\infty \to 0]{} 0$$

da auch $e^{h(x)} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(x)^k}{k!}$ durch eine überall konvergente Potenzreihe gegeben ist mit $\| e^h - 1 \|_\infty \leq \|h\|_\infty \cdot \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} \|_\infty \xrightarrow[\|h\|_\infty \to 0]{} 0$

also ist T stetig.

Aufgabe 4: Es sei $U \subseteq \mathbb{K}^n$ offen, $a \in U$ und $f = (f_1, ..., f_m) : U \to \mathbb{K}^m$ in a differenzierbar. Zeige: Jede der Koeffizientenfunktionen $f_1, ..., f_m$ ist partiell differenzierbar in a und die Jacobimatrix $(Jf)(a)$ ist die darstellende Matrix der Ableitung $(Df)(a)$ von f in a bezüglich der Standardbasen.

Lösung: Nach Satz 15.1.12 ist f genau dann in a differenzierbar, wenn jede der Koordinatenfunktionen $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, $j = 1, ..., m$ in a differenzierbar ist. Nach Bemerkung 15.5.10 folgt die partielle Differenzierbarkeit von f_j in a. Ist $(\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in M(m \times n, \mathbb{K})$ die darstellende Matrix der linearen Abbildung $(Df)(a)$ bezüglich der Standardbasen, so bedeutet dies

$$(Df)(a)[\underline{e}_k] = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lk}\underline{e}_l$$

für $k = 1, ..., n$. Nach Satz 15.1.12 und Lemma 15.5.3 ist

$$(Df)(a)[\underline{e}_k] = \begin{pmatrix} (Df_1)(a)[\underline{e}_k] \\ \vdots \\ (Df_m)(a)[\underline{e}_k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_{\underline{e}_k} f_1)(a) \\ \vdots \\ (D_{\underline{e}_k} f_m)(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(a)\underline{e}_l$$

dh. $\alpha_{lk} = \dfrac{\partial f_l}{\partial x_k}(a)$, da $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_m$ eine Basis von $\mathbb{K}^m$ ist.