Nachname: .................................... Vorname: ......................................

**Aufgabe 1: (10 Punkte)**

7 a) Zeige, daß

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f : ]0,\infty[\times]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{x_1}{x_2}(1+x_3^2)\right) \\ x_2^{x_1x_2} \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

3 b) Entscheide, ob $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x,x,0)$ existiert und bestimme diesen Grenzwert, falls er existiert.

---

Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in ]0,\infty[\times]0,\infty[\times\mathbb{R}$ ist $\frac{x_1}{x_2}(1+x_3^2) > 0$ und $x_2 > 0$ also $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}(1+x_3^2)\right)$ und $x_2^{x_1x_2} = e^{x_1x_2\cdot\ln(x_2)}$ wohldefiniert und damit $f$ als Komposition von stetigen Funktionen stetig. Die partiellen Ableitungen

$$(\partial_1 f_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_2(1+x_3^2)}{x_1(1+x_3^2)x_2} = \frac{1}{x_1}, \quad (\partial_2 f_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_2(1+x_3^2)x_1}{x_1(1+x_3^2)}\cdot\left(-\frac{1}{x_2^2}\right) = -\frac{1}{x_2}$$

$$(\partial_3 f_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_2\cdot x_1\cdot 2x_3}{x_1(1+x_3^2)\cdot x_2} = \frac{2x_3}{(1+x_3^2)}, \quad (\partial_1 f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e^{x_1x_2\ln(x_2)}\, x_2\ln(x_2)$$

$$(\partial_2 f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e^{x_1x_2\ln x_2}\, x_1(\ln x_2 + 1), \quad (\partial_3 f_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

sind stetig, deshalb ist $f$ stetig partiell differenzierbar, also stetig differenzierbar und für jedes $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in ]0,\infty[^2\times\mathbb{R}$ ist die Jacobimatrix

$$(Jf)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & (\partial_2 f_1)(a) & (\partial_3 f_1)(a) \\ (\partial_1 f_2)(a) & (\partial_2 f_2)(a) & (\partial_3 f_2)(a) \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix der Ableitung $(Df)(a): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bzgl. den Standardbasen.

$f_1(x,x,0) = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = 0$ ist konstant für $x>0$

hat also Grenzwert $\lim\limits_{x\downarrow 0} f_1(x,x,0) = 0$.

$f_2(x,x,0) = e^{x^2\ln(x)}$

Da $x^2\ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 0$ (nach l'Hospital)

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2\cdot\frac{1}{x^3}$ und $\dfrac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} = -\dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 0$

und die Exponentialfunktion stetig ist, folgt

$f_2(x,x,0) = e^{x^2\ln(x)} \xrightarrow[x\downarrow 0]{} e^0 = 1$.

Da jede Komponente von $f$ konvergiert, ist

$\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x,x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nachname: ................................... Vorname: .....................................

**Aufgabe 2: (~~6~~ 7 Punkte)**
Es sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : M_d(\mathbb{C}) &\to M_d(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned}$$

differenzierbar ist und berechne für jedes $A \in M_d(\mathbb{C})$ die Ableitung $(Df)(A)$ von $f$ bei $A$.

Da Matrix-Matrix Multiplikation stetig ist, ist auch $f$ stetig. Für $A, T \in M_d(\mathbb{C})$ ist

$$f(A+T) - f(A) = (A+T)^2 - A^2 = AT + TA + T^2$$

also gibt

$$\begin{aligned} (Df)(A) : M_d(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_d(\mathbb{C}) \\ T &\longmapsto AT+TA \end{aligned}$$

eine ~~l~~ lineare Abbildung (die stetig ist weil $M_d(\mathbb{C})$ endlichdimensional) mit

$$\frac{\| f(A+T) - (f(A) + (Df)(A)[T]) \|}{\| T \|} = \frac{\|T\|^2}{\|T\|} = \|T\| \xrightarrow[\substack{T \to \infty \\ T \neq 0}]{} 0$$

also berührt $f(A) + (Df)(A)[\cdot]$ im Punkt $A$ die Funktion $f$. Somit ist $f$ in $A \in M_d(\mathbb{C})$ differenzierbar und $(Df)(A)$ die Ableitung von $f$ in $A$.

Nachname: ....................................... Vorname: .......................................

**Aufgabe 3: (12 Punkte)** Es sei $\lambda$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-|x|}\cos(x) \end{aligned}$$

$\lambda-$integrierbar ist und berechne $\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

Da $\cos(x) = \cos(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x|}|\cos(x)|\,dx = 2\int_0^\infty e^{-|x|}|\cos(x)|\,dx$$

$$\leq 2\int_0^\infty e^{-x}\,dx \underset{\uparrow}{=} 2\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}\,dx =$$

$e^{-x}\mathbb{1}_{[0,n]}(x) \nearrow_{n\to\infty} e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$ und Satz von der monotonen Konvergenz

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^n\right) = 2 < \infty$$

also ist die stetige – und damit $\lambda$-meßbare – Funktion $f$ auch $\lambda$-integrierbar. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz ist (mit $|f|$ als Majorante)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n e^{-|x|}\cos(x)\,dx =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}\cos(x)\,dx.$$

Mit partieller Integration folgt:

$$\int_0^n e^{-x}\cos(x)\,dx = e^{-x}\sin(x)\Big|_0^n - \int_0^n (-e^{-x})\sin(x)\,dx$$

$$= e^{-n}\sin(n) + \int_0^n e^{-x}\sin(x)\,dx = e^{-n}\sin(n) + e^{-x}(-\cos(x))\Big|_0^n - \int_0^n (-e^{-x})(-\cos x)\,dx$$

$$= e^{-n}(\sin(n) - \cos(n)) + 1 - \int_0^n e^{-x}\cos(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^n e^{-x}\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-n}(\sin(n) - \cos(n)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\left(\text{da } e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ und } |\sin(n) - \cos(n)| \le 2\right)$$

Nachname: .................................... Vorname: .......................................

**Aufgabe 4: (10 Punkte)**

5

a) Auf welcher – möglichst großen – offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert die Partialsummenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lokal gleichmäßig gegen einen Grenzwert?

b) Zeige: Für alle $x \in ]-1,1[$ gilt

5

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

a) Die Potenzreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{l=0}^{n} a_l z^l\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$a_l = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{für ungerades } l \\ 0 & \text{für gerades } l \end{cases}$ hat wegen

$L := \overline{\lim_{l\to\infty}} \sqrt[l]{|a_l|} = \frac{1}{\lim_{l\to\infty} \sqrt[l]{l}} = 1$ den Konvergenzradius

$\rho = \frac{1}{L}$, daher ist die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\{z\in\mathbb{C} : |z|>1\}$ nicht konvergent.

$U := \left(\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : |z|>1\}\right)^\circ = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ ist (als offener Kern) die größte offene Teilmenge, auf der die Potenzreihe konvergieren kann.

Da die Partialsummen auf $U$ – im Innern des Konvergenzkreises – lokal gleichmäßig konvergieren ist $U = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ die gesuchte offene Menge.

Nachname: .................................... Vorname: ......................................

**Aufgabe 4: (10 Punkte)**

a) Auf welcher – möglichst großen – offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert die Partialsummenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lokal gleichmäßig gegen einen Grenzwert?

b) Zeige: Für alle $x \in ]-1,1[$ gilt

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

---

b) Für $x \in ]-1,1[$ ist $\frac{1+x}{1-x} > 0$ also $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ wohldefiniert

$$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]' = \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

Nach a) konvergiert $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lokal gleichmäßig auf $]-1,1[$, deshalb erhalten wir durch gliedweises Differenzieren

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

Die Funktionen $f: ]-1,1[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ und

$g: ]-1,1[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ haben also gleiche Ableitung (auf der zusammenhängenden Menge $]-1,1[$)

$f'(x) = g'(x)$ für $x \in ]-1,1[$ und $f(0) = 0 = g(0)$ also $f = g$.

Nachname: .................................... Vorname: ......................................

**Aufgabe 5: (21 Punkte)** Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- Kennzeichne die wahren Aussagen mit [W] / [■] und gib einen Beweis an.
- Kennzeichne die falschen Aussagen mit [■] / [F] und widerlege jede falsche Aussage.

4

[W]/[F]: $\mathcal{E}(\mathbb{N}) = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ endlich oder } \mathbb{N}\backslash X \text{ endlich}\}$ ist eine $\sigma$−Algebra auf $\mathbb{N}$.

$(\{2n\})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ und da $2\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n\}$ keine endliche Menge und $\mathbb{N}\setminus 2\mathbb{N}$ keine endliche Menge ist, folgt $2\mathbb{N} \notin \mathcal{E}(\mathbb{N})$. Damit ist dies keine $\sigma$-Algebra.

6

[W]/[F]: 
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{y^2 - e^x}{4 + x^2 + y^2} + \frac{1}{8}$$
hat in $[-1,1] \times [-1,1]$ (mindestens) eine Nullstelle.

Wegen $4+x^2+y^2 \geq 4 > 0$ ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Da $[-1,1]\times[-1,1]$ als Produkt von Intervallen zusammenhängend ist, ist $f([-1,1]\times[-1,1])$ nach Zwischenwert~~satz~~ zusammenhängend, also ein Intervall.

$$f(-1,0) = \frac{-e^{-1}}{5} + \frac{1}{8} \overset{e>2}{>} \frac{-1}{10} + \frac{1}{8} > 0$$

$$f(1,0) = \frac{-e}{5} + \frac{1}{8} < -\frac{2}{5} + \frac{1}{8} < 0$$

also ist $0 \in f([-1,1]^2)$ ~~und~~ $f$ hat Nullstelle in $[-1,1]^2$

Nachname: ................................... Vorname: .......................................

---

5 W/F: Die Menge

$$X := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2_{l^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \le 1 \right\} \subseteq l^2(\mathbb{N})$$

ist eine kompakte Teilmenge vom Hilbertraum $l^2(\mathbb{N})$.

Für $e_n = (0, \dots, 0, \underset{n\text{-ter Eintrag}}{1}, 0, \dots)$ ist $\|e_n\|^2_{l^2(\mathbb{N})} = 1$, also $e_n \in X$ und zu $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ ist $\|e_m - e_n\|^2_{l^2(\mathbb{N})} = 2$, d.h. die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ hat keine konvergente Teilfolge und deshalb ist $X$ nicht kompakt.

6 W/F: Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Borelmaß, dann wird durch

$$\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty], \quad A \mapsto \int_A \frac{|x|}{1+x^2}\, d\lambda(x)$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert.

- $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset \frac{|x|}{1+x^2}\, d\lambda(x) = 0$
- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann gilt für $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$:

$\mathbb{1}_{B_n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$, $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$, $\mathbb{1}_{B_n} \nearrow \mathbb{1}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k}$.

Wegen $\frac{|x|}{1+x^2} \ge 0$ folgt $\frac{|x|}{1+x^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|x|}{1+x^2} \mathbb{1}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k}(x)$

also nach Satz von monotonen Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right)(x) \frac{|x|}{1+x^2}\, d\lambda(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k}(x) \frac{|x|}{1+x^2}\, d\lambda(x) = \nu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big)$$