Aufgabe 4:

Es seien $f: W \longrightarrow X$, $g: X \longrightarrow Y$ und $h: Y \longrightarrow Z$ Funktionen. Zeige: Sind $g \circ f: W \longrightarrow Y$ und $h \circ g: X \longrightarrow Z$ bijektiv, so sind f, g und h bijektiv.

Beweis:

Da $g \circ f$ bijektiv, also insbesondere surjektiv ist, folgt

$$Y = g(f(W)) \subseteq g(X) \subseteq Y$$

und da in dieser Inklusionskette links und rechts dieselbe Menge Y steht, sind die „$\subseteq$" tatsächlich „$=$", also $g(X) = Y$ und damit ist g surjektiv. Mit dem analogen Argument folgt Surjektivität von h.

h ist injektiv, denn sonst gibt es $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$ und $h(y_1) = h(y_2)$. Da g wie oben gezeigt surjektiv ist, gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $y_1 = g(x_1)$ und $y_2 = g(x_2)$ — und da $y_1 \neq y_2$

ist, folgt $x_1 \neq x_2$. Damit ist

$$h(g(x_1)) = h(y_1) = h(y_2) = h(g(x_2))$$

was wegen $x_1 \neq x_2$ der Injektivität von $h \circ g$ widerspricht.

Somit ist h bijektiv und somit existiert die Umkehrfunktion $h^{-1}: Z \longrightarrow Y$ und

$$g = id_Y \circ g = (h^{-1} \circ h) \circ g = h^{-1} \circ (h \circ g)$$

ist als Komposition der beiden bijektiven Funktionen h^{-1} und $h \circ g$ bijektiv. Damit ist

$$f = id_X \circ f = (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f)$$

als Komposition der bijektiven Funktionen g^{-1} und $g \circ f$ bijektiv.

Aufgabe 5:

a) $(X, \leq)$ und $(Y, \trianglelefteq)$ geordnete Mengen, $f: X \to Y$ streng monoton steigend, dann ist f injektiv.

FALSCH; Gegenbeispiel:

$X = \{□, △, ○\}$ mit ○ ≤ ○, ○ ≤ △, △ ≤ △, □ ≤ □

ist ≤ reflexiv, antisymmetrisch (gibt keine $x \neq y$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$) und transitiv

$Y = \{▲, ●\}$ mit ▲ ⊴ ▲, ● ⊴ ● ⊴ ▲

geordnet und $f: X \to Y$ mit

$f(○) = ●$, $f(△) = ▲ = f(□)$ ist nicht injektiv

aber da nur ○ < △ in X und $f(○) = ● ◁ f(△)$ gilt, ist f streng monoton steigend.

b) $(X, \leq)$ totalgeordnet, $(Y, \trianglelefteq)$ geordnet, $f: X \longrightarrow Y$ streng monoton steigend, dann ist f injektiv.

Beweis: Sind $x, w \in X$ mit $f(x) = f(w)$.

Angenommen $x \neq w$, dann gilt

i) $X < w$ (also $x \leq w$ und $x \neq w$) und da f streng monoton steigend ist, folgt $f(x) \lhd f(w)$ im Widerspruch zu $f(x) = f(w)$.

ii) $w < x$ (also $w \leq x$ und $x \neq w$ — da X totalgeordnet ist, ist dies die einzige Alternative zu i)) und weil f streng monoton steigend ist, folgt $f(w) \lhd f(x)$ im Widerspruch zu $f(x) = f(w)$.

Diese beiden Fälle zeigen, daß $f(x) = f(w)$ nur für $x = w$ auftreten kann und damit ist f injektiv.

c) $(X, \leq)$, $(Y, \trianglelefteq)$ totalgeordnete Mengen, $f: X \longrightarrow Y$ injektiv, dann ist f streng monoton steigend

FALSCH; Gegenbeispiel $-id_{\mathbb{Z}}$

d) $(X, \leq)$, $(Y, \trianglelefteq)$ totalgeordnet, $f: X \longrightarrow Y$ streng monoton steigend, bijektiv, dann ist Umkehrfunktion $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ streng monoton steigend.

<u>Beweis:</u> Weil $f: X \longrightarrow Y$ bijektiv ist, existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}: Y \longrightarrow X$.

Sind $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \lhd y_2$, so gibt es genau ein $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ (wegen Bijektivität von f). Wegen $y_1 \neq y_2$ folgt $x_1 \neq x_2$ und da $(X, \leq)$ totalgeordnet ist, bleibt nur $x_1 < x_2$ — denn aus $x_2 < x_1$ folgt

$y_2 = f(x_2) \lhd f(x_1) = y_1$ aus der strengen Monotonie von f, was $y_1 \lhd y_2$ widerspricht.

Damit ist

$$x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

und somit auch f^{-1} streng monoton steigend.

Aufgabe 6:

a) Setze $x^0 := 1$, dann gilt für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Induktionsanfang $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k x^{k-1} = x^0 = 1 = \frac{1-2x+x^2}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}$$

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k x^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}\right) + (n+1)x^n \overset{(IV)}{=}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2} + (n+1)x^n =$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1} + (n+1)x^n \cdot (1-x)^2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^{n}+nx^{n+1}+(n+1)x^{n}\left(1-2x+x^{2}\right)}{(1-x)^{2}}$$

$$= \frac{1+x^{n+1}\left(n-2(n+1)\right)+x^{n+2}(n+1)}{(1-x)^{2}}$$

$$= \frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^{2}}$$

$$= \frac{1-((n+1)+1)x^{n+1}+(n+1)x^{(n+1)+1}}{(1-x)^{2}}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.13 nachgewiesen und daher gilt

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^{n}+nx^{n+1}}{(1-x)^{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $3^{2n}+7$ ist ohne Rest durch 8 teilbar.

Beweis:

Induktionsanfang $n=1$: $3^{2\cdot 1}+7 = 3^2+7 = 9+7 = 16$
$= 2\cdot 8$
ist durch 8 teilbar

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$3^{2(n+1)}+7 = 3^2\cdot 3^{2n}+7 =$$
$$= (8+1)\cdot 3^{2n}+7 =$$
$$= \underbrace{8\cdot 3^{2n}}_{\text{durch 8 teilbar}} + \underbrace{\left(3^{2n}+7\right)}_{\text{nach Induktionsvoraussetzung durch 8 teilbar}}$$

ist als Summe von durch 8 teilbaren Zahlen wieder durch 8 teilbar.

Nach Satz 2.1.3 ist also für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Zahl $3^{2n}+7$ durch 8 teilbar.

Aufgabe 7:

$(X, \leq)$ totalgeordnete Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in X$, dann existiert $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\min\{x_1, \dots, x_n\}$

Beweis:

Induktionsanfang $n = 1$:

$x_1 \in \{x_1\}$ ist eine obere und eine untere Schranke von $\{x_1\}$, also gilt $x_1 = \min\{x_1\} = \max\{x_1\}$.

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$: Sind $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in X$.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\min\{x_1, \dots, x_n\}$. Weil $(X, \leq)$ totalgeordnet ist gilt

- $x_{n+1} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}$ oder $\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq x_{n+1}$
- $x_{n+1} \leq \min\{x_1, \dots, x_n\}$ oder $\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq x_{n+1}$.

a) Im Fall $x_{n+1} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}$ ist $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ obere Schranke von $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ mit

$\max\{x_1, \dots, x_n\} \in \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

also nach Definition $\max\{x_1, \dots, x_n\} = \max\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

b) Im Fall $\max\{x_1, \dots, x_n\} \le x_{n+1}$ ist $x_{n+1} \in \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ eine obere Schranke von $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, also

$x_{n+1} = \max\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

c) Im Fall $x_{n+1} \le \min\{x_1, \dots, x_n\}$ ist $x_{n+1} \in \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ eine untere Schranke von $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, also

$x_{n+1} = \min\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

d) Im Fall $\min\{x_1, \dots, x_n\} \le x_{n+1}$ ist $\min\{x_1, \dots, x_n\}$ untere Schranke von $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ mit

$\min\{x_1, \dots, x_n\} \in \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, also

$\min\{x_1, \dots, x_n\} = \min\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$.

In allen Fällen existieren $\max\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ und $\min\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, weshalb die Behauptung durch Induktion folgt.