

Übungsblatt 3 zu Mathematik I (Physik)

Aufgabe 8: (10 Punkte) Für welches $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- a) $2^n \leq n!$
- b) $3^n \leq (n+1)!$
- c) $n! \leq n^{n-1}$

Aufgabe 9: (10 Punkte)

- a) Zeige: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

- b) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})}$$

durch 7 teilbar.

Aufgabe 10: (15 Punkte)

Es sei $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Nachfolgerabbildung aus den Peano-Axiomen und $m \in \mathbb{N}$. Dazu seien $\varphi_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\psi_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Funktionen, die laut Rekursionssatz durch $\varphi_m(1) = m+1$ und $\varphi_m \circ N = N \circ \varphi_m$ bzw. $\psi_m(1) = m$ und $\psi_m \circ N = \varphi_m \circ \psi_m$ gegeben sind. Zeige:

- a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\psi_1(m) = m$.
- b) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\psi_{n+1}(m) = \psi_n(m) + m$.
- c) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $m \cdot n = n \cdot m$.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe darf Kommutativität und Assoziativität der Addition verwendet werden – ersteres haben wir im Tutorium schon bewiesen.

Aufgabe 11: – Eine märchenhafte Aufgabe: Schneewittchen und die N Zwerge

Das gelangweilte Schneewittchen wollte sich neue Schuhe kaufen und benötigte dazu die modische Beratung der Zwerge. Da sich jedoch keiner der Zwerge für das Shoppen mit Schneewittchen begeistern konnte, schlug Schneewittchen ein Spiel vor, dessen Verlierer ihre Begleiter festlegen sollte. Dazu stellten sich die Zwerge im Kreis auf und bekamen von Schneewittchen, die von hinten an die Zwerge herantrat, eine entweder rote oder grüne Zwergenmütze aufgesetzt, so dass zwar jeder der Zwerge die Mützenfarbe der anderen Zwerge, nicht aber seine eigene sehen konnte. Danach gab Schneewittchen bekannt, dass es in der Runde Zwerge mit grünen Mützen gebe und dass die Zwerge im Folgenden einzeln und in Reihenfolge ihres Alters ihr Lieblingslied „Heigh-Ho“ singen würden. Vor oder nach jeder Runde des Liedes mussten alle Zwerge, die sich bis dahin klar geworden waren, die Frage nach der Farbe ihrer Mütze durch Heben des rechten oder linken Armes beantworten. Die Zwerge, die ihre Mützenfarbe korrekt nennen konnten, durften zurück in die Mine gehen. Den Zwergen, die ihre Mützenfarbe falsch angaben, drohte das Shopping mit Schneewittchen. Schneewittchen musste sich schließlich ohne Begleitung neue Schuhe kaufen. Wie ist das zu erklären?

Anleitung: Man verwende die bekannte Tatsache, dass Zwerge absolut ausgefuchst sind und dies auch voneinander wissen.

keine Abgabe – Besprechung in der Übung am 11.11.