Tutoriumsblatt 15 zu Mathematik III (Physik) / Sammlung einiger alter Klausuraufgaben

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Zeige, daß

$$\begin{aligned} f:]0,\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2}+e^y \\ \sin(x)-y^3 \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in jedem Punkt von $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Es sei X ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zeige, daß

$$\begin{aligned} \phi: X &\to [0,\infty[\\ x &\mapsto \|x\|^2 \end{aligned}$$

differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Aufgabe 3: (8 Punkte)
Zeige, daß

$$\begin{aligned} f: \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1\} &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{z}{1-x^2-y^2} \\ e^{-x^2+y^2-z^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Aufgabe 4: (12 Punkte)
Versehe $C([0,1],\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} T: C([0,1],\mathbb{R}) &\to C([0,1],\mathbb{R}) \\ f &\mapsto e^{-f} \end{aligned}$$

differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Aufgabe 5: (12 Punkte)
Entscheide (jeweils mit einer kurzen Begründung), welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Es sei X ein hausdorffscher topologischer Raum, $K\subseteq X$ kompakt und $\mu:\mathcal{B}(X)\to[0,\infty]$ ein Borelmaß auf X, dann ist die charakterische Funktion $\mathbf{1}_K$ $\mu-$integrierbar.

b) Es sei $X=\{\circ,\blacktriangleleft,\blacktriangleright\}$, dann ist $\mathcal{A}=\{\emptyset,\{\blacktriangleleft\},\{\blacktriangleright\},\{\blacktriangleleft,\blacktriangleright\},X\}$ eine $\sigma-$Algebra auf X.

c) Es sei $(X,\|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit Grenzwert $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Dann ist $A:=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ eine relativ kompakte Teilmenge von X.

d) $\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{y-x}{1+x^2+y^2}+\frac{1}{3} \end{aligned}$ hat in $[-1,1]\times[-1,1]$ (mindestens) eine Nullstelle.

Aufgabe 6: (15 Punkte) Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\lambda:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ das Borelmaß.

a) Zeige, daß

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\to [0,\infty] \\ A &\mapsto \int_A \frac{|x|}{1+x^2}\,d\lambda(x) \end{aligned}$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert.

b) Es sei $\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{|x|}{(1+x^2)(1+x^{2n})} \end{array}$. Zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)d\lambda(x)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)d\lambda(x) = \nu(]-1,1[) = \ln 2$$

gilt.