https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 03: Vektorprodukt, Raumkurven, Linienintegrale

Lösung Beispielaufgabe 1: $1/(1-x^2)$-Integrale mittels hyperbolischer Substitution [3]

(a) Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$, ist die Stammfunktion des Integranden bekannt, und wir können direkt folgern, dass $I(z) = [\operatorname{arctanh} x]_0^z = \operatorname{arctanh} z$.

Alternativ können wir das Integral mittels der Substitution $x = \tanh y$ berechnen, mit $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{d}y\tanh' y = \mathrm{d}y\,\mathrm{sech}^2 y$ und $1-x^2 = 1-\tanh^2 y = \mathrm{sech}^2 y$. Die neuen Integrationsgrenzen bestimmen wir durch Auswerten von $y = \operatorname{arctanh} x$ bei $x = 0$ und $x = z$:

$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\,\frac{1}{1-x^2} = \int_{\operatorname{arctanh} 0}^{\operatorname{arctanh} z} \mathrm{d}y\;\mathrm{sech}^2 y\frac{1}{\mathrm{sech}^2 y} = \int_0^{\operatorname{arctanh} z} \mathrm{d}y\,1 = \boxed{\operatorname{arctanh} z}.$$

Kontrollergebnis: $I\big(\frac{3}{5}\big) = \operatorname{arctanh}\big(\frac{3}{5}\big) = \ln 2$, da $\tanh\big(\ln 2\big) = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2}-\mathrm{e}^{-\ln 2}}{\mathrm{e}^{\ln 2}+\mathrm{e}^{-\ln 2}} = \frac{2-1/2}{2+1/2} \overset{\checkmark}{=} \frac{3}{5}$.

Überprüfung durch Ableitung: $\dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{arctanh} z = \boxed{\dfrac{1}{1-z^2}}$. ✓

(b) Wir substituieren $x = \frac{1}{a}\tanh y$, mit $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{d}y\frac{1}{a}\,\mathrm{sech}^2 y$ und $1-a^2x^2 = \mathrm{sech}^2 y$:

$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\,\frac{1}{(1-a^2x^2)^2} = \frac{1}{a}\int_{\operatorname{arctanh} 0}^{\operatorname{arctanh}(az)} \mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{sech}^2 y}{\mathrm{sech}^4 y} = \frac{1}{a}\int_0^{\operatorname{arctanh}(az)} \mathrm{d}y\cosh^2 y \equiv \frac{1}{a}\tilde{I}(b).$$

Wir berechnen das $\cosh^2 y$-Integral, mit Obergrenze $b = \operatorname{arctanh}(az)$, mittels partieller Integration, mit $u = \cosh y$, $v = \sinh y$, $u' = \sinh y$, $v' = \cosh y$:

$$\begin{aligned}\tilde{I}(b) &= \int_0^b \mathrm{d}y\;\overset{u}{\cosh y}\,\overset{v'}{\cosh y} \overset{uv-\int u'v}{=} \Big[\cosh y\,\sinh y\Big]_0^b - \int_0^b \mathrm{d}y\;\underbrace{\sinh y\sinh y}_{\cosh^2 y-1}\\ &= b + \cosh b\,\sinh b - \tilde{I}(b)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{I}(b) = \frac{1}{2}\big[b + \sinh b\,\cosh b\big] = \frac{1}{2}\left[b + \frac{\tanh b}{1-\tanh^2 b}\right].$$

Wir haben die rechten Seite durch $\tanh$ ausgedrückt, mittels $\sinh\cosh = \tanh/\,\mathrm{sech}^2 = \tanh/(1-\tanh^2)$, denn das Argument von $\tilde{I}(b)$ ist $b = \operatorname{arctanh}(az)$.

$$\Rightarrow I(z) = \frac{1}{a}\tilde{I}\big(\operatorname{arctanh}(az)\big) = \boxed{\frac{1}{2a}\left[\operatorname{arctanh}(az) + \frac{az}{1-a^2z^2}\right]}.$$

Kontrollergebnis: für $a = 3$, folgt $I\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}\left[\operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{3/5}{1-(3/5)^2}\right] = \frac{1}{6}\ln 2 + \frac{5}{32}$. ✓

Überprüfung durch Ableitung: $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-a^2z^2} + \frac{(1-a^2z^2)+2a^2z^2}{(1-a^2z^2)^2}\right] = \frac{1}{(1-a^2z^2)^2}$. ✓

Lösung Beispielaufgabe 2: Elementare Vektorrechnung [3]

Mit $\mathbf{a} = (4,3,1)^T$ und $\mathbf{b} = (1,-1,1)^T$ gilt:

(a)
$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{1+1+1} = \boxed{\sqrt{3}}$$
$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (4-1, 3-(-1), 1-1)^T = \boxed{(3,4,0)^T}$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 = \boxed{2}$$
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 - 1\cdot(-1)\\ 1\cdot 1 - 4\cdot 1\\ 4\cdot(-1) - 3\cdot 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4\\-3\\-7\end{pmatrix}}$$

(b)
$$\mathbf{a}_\parallel = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b} = \frac{2}{3}\mathbf{b} = \boxed{\frac{2}{3}(1,-1,1)^T}$$
$$\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel = (4,3,1)^T - (2/3, -2/3, 2/3)^T = \boxed{(10/3, 11/3, 1/3)^T}$$

(c)
$$\mathbf{a}_\parallel\cdot\mathbf{b} = \frac{2}{3}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \frac{2}{3}\cdot 3 = \boxed{2} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ ✓$$
$$\mathbf{a}_\perp\cdot\mathbf{b} = \frac{10}{3} - \frac{11}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{0}\ ✓$$
$$\mathbf{a}_\parallel\times\mathbf{b} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1 - 1\cdot(-1)\\ 1\cdot 1 - 1\cdot 1\\ 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}\ ✓$$
$$\mathbf{a}_\perp\times\mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\11\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}11+1\\ 1-10\\ -10-11\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4\\-3\\-7\end{pmatrix}} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\ ✓$$

Wie erwartet gilt $\mathbf{a}_\parallel\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_\perp\cdot\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a}_\parallel\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{a}_\perp\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$. ✓

Lösung Beispielaufgabe 3: Levi-Civita-Symbol [3]

(a) $a^i b^j \epsilon_{ij2} = -a^k \epsilon_{k2l} b^l$ ist $\boxed{\text{wahr}}$. Denn wenn wir beide Seiten explizit ausschreiben, finden wir:

$$a^i b^j \epsilon_{ij2} = a^1 b^3 \epsilon_{132} + a^3 b^1 \epsilon_{312} = a^3 b^1 - a^1 b^3,$$
$$-a^k \epsilon_{k2l} b^l = -a^1 \epsilon_{123} b^3 - a^3 \epsilon_{321} b^1 = a^3 b^1 - a^1 b^3.$$

Noch kompakter können wir die rechte Seite in die linke Seite umformen, indem wir die Summationsindizes umbenennen und die Antisymmetrie des ϵ-Symbols ausnutzen: $-a^k \epsilon_{k2l} b^l = -a^i b^j \epsilon_{i2j} = a^i b^j \epsilon_{ij2}$.

Für die nächsten beiden Teilaufgaben nutzen wir die Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$. Um sie anwenden zu können, kann es notwendig sein, die Indizes eines Levi-Civita-Faktors zyklisch zu permutieren.

(b) $$\epsilon_{1ik}\epsilon_{kj1} = \epsilon_{1ik}\epsilon_{j1k} = \boxed{\delta_{1j}\delta_{i1} - \delta_{11}\delta_{ij}} = \begin{cases} -1 & \text{falls } i = j \in \{2,3\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: für $i = j = 1$ ergeben die delta-Funktionen $\delta_{1j}\delta_{i1} - \delta_{11}\delta_{ij} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$.

Als Kontrolle führen wir die k-Summe explizit aus: $\epsilon_{1ik}\epsilon_{kj1} = \epsilon_{1i1}\epsilon_{1j1} + \epsilon_{1i2}\epsilon_{2j1} + \epsilon_{1i3}\epsilon_{3j1}$. Der erste Term verschwindet, da zwei Indizes von ϵ gleich sind. Der zweite Term ist nur für $i = j = 3$ ungleich null. In diesem Fall erhalten wir $\epsilon_{132}\epsilon_{231} = (-1) \cdot (+1) = -1$. Der dritte Term ist nur für $i = j = 2$ ungleich null. In diesem Fall erhalten wir $\epsilon_{123}\epsilon_{321} = (+1) \cdot (-1) = -1$.

(c) $$\epsilon_{1ik}\epsilon_{kj2} = \epsilon_{1ik}\epsilon_{j2k} = \delta_{1j}\delta_{i2} - \delta_{12}\delta_{ij} = \boxed{\delta_{1j}\delta_{i2}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 2 \text{ und } j = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als Kontrolle führen wir die k-Summe explizit aus: $\epsilon_{1ik}\epsilon_{2kj} = \epsilon_{1i1}\epsilon_{21j} + \epsilon_{1i2}\epsilon_{22j} + \epsilon_{1i3}\epsilon_{23j}$. Der erste und zweite Term verschwinden, da sie ϵ-Faktoren mit zwei gleichen Indizes enthalten. Der dritte Term ist nur für $i = 2$ und $j = 1$ ungleich null. In diesem Fall erhalten wir $\epsilon_{123}\epsilon_{231} = 1$.

Lösung Beispielaufgabe 4: Grassmann-Identität (BAC-CAB) und Jacobi-Identität [5]

(a) Betrachte die k-Komponente von $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ für beliebiges $k \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^k &\overset{\text{(i)}}{=} a^i [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]^j \epsilon_{ijk} \overset{\text{(ii)}}{=} a^i b^m c^n \epsilon_{mnj} \epsilon_{kij} \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} a^i b^m c^n (\delta_{mk}\delta_{ni} - \delta_{mi}\delta_{nk}) \overset{\text{(iv)}}{=} a^i b^k c^i - a^i b^i c^k \overset{\text{(v)}}{=} b^k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c^k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Erläuterung: (i),(ii): Levi-Civita-Darstellung der Kreuzprodukte. (iii) Identität für Produkt zweier Levi-Civita-Symbole, summiert über den gemeinsamen Index j. (iv) Festlegung von m, n durch Kronecker-δ. (v) Identifizierung von Skalarprodukten. Die eckigen Querklammern ('Kontraktionen') deuten diejenigen wiederholten Indizes an, über die summiert wird um die jeweils nachfolgende Gleichung zu erhalten.

(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$$\overset{\text{Grassmann}}{=} \big[\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\big] + \big[\mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\big] + \big[\mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\big] = \boxed{\mathbf{0}} . \checkmark$$

(c) $\mathbf{a} = (1,1,2)^T$, $\mathbf{b} = (3,2,0)^T$, $\mathbf{c} = (2,1,1)^T$. $\quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \boxed{5}$, $\quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \boxed{5}$.

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}}.$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}}.$$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}}.$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = 5\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,.\checkmark$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-3\\-11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\-2\\16\end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{0}}\,.\checkmark$$

Lösung Beispielaufgabe 5: Spatprodukt [2]

(a)
$$S(y) = \mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\y\end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2y+2\\-1-3y\\-4\end{pmatrix} = (2y+2)+0-8 = 2y-6$$

(b)
$$\mathbf{0} = a^1\mathbf{v}_1 + a^2\mathbf{v}_2 + a^3\mathbf{v}_3 = a^1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + a^2\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + a^3\begin{pmatrix}-1\\-2\\y\end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad a^j\in\mathbb{R}.$$

Diese Vektorgleichung liefert ein System von drei Gleichungen, das wir wie folgt lösen:

(i)	$1a^1 + 3a^2 - 1a^3 = 0$	$\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$	(iv)	$a^3 = a^2$
(ii)	$0a^1 + 2a^2 - 2a^3 = 0$	$\overset{\text{(iv) in (i)}}{\Rightarrow}$	(v)	$a^1 = -2a^2$
(iii)	$2a^1 + 1a^2 + ya^3 = 0$	$\overset{\text{(iv),(v) in (iii)}}{\Rightarrow}$	(vi)	$a^2(-4+1+y) = 0$

(ii) liefert (iv): $a^3 = a^2$. (iv) in (i) eingesetzt liefert (v): $a^1 = -2a^2$. (iv) und (v) in (iii) eingesetzt liefern (vi): $a^2(y-3) = 0$. Für $y \neq 3$ folgt $0 \overset{\text{(vi)}}{=} a^2 \overset{\text{(v)}}{=} a^1 \overset{\text{(iv)}}{=} a^3$, also sind die Vektoren dann linear unabhängig. Für $\boxed{y=3}$ liefert (vi) jedoch $0 = 0$, legt also nicht den Wert von a^2 fest. Somit existieren dann unendlich viele nicht-triviale Lösungen (eine für jeden Wert von $a^2 \in \mathbb{R}$), also sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ dann linear abhängig.

(c) Für $y = 3$ ist $S(3) \overset{\text{(a)}}{=} 2\cdot 3 - 6 = \boxed{0}$, also verschwindet das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Folglich liegen sie alle in derselben Ebene in in $\mathbb{R}^3$ und sind somit linear abhängig, wie in (b) gefunden.

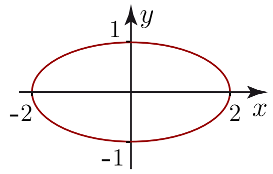
Anmerkung: Dieses Beispiel illustriert folgende allgemeine Tatsache: drei Vektorn in $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig wenn, und nur wenn, ihr Spatprodukt verschwindet.

Lösung Beispielaufgabe 6: Geschwindigkeit und Beschleunigung [3]

(a) Kurznotation: $C(t) = \cos[\pi(1-\cos\omega t)]$, $S(t) = \sin[\pi(1-\cos\omega t)]$, mit $C^2 + S^2 = 1$.
Ableitungen: $\dot{C} = -\omega\pi\sin(\omega t)S$, $\dot{S} = \omega\pi\sin(\omega t)C$.

$$\mathbf{r}(t) = \big(aC, S\big)^T, \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \boxed{\omega\pi\sin(\omega t)\big(-aS, C\big)^T}$$
$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \boxed{\omega^2\pi\cos(\omega t)\big(-aS, C\big)^T - [\omega\pi\sin(\omega t)]^2\big(aC, S\big)^T}$$
$$= \boxed{\omega\cot(\omega t)\dot{\mathbf{r}} - [\omega\pi\sin(\omega t)]^2\mathbf{r}}$$

(b) Parameterfreie Darstellung: $\boxed{(x/a)^2 + y^2 = 1}$. Dies beschreibt eine Ellipse. Die Abbildung zeigt den Fall $a = 2$.



(c) $\mathbf{r}(t)\cdot\dot{\mathbf{r}}(t) = \boxed{\pi\omega \sin(\omega t)\, CS(1-a^2)}$; verschwindet für $\boxed{a = 1}$, dem Spezialfall eines Kreises, für den der Geschwindigkeitsvektor zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf dem Ortsvektor steht.

Lösung Beispielaufgabe 7: Linienintegral: Bergwanderung [3]

Strategie für Linienintegrale, $\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = \int_I \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$: zunächst eine Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$ des Weges γ festlegen, dann $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ und $\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ berechnen, am Ende integrieren.

Gegeben: $\mathbf{r}_0 \equiv (0,0)^T$, $\mathbf{r}_1 \equiv (3,3a)^T$, $\mathbf{r}_2 \equiv (2,4a)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_w = (-y^2, -10)^T$.
Wanderer 1: Weg γ_1 ist eine Gerade von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_1$, hat also die Form $y(x) = ax$. Eine mögliche Parametrisierung, mit $t = x \in (0,3)$ als Kurvenparameter, ist somit:

$$\gamma_1: \quad \begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(x))^T = (t, at)^T \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= (1, a)^T, \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \left(-y^2(t), -10\right)^T = (-a^2t^2, -10)^T \\ \left[\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\right]_{\gamma_1} &= -(a^2t^2 + 10a) \end{aligned}$$

$$W[\gamma_1] = -\int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = \int_0^3 \mathrm{d}t\,[a^2t^2 + 10a] = \left[\tfrac{1}{3}a^2t^3 + 10at\right]_0^3 = \boxed{9a^2 + 30a}.$$

Wanderer 2: Der Weg γ_2 ist eine Parabel mit Scheitelpunkt $\mathbf{r}_2 = (2,4a)^T$, hat also die Form $y(x) = -k(x-2)^2 + 4a$. Einsetzen von $\mathbf{r}_0 = (0,0)^T$ oder $\mathbf{r}_1 = (3,3a)^T$ liefert die Krümmung, $k = a$. Eine mögliche Parametrisierung, mit $t = x \in (0,3)$ als Kurvenparameter, ist somit:

$$\gamma_2: \quad \begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(x))^T = (t, -a(t-2)^2 + 4a)^T \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= (1, -2a(t-2))^T, \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \left(-y^2(t), -10\right)^T = (-[-a(t-2)^2 + 4a]^2, -10)^T \\ \left[\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\right]_{\gamma_1} &= -[-a(t-2)^2 + 4a]^2 + 20a(t-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W[\gamma_2] = -\int_{\gamma_2} \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} &= \int_0^3 \mathrm{d}t\,\Big[[-a(t-2)^2 + 4a]^2 - 20a(t-2)\Big] \\ &= \int_0^3 \mathrm{d}t\,\Big[a^2(t-2)^4 - 8a^2(t-2)^2 + 16a^2 - 20at + 40a\Big] \\ &= \Big[\tfrac{1}{5}a^2(t-2)^5 - \tfrac{8}{3}a^2(t-2)^3 - 10at^2 + (16a^2 + 40a)t\Big]_0^3 \\ &= \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{8}{3} + 48 + \tfrac{32}{5} - \tfrac{64}{3}\right)a^2 + (-90+120)\,a = \boxed{\tfrac{153}{5}a^2 + 30a}. \end{aligned}$$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 22]
