Blatt 04: Mehrdimensionales Differenzieren und Integrieren I

Lösung Beispielaufgabe 1: Partielle Ableitungen [1]

(a) $f(x,y) = x^2y^3 - 2xy, \qquad \partial_x f(x,y) = \boxed{2xy^3 - 2y}, \qquad \partial_y f(x,y) = \boxed{3x^2y^2 - 2x}.$

(b) $f(x,y) = \sin\big[x\mathrm{e}^{2y}\big], \qquad \partial_x f(x,y) = \boxed{\cos\big[x\mathrm{e}^{2y}\big]\mathrm{e}^{2y}}, \qquad \partial_y f(x,y) = \boxed{\cos\big[x\mathrm{e}^{2y}\big]2x\mathrm{e}^{2y}}.$

Lösung Beispielaufgabe 2: Kettenregel für Funktionen von zwei Variablen [2]

(a) Die direkte Berechnung von $f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ und dessen partiellen Ableitungen liefert:

$$f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|^2 = \left\|\left(\ln x^2, 3\ln x^1\right)^T\right\| = \boxed{\ln^2 x^2 + 9\ln^2 x^1}.$$

$$\partial_{x^1} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \partial_{x^1}\left[\ln^2 x^2 + 9\ln^2 x^1\right] = \left[0 + 9(2\ln x^1)\,\partial_{x^1}\ln x^1\right] = \boxed{\frac{18\ln x^1}{x^1}},$$

$$\partial_{x^2} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \partial_{x^2}\left[\ln^2 x^2 + 9\ln^2 x^1\right] = \left[(2\ln x^2)\,\partial_{x^2}\ln x^2 + 0\right] = \boxed{\frac{2\ln x^2}{x^2}}.$$

Die Kettenregel, $\frac{\partial f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}{\partial x^k} = \sum_j \left[\frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y^j}\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})} \frac{\partial g^j(\mathbf{x})}{\partial x^k}$, liefert dieselben Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
\partial_{x^1} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) &= \left[\partial_{y^1} f(\mathbf{y})\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^1} g^1(\mathbf{x}) + \left[\partial_{y^2} f(\mathbf{y})\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^1} g^2(\mathbf{x}) \\
&= \Big[\partial_{y^1}\left[(y^1)^2 + (y^2)^2\right]\Big]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^1}\left[\ln x^2\right] + \left[\partial_{y^2}\left[(y^1)^2 + (y^2)^2\right]\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^1}\left[3\ln x^1\right] \\
&= 0 + \left[2y^2\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \frac{3}{x^1} = 2g^2(\mathbf{x})\,\frac{3}{x^1} = 2(3\ln x^1)\frac{3}{x^1} = \boxed{\frac{18\ln x^1}{x^1}} \overset{\checkmark}{=} \text{(a)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{x^2} f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) &= \left[\partial_{y^1} f(\mathbf{y})\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^2} g^1(\mathbf{x}) + \left[\partial_{y^2} f(\mathbf{y})\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^2} g^2(\mathbf{x}) \\
&= \Big[\partial_{y^1}\left[(y^1)^2 + (y^2)^2\right]\Big]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^2}\left[\ln x^2\right] + \left[\partial_{y^2}\left[(y^1)^2 + (y^2)^2\right]\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \partial_{x^2}\left[3\ln x^1\right] \\
&= \left[2y^1\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\cdot \frac{1}{x^2} + 0 = 2g^1(\mathbf{x})\cdot \frac{1}{x^2} = 2\ln x^2\,\frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{2\ln x^2}{x^2}} \overset{\checkmark}{=} \text{(a)}.
\end{aligned}$$

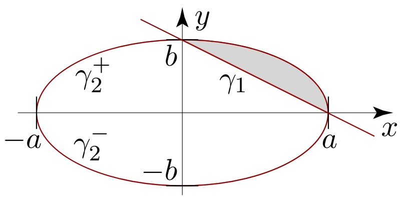
Für sowohl (a) als (b) beinhaltet die Berechnung der partiellen Ableitungen zunächst das Differenzieren einer Summe von Quadraten, dann das Differenzieren von Logarithmen. Beim Rechenweg (b) mittels der Kettenregel hebt die Notation diese Tatsache etwas deutlicher hervor als beim direkten Weg (a).

Lösung Beispielaufgabe 3: Zweidimensionale Integration (kartesische Koordinaten) [Bonus]

$$
\begin{aligned}
I(a) &= \int_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y f(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^{a-y} \mathrm{d}x\, xy = \int_0^1 \mathrm{d}y\; y\Big[\tfrac{1}{2}x^2\Big]_1^{a-y} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y\; y\Big[(a-y)^2-1\Big] \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y\;\Big[y^3 - 2ay^2 + (a^2-1)y\Big] = \big[\tfrac{1}{8}y^4 - \tfrac{1}{3}ay^3 + \tfrac{1}{4}(a^2-1)y^2\big]_0^1 = \boxed{-\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}a^2}.
\end{aligned}
$$

Lösung Beispielaufgabe 4: Durch Kurven begrenzte Fläche (kartesische Koordinaten) [3]

(a) Entlang der Kurve γ_1 erfüllen die Komponenten $x = t$ und $y = b(1 - t/a)$ die Gleichung einer Geraden, nämlich $y = b(1 - x/a)$. Entlang der Kurve γ_2 erfüllen die Komponenten $x = a\cos t$ und $y = b\sin t$ die Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen a und b, nämlich $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.



(b) Zur Berechnung von Flächen ist es nützlich, die Kurven durch eine Koordinate im $\mathbb{R}^2$ zu parametrisieren. Dazu nehmen wir hier x als Kurvenparameter (y wäre ebenso möglich) und parametrisieren die oberen und unteren Äste der Ellipse, $\gamma_2^\pm$, durch $y_2^\pm(x) = \pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, mit $|x| < a$. Ihre Fläche ist dann durch $-a < x < a$ und $y_2^-(x) < y < y_2^+(x)$ beschrieben:

$$
\begin{aligned}
S(a,b) &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{y_2^-(x)}^{y_2^+(x)} \mathrm{d}y\, 1 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \big[y_2^+(x) - y_2^-(x)\big] = 2\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, b\sqrt{1 - x^2/a^2} \\
&\overset{x\,=\,a\sin u}{=} 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u \cos^2 u \overset{\text{part. int.}}{=} 2ab\tfrac{1}{2}\Big[u + \sin u \cos u\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\pi ab}.
\end{aligned}
$$

(c) Wir parametrisieren die Gerade γ_1 durch $y_1(x) = b(1 - x/a)$. Laut Skizze liegen ihre Schnittpunkte mit der Ellipse γ_2 bei $(a,0)^T$ und $(0,b)^T$. Das ist konsistent mit folgendem algebraischem Argument: Da $y_1(x) \geq 0$ für $x \leq a$, schneidet γ_1 nur den positiven Ast γ_2^+ der Ellipse, und zwar wenn

$$
0 = y_1(x) - y_2^+(x) = b(1 - x/a) - b\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}}\,, \quad \Rightarrow \quad x = a \;\text{ oder }\; x = 0\,.
$$

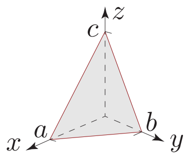
Die gesuchte Fläche (in der Figur schattiert) wird somit durch $0 < x < a$ und $y_1(x) < y < y_2^+(x)$ beschrieben:

$$
\begin{aligned}
A(a,b) &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2^+(x)} \mathrm{d}y\, 1 = \int_0^a \mathrm{d}x\, \big[y_2^+(x) - y_1(x)\big] = \int_0^a \mathrm{d}x\, b\left[\sqrt{1-\tfrac{x^2}{a^2}} - \big(1-\tfrac{x}{a}\big)\right] \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \tfrac{1}{4}\pi ab - b\left[x - \tfrac{1}{2}\tfrac{x^2}{a}\right]_0^a = \boxed{ab(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2})}.
\end{aligned}
$$

Geometrische Überlegung: Die gesuchte Fläche entspricht einem Viertel der Fläche der Ellipse, nämlich $\frac{1}{4}\pi ab$, minus der Fläche eines Dreiecks mit Basis a und Höhe b, nämlich $\frac{1}{2}ab$.

Lösung Beispielaufgabe 5: Flächenintegral für Volumen einer Pyramide (kartesische Koordinaten) [3]

(a) Die Ebene E schneidet die drei Achsen bei $x = a$, $y = b$ und $z = c$. Folglich hat die Pyramide Grundfläche $G = \frac{1}{2}ab$, Höhe $h = c$ und Volumen $V = \frac{1}{3}Gh = \boxed{\frac{1}{6}abc}$.



(b) Die Diagonale der Grundfläche der Pyramide in der xy-Ebene wird durch $y_D(x) = b(1-x/a)$ beschrieben, die Grundfläche selbst durch $0 \le x \le a$ und $0 \le y \le y_D(x)$. Die Höhe der Pyramide über der Grundfläche ist $h(x,y) = c(1 - x/a - y/b)$. Das Volumen ist somit:

$$V = \int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, h(x,y) = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{y_D(x)} \mathrm{d}y\, c\left(1-\tfrac{x}{a}-\tfrac{y}{b}\right) = c\int_0^a \mathrm{d}x \Big[y\left(1-\tfrac{x}{a}\right)-\tfrac{1}{2}\tfrac{y^2}{b}\Big]_0^{y_D(x)}$$
$$= c\int_0^a \mathrm{d}x\Big[b\left(1-\tfrac{x}{a}\right)^2-\tfrac{1}{2}b^2\left(1-\tfrac{x}{a}\right)^2\tfrac{1}{b}\Big] = \tfrac{1}{2}cb\left(-\tfrac{1}{3}a\right)\Big[(1-\tfrac{x}{a})^3\Big]_0^a = \boxed{\tfrac{1}{6}abc}.\ \checkmark$$

Lösung Beispielaufgabe 6: Koordinatentransformation [3]

Zylinderkoord.: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad\phi = \arctan(y/x)+n_\phi\pi$, $\quad z = z$,

Kugelkoord.: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad\theta = \arccos(z/r)$, $\quad\phi = \arctan(y/x)+n_\phi\pi$,

mit $\theta \in (0,\pi)$, und $n_\phi \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $\phi \in (0, 2\pi)$ im richtigen Quadranten liegt.

$P_1:\quad (x,y,z) = (3,-2,4), \quad (\rho,\phi,z) = \boxed{(\sqrt{13}, 5.69, 4)}, \quad (r,\theta,\phi) = \boxed{(\sqrt{29}, 0.73, 5.69)}$

$x > 0, y < 0$ $\Rightarrow$ ϕ liegt im 4. Quadrant $\Rightarrow$ $\phi \in (3\pi/2, 2\pi)$

$\phi = \arctan(-2/3) + 2\pi \approx -0.59 + 6.28 = 5.69$ (entspricht $326°$)

$\theta = \arccos(4/\sqrt{29}) \approx 0.73$ (entspricht $42°$)

$P_2:\quad (x,y,z) = (1,1,1), \quad (\rho,\phi,z) = \boxed{(\sqrt{2}, \pi/4, 1)}, \quad (r,\theta,\phi) = \boxed{(\sqrt{3}, 0.96, \pi/4)}$

$x > 0, y > 0$ $\Rightarrow$ ϕ liegt im 1. Quadrant $\Rightarrow$ $\phi \in (0, \pi/2)$

$\phi = \arctan(1/1) = \pi/4$ (entspricht $45°$)

$\theta = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 0.96$ (entspricht $55°$)

$P_3:\quad (x,y,z) = (-3,0,-2), \quad (\rho,\phi,z) = \boxed{(3, \pi, -2)}, \quad (r,\theta,\phi) = \boxed{(\sqrt{13}, 2.16, \pi)}$

$x < 0, y = 0$ $\Rightarrow$ ϕ liegt auf negativer x-Achse $\Rightarrow \phi = \pi$ (entspricht $180°$)

$\theta = \arccos(-2/\sqrt{13}) \approx 2.16$ (entspricht $124°$)

Lösung Beispielaufgabe 7: Zylinderkoordinaten: Geschwindigkeit, kinetische Energie, Drehimpuls [3]

Ausgedrückt durch die Zylinderkoordinaten, $y_1 = \rho$, $y_2 = \phi$, $y_3 = z$, lauten die kartesischen Koordinaten, $x_i = x_i(y_j)$, wie folgt: $x_1 = x = \rho\cos\phi$, $x_2 = y = \rho\sin\phi$, $x_3 = z$. Ferner gilt:

$\mathbf{e}_{x_i} \cdot \mathbf{e}_{x_j} = \delta_{ij}$.

Ortsvektor: $\quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z = \rho\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \rho\sin\phi\,\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \boxed{\rho\,\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z}$.

(a) Konstruktion der lokalen Basis: $\mathbf{v}_{y_i} = \partial\mathbf{r}/\partial y_i, \quad v_{y_i} = \|\partial\mathbf{r}/\partial y_i\|\,, \quad \mathbf{e}_{y_i} = \mathbf{v}_{y_i}/v_{y_i}$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y, && v_\rho = (\sin^2\phi + \cos^2\phi)^{\frac{1}{2}} = 1, && \mathbf{e}_\rho = \boxed{\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y}.\\
&\mathbf{v}_\phi = -\rho\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \rho\cos\phi\,\mathbf{e}_y, && v_\phi = (\rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}} = \rho, && \mathbf{e}_\phi = \boxed{-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y}.\\
&\mathbf{v}_z = \mathbf{e}_z, && v_z = 1, && \mathbf{e}_z = \boxed{\mathbf{e}_z}.
\end{aligned}$$

Normierung ist per Konstruktion garantiert: $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \boxed{1}$.
Orthogonalität:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\phi = (\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y)\cdot(-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y) = -\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi = \boxed{0},\\
&\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_z = (\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y)\cdot\mathbf{e}_z = \boxed{0}, \quad \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_z = (-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y)\cdot\mathbf{e}_z = \boxed{0}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\boxed{\mathbf{e}_{y_i} \cdot \mathbf{e}_{y_j} = \delta_{ij}}$. ✓

(b) Kreuzprodukt: $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \boxed{\mathbf{0}}$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = (\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y)\times(-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y) = \cos^2\phi\,\mathbf{e}_z - \sin^2\phi(-\mathbf{e}_z) = \boxed{\mathbf{e}_z}\\
&\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = (-\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y)\times\mathbf{e}_z = -\sin\phi(-\mathbf{e}_y) + \cos\phi\,\mathbf{e}_x = \boxed{\mathbf{e}_\rho},\\
&\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_z \times (\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y) = \cos\phi\,\mathbf{e}_y + \sin\phi(-\mathbf{e}_x) = \boxed{\mathbf{e}_\phi}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\boxed{\mathbf{e}_{y_i} \times \mathbf{e}_{y_j} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_{y_k}}$. ✓

Anmerkung: In 3 Dimensionen erfüllen die Basisvektoren einer *Orthonormal*basis "automatisch" die Kreuzproduktregel. Obige explizite Rechnung zeigt zusätzlich, welche Reihenfolge die "zyklische" darstellt. Das lässt sich allerdings auch mittels einer Skizze feststellen.

(c) $$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \dot\rho\partial_\rho\mathbf{r} + \dot\phi\partial_\phi\mathbf{r} + \dot z\partial_z\mathbf{r} \overset{(a)}{=} \boxed{\dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot z\,\mathbf{e}_z}$$

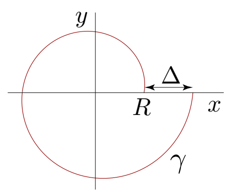
(d) $$T = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \tfrac{1}{2}m\big(\dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot z\,\mathbf{e}_z\big)^2 = \boxed{\tfrac{1}{2}m\big[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2\big]}$$

(e) $$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= m(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = m(\rho\,\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z)\times(\dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot z\,\mathbf{e}_z)\\
&= m\big[\rho^2\dot\phi\,(\mathbf{e}_\rho\times\mathbf{e}_\phi) + z\dot\rho(\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_\rho) + \rho\dot z(\mathbf{e}_\rho\times\mathbf{e}_z) + z\rho\dot\phi(\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_\phi)\big]\\
&= \boxed{m\big[-z\rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\rho + (z\dot\rho - \rho\dot z)\mathbf{e}_\phi + \rho^2\dot\phi\,\mathbf{e}_z\big]}
\end{aligned}$$

Lösung Beispielaufgabe 8: Linienintegral in Polarkoordinaten: Spirale [2]

(a) Die Winkelabhängigkeit des Radius der Spirale lautet $\rho(\phi) = R + \frac{1}{2\pi}\phi\Delta$.

$$\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\rho\,, \quad \partial_\phi\mathbf{r} = \partial_\phi\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\mathbf{e}_\phi\,, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\phi\,.$$



$$\begin{aligned}
W_1[\gamma_S] &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,(\partial_\phi\mathbf{r})\cdot\mathbf{F}_1 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi(\partial_\phi\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\mathbf{e}_\phi)\cdot\mathbf{e}_\phi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\rho\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,(R + \tfrac{1}{2\pi}\Delta\phi) = \Big[R\phi + \tfrac{1}{4\pi}\Delta\phi^2\Big]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi R + \pi\Delta}.
\end{aligned}$$

(b) Entlang des geraden Wegs γ_G benutzen wir kartesische Koordinaten:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x\,, \quad \partial_x\mathbf{r} = \mathbf{e}_x\,, \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x\,.$$

$$W_2[\gamma_G] = \int_R^{R+\Delta} \mathrm{d}x\,(\partial_x\mathbf{r})\cdot\mathbf{F}_2 = \int_R^{R+\Delta} \mathrm{d}x\,\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x = \int_R^{R+\Delta} \mathrm{d}x = \boxed{\Delta}.$$

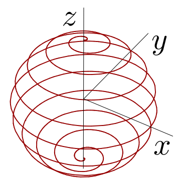
Entlang des Spiralwegs γ_S benutzen wir Polarkoordinaten. Dazu mit entwickeln wir zunächst das Vektorfeld in der lokalen Basis als $\mathbf{F}_2 = \mathbf{e}_x = \cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi$. Diese Zerlegung folgt entweder durch geometrische Anschauung, oder algebraisch mittels dem Ansatz $\mathbf{F}_2 = \mathbf{e}_\rho F_2^\rho + \mathbf{e}_\phi F_2^\phi$, mit $F_2^\rho = \mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{F}_2 = \cos\phi$ und $F_2^\phi = \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{F}_2 = -\sin\phi$. Dann berechnen wir das Linienintegral:

$$\begin{aligned}
W_2[\gamma_S] &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,(\partial_\phi\mathbf{r})\cdot\mathbf{F}_2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi(\partial_\phi\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\mathbf{e}_\phi)\cdot(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\left[\tfrac{1}{2\pi}\Delta\cos\phi + (R + \tfrac{1}{2\pi}\phi\Delta)(-\sin\phi)\right] \\
&= 0 + 0 - \tfrac{1}{2\pi}\Delta\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\phi\sin\phi \overset{\text{part. int.}}{=} -\tfrac{1}{2\pi}\Delta(-2\pi) = \boxed{\Delta}.
\end{aligned}$$

Diskussion: Da $\mathbf{F}_2$ ein Gradientenfeld ist (mit $\mathbf{F}_2 = \boldsymbol{\nabla}x$), hängt der Wert eines Linienintegrals nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges ab. Diese sind für γ_G und γ_S gleich, also gilt $W[\gamma_G] = W[\gamma_S]$.

Lösung Beispielaufgabe 9: Linienintegral in Kugelkoordinaten: Satellit auf Umlaufbahn [Bonus]

(a) In der Zeitdauer des Flugs, $t_D = \pi/\omega_1$, nimmt θ linear zu von 0 bis $\omega_1 t_D = \pi$, und ϕ von 0 bis $\omega_2 t_D = 10(2\pi)$. Also windet sich die Spirale $\boxed{10}$ mal um die Nord-Süd-Achse.



(b) $$\mathbf{r}(t) = r(t)\,\mathbf{e}_r(t)\,, \quad \text{mit} \quad r = r_0\,, \quad \theta(t) = \omega_1 t\,, \quad \phi(t) = \omega_2 t\,.$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot r\,\mathbf{e}_r + r\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta + r\dot\phi\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi = \boxed{r_0\omega_1\,\mathbf{e}_\theta + r_0\omega_2\sin(\omega_1 t)\,\mathbf{e}_\phi}.$$

(c) $$L[\gamma] = \int_0^{\pi/\omega_1} \mathrm{d}t\,\|\mathbf{v}(t)\| = \boxed{\int_0^{\pi/\omega_1} \mathrm{d}t\,r_0\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2\sin^2(\omega_1 t)}}.$$

(d) $\mathbf{F} = -F_0\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi\,, \quad \dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -F_0 r_0\omega_2\sin^2(\omega_1 t)\,,$ denn $\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\phi = 0,\ \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\phi = 1.$

$$\begin{aligned}
W[\gamma] &= \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = \int_0^{\pi/\omega_1} \mathrm{d}t\,\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -F_0 r_0\omega_2\int_0^{\pi/\omega_1} \mathrm{d}t\,\sin^2(\omega_1 t) \\
&= -F_0 r_0\omega_2\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_1 t)\right]_0^{\pi/\omega_1} = \boxed{-F_0\pi r_0\frac{\omega_2}{2\omega_1}}.
\end{aligned}$$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 17]