Dirk-André Deckert & Jago Silberbauer

Wintersemester 2024/25

Mathematik 3 für Physiker - Lösung 1

Aufgabe 1

Wir verwenden den Satz von der dominierten für Reihen. Zunächst zeigen wir

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(n)^k}{n^2} = 0 \tag{1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dazu bemerken wir, dass $|\sin(x)| = 1$ g.d.w. $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$; ansonsten gilt $|\sin(x)| < 1$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $n \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ (linke Seite ganzzahlig und rechte Seite irrational). Es folgt $\sin(n) < 1$ und damit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(n)^k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{k\to\infty} \sin(n)^k = 0. \tag{2}$$

Weiterhin gilt

$$\left|\frac{\sin(n)^k}{n^2}\right| = \frac{|\sin(n)|^k}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \tag{3}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty$. Damit sind alle Voraussetzungen für den Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen überprüft und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)^k}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(n)^k}{n^2} = 0. \tag{4}$$

Aufgabe 2

Wir verwenden den Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen. Zunächst sei bemerkt, dass, nach einem Indexshift und einer Anwendung der Formel für die geom. Reihe, die Gleichung

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} q^k = \sum_{k=n}^{\infty} q^k = q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q} \tag{5}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt mittels Dreiecksungleichung, dass

$$\left|\sum_{k=n}^{m} q^k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |q|^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} |q|^k = \frac{|q|^n}{1-q} \tag{6}$$

und es gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|q|^n}{1-q} < \infty \tag{7}$$

(weitere Anwendung der formel für die geom. Reihe). Damit sind alle Voraussetzungen für den Satz von der dominerten Konvergenz für Reihen überprüft und es folgt

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{m} q^k = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} q^k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \cdot \left(1 - \frac{1}{1-q}\right). \tag{8}$$

Aufgabe 3

a) Wir setzen $\overline{y} := \lim_{x\to\infty} f(x)$. Zu zeigen ist

$$\forall\epsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x, y \in [1, \infty[\colon\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{9}$$

Sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen $a > 1$ groß genug, sodass für alle $z, z' \geq a$ gilt

$$|f(z) - f(z')| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{10}$$

Diese Wahl ist möglich aufgrund der Definition des Grenzwerts (Äquivalenz zu Cauchy-Eigenschaft). Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Interval ist nun $f|_{[1,a]}$ gleichmäßig stetig. Damit wählen wir ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in [1, a]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{11}$$

Seien nun $x, y \in [1, \infty[$ mit $|x - y| < \delta$. Um den Beweis abzuschließen müssen wir nun zeigen, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Hierfür unterscheiden wir 3 Fälle.

Fall 1: $x, y \in [1, a]$

Mit (11) folgt sofort

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \tag{12}$$

Fall 2: $x, y > a$

Mit (10) folgt in diesem Fall

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \tag{13}$$

Fall 3: $x \in [1, a]$, $y > a$

Es gilt $|x - a| + |a - y| = |x - y| < \delta$ und damit $|x - a| < \delta$. Es folgt mit (11), dass

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{14}$$

Zudem gilt mit (10), dass

$$|f(a) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{15}$$

Setzen wir dies mit der Dreiecksungleichung zusammen so folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \epsilon, \tag{16}$$

was den Beweis abschließt.

b) Eine solche Funktion ist z.B. $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$. Dass diese Funktion tatsächlich die gewünschten Eigenschaften erfüllt zeigen wir in den kommenden Wochen.

Aufgabe 4

a) Man rechnet mittels Indexshift leicht nach, dass

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=m}^{n} a_j(b_{j+1}-b_j) \;+\; \sum_{j=m}^{n} b_{j+1}(a_{j+1}-a_j) && (17)\\
&= \sum_{j=m}^{n} a_jb_{j+1} - a_jb_j + a_{j+1}b_{j+1} - a_jb_{j+1} && (18)\\
&= \sum_{j=m}^{n} a_{j+1}b_{j+1} - \sum_{j=m}^{n} a_jb_j && (19)\\
&= \sum_{j=m+1}^{n+1} a_jb_j - \sum_{j=m}^{n} a_jb_j && (20)\\
&= a_{n+1}b_{n+1} - a_mb_m, && (21)
\end{aligned}
$$

was die Behauptung beweist.

b) Wir folgen dem Hinweis und setzen $a_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Mit Teilaufgabe a) folgt für alle $N \geq 2$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N-1} \frac{e^{inx}}{n} &= \sum_{n=1}^{N-1} b_n(a_n - a_{n-1}) = a_Nb_N - a_1b_1 - \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1}(b_{n+1}-b_n) && (22)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} e^{ikx} - (1+e^{ix}) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} e^{ikx}\right) && (23)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} (e^{ix})^k - (1+e^{ix}) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} (e^{ix})^k\right). && (24)
\end{aligned}
$$

Nutzen wir nun die geom. Summenformel so folgt

$$
\sum_{n=1}^{N-1} \frac{e^{inx}}{n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{ix(N+1)}}{1-e^{ix}} - (1+e^{ix}) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} \frac{1-e^{ix(n+2)}}{1-e^{ix}}. \tag{25}
$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert für $N \to \infty$, was die Aufgabe abschließt. Für den ersten Term gilt mittels Dreiecksungleichung

$$
\left| \frac{1}{N}\frac{1-e^{ix(N+1)}}{1-e^{ix}} \right| \leq \frac{1}{N}\frac{2}{|1-e^{ix}|} \xrightarrow{N\to\infty} 0. \tag{26}
$$

Der zweite Term hängt nicht von N ab. Für den dritten Term gilt mittels Dreiecksungleichung und Majorantenkriterium, dass

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} \frac{1-e^{ix(n+2)}}{1-e^{ix}} \right| &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} \left| \frac{1-e^{ix(n+2)}}{1-e^{ix}} \right| && (27)\\
&\leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)} && (28)\\
&\leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. && (29)
\end{aligned}
$$

Es folgt die gewünschte Konvergenz.

Aufgabe 5

Nach einem Resultat aus der Vorlesung (*Lemma 5* im Abschnitt *The Riemann Integral* im *Hitchhiker's guide to Mathematics*) ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für alle $\delta > 0$ Stufenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([0,1])$ gibt, sodass

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{and} \quad \int_{\mathcal{T}([0,1])} \psi - \int_{\mathcal{T}([0,1])} \varphi \leq \delta. \tag{30}$$

Wir widerlegen dies nun. Wähle $\delta < 1$. Es seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([0,1])$. (30) ist widerlegt sobald wir die Implikation

$$\varphi \leq f \leq \psi \Rightarrow \int_{\mathcal{T}([0,1])} \psi - \int_{\mathcal{T}([0,1])} \varphi \geq 1 \tag{31}$$

gezeigt haben. Es gelte also $\varphi \leq f \leq \psi$. Insbesondere bedeutet dies

$$\varphi(x) \leq f(x) = 0 \tag{32}$$

für alle $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Da φ eine Stufenfunktion ist (und damit stückweise stetig) und $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ dicht in $[0,1]$ ist folgt $\varphi \leq 0$. Analog zeigt man $\psi \geq 1$. Mit der Monotonie des Riemann-Integrals für Stufenfunktionen folgt dann

$$\int_{\mathcal{T}([0,1])} \psi - \int_{\mathcal{T}([0,1])} \varphi \geq \int_{\mathcal{T}([0,1])} 1 - \int_{\mathcal{T}([0,1])} 0 = 1 - 0 = 1, \tag{33}$$

was die Behauptung beweist.