Blatt 02: Vektorräume, Euklidische Geometrie

Ausgabe: Mo 21.10.24 Zentralübung: Do 24.10.24 Abgabe: Do 31.10.24, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 5, 7, 9, 8.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (L2.4.1), 9 (L3.3.7).

Beispielaufgabe 1: $\sqrt{1-x^2}$-Integrale mittels trigonometrischer Substitution [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Für Integrale, die $\sqrt{1-x^2}$ enthalten, empfiehlt sich die trigonometrische Substitution $x = \sin y$, denn dadurch erhält man $\sqrt{1-x^2} = \cos y$. Berechnen Sie mittels dieser Substitution folgende Integrale $I(z)$; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.
$\big[$Kontrollergebnis: (a) $I\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \frac{\pi}{4}$; (b) für $a = \frac{1}{2}$, $I\big(\sqrt{2}\big) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.$\big]$

(a) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|z| < 1)$, (b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \sqrt{1-a^2x^2} \quad (|az| < 1)$.

Hinweis: Das in (b) nach der Substitution auftretende $\cos^2 y$-Integral lässt sich partiell integrieren.

Beispielaufgabe 2: Vektorraumaxiome: rationale Zahlen [3]
Punkte: (a)[2,5](E); (b)[0,5](E).

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}^2 = \{\binom{x^1}{x^2} \,|\, x^1, x^2 \in \mathbb{Q}\}$, bestehend aus Paaren von rationalen Zahlen, über dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ einen Vektorraum bildet.

(b) Ist es möglich, aus der Menge aller Paare von ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}^2 = \{\binom{x^1}{x^2} \,|\, x^1, x^2 \in \mathbb{Z}\}$, einen Vektorraum zu bilden? Begründen Sie ihre Antwort.

Beispielaufgabe 3: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln [Bonus]
Punkte: [2](M,Bonus)

Die Vektorraum-Axiome können im Allgemeinen auf vielerlei unterschiedliche Arten erfüllt werden, z.B. durch unkonventionelle Definitionen von Vektoraddition und skalarer Multiplikation. Wir wollen dies anhand eines Beispiels veranschaulichen:
Für alle $a \in \mathbb{R}$, sei $V_a \equiv \{\mathbf{v}_x\}$ eine Menge, deren Elemente $\mathbf{v}_x$, indiziert durch reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die folgenden Rechenregeln erfüllen:

Addition: $\boldsymbol{+} : \quad V_a \times V_a \to V_a, \quad (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y) \mapsto \mathbf{v}_x \boldsymbol{+} \mathbf{v}_y \equiv \mathbf{v}_{x+y+a}$
Multiplikation mit einem Skalar: $\boldsymbol{\cdot} : \quad \mathbb{R} \times V_a \to V_a, \quad (\lambda, \mathbf{v}_x) \mapsto \lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_x \equiv \mathbf{v}_{\lambda x + a(\lambda-1)}$

Als reele Zahlen erfüllen die Indizes a und x die üblichen Additions- und Multiplikationsregeln in $\mathbb{R}$; z.B. gilt für V_2: $\mathbf{v}_3 \boldsymbol{+} \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{3+4+2} = \mathbf{v}_9$ und $3 \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{3\cdot4+2(3-1)} = \mathbf{v}_{16}$.
Zeigen Sie, dass das Tripel $(V_a, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei $\mathbf{v}_{-a}$ und 1 die neutralen Elemente bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation sind. *Hinweis:* Das Inverse von $\mathbf{v}_x$ ist $\mathbf{v}_{-x-2a}$.

Beispielaufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit [3]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

(a) Sind die drei Vektoren $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)^T$ und $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 4)^T$ linear unabhängig?

(b) Je nachdem, ob Ihre Antwort ja oder nein ist, finden Sie einen neuen Vektor $\mathbf{v}_2'$, so dass $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2'$ und $\mathbf{v}_3$ linear abhängig bzw. linear unabhängig sind, und zeigen Sie explizit, dass diese Eigenschaft gilt.

Beispielaufgabe 5: Einsteinsche Summenkonvention [2]
Punkte: (a)[0.5](E), (b)[0.5](E), (c)[0.5](E), (d)[0.5](E).

Sei $a_1, a_2, b^1, b^2 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen, formuliert mittels der Einsteinschen Summenkonvention, sind korrekt und welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $a_i b^i \stackrel{?}{=} b^j a_j\,,$

(b) $a_i \delta^i{}_j b^j \stackrel{?}{=} a_k b^k\,,$

(c) $a_i b^j a_j b^k \stackrel{?}{=} a_k b^l a_l b^i\,,$

(d) $a_1 a_i b^1 b^i + b^2 a_j a_2 b^j \stackrel{?}{=} (a_i b^i)^2\,.$

Beispielaufgabe 6: Winkel, orthogonale Zerlegung [2]
Punkte: (a)[0,5](E); (b)[1.5](E).

(a) Finden Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a} = (3, 4)^T$ und $\mathbf{b} = (7, 1)^T$.

(b) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{c} = (3, 1)^T$ und $\mathbf{d} = (-1, 2)^T$. Zerlegen Sie $\mathbf{c} = \mathbf{c}_\parallel + \mathbf{c}_\perp$ in Komponenten parallel bzw. senkrecht zu $\mathbf{d}$. Skizzieren Sie alle vier Vektoren.
[Ergebniskontrolle: $\|\mathbf{c}_\parallel\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\|\mathbf{c}_\perp\| = \frac{7}{\sqrt{5}}$.]

Beispielaufgabe 7: Projektion auf eine Orthonormalbasis [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{w} = (-2, 3)^T$ in der Form $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1' w^1 + \mathbf{e}_2' w^2$ dar, indem Sie seine Komponenten w^i bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_i'\}$ mittels Projektion auf die Basisvektoren bestimmen.
[Ergebniskontrolle: $\sum_{i=1}^2 w^i = -2\sqrt{2}$.]

Beispielaufgabe 8: Gram-Schmidt-Verfahren [2]
Punkte: [2](E)

Finden Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren für die folgenden linear unabhängigen Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ einen orthonormalen Satz $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ mit demselben Span und mit $\mathbf{e}'_1 || \mathbf{v}_1$.

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)^T\,, \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^T\,, \qquad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^T\,.$$

Beispielaufgabe 9: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M)

Geben sind die Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_1 = \binom{2}{0}$ und $\hat{\mathbf{v}}_2 = \binom{1}{1}$, ausgedrückt durch Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. (In dieser Aufgabe benutzen wir folgende Notation: Vektoren im Inneren-Produktraum $\mathbb{R}^2$ tragen einen Hut, z.B. $\hat{\mathbf{x}}$, und ihre Komponenten bezüglich einer gegebenen Basis tragen keinen, z.B. $\mathbf{x}$.)

(a) Drücken Sie den Standardbasisvektor $\hat{\mathbf{e}}_1 = \binom{1}{0}$ als Linearkombination von $\hat{\mathbf{v}}_1$ und $\hat{\mathbf{v}}_2$ aus. Ditto für $\hat{\mathbf{e}}_2 = \binom{0}{1}$. Bilden $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$?.

(b) $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{v}}_1 x^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 x^2$ und $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{v}}_1 y^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 y^2$ seien zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$, deren Komponenten bzgl. $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$ gegeben sind durch $\mathbf{x} = (x^1, x^2)^T = (3, -4)^T$ bzw. $\mathbf{y} = (y^1, y^2)^T = (-1, 3)^T$. Drücken Sie $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$ als Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ aus und berechnen Sie deren Skalarprodukt $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2}$.

(c) Wird das Skalarprodukt $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2}$ durch die Komponenten x^i von $\hat{\mathbf{x}}$ und y^j von $\hat{\mathbf{y}}$ bezüglich der nicht-orthonormalen Basis $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$ ausgedrückt, nimmt es die Form eines inneren Produkts mit einer Metrik an: $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_g = x^i g_{ij} y^j$, mit $g_{ij} = \langle \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j \rangle_{\mathbb{R}^2}$. Berechnen Sie die Komponenten der Metrik explizit (konkret: finden Sie g_{11}, g_{12}, g_{21} und g_{22}).

(d) Das innere Produkt aus (c) lässt sich in die Form $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2} = (x^i g_{ij}) y^j = x_j y^j$ schreiben, mit $x_j = x^i g_{ij}$; dadurch wird die Metrik "versteckt", indem sie die Definition von kovarianten Komponenten (Index unten) absorbiert wird. Berechnen Sie $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2}$ auf diese Weise, indem Sie zunächst x_1 und x_2 finden. [Kontrolle: ist das Ergebnis konsistent mit dem von (b)?]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 21]

Hausaufgabe 1: $\sqrt{1+x^2}$-Integrale mittels hyperbolischer Substitution [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Für Integrale, die $\sqrt{1+x^2}$ enthalten, empfiehlt sich die hyperbolische Substitution $x = \sinh y$, denn dadurch erhält man $\sqrt{1+x^2} = \cosh y$. Berechnen Sie mittels dieser Substitution folgende Integrale $I(z)$; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von $\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$.
[Kontrollergebnis: (a) $I\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2$; (b) für $a = \frac{1}{2}$, $I\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 2 + \frac{15}{16}$.]

(a) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (b) $I(z) = \displaystyle\int_0^z \mathrm{d}x \, \sqrt{1+a^2x^2}$.

Hausaufgabe 2: Vektorraum der komplexen Zahlen [3]

Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen bilden.

Hausaufgabe 3: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln [Bonus]

Punkte: (a)[1](M,Bonus); (b)[1](M,Bonus); (c)[1](E,Bonus)

Für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, sei $V_\mathbf{a} \equiv \{\mathbf{v_x}\}$ eine Menge, deren Elemente $\mathbf{v_x}$, indiziert durch zwei-dimensionale reelle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, die folgenden Rechenregeln erfüllen:

Addition:	$\boldsymbol{+}$:	$V_\mathbf{a} \times V_\mathbf{a} \to V_\mathbf{a}$,	$(\mathbf{v_x}, \mathbf{v_y}) \mapsto \mathbf{v_x} \boldsymbol{+} \mathbf{v_y} \equiv \mathbf{v_{x+y-a}}$
Multiplikation mit einem Skalar:	$\boldsymbol{\cdot}$:	$\mathbb{R} \times V_\mathbf{a} \to V_\mathbf{a}$,	$(\lambda, \mathbf{v_x}) \mapsto \lambda \boldsymbol{\cdot} \mathbf{v_x} \equiv \mathbf{v}_{\lambda\mathbf{x}+f(\mathbf{a},\lambda)}$

Hier ist $f(\mathbf{a}, \lambda)$ eine Funktion von $\mathbf{a}$ und λ, deren Form im Folgenden zu bestimmen ist.

(a) Zeigen Sie, dass $V_\mathbf{a}$ mit der Addition $\boldsymbol{+}$ eine abelsche Gruppe ist und bestimmen Sie das neutrale Element sowie das Inverse von $\mathbf{v_x}$ bezüglich der Addition.

(b) Finden Sie die spezielle Form von f, so dass das Tripel $(V_\mathbf{a}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(c) Kann Ihre Konstruktion auf $\mathbf{a}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (wobei n eine positive, ganze Zahl ist) anstelle von $\mathbb{R}^2$ erweitert werden?

Hausaufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit [3]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

(a) Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 6)^T$ und $\mathbf{v}_3 = (-1, -1, 0)^T$ linear unabhängig?

(b) Je nachdem, ob Ihre Antwort ja oder nein ist, finden Sie einen neuen Vektor $\mathbf{v}_2'$, so dass $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2'$ und $\mathbf{v}_3$ linear abhängig bzw. linear unabhängig sind, und zeigen Sie explizit, dass diese Eigenschaft gilt.

Hausaufgabe 5: Einsteinsche Summenkonvention [2]

Sei $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b^1 = -1$, $b^2 = x$. Werten Sie folgende Ausdrücke, welche mittels der Einsteinschen Summenkonvention formuliert sind, als Funktionen von x aus:

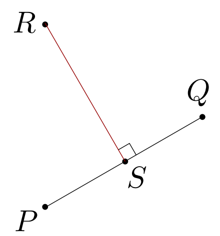
(a) $a_i b^i$, (b) $a_i a_j b^i b^j$, (c) $a_1 a_j b^2 b^j$.

[Ergebniskontrolle für $x = 3$: (a) 5, (b) 25, (c) 15.]

Hausaufgabe 6: Winkel, orthogonale Zerlegung [3]
Punkte: (a)[0,5](E); (b)[1,5](E); (c)[1](E).

(a) Finden Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a} = (2, 0, \sqrt{2})^T$ und $\mathbf{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)^T$.

In der Abbildung haben die Punkte P, Q und R Koordinatenvektoren $\mathbf{p} = (-1, -1)^T$, $\mathbf{q} = (2, 1)^T$ und $\mathbf{r} = (-1, -1 + 13a)^T$, wobei a eine positive reelle Zahl ist. Die Linie RS stehe senkrecht auf der Linie PQ.



(b) Finden Sie den Koordinatenvektor $\mathbf{s}$ von S, ausgedrückt als Funktion von a.
Hinweis: Sei $\mathbf{c}$ der Vektor von P nach Q, und $\mathbf{d}$ der Vektor von P nach R, dann zerlegen Sie $\mathbf{d} = \mathbf{d}_\parallel + \mathbf{d}_\perp$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\mathbf{c}$.

(c) Finden Sie die Länge $\overline{RS}$ von R nach S und die Länge $\overline{PS}$ von P nach S.

[Ergebniskontrolle für $a = 1$: (b) $\mathbf{s} = (5,3)^T$, (c) $\overline{RS}^2 + \overline{PS}^2 = 169$.]

Hausaufgabe 7: Projektion auf eine Orthonormalbasis [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{9}(4,-1,8)^T$, $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{9}(-7,4,4)^T$ und $\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{9}(-4,-8,1)^T$ eine Orthonormalbasis im Raum $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) $\mathbf{w} = \mathbf{e}'_i w^i$ sei die Zerlegung von $\mathbf{w} = (1,2,3)^T$ in dieser Basis. Wie lauten die Komponenten w^i? [Ergebniskontrolle: $\sum_{i=1}^3 w^i = \frac{22}{9}$.]

Hausaufgabe 8: Gram-Schmidt Verfahren [2]
Punkte: [2](E)

Finden Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren für die folgenden linear unabhängigen Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ einen orthonormalen Satz $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ mit demselben Span und mit $\mathbf{e}'_1 || \mathbf{v}_1$.

(a) $\mathbf{v}_1 = (0,3,0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1,-3,0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (2,4,-2)^T$.

(b) $\mathbf{v}_1 = (-2,0,2)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (3,6,5)^T$.

Hausaufgabe 9: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M)

Gegeben sind die Vektoren $\hat{\mathbf{v}}_1 = (2,1,2)^T$, $\hat{\mathbf{v}}_2 = (1,0,1)^T$, und $\hat{\mathbf{v}}_3 = (1,1,0)^T$ ausgedrückt durch Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. (In dieser Aufgabe benutzen wir folgende Notation: Vektoren im Inneren-Produktraum $\mathbb{R}^3$ tragen einen Hut, z.B. $\hat{\mathbf{x}}$, und ihre Komponenten bezüglich einer gegebenen Basis tragen keinen, z.B. $\mathbf{x}$.)

(a) Drücken Sie den Standardbasisvektor $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1,0,0)^T$ als Linearkombination von $\hat{\mathbf{v}}_1$, $\hat{\mathbf{v}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_3$ aus. Dito für $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0,1,0)^T$ und $\hat{\mathbf{e}}_3 = (0,0,1)^T$. Bilden $\hat{\mathbf{v}}_1$, $\hat{\mathbf{v}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_3$ eine Basis für $\mathbb{R}^3$?

(b) $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{v}}_1 x^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 x^2 + \hat{\mathbf{v}}_3 x^3$ und $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{v}}_1 y^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 y^2 + \hat{\mathbf{v}}_3 y^3$ seien zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$, deren Komponenten bzgl. $\hat{\mathbf{v}}_1$, $\hat{\mathbf{v}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_3$ gegeben sind durch $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (2,-5,3)^T$, bzw. $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3) = (4,-1,-2)^T$. Drücken Sie $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$ als Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ aus und berechnen Sie deren Skalarprodukt $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^3}$.

(c) Berechnen Sie die Komponenten der Metrik $g_{ij} = \langle \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j \rangle_{\mathbb{R}^3}$ explizit.

(d) Berechnen Sie nun das Skalarprodukt von $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$ mittels der Formel $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_g = x^i g_{ij} y^j = x_j y^j$, mit $x_j = x^i g_{ij}$, indem Sie die Summen über i und j explizit durchführen. [Kontrolle: ist das Ergebnis konsistent mit dem von (b)?]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 22]
