Übungsblatt 4 zu Mathematik I (Physik)

Aufgabe 12: (10 Punkte) Es bezeichne

$$P \;:=\; \{p \in \mathbb{N} : p \geq 2 \text{ und } 1,\, p \text{ sind die einzigen natürlichen Zahlen, die } p \text{ ohne Rest teilen } \}$$

die Menge der Primzahlen. Zeige:

a) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es ein $r = r(n) \in \mathbb{N}$ und $p_1, ..., p_r \in P$ mit $n = p_1 \cdots p_r$.

b) P ist eine unendliche Menge.
Hinweis zu b): Widerspruchsbeweis!

Aufgabe 13: (10 Punkte) Es sei X eine abzählbare Menge. Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist X^n abzählbar.

b) $\mathcal{E}(X) := \{Y \subseteq X : Y \text{ endlich}\}$ ist abzählbar.
Hinweis: Es könnte helfen die Mengen

$$\mathcal{E}_n(X) := \{Y \subseteq X : \mathrm{Kard}(Y) \leq n\}$$

zu betrachten.

Aufgabe 14: (10 Punkte)
Zeige: Jede 4-elementige Gruppe ist kommutativ.

Aufgabe 15: (10 Punkte)
Sei X eine nichtleere Menge und $(G, \star)$ eine Gruppe und $Abb(X, G) := \{f : X \to G \text{ Funktion}\}$ die Menge der Abbildungen von X nach G. Sei außerdem

$$\begin{aligned} \odot : Abb(X, G) \times Abb(X, G) &\to Abb(X, G) \\ (f, g) &\to f \odot g \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f \odot g : X &\to G \\ x &\to f(x) \star g(x) \end{aligned}$$

a) Zeige, dass $(Abb(X, G), \odot\ )$ eine Gruppe bildet.

b) Sei $(G, \star)$ zusätzlich kommutativ. Zeige, dass dann auch $(Abb(X, G), \odot\ )$ kommutativ ist.

keine Abgabe – Besprechung in der Übung am 18.11.