Aufgabe 1:

$0! := 1$, $1! := 1$ und $(n+1)! := (n+1)\cdot(n!)$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

a) $$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 = \binom{n}{n}$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{k\cdot(n!) + (n-k+1)\cdot(n!)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

(Soweit geht das ohne Induktion!)

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis:

Induktionsanfang $n=1$:

$$a+b = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1}$$

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$$

$$\overset{(IV)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \cdot (a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^l b^{n-l+1}$$

$$= a^0 b^{n+1} \binom{n}{0}$$ (nur ein Term in 2. Summe für $l=0$)

$$+ a^1 b^n \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right)$$ (Terme mit $k=0$ und $l=1$ tragen bei)

$$+ a^2 b^{n-1} \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right)$$ (" $k=1$, $l=2$)

$$\vdots$$

$$+ a^n b^1 \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right)$$ ($k=n-1$, $l=n$)

$$+ a^{n+1} b^0 \binom{n}{n}$$ (nur $k=0$ Term in 1. Summe trägt bei)

$$= b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) a^j b^{n-(j-1)} + a^{n+1}$$

$$\overset{(b)}{=} b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j b^{n-(j-1)} + a^{n+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{(n+1)-j}$$

Durch vollständige Induktion ist also

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

gezeigt.

Aufgabe 2:

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt, $n^2+n+1 \leq 2^n$?

n	1	2	3	4	5	6
n^2+n+1	3	7	13	21	31	43
2^n	2	4	8	16	32	64

Vermutung: $n^2+n+1 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

Beweis:

Induktionsanfang $n=5$: $5^2+5+1 = 31 < 2^5 = 32$

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$, $n \geq 5$:

$$(n+1)^2+(n+1)+1 = n^2+2n+1+n+1+1 =$$

$$= n^2+n+1+(2n+2)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n\geq 5 \Rightarrow 2 \leq n}}{\leq} n^2+n+1+3n \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq 5 \Rightarrow 3n \leq n^2}}{\leq} n^2+n+1+n^2 \leq 2(n^2+n+1)$$

$$\leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$N: n^2+n+1 \leq 2^n$

$\overset{2>0}{\Longrightarrow} 2 \cdot (n^2+n+1) \leq 2 \cdot 2^n$

Mit Induktion ist damit $n^2+n+1 < 2^n$ für $n \geq 5$ bewiesen; obige Tabelle schließt die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ aus.

Aufgabe 3:

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Funktion mit $\varphi_m(1) = m+1 = N(m)$ und

$$\varphi_m \circ N = N \circ \varphi_m \quad (*)$$

(mit der Nachfolgeabbildung $N : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n+1$; diese ist laut Rekursionssatz eindeutig)

a) Beh: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi_1(n) = n+1 = N(n)$

Beweis:

Induktionsanfang $n=1$:

Nach Definition von φ_1 ist

$$\varphi_1(1) = N(1) = 2$$

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$\varphi_1(n+1) = \varphi_1(N(n)) = N(\varphi_1(n))$$

$$\underset{(IV)}{=} N(n+1) = n+2$$

b) <u>Beh:</u> Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_m \circ N = \varphi_{m+1}$$

<u>Beweis:</u> Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion nach n die Gleichheit

$$(\varphi_m \circ N)(n) = \varphi_{m+1}(n)$$

Induktionsanfang <u>$n=1$:</u>

$$(\varphi_m \circ N)(1) \underset{(*)}{=} (N \circ \varphi_m)(1) = N(m+1) = \varphi_{m+1}(1)$$

Induktionsschritt <u>$n \longrightarrow n+1$:</u>

$$(\varphi_m \circ N)(n+1) \underset{(*)}{=} (N \circ \varphi_m)(N(n))$$

$$= N((\varphi_m \circ N)(n)) \underset{(IV)}{=} N(\varphi_{m+1}(n))$$

$$= (N \circ \varphi_{m+1})(n) \underset{(*)}{=} (\varphi_{m+1} \circ N)(n)$$

$$= \varphi_{m+1}(n+1)$$

Daher stimmen für $\varphi_m \circ N$ und φ_{m+1} die Definitionsbereiche, Wertevorräte und Funktionswerte überein, also ist $\varphi_m \circ N = \varphi_{m+1}$ für $m \in \mathbb{N}$.

c) Beh: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_m(n) = \varphi_n(m)$$

Beweis: Induktion nach m (bei festem n)

Induktionsanfang $m=1$:

Nach (a) ist $\varphi_1(n) = n+1 = N(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach Konstruktion von φ_n ist $\varphi_n(1) = n+1 = N(n)$, also

$$\varphi_1(n) = \varphi_n(1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsschritt $m \longrightarrow m+1$:

$$\varphi_{m+1}(n) \underset{(b)}{=} (\varphi_m \circ N)(n) \underset{(*)}{=} (N \circ \varphi_m)(n)$$

$$= N(\varphi_m(n)) \underset{(IV)}{=} N(\varphi_n(m))$$

$$= (N \circ \varphi_n)(m) \underset{(*)}{=} (\varphi_n \circ N)(m)$$

$$= \varphi_n(m+1)$$

Da auf $\mathbb{N}$ die Addition durch $m+n := \varphi_m(n)$ definiert wird, zeigt dies, daß $+$ kommutativ ist, also $\varphi_m(n) = m+n = \varphi_n(m) = n+m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt.