Aufgabe 1:

a) $X = \{\square, \circ, \triangle\}$ und

$\mathcal{R} = \{(\square,\square), (\circ,\circ), (\triangle,\triangle), (\square,\triangle), (\circ,\triangle)\}$

definiert eine Relation, die

- reflexiv ist, denn für jedes $x \in X$ ist $(x,x) \in \mathcal{R}$
- nicht symmetrisch ist, denn z.B. $(\square,\triangle) \in \mathcal{R}$ und $(\triangle,\square) \notin \mathcal{R}$
- antisymmetrisch ist, da es kein $(x,y) \in \mathcal{R}$ mit $x \neq y$ und $(y,x) \in \mathcal{R}$ gibt.
- transitiv ist, für $x,y,z \in X$ mit $(x,y) \in \mathcal{R}$ und $(y,z) \in \mathcal{R}$ gibt es die Möglichkeiten

$x = \square = y = z \longrightarrow (\square,\square) \in \mathcal{R}$

$x = \square = y,\ z = \triangle \longrightarrow (\square,\square), (\square,\triangle) \in \mathcal{R}$

$x = \circ = y = z \longrightarrow (\circ,\circ) \in \mathcal{R}$

$x = \circ = y,\ z = \triangle \longrightarrow (\circ,\circ), (\circ,\triangle) \in \mathcal{R}$

$x = \triangle = y = z \longrightarrow (\triangle,\triangle) \in \mathcal{R}$

$x = \triangle = y \longrightarrow$ dann gibt es kein $z \neq \triangle$ mit $(\triangle,z) \in \mathcal{R}$

$x = \square,\ y = \triangle = z \longrightarrow (\square,\triangle) \in \mathcal{R}$

gibt kein $z \neq \triangle$ mit $(\triangle,z) \in \mathcal{R}$

$x = \circ,\ y = \triangle = z \longrightarrow (\circ,\triangle) \in \mathcal{R}$

damit ist $\mathcal{R}$ transitiv

Damit ist $\mathcal{R}$ keine Äquivalenzrelation aber eine Ordnungsrelation.

b) $f: X \longrightarrow Y$ eine Funktion, für $x_1, x_2 \in X$

Sei $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.

Dann ist die Relation $\sim$

- reflexiv, denn für jedes $x \in X$ ist $f(x) = f(x)$ also $x \sim x$
- symmetrisch, denn sind $x, y \in X$ mit $x \sim y$ so gilt $f(x) = f(y)$ und damit $y \sim x$.
- transitiv, denn sind $x, y, z \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, dann ist $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$, also ist $f(x) = f(z)$ d.h. $x \sim z$.
- antisymmetrisch für injektives f, denn für $x, y \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim x$ ist $f(x) = f(y)$ und für injektives f folgt daraus $x = y$.
- nicht antisymmetrisch, wenn f nicht injektiv ist, denn dann gibt es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$.

$\Rightarrow \sim$ Äquivalenzrelation; für injektives f auch Ordnungsrelation

Aufgabe 2:

$$f: [0,\infty[\longrightarrow [0,1[$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1+x}$$

(da für $x \in [0,\infty[$ dann $\frac{x}{1+x} \in [0,1[$ ist $[0,1[$ ein möglicher Wertevorrat)

$$g: [0,1[\longrightarrow [0,\infty[$$
$$y \longmapsto \frac{y}{1-y}$$

ist wegen $1-y > 0$ für $y \in [0,1[$ wohldefiniert und $\frac{y}{1-y} \geq 0$.

Für $x \in [0,\infty[$ ist

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1-\frac{x}{1+x}} =$$

$$= \frac{x \quad (1+x)}{(1+x)\ (1+x-x)} = x \text{, dh. } g \circ f = id_{[0,\infty[}.$$

Für $y \in [0,1[$ ist

$$(f \circ g)(y) = f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}} =$$

$$= \frac{y \cdot (1-y)}{(1-y)\ (1-y+y)} = y \text{, dh. } f \circ g = id_{[0,1[}$$

also ist f bijektiv.

Sind $x_1, x_2 \in [0,\infty[$ mit $x_1 < x_2$, dann folgt durch Addition von $x_1 x_2 \geq 0$:

$$\underbrace{x_1 + x_1 x_2}_{=\, x_1(1+x_2)} < \underbrace{x_2 + x_1 x_2}_{=\, x_2(1+x_1)}$$

$$x_1(1+x_2) < x_2(1+x_1)$$

Da $1+x_2 > 0$ und $1+x_1 > 0$ folgt durch Teilen mit $1+x_2$ und $1+x_1$:

$$f(x_1) = \frac{x_1}{1+x_1} < f(x_2) = \frac{x_2}{1+x_2}$$

und damit ist f streng monoton steigend.

$$f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left\{x \in [0,\infty[\,:\, f(x) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$= [0,1]$$

f streng monoton steigend, $f(1) = \frac{1}{2}$,
also $f(x) < \frac{1}{2}$ für alle $x \in [0,1[$
$f(x) > \frac{1}{2}$ für alle $x > 1$.

Aufgabe 3:

a) Beh: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Induktionsanfang $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{(IV)}{=}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] =$$

$$= \frac{n+1}{6}\left[2n^2 + 7n + 6\right]$$

$$= \frac{n+1}{6}\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$

weshalb Induktionsschritt gezeigt und Behauptung per Induktion gezeigt.

b) $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$

<u>Beh:</u> $(1+x)^n \geq 1+nx$

<u>Beweis:</u>

Induktionsanfang <u>$n=1$:</u> $(1+x)^1 = 1+x$

Induktionsschritt <u>$n \longrightarrow n+1$:</u>

$$(1+x)^{n+1} = \underline{(1+x)^n}(1+x) \geq \underline{(1+nx)}(1+x)$$

Für $x \geq -1$ ist $1+x \geq 0$ also folgt aus IV: $(1+x)^n \geq 1+nx$ durch Multiplikation mit $(1+x) \geq 0$ dies....

$$= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$