Blatt 2: Vektorräume, Euklidische Geometrie

Trung Kien Pham
Gruppe 4

HA1

(a) $I(z) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\operatorname{arcsinh} z} \frac{\cosh y \, dy}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}$ $(x = \sinh y,\ dx = \cosh y\, dy)$

$= \operatorname{arcsinh} z$ ✓ 1

(b) $I(z) = \int_0^z \sqrt{1+a^2x^2}\,dx = \int_0^{\operatorname{arcsinh} az} \sqrt{1+\sinh^2 y}\ \frac{1}{a}\cosh y\, dy$ $(ax = \sinh y)$

$= \frac{1}{a}\int_0^{\operatorname{arcsinh} az} \cosh^2 y\, dy = \frac{1}{2a}\int_0 (\cosh(2y)+1)\,dy$

$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2}\sinh(2\operatorname{arcsinh} az) + \operatorname{arcsinh}(az)\right)$

3/3 $= \frac{1}{2a}\left[az\sqrt{1+a^2z^2} + \operatorname{arcsinh}(az)\right]$ ✓ 2

HA2

Vektoraddition: $+: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(a+bi, c+di) \mapsto (a+c)+(b+d)i = (a+bi)+(c+di)$

Skalare Multiplikation: $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(\lambda, a+bi) \mapsto \lambda(a+bi) = (\lambda a)+(b\lambda)i$

$(\mathbb{C},+)$ Abgeschlossenheit: $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i \in \mathbb{C}$

Assoziativität: $[(a+bi)+(c+di)]+(e+fi) = (a+bi) + [(c+di)+(e+fi)]$

Kommutativität: $(a+bi)+(c+di) = (c+di)+(a+bi)$

Neutrales Element: $0 = 0+0i$

Inverses Element von z ist $-z$

$(\mathbb{C},\cdot)$ Distributivität: $(\lambda+\mu)z = (\lambda z)+(\mu\cdot z)$ $(\mu,\lambda\in\mathbb{R})$

$\lambda(z_1+z_2) = (\lambda z_1)+(\lambda z_2)$

Assoziativität: $(\lambda\mu)z = \lambda(\mu\cdot z) = \mu(\lambda z)$

3/3 Neutrales Element: 1

HA3

(a) Abgeschlossenheit gilt per Definition

Assoziativität: $(v_x+v_y)+v_z = v_{x+y-a}+v_z = v_{x+y+z-2a}$
$= v_x + v_{y+z-a} = v_x + (v_y+v_z)$

Kommutativität: $v_x+v_y = v_{x+y+a} = v_{y+x+a} = v_y+v_x$

Neutrales Element: v_a $(v_x+v_a = v_{x+a-a} = v_x)$

Inverses Element: v_{-x+2a} $(v_x+v_{-x+2a} = v_a)$

(b) Assoziativität: Für $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\lambda(\mu v_x) = \lambda\cdot v_{\mu x + f(a,\mu)} = v_{\lambda\mu x+\lambda f(a,\mu)+f(a,\lambda)}$

$(\lambda\mu)v_x = v_{\lambda\mu x + f(a,\lambda\mu)}$

Trung Kien Pham Gruppe

Daraus folgt: $\lambda f(a,\mu) + f(a,\lambda) = f(a,\lambda\mu)$ (1)

- Distributivität: $(\mu+\lambda)v_x = v_{(\mu+\lambda)x} + f(a,\mu+\lambda)$

$$\mu v_x + \lambda v_x = v_{\mu x} + f(a,\mu) + v_{\lambda x} + f(a,\lambda)$$
$$= v_{(\mu+\lambda)x} + f(a,\mu) + f(a,\lambda) - a$$

Daraus folgt: $f(a,\mu+\lambda) = f(a,\mu) + f(a,\lambda) - a$ (2)

$\lambda(v_x + v_y) = \lambda \cdot v_{x+y-a} = v_{\lambda(x+y-a)} + f(a,\lambda)$

$\lambda v_x + \lambda v_y = v_{\lambda x + \lambda y} + 2f(a,\lambda) - a$

Daraus folgt: $-\lambda a + f(a,\lambda) = 2f(a,\lambda) - a$
$\Leftrightarrow f(a,\lambda) = a(1-\lambda)$ (3)

(3) stimmt mit (1) (2)

Also, $(V_a, +, \circ)$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum wenn $f(a,\lambda) = a(1-\lambda)$

+3

(c) Ja

HA4

(a) $\vec{v} = a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2 + a^3\vec{v}_3 = 0$

$$\begin{cases} a^1 + 2a^2 - a^3 = 0 \\ 2a^1 + 4a^2 - a^3 = 0 \\ 3a^1 + 6a^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{unendliche Lösungen} \begin{cases} a^1 = -2a^2 \\ a^2 = a^2 \\ a^3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind nicht linear unabhängig ✓ 2

(b) $\vec{v}_2 = (x, y, z)^T$

$$\begin{cases} a^1 + xa^2 - a^3 = 0 \\ 2a^1 + ya^2 - a^3 = 0 \\ 3a^1 + za^2 = 0 \end{cases}$$

wähle $x = 1 \Rightarrow a^3 = a^2$
wähle $y = 2 \Rightarrow a^3 = 2a^2$ } $a^2 = a^3 = 0$
wähle $z = 0 \Rightarrow a^1 = 0$

Damit ist $\vec{v}_2' = (1,2,0)^T$ eine Wahl, für die $\vec{v}_1, \vec{v}_2', \vec{v}_3$ unabhängig sind ✓ 1

3/3

HA5

(a) $a_i b^i = \sum_{i=1}^{2} a_i b^i = 2x - 1$ ✓

(b) $a_i a_j b^i b^j = a_1 a_1 b^1 b^1 + a_1 a_2 b^1 b^2 + a_2 a_1 b^2 b^1 + a_2 a_2 b^2 b^2$
$= 4x^2 - 4x + 1$
$= (2x-1)^2$ ✓

(c) $a_1 a_j b^2 b^j = a_1 a_1 b^2 b^1 + a_1 a_2 b^2 b^2$
$= 2x^2 - x$
$= x(2x-1)$ ✓

2/2

HA6

(a) $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ ✓ 0,5

(b) $\vec{RS} = \frac{\vec{PQ} \times (\vec{RQ} \times \vec{PQ})}{|\vec{PQ}|^2} = \cancel{\frac{(\vec{q}-\vec{p}) \times [(\vec{q}-\vec{r}) \times (\vec{q}-\vec{p})]}{|\vec{q}-\vec{p}|^2}}$
$= \cancel{\frac{(3,2) \times [(+3, 2-13a) \times (3,2)]}{3^2 + 2^2}}$

Truong Kuen Pham
Gruppe 4

(b) $\vec{RS} = \vec{RP} + \vec{PS} = \vec{RP} + \frac{\vec{PR}\cdot\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|} = (0,-13a) + \frac{(0,13a)\cdot(3,2)}{\sqrt{3^2+2^2}}$

$\vec{RS} = \vec{RP} + \vec{PS} = \vec{RP} + \frac{(\vec{PR}\cdot\vec{PQ})\cdot\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|^2} = (6a,-9a)^T$

$\vec{s} = \vec{RS} + \vec{r} = (6a-1, 4a-1)^T$ ✓ 1,5

(c) $|\vec{RS}| = 3\sqrt{13}\cdot a$ ✓ 1

3/3 $|\vec{PS}| = |(6a,4a)^T| = 2\sqrt{13}\,a$

HA7

(a) $\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}' = 0$ $\quad \vec{e}_1{}'\cdot\vec{e}_1{}' = 1$

$\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_3{}' = 0$ $\quad \vec{e}_2{}'\cdot\vec{e}_2{}' = 1$ $\quad \Rightarrow \vec{e}_i{}'\cdot\vec{e}_j{}' = \delta_i^j$

$\vec{e}_2{}' \cdot \vec{e}_3{}' = 0$ $\quad \vec{e}_3{}'\cdot\vec{e}_3{}' = 1$

$\Rightarrow$ Orthonormalbasis im Raum $\mathbb{R}^3$ ✓ 1

(b) $\vec{w} = w^1\vec{e}_1{}' + w^2\vec{e}_2{}' + w^3\vec{e}_3{}' = (1,2,3)^T$

$$\begin{cases} 4w^1 - 7w^2 - 4w^3 = 1\cdot 9 \\ -w^1 + 4w^2 - 8w^3 = 2\cdot 9 \\ 8w^1 + 4w^2 + w^3 = 3\cdot 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w^1 = 26/9 \\ w^2 = 73/9 \\ w^3 = -17/9 \end{cases}$$ ✓ 1

2/2

HA8

(a) Startvektor: $\vec{v}_{1,\perp} = \vec{v}_1 = (0,3,0)^T$

Normierung $\vec{v}_{1,\perp}$: $\vec{e}_1{}' = \frac{\vec{v}_{1,\perp}}{|\vec{v}_{1,\perp}|} = (0,1,0)^T$

Orthogonalisierung: $\vec{v}_{2,\perp} = \vec{v}_2 - \vec{e}_1{}'(\vec{e}_1{}'\cdot\vec{v}_2) = (1,0,0)^T$

Normierung $\vec{v}_{2,\perp}$: $\vec{e}_2{}' = (1,0,0)^T$

Orthogonalisierung: $\vec{v}_{3,\perp} = \vec{v}_3 - \vec{e}_2{}'(\vec{e}_2{}'\cdot\vec{v}_3) - \vec{e}_1{}'(\vec{e}_1{}'\cdot\vec{v}_3) = (0,0,-2)^T$ ✓

Normierung $\vec{v}_{3,\perp}$: $\vec{e}_3{}' = (0,0,-1)^T$

(b) Startvektor: $\vec{v}_{1,\perp} = \vec{v}_1 = (-2,0,2)^T$

Normierung $\vec{v}_{1,\perp}$: $\vec{e}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$

Orthogonalisierung $\vec{v}_{2,\perp} = \vec{v}_2 - \vec{e}_1{}'(\vec{e}_1{}'\cdot\vec{v}_2) = (1,1,1)^T$

Normierung $\vec{v}_{2,\perp}$: $\vec{e}_2{}' = \cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)^T}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$

Orthogonalisierung: $\vec{v}_{3,\perp} = \cancel{\frac{2}{3}(-2}$ $\frac{2}{3}(-1,2,-1)^T$

2/2

Normierung $\vec{v}_{3,\perp}$: $\vec{e}_3{}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T$ ✓

HA9

(a) $\vec{e}_1 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$

$\vec{e}_2 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$

$\vec{e}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ bilden ja eine Basis für $\mathbb{R}^3$ ✓

Trung Kien Pham
Gruppe 4

(b) $(\vec{x})_{\mathbb{R}^3} = 2\cdot(2,1,2)^T - 5(1,0,1)^T + 3(1,1,0)^T$
$= (2,5,-1)^T$

$(\vec{y})_{\mathbb{R}^3} = 4(2,1,2)^T - (1,0,1)^T - 2(1,1,0)^T$
$= (5,2,7)^T$

$(\vec{x}\cdot\vec{y})_{\mathbb{R}^3} = 13$ ✓

(c) $g_{11} = 9$ $\quad g_{22} = 2$ $\quad g_{33} = 2$
$g_{12} = 4$ $\quad g_{23} = 1$ $\quad g_{32} = 1$
$g_{13} = 3$ $\quad g_{21} = 4$ $\quad g_{31} = 3$ ✓

(d) $(\vec{x}\cdot\vec{y})_{\mathbb{R}^3} = x^i \cdot g_{ij}\, y^j$
$= 2\cdot 9\cdot 4 + (-5)\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot(-2)$
$+ 2\cdot 4\cdot(-1) + (-5)\cdot 1\cdot(-2) + 3\cdot 1\cdot(-1)$
$+ 2\cdot(-2)\cdot 3 + (-5)\cdot 4\cdot 4 + 3\cdot 3\cdot 4$
$= 13$ ✓

Stimmt mit (b)

4/4

Eliana Wildgruber

$\boxed{25/22}$

Super! Weiter so :)