Dirk-André Deckert & Jago Silberbauer Wintersemester 2024/25

Mathematik 3 für Physiker - Übung 3

Aufgabe 1
Gegeben sei eine stetige Funktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\eta = \eta \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}$ und

$$\int_{[-1,1]} \eta(x) = 1. \tag{1}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $\eta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \eta_k(x) := k \cdot \eta(kx)$. Betrachten Sie

$$\delta_0 : \mathcal{C}([-1,1]) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \delta_0(g) := \lim_{k\to\infty} \int_{[-1,1]} \eta_k(x) g(x) dx. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass

a) δ_0 wohldefiniert ist.

b) $\delta_0(g) = g(0)$ gilt für alle $g \in \mathcal{C}([-1,1])$.

Aufgabe 2 (Integralrestglied der Taylor-Entwicklung)
Gegeben sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

a) $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(N+1)}(t)}{N!}(x-t)^N dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Nutzen Sie partielle Integration und vollständige Induktion.

Aufgabe 3
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\sin(\alpha)} d\alpha. \tag{3}$$

Aufgabe 4
Lösen Sie *Exercise 8* im Abschnitt *Riemann Integral Calculus* im *Hitchhiker's Guide to Mathematics.*

Aufgabe 5
Lösen Sie *Exercise 3* im Abschnitt *Convergence of Continuous Functions and the Riemann Integral* im *Hitchhiker's Guide to Mathematics.*