

# Kapitel 1

## Struktur von Reihenfolge - eine neue Grundlage für algebraische Operationen

### 1.1 Reihenfolgen, Rangfolgen und Tupel

Wir führen elementare Strukturen ein, die die Grundlage algebraischer und analytischer Systeme bilden.

#### 1.1.1 Axiome der Indexsequenzen

Eine *Indexsequenz* ist eine Menge  $I$ , die folgenden Bedingungen erfüllt:

(I1) (Nachfolger und Vorgänger):

Es gibt eine **bijektive** Abbildung  $S : I \rightarrow I$ , die wir *Nachfolgerfunktion* nennen, sodass

$$\forall i \in I [S(i) \neq i]$$

Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir als *Vorgängerfunktion*:

$$P := S^{-1} : I \rightarrow I.$$

Die durch wiederholte Anwendung der Nachfolgerfunktion erzeugte Menge

$$\mathbf{S}(i) = \{S(i), S(S(i)), S(S(S(i))), \dots\}$$

heißt **Nachfolgermenge**.

Die durch wiederholte Anwendung der Vorgängerfunktion erzeugte Menge

$$\mathbf{P}(i) = \{P(i), P(P(i)), P(P(P(i))), \dots\}$$

heißt **Vorgängermenge**.

(I2) (Die Form der Indexsequenz):

Eine Indexsequenz hat zwei Formen:

- Entweder ist die Indexsequenz endlos, wenn

$$\forall i \in I [i \notin \mathbf{S}(i) \wedge i \notin \mathbf{P}(i)]$$

- Oder ist sie eine Schleife, wenn

$$\exists i \in I [i \in \mathbf{S}(i) \vee i \in \mathbf{P}(i)]$$

(I3) (Existenz):

Es existiert mindestens eine Indexsequenz  $I$  mit

$$I = \cup(\mathbf{P}(i), \{i\}, \mathbf{S}(i))$$

### 1.1.2 Definition einer Index-Rangfolge:

Eine *Index-Rangfolge* ist eine Teilstruktur  $R$  einer endlosen Indexsequenz mit zwei Bedingungen:

- $R$  hat ein ausgezeichnetes Anfangselement  $a \in R$ , für das  $P(a) \notin R$  gilt,
- Es gilt  $R = \{a\} \cup \mathbf{S}(a)$

### 1.1.3 Definition einer Index-Umkehr-Rangfolge:

Eine *Index-Umkehr-Rangfolge* ist eine Teilstruktur  $R$  einer endlosen Indexsequenz mit zwei Bedingungen:

- $R$  hat ein ausgezeichnetes Endelement  $z \in R$ , für das  $S(z) \notin R$  gilt,
- Es gilt  $R = \{z\} \cup \mathbf{P}(z)$

### 1.1.4 Definition eines Index-Tupel

Ein *Index-Tupel* ist eine Teilstruktur  $T$  einer Indexsequenz, die einen Anfang und ein Ende besitzt, d.h. es gibt ein ausgezeichnetes Anfangselement  $a \in T$ , für das  $P(a) \notin T$  gilt, und ein ausgezeichnetes Endelement  $z \in T$ , für das  $S(z) \notin T$  gilt.

### 1.1.5 Definition von Reihenfolgen, Rangfolgen und Tupel

Es sei  $A$  eine beliebige Menge, die wir als *Wertemenge* bezeichnen,  $I$  eine Indexmenge und eine Abbildung  $a : I \rightarrow A$ . Die Struktur bezeichnet mit

$$(a_i)_{i \in I} \quad \text{mit Vorschrift } i \rightarrow a_i$$

heißt

- eine Reihenfolge, oder Sequenz, wenn  $I$  eine Indexsequenz,
- eine Rangfolge, wenn  $I$  eine Index-Rangfolge,
- eine Umkehr-Rangfolge, wenn  $I$  eine Index-Umkehr-Rangfolge,
- ein Tupel, wenn  $I$  eine Index-Tupel.

**Bemerkung:** Ein Element  $a_i$  einer Reihenfolge besteht aus zwei Komponenten:

1. einem Wert aus der Wertemenge  $a_i \in A$ ,
2. einem Index aus der Indexsequenz  $i \in I$ .

**Konvention:**

**Strukturell gesehen wird eine Reihenfolge mit ihrer Indexmenge identifiziert.**

D.h.: Es sei eine Reihenfolge  $R = (a_i)_{i \in I}$ . Wir sagen,  $a_j$  ist der Nachfolger von  $a_i$  und bezeichnen  $a_j = S(a_i)$ , wenn  $j = S(i)$  ist. Ebenfalls sagen wir,  $a_j$  ist der Vorgänger von  $a_i$  und bezeichnen  $a_j = P(a_i)$ , wenn  $j = P(i)$  ist.

Wir bezeichnen für ein Element  $a$  in einer Reihenfolge  $R$ :

1.  $S(a)$  ist der Nachfolger und  $\mathbf{S}(a)$  die Nachfolgermenge von  $a$ .
2.  $P(a)$  ist der Vorgänger und  $\mathbf{P}(a)$  die Vorgängermenge von  $a$ .

Es gilt allgemein

$$R = \cup(\mathbf{P}(a), \{a\}, \mathbf{S}(a))$$

Wenn die Reihenfolge  $R$  endlos ist, gilt

$$R = \dot{\cup}(\mathbf{P}(a), \{a\}, \mathbf{S}(a))$$

**Achtung:** Verschiedene Elemente einer Reihenfolge können denselben Wert besitzen, haben aber stets unterschiedliche Indizes. Z.B. es kann wohl passieren, dass  $a_i = S(a_i)$ , aber es gilt immer  $i \neq S(i)$ . Wenn wir die Struktur von Reihenfolgen betrachten, werden nach der obigen Konvention nur die Indizes (die Position) der Elemente betrachtet.

### 1.1.6 Die natürliche Ordnung in Reihenfolgen:

Die Nachfolgerfunktion  $S$  induziert eine natürliche Ordnung  $<$  auf einer Reihenfolge  $R$ , definiert durch:

$$a < b :\Leftrightarrow b \in \mathbf{S}(a)$$

Man erkennt unmittelbar, dass

$$a < b \Rightarrow \mathbf{S}(b) \subset \mathbf{S}(a)$$

Man schreibt  $a > b$  für  $b < a$ .

**Feststellung 1:** Die Ordnung  $<$  ist eine lineare Ordnung in einer Reihenfolge  $R$ , d.h. für  $a, b \in R$  gilt die Trichotomie

$$\dot{\vee} (a < b, a = b, a > b)$$

und die Transitivität

$$a < b < c \Rightarrow a < c$$

**Beweis:** Es gilt  $a = b \dot{\vee} a \neq b$ . Nach (I4) gilt  $b \in \mathbf{S}(a) \dot{\vee} b \in \mathbf{P}(a)$ , d.h.  $a < b \dot{\vee} b < a$ , was die Trichotomie bedeutet.

Die Transitivität folgt direkt, da  $c \in \mathbf{S}(b) \subset \mathbf{S}(a)$ , also  $c \in \mathbf{S}(a)$ , also  $a < c$ . □

### 1.1.7 Die Richtung „vorwärts“ und die Gegenrichtung „rückwärts“

Die Nachfolgermenge  $\mathbf{S}(x)$  wird durch eine **Richtung** charakterisiert, die wir üblicherweise Vorwärts nennen. Wir bezeichnen die gerichtete Struktur  $\mathbf{S}(x)$  mit

$$\mathbf{S}(x) = \langle S(x), S(S(x)), S(S(S(x))), \dots \rangle$$

Wir sagen, die Nachfolgermenge ist vorwärts endlos.

Die Vorgängermenge  $\mathbf{P}(x)$  wird durch die **Gegenrichtung** charakterisiert, die wir üblicherweise Rückwärts nennen. Wir bezeichnen die gerichtete Struktur  $\mathbf{P}(x)$  mit

$$\mathbf{P}(x) = \langle \dots, P(P(P(x))), P(P(x)), P(x) \rangle$$

Wir sagen, die Vorgängermenge ist rückwärts endlos.

Wir sagen auch, eine Rangfolge oder eine Umkehr-Rangfolge ist einseitig endlos. Eine Reihenfolge beidseitig (in beide Richtungen) endlos.

Ein Tupel vererbt die natürliche Richtung seiner Reihenfolge, ist aber weder vorwärts noch rückwärts endlos. Wir sagen auch, ein Tupel ist limitiert.

### 1.1.8 Abschnitte

Ein *Abschnitt* einer Reihenfolge ist eine Teilstruktur, die *Konvexität* erfüllt. D.h.  $A$  erfüllt zwei Bedingungen:

- $A \subseteq R$
- $\forall x, y \in A \forall z \in R [x < z < y \Rightarrow z \in A]$

Ein Abschnitt kann limitiert oder endlos sein.

Z.B. für eine Rangfolge  $R = \langle a, b, c, d, \dots \rangle$  kann ein Abschnitt  $\langle b, c \rangle$ , aber auch  $\langle c, d, \dots \rangle$  sein.

**Feststellung 2 – Ordnung zwischen disjunkten Abschnitten:** Für zwei disjunkte Abschnitte  $S, T \subseteq R$  gilt entweder

$$S < T :\Leftrightarrow \forall x \in S \forall y \in T [x < y]$$

oder

$$S > T :\Leftrightarrow \forall x \in S \forall y \in T [x > y]$$

**Beweis:** Angenommen, es gibt  $x \in S, y \in T$  mit  $x > y$ , und  $u \in S, v \in T$  mit  $u < v$ . Dann folgt aus  $u < v < x$  die Inklusion  $v \in S$  wegen Konvexität von  $S$ , im Widerspruch zu  $v \in T$ . Analog ergibt  $y < x < u$  die Inklusion  $x \in T$ , im Widerspruch zu  $x \in S$ . Also ein Widerspruch. □

### 1.1.9 Teiltupel

Ein *Teiltupel*  $U$  eines Tupels  $T$  ist ein Tupel als ein Abschnitt von  $T$ .

**Bemerkung:** Ein Abschnitt von einem Tupel ist nicht immer ein Tupel. Das werden wir später sehen.

*Beispiel:* Für  $T = \langle a, b, c, d, e \rangle$  ist  $U = \langle a, b, c \rangle$  ein Teiltupel.

**Notationskonventionen:**

- Leeres Tupel:  $\langle \rangle := \emptyset$
- Einertupel:  $\langle a \rangle := a$

### 1.1.10 Anfangsabschnitte

Der Begriff Anfangsabschnitt ist nur für Strukturen mit Anfangselement wohl definiert, d.h. für Rangfolgen und Tupel. **Definition:** Es sei  $A$  eine Rangfolge oder ein Tupel. Eine Struktur  $B$  heißt ein Anfangsabschnitt von  $A$ , wenn sie zwei Bedingungen erfüllt:

- $B$  ist Abschnitt von  $A$ .
- Das Anfangselement von  $B$  ist gleich mit dem von  $A$ .

**Bemerkungen:**

- Wenn  $B$  ein Anfangsabschnitt von  $A$  und  $B \subset A$  gilt, heißt  $B$  dann ein echter Anfangsabschnitt von  $A$ .
- Wenn  $A, B$  Tupel oder Rangfolgen mit dem gleichen Anfangselement sind, dann gilt die Trichotomie: Entweder  $A$  ist Anfangsabschnitt von  $B$ , oder  $B$  ist ein Anfangsabschnitt von  $A$ , oder beide sind gleich.
- Wenn  $A, B$  Tupel mit dem gleichen Anfangselement sind, und die Endelemente entsprechend  $z_A$  und  $z_B$  sind. Dann gilt:  $A$  ist genau ein echter Anfangsabschnitt von  $B$ , wenn  $z_A < z_B$ .

### 1.1.11 Längenvergleich der Tupel

Hier wird betont, dass wir nicht die Länge eines Tupel definieren wollen, sondern nur einen Längenvergleich zwischen zwei Tupel zu definieren. D.h. ohne die konkreten Längen zu erkennen erkennen wir doch, welches Tupel länger ist als das andere, oder sind sie gleich lang sind.

**Definition:** Es seien zwei Tupel  $A$  und  $B$ . Wir sagen

- $A$  ist gleich lang wie  $B$ , wenn es zwischen ihnen eine Bijektion gibt.
- $A$  ist kürzer als  $B$ , d.h.  $B$  ist länger als  $A$ , wenn  $B$  einen echten Anfangsabschnitt hat, der in einer Bijektion mit  $A$  steht.

### 1.1.12 Tupelpartition

**Definition:** Eine Menge von Teiltupel  $T_i, i \in I$  von  $T$  ist eine *Tupelpartition* von  $T$ , wenn gilt:

$$T = \dot{\cup}_{i \in I} T_i$$

**Konvention:** Jedes Tupel  $T$  kann auch als eine Tupelpartition  $\langle T, \emptyset \rangle$  bzw.  $\langle \emptyset, T \rangle$  dargestellt werden.

**Feststellung 3 – Darstellung einer Tupelpartition:** Die Teiltupel einer Tupelpartition lassen sich entsprechend der natürlichen Ordnung auf  $T$  eindeutig linear anordnen. (Trivial nach Feststellung 2.)

*Beispiel:* Für  $T = \langle a, b, c, d, e \rangle$  ist

$$T = \langle \langle a, b \rangle, \langle c \rangle, \langle d, e \rangle \rangle$$

eine Partition mit

$$\langle a, b \rangle < \langle c \rangle < \langle d, e \rangle$$

### 1.1.13 Permutation von Tupeln

Sei  $T = (a_i)_{i \in I}$  ein Tupel mit Index-Tupel  $I$  und Wertabbildung  $a : I \rightarrow A$ . Eine *Permutation* von  $T$  ist eine bijektive Abbildung

$$\pi : I \rightarrow I.$$

Das permutierte Tupel wird definiert als

$$\pi(T) := (a_{\pi(i)})_{i \in I}.$$

Dabei rückt das Element, das bisher an Position  $i$  stand, an die neue Position  $\pi(i)$ . Die Werte selbst bleiben unverändert; nur ihre Indizes werden umgesetzt. **Konvention:**  $\pi(\langle \rangle) = \langle \rangle$

**Feststellung 4:** Für jede Permutation  $\pi$  gilt

$$\pi(\langle a \rangle) = \langle a \rangle \quad (\text{Triviale Permutation})$$

*Beispiel:* Sei  $T = \langle a, b, c \rangle$ , dann ist  $\pi T = \langle c, b, a \rangle$  eine Permutation von  $T$ .

Dabei ist zu beachten, dass Permutationen die Ordnung des Tupels verändern – das Tupel erhält durch  $\pi$  eine neue Ordnung.

## 1.2 Verknüpfungen oder Operationen in den algebraischen Strukturen

### 1.2.1 Generelle Verknüpfungen

#### 1.2.2 Assoziativität

Die klassische Formulierung der Assoziativität einer Verknüpfung  $*$  lautet

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

und setzt dabei implizit die Konvention einer „von links nach rechts“-Auswertung voraus:

$$a * b * c = (a * b) * c, \quad a * b * c * d = ((a * b) * c) * d, \quad \text{usw.}$$

Zudem ist die klassische Definition auf binäre Verknüpfungen beschränkt. Sie behandelt Operationen mit null, einem oder mehr als zwei Argumenten nur durch ergänzende Konventionen (etwa: 0 ist das neutrale Element der Addition) oder rekursive Hilfskonstruktionen. Wir definieren hier einen allgemeineren Begriff von Verknüpfung, der auf Tupel beliebiger Länge basiert – einschließlich des leeren Tupels – und formulieren darauf aufbauend eine partitionsunabhängige Assoziativität.

### Definitionen

- Sei  $G$  eine Grundmenge und  $\text{Tup}(G)$  die Menge aller endlichen Tupel mit Einträgen aus  $G$ . Insbesondere gehört auch das leere Tupel  $\langle \rangle$  zu  $\text{Tup}(G)$ .
- Eine *Verknüpfung* auf  $G$  ist eine Funktion

$$* : \text{Tup}(G) \rightarrow H,$$

wobei  $H$  ein Zielbereich ist (nicht zwingend  $H = G$ ). Beispiel: Sei  $G$  die Menge der ungeraden Zahlen,  $* = +$  (Addition), dann ist  $a + b \notin G$  für  $a, b \in G$ .

- Eine Verknüpfung heißt *generell*, wenn sie auf allen Tupeln in  $\text{Tup}(G)$  definiert ist.
- Ist  $H = G$ , so heißt  $*$  eine *innere Verknüpfung*. Nur solche betrachten wir im Folgenden weiter, da sie eine Struktur auf  $G$  definieren.
- Für ein Tupel  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  schreiben wir:

$$*A := *\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = a_1 * a_2 * \dots * a_n.$$

- **Konventionen:**

$$\begin{aligned} * \langle \rangle &= * \emptyset \quad (\text{Wert der leeren Operation}) \\ * \langle a \rangle &= *a = a \end{aligned}$$

## Partitionsunabhängigkeit und Assoziativität

Sei  $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \text{Tup}(G)$  ein Tupel. Eine *Tupelpartition* von  $A$  ist eine Darstellung

$$A = \langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle, k \leq n$$

Die Verknüpfung  $*$  heißt *partitionsunabhängig*, wenn für jede solche Partition gilt:

$$*A = * \langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle = (*A_1) * (*A_2) * \dots * (*A_k).$$

**Erklärung:** Warum bezeichnet man die obige Formel als Ausdruck der Partitionsunabhängigkeit?

Weil für jede Tupelpartition  $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$  des Tupels  $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  führt die Operation

$$*A = * \langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle = (*A_1) * (*A_2) * \dots * (*A_k)$$

zu einer Auswertung

$$*A = a_1 * a_2 * \dots * a_n$$

In der Tat ist das Tupel  $A$  als eine Tupelpartition der Einertupel:

$$A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle \rangle$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} *A &= (* \langle a_1 \rangle) * (* \langle a_2 \rangle) * \dots * (* \langle a_n \rangle) \\ &= a_1 * a_2 * \dots * a_n \\ &= (*A_1) * (*A_2) * \dots * (*A_k) \end{aligned}$$

unabhängig von der Tupeartition  $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ . Die Klammerungen  $(*A_1), (*A_2), \dots$  sind die Gruppierung der Operation. Jeder Art der Gruppierung einer Operation führt zu demselben Ergebnis.

## Beispiele

- (Klassischer Spezialfall:)

$$(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c.$$

- (Zahlenbeispiel:)

$$\begin{aligned} 2 + 3 + 5 &= (2 + 3) + 5 = 5 + 5 = 10 \\ &= 2 + (3 + 5) = 2 + 8 = 10. \end{aligned}$$

**Hinweis:** Partitionsunabhängige Verknüpfungen verallgemeinern *fold*- und *reduce*-Konzepte aus der funktionalen Programmierung.

### 1.2.3 Neue Formulierung der Assoziativität

Eine Verknüpfung  $*$  ist **assoziativ**, wenn sie von Gruppierungen unabhängig ist, d.h. sie partitionsunabhängig ist.

**Bemerkung:** Durch die Assoziativität der Operation können Gruppierungen rekursiv angewendet werden, was zu verschachtelten Strukturen führt.

#### Beispiele:

- Sei  $T = \langle a, b, c, d, e, f \rangle$  und die Tupelpartition  $T = \langle A, B, C \rangle$  mit  $A = \langle a, b \rangle, B = \langle c \rangle, C = \langle d, e, f \rangle$ . Dann gilt nach Definition 1.2.4

$$\begin{aligned} *T &= (*A) * (*B) * (*C) \\ &= (a * b) * (*c) * (d * e * f) \\ &= a * b * c * d * e * f \end{aligned}$$

- (Das klassische Assoziativität einer Verknüpfung  $*$ )

$$(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c.$$

- Konkret

$$\begin{aligned} 2 + 3 + 5 &= (2 + 3) + 5 = 5 + 5 = 10 \\ &= 2 + (3 + 5) = 2 + 8 = 10 \end{aligned}$$

### 1.2.4 Definition der Halbgruppen und Monoids

Die klassische Definition einer Halbgruppe basiert auf einer binären Verknüpfung mit der Assoziativität  $(a * b) * c = a * (b * c)$ , was für ungeklammerte Ausdrücke wie  $a * b * c$  keine klare Bedeutung vorgibt und eine links-assoziative Ausführung stillschweigend voraussetzt. Unsere partitionsunabhängige Assoziativität löst dieses Problem, indem sie Verknüpfungen auf beliebige Tupelpartitionen anwendet. Daher definieren wir Halbgruppen neu.

#### Definitionen:

- **Halbgruppe** Eine Menge  $G$  heißt eine Halbgruppe mit der Verknüpfung  $*$ , notiert als  $(G, *)$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(H1)  $*$  ist eine **generelle innere Verknüpfung**, d.h.,  $G$  ist abgeschlossen unter  $*$ .

(H2)  $*A$  ist assoziativ (siehe den Punkt 1.2.4).

- **Monoids:** Ein Monoid ist eine Halbgruppe  $(G, *)$  mit einem ausgezeichneten Element  $e$ , sodass:

$$a * e = e * a = a.$$

Das Element  $e$  heißt das Neutralelement, und das Monoid wird als  $(G, *, e)$  notiert.

**Bemerkung:** Diese Definitionen behalten ihre gewohnte äußere Form bei, werden aber auf Grundlage der zuvor eingeführten partitionsunabhängigen Assoziativität neu fundiert. Damit unterscheiden sie sich grundlegend von der klassischen Auffassung.

### 1.2.5 Proposition:

In einem Monoid  $(G, *, e)$ , wobei  $*$  generell ist, gilt

$$*\emptyset = e$$

#### Beweis:

Es sei  $*\emptyset = x$ . Nach (H1) ist  $x \in G$ .

$\langle a \rangle$  und  $\emptyset$  bilden eine Partition von  $\langle a \rangle$ :

$$\langle a \rangle = \langle \langle a \rangle, \emptyset \rangle = \langle a, \emptyset \rangle$$

So gilt nach (H2)

$$\begin{aligned} *\langle a \rangle &= *\langle a, \emptyset \rangle = (*\langle a \rangle) * (*\langle \emptyset \rangle) \\ &= a * x = a \quad (\text{Nach Konvention gilt } *\langle a \rangle = a.) \end{aligned}$$

Weil  $e$  eindeutig ist, gilt  $x = e$   $\square$

**Folgerung:** Weil die Addition und die Multiplikation generelle Operationen sind, gilt

$$\sum \emptyset = 0, \prod \emptyset = 1$$

### 1.2.6 Neue Formulierung der Kommutativität einer Verknüpfung

Sei  $G$  eine Menge und sei eine Operation

$$*: \text{Tup}(G) \rightarrow H$$

gegeben, die auf Tupeln beliebiger Länge definiert ist. Für ein Tupel  $T = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in \text{Tup}(G)$  und eine Permutation  $\pi$  der Indizes  $\{1, \dots, n\}$ , bezeichne  $\pi T := \langle a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)} \rangle$  das permutierte Tupel.

Die Verknüpfung  $*$  heißt **kommutativ**, wenn für jede Permutation  $\pi$  von  $T$  gilt:

$$*(\pi T) = *(T),$$

d.h., der Wert der Verknüpfung ist unabhängig von der Reihenfolge der Elemente im Tupel.

#### Beispiele:

- Für ein Tupel mit zwei Elementen  $T = \langle a, b \rangle$  ergibt sich aus der Definition:

$$a * b = b * a.$$

Dies ist die klassische Form der Kommutativität. Zum Beispiel:

$$2 + 5 = 5 + 2 = 7.$$

- Für ein Tupel mit drei Elementen  $T = \langle a, b, c \rangle$  ergibt sich durch Permutation:

$$a * b * c = a * c * b = b * a * c = b * c * a = c * a * b = c * b * a.$$

Zum Beispiel:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$$

**Bemerkung:** In der klassischen Algebra wird eine Verknüpfung  $*$  meist als *binäre Operation* definiert und dann mittels Assoziativität auf längere Ausdrücke erweitert. Unter dieser Voraussetzung lässt sich zeigen:

- Wenn  $*$  assoziativ und binär kommutativ ist, dann folgt auch die allgemeine Kommutativität für alle  $n$ -Tupel.



- Der Beweis basiert darauf, dass jede Permutation eine Folge von Transpositionen ist, und dass benachbarte Transpositionen sich durch Umklammerung (Assoziativität) und Vertauschung (binäre Kommutativität) realisieren lassen.

**Beispiel:** Für  $a * b * c$  ergibt sich etwa:

$$a * (b * c) \stackrel{\text{Kom.}}{=} a * (c * b) \stackrel{\text{Ass.}}{=} (a * c) * b \stackrel{\text{Kom.}}{=} (c * a) * b \stackrel{\text{Ass.}}{=} c * (a * b)$$

In unserer Theorie dagegen ist  $*$  von vornherein als *Tupelfunktion*  $*$  :  $\text{Tup}(G) \rightarrow H$  definiert – also nicht durch induktive Klammerung einer binären Operation. Daher ist die allgemeine Kommutativität hier eine *eigenständige Eigenschaft*, die unabhängig von der binären Kommutativität formuliert und geprüft wird. Sie impliziert zwar die binäre Kommutativität, jedoch gilt die Umkehrung nur unter zusätzlichen Bedingungen wie Assoziativität.

### 1.2.7 Definition des Begriffs Zahl

**Was ist eine Zahl? – Eine fundamentale, ungelöste Frage:**

In der Mathematik existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Zahlarten: die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die reellen und komplexen Zahlen, die transfinite Kardinal- und Ordinalzahlen (Cantor), die surrealen Zahlen (Conway), hyperreelle Zahlen (Robinson), Quaternionen (Hamilton), p-adische Zahlen, duale Zahlen und viele mehr.

Trotz dieser beeindruckenden Vielfalt existiert bis heute keine allgemeingültige, theorieübergreifende Definition des Begriffs „Zahl“. Zwar existieren jeweils spezifische axiomatische Systeme (etwa die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen oder die Dedekind-Schnitte für die reellen Zahlen), doch sie liefern nur lokale Definitionen – innerhalb einer bestimmten mathematischen Theorie.

**Versuche, den Zahlbegriff zu definieren:**

- **Gottlob Frege** (1884, *Die Grundlagen der Arithmetik*):

Zahlen sollen logische Objekte sein, die durch Begriffe (Mengen) bestimmt sind. So sei „die Zahl 2“ die Anzahl aller Dinge, auf die ein bestimmter Begriff zutrifft.

*Scheitert an Russells Paradoxon* („die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“), was Freges System kollabieren ließ.

- **Richard Dedekind** (1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?*):

Zahlen sind „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes“, die bestimmte Ordnungsstrukturen modellieren. Die natürlichen Zahlen entstehen durch eine rekursive Selbstabbildung.

*Problematisch bleibt die philosophische Fundierung: Was ist „Schöpfung“? Was ist „Ordnung“?*

- **Bertrand Russell & Alfred North Whitehead** (1910–1913, *Principia Mathematica*):

Eine Zahl ist die Äquivalenzklasse aller gleichmächtigen Mengen. So ist „3“ die Klasse aller Mengen mit drei Elementen.

*Wird als extrem künstlich und formalistisch empfunden. Es bleibt unklar, ob solche Klassen wirklich als „Zahlen“ im intuitiven Sinn gelten können.*

- **Moderne Mathematik (ZFC, Bourbaki, Schulbücher):**

Verzichtet weitgehend auf die Beantwortung der Frage „Was ist eine Zahl?“

Stattdessen: axiomatische Einführung von Zahlbereichen (Peano-Axiome, Dedekind-Schnitte, Cauchy-Folgen, etc.).

Die Zahl wird dabei nicht als eigenständiges Konzept verstanden, sondern als ein Konstrukt innerhalb einer Theorie.

### Fazit:

Die Frage „Was ist eine Zahl?“ wurde in über 100 Jahren intensiver Grundlagenforschung niemals befriedigend beantwortet.

Bis heute fehlt eine universelle, systemübergreifende Definition, die verschiedene Zahlarten unter einem gemeinsamen Begriff vereint.

Daher gilt „Zahl“ in der heutigen Mathematik nicht als definierter Begriff, sondern als kontextabhängiges Konzept.

### Ausblick:

In der klassischen Mathematik bleibt der Zahlbegriff entweder unerklärt (intuitiv) oder wird durch Konstruktionen ersetzt, die den ursprünglichen Charakter des Zählens und Messens nur unzureichend erfassen.

In dieser Arbeit schlagen wir eine neue Definition des Zahlbegriffs vor – basierend auf einem *algebraischen Grundverständnis*. Wir verlassen die mengentheoretische Perspektive zugunsten eines systemtheoretisch fundierten Zugangs.

Zahlen werden nicht als Mengen oder Klassen, sondern als Ergebnisse algebraischer Operationen innerhalb eines gegebenen Zahlrings verstanden. Diese Sichtweise ist unabhängig von klassischen Mengenhierarchien (wie der von Neumann’schen Ordinalkonstruktion) und erlaubt eine natürliche Erweiterung auf hyperreelle, infinitesimale oder unendlich große Zahlen.

Der neue Zugang ist nicht nur kohärent und strukturell fundiert, sondern erlaubt erstmals eine präzise Einbettung des Zahlbegriffs in eine axiomatische Gesamtheorie – die *Synthetische Mathematik*, in der Zahlen, Relationen und Operationen aus einem gemeinsamen formalen System hervorgehen. In der Mathematik sind zahlreiche Arten von Zahlen bekannt, etwa die reellen Zahlen, die Kardinalzahlen, die Ordnungszahlen von Cantor, die surrealen Zahlen von John Horton Conway, die Quaternionen von Hamilton und viele mehr. Trotz dieser Vielfalt bleibt eine einheitliche Definition des Begriffs Zahl oft unklar, da klassische Ansätze meist mengentheoretische Konstrukte (z. B. in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre) verwenden, ohne ein universelles Kriterium zu bieten, das alle Zahlarten erfassen könnte.

Wir schlagen eine allgemeine mathematische Definition vor, die Zahlen aus einer algebraischen Perspektive betrachtet und damit den Perspektivenwechsel in unserer evolutionären Mathematik unterstützt.

Wir beginnen mit einer Beobachtung: *Die ersten Zahlen, die natürlichen Zahlen, entstehen durch das Abzählen*, welches als wiederholte Addition des Einselements verstanden werden kann. Diese Eins ist nicht „die Menge  $\{\emptyset\}$ “, sondern das neutrale Element einer Addition in einem bestimmten unitären Ring. Dies führt zur Grundidee, Zahlen nicht in mengentheoretischen Konstrukten, sondern in algebraischen Strukturen zu definieren.

**Umgangssprachliche Definition:** Zahlen sind Elemente einer algebraischen Struktur, nämlich auf einem unitären Ring, wo das Abzählen möglich ist. (Diese Struktur kann jedoch zusätzliche Elemente enthalten, die nicht direkt durch Abzählen erreichbar sind.)

Diese Definition bedarf einer präziseren Formulierung, wozu wir neue Begriffe einführen.

Sei  $R$  ein unitärer Ring. Das **Nullelement** von  $R$  bezeichnen wir mit  $0_R$  und das **Einselement** mit  $1_R$ . Diese beiden Elemente nennen wir die **Initialelemente** von  $R$ .

- **Definition einer Elementaraddition:**

Eine Addition, bei der alle Summanden das Einselement  $1_R$  eines unitären Rings sind, nennt man **Elementaraddition**. Das Ergebnis heißt **Elementarsumme**.

Eine Elementaraddition ist eine Addition, die auf einem Tupel von lauter Einsern operiert. Zwei Elementaradditionen sind unterschiedlich, wenn ihre Tupel der Summanden nicht gleich lang sind.

- **Definition einer arithmetischen Addition:**

Da die Addition in verschiedenen Kontexten (z. B. Zahlen, Vektoren) unterschiedlich interpretiert werden kann, definieren wir die **arithmetische Addition** im ursprünglichen mathematischen Sinn:

Eine Addition heißt arithmetisch, wenn jede Elementarsumme eindeutig ist, d.h. wenn  $T$  und  $S$  Tupel lauter Einser sind, dann gilt

$$\sum T = \sum S \Rightarrow T = S,$$

Oder

$$T \neq S \Rightarrow \sum T \neq \sum S.$$

- **Definition eines Zahlrings:**

Ein **Zahlring** ist ein unitärer Ring, in dem die Addition arithmetisch ist. Dies stellt sicher, dass durch wiederholtes Addieren des Einselements eine wohldefinierte und eindeutige Folge von Elementen entsteht.

Beispiele: Sowohl  $\mathbb{R}$  als auch  $\mathbb{X}$  sind Zahlringe. Weitere Beispiele sind in Abschnitt 1.3.6 zu finden.

- **Definition des Begriffs Zahl:**

**Zahlen sind die Elemente eines Zahlrings.**

**Zahlidentifikation:**

Die hier vorgeschlagene Definition begreift Zahlen primär als Elemente einer unitären Ringstruktur mit arithmetischer Addition und etabliert damit die Assoziativität der Multiplikation als ein konstitutives Merkmal des Zahlseins.

Konstrukte auf einem Zahlring – etwa Mengen, Schnitte, Funktionen oder Folgen – sind nicht automatisch Zahlen.

Erst wenn ein solches Konstrukt selbst die Ringstruktur eines Zahlrings erfüllt, kann es im strengen Sinne als Zahl gelten.

Die Cantorschen Ordinal- und Kardinalzahlen fallen bewusst nicht unter unsere Definition, da sie auf einer völlig anderen Logik als Zahlringe basieren und keine arithmetische Addition besitzen.

Ebenso schließt diese Entscheidung bestimmte algebraische Strukturen wie die Oktonionen (Oktaven) aus, deren Multiplikation nicht assoziativ ist. Dies ist kein Mangel, sondern die notwendige Konsequenz einer begrifflichen Schärfung. Vielmehr eröffnet es das Feld für eine weiterführende Frage: Lässt sich der hier entwickelte Apparat – insbesondere der zentrale Begriff der arithmetischen Addition – auf nicht-assoziative Algebren verallgemeinern, um so einen erweiterten Zahlbegriff (etwa den einer „nicht-assoziativen Zahl“) zu fundieren? Die Beantwortung dieser Frage bleibt zukünftigen Untersuchungen vorbehalten.