Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC -
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài toán khởi điểm của Đại số tuyến tính là giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Để làm được điều đó, người ta đã đưa ra các khái niệm mới là ma trận và định thức. Đây là những công cụ hữu hiệu, góp phần giải quyết hầu hết các bài toán trong Đại số tuyến tính.

1.1 MA TRẬN

1.1.1 Khái niệm ma trận

Định nghĩa 1.1.1. Cho m, n là hai số tự nhiên. Một **ma trận cỡ** $m \times n$ **với hệ số thực** là một bảng số hình chữ nhật gồm m dòng và n cột có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ được gọi là phần tử ở dòng i, cột j của ma trận $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$.

- Ký hiệu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.
- Vectơ dòng

  $$a_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in}]$$

  được gọi là **hàng thứ** i của ma trận A.

- Vectơ cột

$$b_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

được gọi là **cột thứ** j của ma trận A.

- Khi $m = 1$, A được gọi là **ma trận dòng**. Khi $n = 1$, A được gọi là **ma trận cột**.

- Khi $m = n$, ma trận A được gọi là **ma trận vuông cấp** n, ký hiệu $A = [a_{ij}]_n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Đường chéo nối các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là **đường chéo chính** của A, và **đường chéo phụ** của A là đường chéo xác định bởi các phần tử a_{n1}, $a_{(n-1)2}, \ldots, a_{1n}$.

- Tập tất cả các ma trận kích cỡ $m \times n$ với hệ số thực được ký hiệu là $M(m \times n, \mathbb{R})$.
- Tập các ma trận vuông cấp n với hệ số thực được ký hiệu là $M(n, \mathbb{R})$.

Ví dụ 1.1.2.

(1) Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận cỡ 2×3 với các phần tử: $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 7$, $a_{23} = 5$.

(2) Cho $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận vuông cấp 3, với các phần tử trên đường chéo chính là $3, -5, -2$ và các phần tử trên đường chéo phụ là $0, -5, 6$.

(3) Cho $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận cỡ 3×1 hay còn gọi là ma trận cột.

(4) Cho $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, đây là một ma trận cỡ 1×3 hay ma trận dòng.

Sau đây là một số ma trận đặc biệt:

$\diamondsuit$ **Ma trận không** kích cỡ $m \times n$, ký hiệu là $O_{m\times n}$ hoặc O, là một ma trận cỡ $m \times n$ có tất cả các phần tử đều bằng 0,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

◇ **Ma trận đường chéo** cấp n, ký hiệu $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, là một ma trận vuông cấp n có các phần tử $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

◇ **Ma trận đơn vị** cấp n, ký hiệu là I_n hoặc đơn giản I, là một ma trận vuông cấp n có $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$, và $a_{ii} = 1$ với mọi $i = \overline{1, n}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$ **Ma trận tam giác trên** cấp n là một ma trận vuông cấp n có $a_{ij} = 0$ với mọi $1 \leq j < i \leq n$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$ **Ma trận tam giác dưới** cấp n là ma trận vuông cấp n có các phần tử $a_{ij} = 0$ với mọi $1 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$ **Ma trận bậc thang theo dòng với kích cỡ** $m \times n$ là ma trận thỏa mãn hai tính chất sau:

i) Các dòng khác không (tức là dòng có một phần tử nào đó khác 0), nếu có, luôn ở trên các dòng bằng không (tức là dòng có tất cả các phần tử bằng 0).

ii) Đối với hai dòng khác không thì phần tử khác không đầu tiên của dòng ở bên dưới bao giờ cũng nằm bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên của dòng ở bên trên.

Ví dụ 1.1.3. Các ma trận sau là ma trận bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊ **Ma trận đối xứng** cấp n là một ma trận vuông cấp n có $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = \overline{1, n}$, tức là các phần tử đối xứng với nhau qua đường chéo chính thì bằng nhau.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

◊ **Ma trận phản đối xứng** cấp n là ma trận vuông cấp n có $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $i, j = \overline{1, n}$, tức là các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính thì đối nhau.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 1.1.4. Hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ được gọi là bằng nhau nếu $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

1.1.2 Các phép toán trên ma trận

1. Phép cộng hai ma trận

Định nghĩa 1.1.5. Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. **Tổng của hai ma trận A và B**, ký hiệu $A+B$, là một ma trận cỡ $m\times n$ được xác định bởi

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.1.6. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Mệnh đề 1.1.7. *Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Khi đó,*

1. $A+B = B+A$,

2. $(A+B)+C = A+(B+C)$,

3. $A + O = O + A = A.$

Chứng minh. Tính toán trực tiếp. $\square$

Nhận xét 1.1.8. Với $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, đặt $A' = [-a_{ij}]_{m\times n}$, ta có

$$A + A' = A' + A = O.$$

Khi đó, A' được gọi là **ma trận đối** của A, ký hiệu là $-A$.

2. Phép nhân ma trận với một số

Định nghĩa 1.1.9. Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. **Tích của λ với** A, ký hiệu λA, là một ma trận cỡ $m \times n$, được xác định như sau:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.1.10.

$$3\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 5 \\ 3\times(-7) & 3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ -21 & 12 \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 1.1.11. *Cho* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *và* λ, $\mu \in \mathbb{K}$. *Khi đó,*

1. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$,

2. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,

3. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,

4. $0.A = O$, $1.A = A$ *và* $A + (-A) = (-A) + A = O$.

Chứng minh. Tính toán trực tiếp. $\square$

3. Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa 1.1.12. Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{jk}]_{n\times p}$. **Tích** của A và B, ký hiệu AB, là ma trận $[c_{ik}]_{m\times p}$, trong đó

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

với mọi $i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, p}$.

Như vậy, phần tử ở dòng i cột k của ma trận tích AB bằng tích của vectơ hàng thứ i của A với vectơ cột thứ k của B.

Ví dụ 1.1.13. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. *Ta có*

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 0 + 2\times 1 & 1\times 1 + 2\times 3 & 1\times 4 + 2\times 2 \\ 3\times 0 + 1\times 1 & 3\times 1 + 1\times 3 & 3\times 4 + 1\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 1.1.14.

1. Phép nhân hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận đứng trước bằng số dòng của ma trận đứng sau. Do đó, có trường hợp tích AB tồn tại nhưng tích BA không tồn tại, chẳng hạn với A và B như Ví dụ 1.1.13 ta thấy BA không tồn tại.

2. Nếu AB và BA đều tồn tại thì nói chung $AB \neq BA$. Ngoài ra, có thể $A \neq O$ và $B \neq O$ nhưng $AB = O$. Chẳng hạn,
   - Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ta có $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   - Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ta có $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và $AB = BA$ thì ta nói A và B **giao hoán** được với nhau.

Mệnh đề 1.1.15. *Cho A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán dưới đây thực hiện được và λ là một số thực. Khi đó,*

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$,
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,
4. $AI = A; \quad IA = A$.

Chứng minh. Tính toán trực tiếp. □

Định nghĩa 1.1.16. Cho A là một ma trận vuông và $n \in \mathbb{N}$. **Lũy thừa bậc** n của ma trận A, ký hiệu A^n, là ma trận xác định bởi

$$A^n = A^{n-1}A$$

với quy ước $A^0 = I$.

1.1.3 Chuyển vị của ma trận

Định nghĩa 1.1.17. Ma trận chuyển vị của ma trận $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, ký hiệu A^t, là một ma trận kích cỡ $n \times m$ có được bằng việc đổi các dòng của A thành các cột, tức là với

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ thì } A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.1.18.

(1) Với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, ma trận chuyển vị của A là $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) Với $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, ma trận chuyển vị của B là $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Mệnh đề 1.1.19. *Cho A, B là các ma trận sao cho các phép toán sau thực hiện được và số thực λ. Khi đó,*

1. $(A^t)^t = A$,

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$,

3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$,

4. $(AB)^t = (B^t)(A^t)$,

5. *Nếu* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*

$$A^t = A \quad \textit{khi và chỉ khi} \quad A \quad \textit{đối xứng},$$
$$A^t = -A \quad \textit{khi và chỉ khi} \quad A \quad \textit{phản xứng}.$$

Chứng minh. (1), (2), (3) và (5) dễ thấy. Ta chứng minh (4), giả sử $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, $AB = [d_{ik}]_{m\times p}$, ta có

$$A^t = [a'_{ji}]_{n\times m}, \quad B^t = [b'_{kj}]_{p\times n}, \quad (AB)^t = [d'_{ki}]_{p\times m},$$

trong đó $a'_{ji} = a_{ij}, b'_{kj} = b_{jk}, d'_{ki} = d_{ik}$ với mọi $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, p}$. Ta có

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} b'_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} a'_{ji} = d'_{ki}.$$

$\square$

1.1.4 Ma trận khả nghịch - Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.1.20. Ma trận $A \in M(n, \mathbb{R})$ được gọi là **ma trận khả nghịch** nếu tồn tại ma trận $B \in M(n, \mathbb{R})$ sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

Mệnh đề 1.1.21. *Ma trận B trong định nghĩa trên (nếu tồn tại) là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử B và C là hai ma trận thỏa mãn định nghĩa trên, nghĩa là có

$$AB = BA = I, \qquad AC = CA = I.$$

Từ $AB = I$, ta suy ra

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

$\square$

Như vậy, B được xác định duy nhất (theo A) và ta gọi nó là **ma trận nghịch đảo** của A, ký hiệu là A^{-1}. Ta ký hiệu $GL_n(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n khả nghịch.

Ví dụ 1.1.22.

(1) Ma trận đơn vị I_n là ma trận khả nghịch với $I_n^{-1} = I_n$ vì $I_n I_n = I_n$.

(2) Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ta có ma trận A không khả nghịch vì với mọi $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thuộc $M(2, \mathbb{R})$ thì

$$AC = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Bài tập: Xét xem ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ có khả nghịch không, nếu có hãy tìm ma trận nghịch đảo của nó?

(3) Ma trận có một dòng hay một cột bằng không đều không khả nghịch.

Mệnh đề 1.1.23. *Nếu* $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ *khả nghịch thì* AB *cũng khả nghịch và*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Chứng minh. Ta có

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Do đó, AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Mệnh đề 1.1.24. *Nếu* A *khả nghịch thì* A^t *khả nghịch và* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Chứng minh. Ta có

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I,$$
$$(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I^t = I.$$

Do đó, A^t khả nghịch và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. □

Định lý 1.1.25. *Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì*

1. *A^{-1} cũng khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Với mọi số nguyên dương m, A^m khả nghịch và*
$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$
3. *Với mọi $k \neq 0$, ta có kA khả nghịch và*
$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}.$$

Chứng minh. Tính toán trực tiếp. $\square$