Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC -
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài toán khởi điểm của Đại số tuyến tính là giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Để làm được điều đó, người ta đã đưa ra các khái niệm mới là ma trận và định thức. Đây là những công cụ hữu hiệu, góp phần giải quyết hầu hết các bài toán trong Đại số tuyến tính.

1.1 MA TRẬN

1.1.1 Khái niệm ma trận

1.1.2 Các phép toán trên ma trận

1.1.3 Chuyển vị của ma trận

1.1.4 Ma trận khả nghịch - Ma trận nghịch đảo

1.1.5 Phép biến đổi sơ cấp

1.2 ĐỊNH THỨC

1.2.1 Định thức của ma trận vuông

1.2.2 Các tính chất của định thức

1.2.3 Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.2.1. Cho ma trận $A = [a_{ij}]_n \in M(n, \mathbb{R})$. Khi đó, định thức của ma trận A_{ij}, với A_{ij} là ma trận con bù của A ứng với phần tử a_{ij}, được gọi là **định thức con bù** ứng với phần tử a_{ij}, ký hiệu là D_{ij}, giá trị

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

được gọi là **phần bù đại số** của phần tử a_{ij} và $C = [C_{ij}]_n \in M(n, \mathbb{R})$ được gọi là **ma trận phụ hợp** của A.

Áp dụng Công thức khai triển Laplace theo dòng và các tính của định thức, ta được

$$a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + \cdots + a_{kn}C_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu} \quad k = i \\ 0 & \text{nếu} \quad k \neq i. \end{cases} \tag{3.2.4.I}$$

Áp dụng Công thức khai triển Laplace theo cột và tính chất của định thức, ta được

$$a_{1k}C_{1j} + a_{2k}C_{2j} + \cdots + a_{nk}C_{nj} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu} \quad k = j \\ 0 & \text{nếu} \quad k \neq j. \end{cases} \tag{3.2.4.II}$$

Định lý 1.2.2. *Nếu ma trận A khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của nó được xác định bởi công thức*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Áp dụng các Công thức (3.2.4.I), (3.2.4.II) và thực hiện phép nhân AC^t, C^tA. □

Ví dụ 1.2.3. Xét ma trận cấp hai

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Nếu $\det(A) = ad - bc \neq 0$ thì ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

do

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

và

$$C^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.2.4. Xét ma trận vuông cấp ba $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Ta có $\det A = -49 \neq 0$ nên A khả nghịch. Khi đó,

$$A^{-1} = -\frac{1}{49} C^t,$$

với $C = [c_{ij}]_3$ là ma trận được phụ hợp của A, được xác định như sau:

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ c_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -14,\ c_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$c_{21} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -16,\ c_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3,\ c_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$c_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10,\ c_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -8,\ c_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Như vậy, ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = -\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -7 & -16 & 10 \\ -14 & 3 & -8 \\ 7 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.3 ĐỊNH THỨC VÀ HẠNG CỦA MA TRẬN

1.3.1 Hạng của ma trận

Xét ma trận kích cỡ $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

và p là một số nguyên sao cho $0 \leq p \leq \min\{m, n\}$.

Định nghĩa 1.3.1. Ma trận vuông cấp p thu được từ A bằng cách bỏ đi $m - p$ hàng và $n - p$ cột gọi là một **ma trận con cấp** p của A, định thức của ma trận con này được gọi là một **định thức con** cấp p của A.

Định nghĩa 1.3.2. **Hạng** của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A, ký hiệu là $\text{rank}(A)$.

Ví dụ 1.3.3. Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A có ít nhất một con cấp 2 khác không, chẳng hạn

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Nhận thấy rằng A có dòng đầu và dòng cuối tỉ lệ, do đó mọi định thức con cấp 3 của A đều bằng không. Do đó, $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Mệnh đề 1.3.4.

$$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A).$$

Chứng minh. Suy trực tiếp từ tính chất $\det A = \det A^t$. $\square$

1.3.2 Cách tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

Ví dụ 1.3.5.

(1) Xét ma trận bậc thang $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ta thấy các định thức con cấp 3 của A đều bằng 0 và $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$. Do đó, $\operatorname{rank}(A) = 2$ và bằng số dòng khác không của ma trận A.

(2) Xét ma trận bậc thang $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ma trận B có định thức con cấp cao nhất khác không là 3. Do đó, $\operatorname{rank}(B) = 3$ và bằng số dòng khác không của B.

Nhận xét 1.3.6.

a) Hạng của một ma trận có dạng bậc thang bằng số dòng khác không của nó.

b) Do các phép biến đổi sơ cấp về dòng không làm thay đổi tính bằng không và khác không của các định thức con nên chúng không làm thay đổi hạng của ma trận.

Vì vậy, ta có thể áp dụng các phép biến đổi sơ cấp dòng để đưa ma trận ban đầu về dạng ma trận bậc thang để dễ xác định hạng hơn.

Ví dụ 1.3.7. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Lấy dòng 2 trừ đi 2 lần dòng 1 và dòng 3 trừ đi 3 lần dòng 1 ta thu được ma *trận*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 14 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lấy dòng 3 trừ đi 2 lần dòng 2 ta được

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = 2.$