Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC -
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài toán khởi điểm của Đại số tuyến tính là giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Để làm được điều đó, người ta đã đưa ra các khái niệm mới là ma trận và định thức. Đây là những công cụ hữu hiệu, góp phần giải quyết hầu hết các bài toán trong Đại số tuyến tính.

1.1 MA TRẬN

1.1.1 Khái niệm ma trận

1.1.2 Các phép toán trên ma trận

1.1.3 Chuyển vị của ma trận

1.1.4 Ma trận khả nghịch - Ma trận nghịch đảo

1.1.5 Phép biến đổi sơ cấp

1.2 ĐỊNH THỨC

1.2.1 Định thức của ma trận vuông

1.2.2 Các tính chất của định thức

Cho

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Để cho đơn giản, ta viết $R_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ là hàng thứ i của A và $C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{nj} \end{bmatrix}^t$ là cột thứ j của A. Khi đó, ta viết

$$\det(A) = \det(R_1, R_2, \dots, R_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Sau đây là một số tính chất cơ bản của định thức:

Tính chất 1. Khi tất cả các phần tử của một cột có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức, nghĩa là

$$\begin{aligned}&\det(C_1, \ldots, aC_i' + bC_i'', \ldots, C_n)\\ &= a\det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n) + b\det(C_1, \ldots, C_i'', \ldots, C_n).\end{aligned}$$

Chứng minh. Chứng minh bằng quy nạp theo n. Rõ ràng tính chất đúng với $n = 1$. Giả sử tính chất đúng với mọi ma trận có cấp nhỏ hơn n.

Ta có

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_{1j}\det(A_{1j})\\ &= (-1)^i(aa_{1i}' + ba_{1i}'')\det(A_{1i}) + \sum_{j\neq i}(-1)^j a_{1j}\det(A_{1j})\\ &= (-1)^i(aa_{1i}' + ba_{1i}'')\det(A_{1i}) + \sum_{j\neq i}(-1)^j a_{1j}\big(a\det(A_{1j}') + b\det(A_{1j}'')\big)\\ &= a\det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n) + b\det(C_1, \ldots, C_i'', \ldots, C_n).\end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.2.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+1 & 7 \\ 2 & -1+1 & 5 \\ 4 & 3+2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Tính chất 2. Khi các phần tử của một cột có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức, nghĩa là

$$\det(C_1, \ldots, aC_i, \ldots, C_n) = a\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$

Chứng minh. Ta viết $aC_i = aC_i + 0C_i'$ và áp dụng Tính chất 2 với $b = 0$, ta được

$$\begin{aligned} \det(C_1, \ldots, aC_i, \ldots, C_n) &= \det(C_1, \ldots, aC_i + 0C_i', \ldots, C_n) \\ &= a\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + 0\det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n) \\ &= a\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.2.2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 5 \\ 8 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả 1.2.3. *Một định thức có một cột toàn là số không thì bằng không.*

Chứng minh. Giả sử $C_i = 0$. Ta viết $C_i = 0C_i$ và áp dụng Tính chất 2 với $a = 0$, ta thu được Hệ quả. □

Mệnh đề 1.2.4. *Một định thức có hai cột liền kề bằng nhau thì bằng không.*

Chứng minh. Chứng minh bằng quy nạp theo n. Kết quả đúng với $n = 1$ và $n = 2$. Giả sử kết quả đúng với mọi ma trận có cấp nhỏ hơn n.

Xét A có cấp n và giả sử $C_j = C_{j+1}$. Khi đó,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A_{1k}),$$

trong đó $\det(A_{1k}) = 0$ với mọi $k \notin \{j, j+1\}$. Do đó,

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{1+(j+1)} a_{1(j+1)} \det(A_{1(j+1)}).$$

Vì $C_j = C_{j+1}$ nên $a_{1j} = a_{1(j+1)}$ và $A_{1j} = A_{1(j+1)}$.

Như vậy, $\det(A) = 0$. $\square$

Mệnh đề 1.2.5. *Nếu ta thay cột $j+1$ bằng tổng của k lần cột j với cột $j+1$ thì định thức không đổi.*

Chứng minh. Áp dụng Tính chất 1 và Mệnh đề 1.2.4, ta có

$$\begin{aligned}
&\det(C_1, \ldots, C_j, C_{j+1} + kC_j, \ldots, C_n) \\
&= \det(C_1, \ldots, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) + k\det(C_1, \ldots, C_j, C_j, \ldots, C_n) \\
&= \det(C_1, \ldots, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n).
\end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ 1.2.6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -7 & -5 \\ 4 & -9 & -3 \end{vmatrix}.$$

Tính chất 3. Khi đổi chỗ hai cột của một định thức thì ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

Chứng minh. Trước tiên, ta xét trường hợp đổi chỗ hai cột liền kề của một định thức. Khi đó, áp dụng Mệnh đề 1.2.5, ta có

$$\begin{aligned} \det(C_1, \ldots, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) &= \det(C_1, \ldots, C_j, C_{j+1} - C_j, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_j + C_{j+1} - C_j, C_{j+1} - C_j, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_{j+1}, C_{j+1} - C_j, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Áp dụng Tính chất 1 và Mệnh đề 1.2.4, ta được

$$\begin{aligned}
&\det(C_1, \ldots, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_{j+1}, C_{j+1} - C_j, \ldots, C_n) \\
&= \det(C_1, \ldots, C_{j+1}, C_{j+1}, \ldots, C_n) - \det(C_1, \ldots, C_{j+1}, C_j, \ldots, C_n) \\
&= -\det(C_1, \ldots, C_{j+1}, C_j, \ldots, C_n).
\end{aligned}$$

Bây giờ, gọi B là ma trận thu được từ A bằng cách đổi chỗ hai cột $C_i \leftrightarrow C_j$, giả sử $j > i$. Khi đó, B thu được từ A bởi $2(j-i)-1$ lần đổi chỗ hai cột liền kề: gồm $j-i$ lần đổi chỗ hai cột liên tục để đưa cột thứ i tới vị trí cột thứ j và $j-i-1$ lần đổi chỗ hai cột liên tục để mang cột thứ j về vị trí cột thứ i. Từ trường hợp đổi chỗ hai cột liền kề, ta có

$$\det(B) = (-1)^{2(j-i)-1}\det(A) = -\det(A).$$

$\square$

Ví dụ 1.2.7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả 1.2.8. *Nếu một định thức có hai cột bằng nhau thì bằng không.*

Chứng minh. Thật vậy, gọi định thức có hai cột như nhau là Δ. Đổi chỗ hai cột đó, ta được

$$\Delta = -\Delta \Leftrightarrow 2\Delta = 0.$$

Như vậy, $\Delta = 0$. □

Hệ quả 1.2.9. *Một định thức có hai cột tỉ lệ thì bằng không.*

Chứng minh. Áp dụng Tính chất 2, ta đưa hệ số tỉ lệ ra ngoài dấu định thức thì được một định thức có hai cột như nhau. Áp dụng Hệ quả 1.2.8, ta có định thức bằng không.

□

Ví dụ 1.2.10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Tính chất 4. Khi ta cộng tích của số thực λ với một cột vào một cột khác thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Chứng minh. Gọi B là ma trận thu được từ A bằng cách thay $C_i \to C_i + \lambda C_j$. Áp dụng Tính chất 1, ta có

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

vì định thức sau bằng không do có hai cột bằng nhau (Hệ quả 1.2.8). □

Ví dụ 1.2.11. Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7+(-7)1 \\ 2 & -1 & 5+(-7)2 \\ 4 & 3 & (-3)+(-7)4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -9 \\ 4 & 3 & -31 \end{vmatrix}.$$

Mệnh đề 1.2.12. *Giả sử E là một ma trận sơ cấp. Khi đó,*

1. *Nếu E là ma trận sơ cấp loại 1 thì* $\det(E) = \det(P(r, \lambda)) = \lambda$.

2. *Nếu E là ma trận sơ cấp loại 2 thì* $\det(E) = \det(Q(r, s)) = -1$.

3. *Nếu E là ma trận sơ cấp loại 3 thì* $\det(E) = \det(R(r, \lambda, s)) = 1$.

Chứng minh. Thật vậy, do E thu được từ I bởi các phép biến đổi sơ cấp cột và $\det(I) = 1$. Mệnh đề được suy ra từ các Tính chất 1, 2 và 3. □

Mệnh đề 1.2.13. *Nếu E là một ma trận sơ cấp thì* $\det(AE) = \det(A)\det(E)$.

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ Tính chất 1, 2, 3 và Mệnh đề 1.2.12. □

Định lý 1.2.14. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi* $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh. Giả sử A là một ma trận khả nghịch. Khi đó, theo Định lý **??**, A viết được dưới dạng tích của các ma trận sơ cấp

$$A = E_1 E_2 \dots E_k.$$

Áp dụng Mệnh đề 1.2.13, ta có

$$\det A = \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det E_k \neq 0.$$

Ngược lại, nếu $\det A \neq 0$ thì ta chứng minh A khả nghịch bằng phương pháp phản chứng. Giả sử A không khả nghịch, khi đó ma trận bậc thang thu được từ A sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp cột phải có ít nhất một cột không. Khi đó, A có dạng

$$A = A' E_1 \cdots E_k,$$

trong đó A' là ma trận vuông có cột cuối bằng 0, ta có

$$\det A = \det(A') \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_k) = 0$$

vì $\det(A') = 0$. $\square$

Tính chất 5. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp. Khi đó,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Chứng minh.

Nếu B không khả nghịch thì $\det(B) = 0$ và AB cũng không khả nghịch. Do đó,

$$\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B).$$

Giả sử B khả nghịch, theo Định lý **??**, B có thể phân tích dạng $B = E_1E_2\cdots E_k$, trong đó E_i là các ma trận sơ cấp. Khi đó,

$$\det(AB) = \det(AE_1E_2\cdots E_k) = \det(A)\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k) = \det(A)\det(B).$$

$\square$

Định lý 1.2.15. *Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp.*

1. *Nếu $BA = I$ thì A khả nghịch và $B = A^{-1}$.*

2. Nếu $AB = I$ thì A khả nghịch và $B = A^{-1}$.

Chứng minh.

1. Vì $BA = I$ nên $\det(BA) = \det(I)$. Áp dụng Tính chất 5, ta được $\det(B)\det(A) = 1$. Do đó, $\det(A) \neq 0$. Theo Định lý 1.2.14, A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A^{-1}.

Nhân hai vế của đẳng thức $BA = I$ với A^{-1}, ta được

$$\begin{aligned} (BA)A^{-1} &= IA^{-1} \\ \Leftrightarrow B(AA^{-1}) &= A^{-1} \\ \Leftrightarrow B &= A^{-1}. \end{aligned}$$

2. Chứng minh tương tự. □

Tính chất 6. $\det(A^t) = \det(A)$.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $\det(A) = 0$. Lúc này, A không khả nghịch, vì vậy A^t cũng không khả nghịch. Do đó, $\det(A^t) = 0 = \det(A)$.

- Trường hợp 2: $\det A \neq 0$. Lúc này, theo Định lý 1.2.14, A khả nghịch nên A viết được dưới dạng tích của các ma trận sơ cấp, giả sử là $A = E_1 E_k \cdots E_k$.

  Ta chứng minh $\det(E_i) = \det(E_i^t)$ với mọi $i = \overline{1, k}$. Thật vậy, nếu E_i là ma trận sơ cấp loại 1 hoặc 2 thì $E_i = E_i^t$, nếu E_i là ma trận sơ cấp loại 3 thì $\det(E_i) = \det(E_i^t) = 1$. Như vậy, ta có

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \det(E_1 E_2 \cdots E_k)^t \\ &= \det(E_k)^t \cdots \det(E_2)^t \det(E_1)^t \\ &= \det E_k \cdots \det E_2 \det E_1 \\ &= \det(E_1 E_2 \cdots E_k) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

$\square$

Hệ quả 1.2.16. *Một tính chất đã đúng khi phát biểu về cột của định thức thì nó vẫn còn đúng khi trong phát biểu ta thay cột bằng dòng.*

Tính chất 7. Khai triển Laplace:

1. Khai triển của định thức theo dòng thứ i :

$$\det(A) = (-1)^{i+1}\left[a_{i1}\det(A_{i1}) - a_{i2}\det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}\det(A_{in})\right].$$

2. Khai triển của định thức theo cột thứ j :

$$\det(A) = (-1)^{1+j}\left[a_{1j}\det(A_{1j}) - a_{2j}\det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n-1}a_{nj}\det(A_{nj})\right].$$

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa và các Tính chất 3, 6. $\square$

Tính chất 8. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính, tức là

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Chứng minh. Áp dụng công thức khai triển Laplace và quy nạp theo cấp n. □

1.2.3 Phương pháp tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp

Để tính một định thức, ta có thể dùng định nghĩa hoặc áp dụng các tính chất của định thức để biến đổi đưa định thức đã cho về dạng đơn giản hơn ví dụ như định thức của ma trận tam giác. Cách dùng các biến đổi sơ cấp là một trong những cách như vậy.

Các biến đổi sơ cấp về dòng mà ta sẽ dùng được liệt kê ở bảng dưới đây

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng
(1) Nhân một số $k \neq 0$ vào một dòng	Định thức nhân với k
(2) Đổi chỗ hai dòng	Định thức đổi dấu
(3) Cộng tích của số k với một dòng vào một dòng khác	Định thức không đổi

Để tính một định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp ta làm như sau:

Bước 1. Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về dòng, tìm cách đưa dần định thức đã cho về dạng tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của từng phép biến đổi sơ cấp được sử dụng.

Bước 2. Tính giá trị của định thức dạng tam giác thu được dựa vào Tính chất 8 và kể đến tác dụng tổng hợp của các phép biến đổi sơ cấp đã sử dụng.

Ví dụ 1.2.17. Xét định thức $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$

Ta có

$$D \xlongequal[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[d_3 \to d_3 + 2d_2]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) = -1.$$

Ví dụ 1.2.18. Xét định thức $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

Ta có

$$D \xlongequal{d_1 \to d_1 + d_2 + d_3} \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1}]{d_2 \to d_2 - d_1} (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3.$$

Nhận xét 1.2.19. Ta cũng có thể xét các phép biến đổi sơ cấp về cột và áp dụng chúng để tính định thức.