Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Chương 2

KHÔNG GIAN VECTƠ

2.1 KHÔNG GIAN VECTƠ

2.2 TỔ HỢP TUYẾN TÍNH VÀ BIỂU DIỄN TUYẾN TÍNH

2.3 CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU

2.3.1 Hệ sinh và cơ sở

Cho V là một không gian vectơ thực.

Định nghĩa 2.3.1.

1. Hệ vectơ $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ được gọi là **hệ sinh** của V nếu mọi vectơ của V đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ này.

2. Hệ vectơ $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ được gọi là **cơ sở** của V nếu mọi vectơ của V đều có duy nhất một biểu diễn tuyến tính qua hệ này.

Nhận xét 2.3.2. Mọi cơ sở đều là hệ sinh.

Ví dụ 2.3.3.

(1) V là một hệ sinh của V.

(2) Hệ gồm hai vectơ không cùng phương lập thành một cơ sở của mặt phẳng trong hình học sơ cấp.

(3) Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^2$, hệ vectơ $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), v = (1,-1)\}$ là một hệ sinh nhưng không phải là một cơ sở, hệ vectơ $\{e_1, e_2\}$ là một cơ sở.

(4) Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^n$, hệ vectơ $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở, cơ sở này gọi là **cơ sở chính tắc** của $\mathbb{R}^n$.

(5) Trong không gian vectơ thực $M(m \times n, \mathbb{R})$, hệ vectơ $\{E_{ij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ là một cơ sở, trong đó $E_{ij} \in M(m \times n, \mathbb{R})$ là ma trận có phần tử ở vị trí hàng i cột j bằng 1 và tất cả các phần tử còn lại bằng 0.

Định nghĩa 2.3.4. Không gian vectơ V gọi là **hữu hạn sinh** nếu nó có một hệ sinh hữu hạn.

Định lý 2.3.5.

Cho hệ hữu hạn các vectơ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ của V, Các khẳng định sau là tương đương:

1. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của V.*

2. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của V.*

3. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính cực đại của V.*

Chứng minh.

($1 \Rightarrow 2$) Nếu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ sinh của V và vectơ 0_V chỉ có duy nhất một biểu diễn qua V. Do 0_V luôn có biểu diễn tầm thường qua một hệ vectơ bất kỳ nên lúc này 0_V chỉ có duy nhất một biểu diễn qua $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Như vậy, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính.

$(2 \Rightarrow 3)$ Do $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ sinh nên với mọi vectơ v luôn tồn tại các số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sao cho $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Như vậy, $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính với mọi vectơ v thuộc V. Theo giả thiết, ta có $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Do đó, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính cực đại.

$(3 \Rightarrow 1)$ Do $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính cực đại nên với mọi vectơ v thì hệ $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ phụ thuộc tuyến tính và theo tính chất 5 mục **??** thì v biểu diễn tuyến tính duy nhất qua $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Như vậy, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V.

$\square$

Nhận xét 2.3.6.

1. Mọi hệ sinh đều chứa một cơ sở.

2. Mọi hệ độc lập tuyến tính trong V đều có thể bổ sung để trở thành cơ sở.

Định lý 2.3.7. *Trong không gian vectơ hữu hạn sinh, các cơ sở luôn có cùng số phần tử.*

Chứng minh. Giả sử $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ và $T = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là hai cơ sở của V.

Do S là cơ sở của V nên các vectơ trong T đều biểu diễn được một cách duy nhất qua S, giả sử

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i,$$

trong đó a_{ij} là số thực với mọi $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, tức là

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m, \\ v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m, \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m. \end{aligned}$$

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và nhận $A =$

$[a_{ij}]_{m\times n}$ làm ma trận hệ số:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0. \end{cases}$$

Nếu $n > m$ thì hệ phương trình này có số phương trình ít hơn số ẩn nên

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\overline{A}) \leq m < n$$

với n là số ẩn và $\overline{A}$ là ma trận hệ số mở rộng. Do đó, hệ sẽ có nghiệm không tầm thường $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là các số thực không đồng thời bằng 0. Xét tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

ta có

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\
=&\alpha_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \cdots + a_{m1}u_m) + \alpha_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m) + \cdots + \\
&\alpha_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 \cdots + a_{mn}u_m) \\
=&(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)u_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n)u_2 + \cdots + \\
&(a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)u_n \\
=&0
\end{aligned}$$

do $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Ax = 0$ ở trên.
Do đó, ta có biểu diễn tuyến tính

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

với các hệ số $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính do là cơ sở của V. Như vậy, $n \leq m$.

Chứng minh tương tự, ta được $m \leq n$.

Tóm lại, nếu m và n lần lượt là số phần tử của hai cơ sở của V thì $m = n$.

$\square$

2.3.2 Số chiều của không gian vectơ

Nếu $V \neq \{0_V\}$ là một không gian vectơ hữu hạn sinh thì V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử, theo Nhận xét 2.3.6. Hơn nữa, Định lý 2.3.7 đã chỉ ra rằng mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.

Định nghĩa 2.3.8.

1. Số phần tử của mỗi cơ sở trong không gian vectơ hữu hạn sinh $V \neq \{0_V\}$ được gọi là **số chiều** của V và ký hiệu là $\dim V$.
   Quy ước, $\dim\{0_V\} = 0$.

2. Nếu V không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì V được gọi là không gian vectơ vô hạn chiều.

Ví dụ 2.3.9.

(1) $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ có số chiều là n.

(2) $\mathbb{R}[x]$ là không gian vectơ vô hạn chiều.

(3) $M(m \times n, \mathbb{R})$ là không gian vectơ có số chiều là $m \times n$.

Mệnh đề 2.3.10. *Cho V là một không gian vectơ n-chiều. Khi đó,*

1. *Mọi hệ độc lập tuyến tính gồm n vectơ của V đều là một cơ sở.*

2. *Mọi hệ sinh gồm n vectơ của V đều là cơ sở.*

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.3.5 và định nghĩa số chiều của không gian vectơ. $\square$

Ví dụ 2.3.11. Hệ vectơ $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,0), v_3 = (2,0,0)\}$ là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ vì đây là một hệ gồm 3 vectơ và độc lập tuyến tính trong không gian 3-chiều $\mathbb{R}^3$.

Từ đây trở đi, nếu không nói gì khác thì ta sẽ nghiên cứu không gian vectơ hữu hạn chiều.

2.3.3 Tọa độ của một vectơ

Định nghĩa 2.3.12. Giả sử $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của không gian vectơ V. Khi đó, với vectơ v bất kỳ của V, v luôn biểu diễn tuyến tính được một cách duy nhất qua S dưới dạng

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

trong đó $\alpha_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

- Bộ vô hướng $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là **tọa độ** của vectơ v đối với cơ sở S, α_i được gọi là tọa độ thứ i, với mọi $i = \overline{1, n}$.
- Ký hiệu $[v]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, ta gọi $[v]_S$ là **ma trận tọa độ** của v đối với cơ sở S.

Để tìm tọa độ của một vectơ đối với cơ sở cho trước ta cần tìm biểu diễn tuyến tính của vectơ đó qua cơ sở đã cho.

Ví dụ 2.3.13. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, cho vectơ $v = (7, 3, -1)$, ta có

(1) Vectơ v có tọa độ $(7, 3, -1)$ đối với cơ sở chính tắc $S = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Thật vậy, biểu diễn v qua cơ sở chính tắc S ta được $v = 7e_1 + 3e_2 + (-1)e_3$.

(2) Vectơ v có tọa độ $(-1, 2, 3)$ đối với cơ sở $T = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 0), v_3 = (2, 0, 0)\}$.

Thật vậy, xét biểu diễn tuyến tính $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, với $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ là các số thực, ta có

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 7 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Như vậy, $v = (-1)v_1 + 2v_2 + 3v_3$ tức là v có tọa độ $(-1, 2, 3)$ đối với cơ sở T.

Nhận xét 2.3.14.

1. Tọa độ của một vectơ đối với các cơ sở khác nhau nói chung là khác nhau.
2. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^n$, tọa độ của $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với cơ sở chính tắc là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.3.4 Công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở

Cho $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ và $T = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ là hai cơ sở của không gian vectơ V. Với $v \in V$ ta gọi

- toạ độ của v đối với cơ sở $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là $(x_1, \ldots, x_n)$,
- tọa độ của v đối với cơ sở $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ là $(x'_1, \ldots, x'_n)$.

Do $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của V nên các vectơ v'_j được biểu diễn một cách duy nhất qua $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dưới dạng

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

trong đó a_{ij} là các số thực với mọi $i = \overline{1,n}$ và $j = \overline{1,n}$.
Lúc này,

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j v'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) v_i.$$

Vì biểu diễn của một vectơ qua cơ sở luôn là biểu diễn duy nhất nên ta có

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j$$

với mọi $i = \overline{1,n}$. Cụ thể,

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}x'_n \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \cdots + a_{2n}x'_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \cdots + a_{nn}x'_n. \end{cases} \qquad (*)$$

Công thức $(*)$ gọi là **công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở từ cơ sở** $\{v_1, \ldots, v_n\}$ **sang cơ sở** $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$.

Nếu đặt $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]_S, A = [a_{ij}]_n, X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = [v]_T$ thì công thức $(*)$ được viết lại dưới dạng ma trận là

$$X = AX'$$

và ma trận A được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sang $T = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$.

Ví dụ 2.3.15. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở $T = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 0), v_3 = (2, 0, 0)\}$.

(1) Tìm công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở từ cơ sở chính tắc S của $\mathbb{R}^3$ sang cơ sở T.

Với $v \in \mathbb{R}^3$, gọi tọa độ của v đối với cơ sở S và T lần lượt là (x_1, x_2, x_3) và

(x'_1, x'_2, x'_3). *Biểu diễn các vectơ trong* T *theo cơ sở* S, *ta được*

$$v_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3,$$

$$v_2 = 1e_1 + 2e_2 + 0e_3,$$

$$v_3 = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3.$$

Do đó, ma trận chuyển cơ sở từ S *sang* T *là* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Công thức đổi tọa độ khi đổi cơ sở từ S *sang* T *là*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

$$hay \begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 + 2x'_3 \\ x_2 = x'_1 + 2x'_2 \\ x_3 = x'_1. \end{cases}$$

(2) Biết $v \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ là $(-4, 2, 0)$ đối với cơ sở T. Tìm tọa độ của v đối với cơ sở chính tắc S của $\mathbb{R}^3$.

Do v có tọa độ $(-4, 2, 0)$ đối với cơ sở T nên thay tọa độ này vào vị trí (x'_1, x'_2, x'_3) trong công thức đổi tọa độ từ S sang T thì ta được

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Như vậy, tọa độ của v đối với cơ sở S là $(-2, 0, -4)$.

Mệnh đề 2.3.16. *Ma trận chuyển cơ sở A từ cơ sở S sang T của không gian vectơ V là ma trận khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A là ma trận chuyển* *cơ sở từ T sang S.*

Chứng minh. Với v là vectơ bất kỳ trong V, ta gọi tọa độ của v đối với cơ sở S và T lần lượt là $(x_1, \ldots, x_n)$ và $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Đặt $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ và $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$, ta có $X = AX'$ và $X' = A'X$, trong đó A là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T và A' là ma trận chuyển cơ sở từ T sang S. Lúc này,

$$X = (AA')X \text{ và } X' = (A'A)X'$$

với mọi X, X'. Dễ dàng suy ra $AA' = A'A = I_n$, tức là A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A'. $\square$

2.4 KHÔNG GIAN VECTƠ CON

2.4.1 Định nghĩa và số chiều của không gian con

Định nghĩa 2.4.1. Tập con W khác rỗng của không gian vectơ V được gọi là **không gian vectơ con của** V nếu với mọi vectơ u, v của W và với mọi số thực α thì các vectơ $u + v$ và αu cũng thuộc vào W.

Nhận xét 2.4.2.

1. Nếu W là không gian vectơ con của V thì W cùng với hai phép toán là hạn chế của hai phép toán trên V là một không gian vectơ với $0_W = 0_V$.
2. Tập con khác rỗng W của không gian vectơ V là một không gian con khi và chỉ khi với mọi u, v thuộc W và với mọi số thực α, β ta có $\alpha u + \beta v \in W$.

Ví dụ 2.4.3.

(1) V và $\{0_V\}$ là các không gian vectơ con của V.

(2) Trong không gian các vectơ tự do trong hình học sơ cấp, cho $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tập hợp gồm tất cả các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{a}$ là một không gian vectơ con.

(3) Tập hợp $\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, n}\}$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}[x]$, đây là không gian vectơ có số chiều là $n+1$ với một cơ sở là $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

(4) Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, x_1+x_2+x_3 = 0\}$ là một không gian vectơ con.

(5) Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, $B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, x_1+x_2+x_3 = 1\}$ không phải là không gian vectơ con.
Thật vậy, vectơ $0_{\mathbb{R}^3}$ không thuộc vào B nên theo Nhận xét 2.4.2 ta suy ra B không phải là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

(6) Tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình với n ẩn $AX = 0$ là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$.
Do hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ luôn có nghiệm $X = 0$

nên tập nghiệm của hệ này khác rỗng. Ngoài ra, nếu X_0, X_0' là các nghiệm của hệ thì với mọi số thực α, β, ta có

$$A(\alpha X_0 + \beta X_0') = \alpha A X_0 + \beta A X_0' = 0.$$

Như vậy, $\alpha X_0 + \beta X_0'$ cũng là nghiệm của hệ thuần nhất đã cho.

Mệnh đề 2.4.4. *Nếu W là một không gian vectơ con của V thì $\dim W \leq \dim V$. Đặc biệt, $\dim W = \dim V$ khi và chỉ khi $W = V$.*

Chứng minh.

1. Vì $W \subset V$ nên mỗi hệ độc lập tuyến tính trong W cũng độc lập tuyến tính trong V. Do đó, $\dim W \leq \dim V$.

2. $\dim W = \dim V$ khi và chỉ khi cơ sở của W cũng là cơ sở của V tức là $W = V$.

$\square$

Mệnh đề 2.4.5. *Giao của một họ khác rỗng bất kỳ các không gian vectơ con của một $\mathbb{R}$-không gian vectơ V là một không gian vectơ con của V.*

Chứng minh. Giả sử $\{V_i\}_{i\in I}$ là một họ khác rỗng các không gian con của V, đặt $W = \cap_{i\in I} V_i$.

1. Do V_i là không gian con của V nên 0_V thuộc V_i với mọi $i \in I$. Như vậy, 0_V thuộc W hay $W \neq \emptyset$ (1).

2. Với mọi u, v thuộc W, ta có u, v thuộc V_i với mọi $i \in I$. Với mọi số thực α và β, ta có $\alpha u + \beta v$ thuộc vào mọi V_i vì các V_i đều là không gian vectơ con. Như vậy, $\alpha u + \beta v \in W$ (2).

Từ (1) và (2), ta suy ra W là không gian vectơ con của V. □

2.4.2 Không gian vectơ con sinh bởi một tập hợp

Định nghĩa 2.4.6. Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ và X là một tập con của V. Giao của tất cả các không gian vectơ con chứa X của V là một không gian vectơ con của V, gọi là **không gian vectơ con của V sinh bởi X**, ký hiệu là $\langle X \rangle$.

Nhận xét 2.4.7.

1. $\langle X\rangle$ là không gian vectơ con nhỏ nhất của V chứa X.

2. $\langle\emptyset\rangle = \{0_V\}$.

3. $\langle W\rangle = W$ với mọi không gian con W của V.

4. $V^* = V \setminus \{0\}$, $\langle V^*\rangle = V$.

Mệnh đề 2.4.8. *Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ, $\emptyset \neq X \subset V$. Khi đó, không gian vectơ con sinh bởi X là tập hợp bao gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của X.*

Chứng minh. Đặt A là tập hợp gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của X. Ta dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

1. A là không gian vectơ con của V.

2. $X \subset A$.

3. Với mọi B là không gian vectơ con của V mà $X \subset B$ thì $A \subset B$.

Như vậy, A là không gian con nhỏ nhất của V mà chứa X, tức là $A = \langle X\rangle$. $\square$

Nhận xét 2.4.9. Nếu $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ thì

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n} \right\}.$$

Ví dụ 2.4.10.

(1) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$, $\langle (1,0) \rangle = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\langle (1,0), (1,1) \rangle = \mathbb{R}^2$.

(2) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}_2[x]$, $\langle 1, 1+x \rangle = \mathbb{R}_1[x]$.

2.4.3 Hạng của một hệ vectơ

Định nghĩa 2.4.11. Cho X là một hệ vectơ trong V, **hạng** của hệ vectơ X, ký hiệu là $\operatorname{rank} X$, là số chiều của không gian vectơ con sinh bởi X, tức là

$$\operatorname{rank} X = \dim \langle X \rangle.$$

Mệnh đề 2.4.12. *Hạng của một hệ vectơ X bằng số vectơ của mỗi tập con độc lập tuyến tính cực đại trong X.*

Chứng minh. Nếu A độc lập tuyến tính cực đại trong X thì mọi vectơ của X đều biểu diễn tuyến tính được qua A. Mặt khác, ta lại có mọi phần tử của $\langle X \rangle$ đều biểu diễn tuyến tính được qua X. Do đó, mọi phần tử của $\langle X \rangle$ đều biểu diễn tuyến tính được qua A, từ đây suy ra A độc lập tuyến tính cực đại trong $\langle X \rangle$ hay nói cách khác A là cơ sở của $\langle X \rangle$. Như vậy, $\dim\langle X \rangle$ bằng số phần tử của A. □

Hệ quả 2.4.1. Hai tập con độc lập tuyến tính cực đại trong X có cùng số phần tử.

Nhận xét 2.4.13. Tính độc lập tuyến tính của một hệ vectơ không đổi khi ta thực hiện các biến đổi:

1. Đổi chỗ hai vectơ của hệ.

2. Nhân một vô hướng khác 0 vào một vectơ.

3. Cộng vào một vectơ một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Do đó, nếu lấy tọa độ của các vectơ trong hệ đã cho đối với một cơ sở nào đó của không gian vectơ V và xây dựng ma trận từ các tọa độ này thì hạng của ma trận được tạo thành bằng hạng của hệ vectơ đã cho.

Ví dụ 2.4.14. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^3$, tìm hạng của hệ vectơ $X = \{v_1 = (-1, 3, 4), v_2 = (0, 2, 5), v_3 = (-2, 4, 3), v_4 = (1, -1, 1)\}$.

$$\textit{Ta có } \operatorname{rank} X = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

2.5 TỔNG VÀ TỔNG TRỰC TIẾP

Định nghĩa 2.5.1. Cho V là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ, $W_1, \ldots, W_m$ là các không gian vectơ con của V. Tập hợp

$$W_1 + \cdots + W_m = \{w_1 + \cdots + w_m \mid w_i \in W_i, i = \overline{1, m}\}$$

là một không gian vectơ con của V, ký hiệu là $\sum_{i=1}^m W_i$ và gọi là **tổng** của các không gian $W_1, \ldots, W_m$.

Nhận xét 2.5.2.

1. $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

2. Với $w \in \sum_{i=1}^m W_i$ ta có $w = \sum_{i=1}^m w_i$, trong đó $w_i \in W_i$ với mọi $i = \overline{1, m}$. Hơn nữa, biểu diễn này là không duy nhất (ví dụ, trường hợp $W_1 \cap W_2 \neq \{0_V\}$).

Định nghĩa 2.5.3. Nếu mọi vectơ w trong $\sum_{i=1}^m W_i$ đều được viết **duy nhất** dưới dạng $w = w_1 + \cdots + w_m$, trong đó $w_i \in W_i$ với mọi $i = \overline{1, m}$, thì $\sum_{i=1}^m W_i$ được gọi là tổng trực tiếp của các không gian $W_1, \ldots, W_m$ và ký hiệu là $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

Ví dụ 2.5.4. Giả sử $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong V. Với mọi $i = \overline{1, n}$, đặt

$$W_i = \langle v_i \rangle,$$

ta có $\langle S \rangle = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

Định lý 2.5.5. *Cho V là một không gian vectơ thực, W_1, W_2 là các không gian vectơ con của V. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

1. $W_1 + W_2$ *là tổng trực tiếp.*

2. $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$*.*

Chứng minh.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Giả sử $W_1 + W_2$ là tổng trực tiếp, với $v \in W_1 \cap W_2$, nếu $v \neq 0_V$ thì ta có
$$v = v + 0_V \text{ và } v = 0_V + v$$
là 2 biểu diễn khác nhau của v trong $W_1 + W_2$, điều này mâu thuẫn với giả thiết tổng trực tiếp. Do đó, với $v \in W_1 \cap W_2$ thì $v = 0_V$.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Giả sử W_1, W_2 là các không gian vectơ con của V và $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. Với $w \in W_1 + W_2$, nếu $w = w_1 + w_2$ và $w = w_1' + w_2'$, trong đó $w_1, w_1' \in W_1$ và $w_2, w_2' \in W_2$, thì ta có
$$w_1 - w_1' = w_2' - w_2$$
là một vectơ thuộc $W_1 \cap W_2$. Theo giả thiết, $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ nên $w_1 = w_1'$ và $w_2 = w_2'$, tức là w chỉ có duy nhất một biểu diễn thành tổng 2 phần tử trong W_1

và W_2. Như vậy, tổng $W_1 + W_2$ lúc này là tổng trực tiếp.

$\square$

Định lý trên đúng cho trường hợp tổng m không gian con, cụ thể như sau:

Định lý 2.5.6. *Cho V là một không gian vectơ thực, $W_1, \ldots, W_m$ là các không gian vectơ con của V. Các điều kiện sau là tương đương:*

1. *$W_1 + \cdots + W_m$ là tổng trực tiếp.*
2. *Với mọi $i = \overline{1, m}$, $W_i \cap \left(\sum_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus i} W_j\right) = \{0_V\}$.*

Mệnh đề 2.5.7. *Cho W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V với cơ sở của W_1, W_2 lần lượt là S_1, S_2 . Khi đó, nếu $S_1 \cap S_2$ là một cơ sở của $W_1 \cap W_2$ thì $S_1 \cup S_2$ là một cơ sở của $W_1 + W_2$.*

Chứng minh. Giả sử $\{z_k\}$ là một cơ sở của $W_1 \cap W_2$. Khi đó, ta có thể mở rộng $\{z_k\}$ thành các cơ sở $S_1 = \{x_i\} \cup \{z_k\}$ và $S_2 = \{y_j\} \cup \{z_k\}$ của W_1 và W_2. Lúc này, $S_1 \cap S_2 = \{z_k\}$ và

$$S_1 \cup S_2 = \{x_i\} \cup \{y_j\} \cup \{z_k\}.$$

Dễ thấy, $S_1 \cup S_2$ là một hệ sinh của $W_1 + W_2$. Ta chứng minh $S_1 \cup S_2$ là một hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét biểu diễn tuyến tính

$$\sum_i a_i x_i + \sum_j b_j y_j + \sum_k c_k z_k = 0,$$

ta có

$$\sum_i a_i x_i = -(\sum_j b_j y_j + \sum_k c_k z_k) \in W_1 \cap W_2$$

nên tồn tại các $d_k \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\sum_i a_i x_i = \sum_k d_k z_k.$$

Từ đó, ta có

$$\sum_i a_i x_i - \sum_k d_k z_k = 0$$

là một biểu diễn tuyến tính của 0_V qua hệ độc lập tuyến tính S_1. Vậy $a_i = 0$ với mọi i.

Tương tự, ta có $b_j = 0$ với mọi j.

Lúc này,

$$\sum_k c_k z_k = 0$$

là biểu diễn tuyến tính của 0_V qua hệ độc lập tuyến tính $\{z_k\}$ nên ta có $c_k = 0$ với mọi k. Do đó, $S_1 \cup S_2$ độc lập tuyến tính.

Như vậy, $S_1 \cup S_2$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của $W_1 + W_2$, nói cách khác $S_1 \cup S_2$ là một cơ sở của $W_1 + W_2$. □

Định lý 2.5.8. *Cho V là một không gian vectơ thực hữu hạn chiều. Với U và W là các không gian vectơ con của V, ta có*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Chứng minh. Giả sử

$$\dim(W_1 \cap W_2) = p, \ \dim W_1 = m + p, \ \dim W_2 = n + p.$$

Gọi $\{z_k\}$ là một cơ sở của $W_1 \cap W_2$. Khi đó, ta mở rộng $\{z_k\}$ thành các cơ sở $S_1 = \{x_i\} \cup \{z_k\}$ và $S_2 = \{y_j\} \cup \{z_k\}$ của W_1 và W_2. Theo Mệnh đề 2.5.7, ta có

$\{x_i\} \cup \{y_j\} \cup \{z_k\}$ là một cơ sở của $W_1 + W_2$. Do đó,

$\dim(W_1+W_2) = m+n+p = (m+p)+(n+p)-p = \dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$.

$\square$

Hệ quả 2.5.1.

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

Ví dụ 2.5.9. Trong không gian vectơ thực $\mathbb{R}^4$, cho $U = \langle v_1 = (1, 0, 0, 2), v_2 = (0, 2, 1, -1), v_3 = (-1, 1, 0, 1)\rangle$, $V = \langle v_4 = (3, 2, 0, 1), v_5 = (1, 2, 1, 1)\rangle$. Tìm số chiều của $U, V, U + V, U \cap V$.

Ta có

- $\dim U = \operatorname{rank}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3.$
- $\dim V = \operatorname{rank}\{v_4, v_5\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$

- $U+V = \langle U \cup V \rangle$ *nên* $\dim(U+V) = \operatorname{rank}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 4.$
- $\dim(U \cap V) = \dim(U+V) - \dim U - \dim V = 1.$