Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC -
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.1 MA TRẬN

1.2 ĐỊNH THỨC

1.3 ĐỊNH THỨC VÀ HẠNG CỦA MA TRẬN

1.4 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.4.1 Dạng tổng quát của một hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 1.4.1. Một **hệ phương trình tuyến tính** gồm m phương trình theo n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với hệ số thực có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases} \tag{3.4.I}$$

trong đó a_{ij} và b_i là các số thực với mọi $i = \overline{1, m}$ và $j = \overline{1, n}$.

Đặt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \; [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Khi đó, hệ phương trình tuyến tính (3.4.I) được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$Ax = b.$$

- Ma trận A được gọi là ma trận hệ số.
- Ma trận cột b được gọi là cột hệ số tự do.
- Ma trận $[A \mid b]$ được gọi là ma trận hệ số bổ sung (hoặc ma trận hệ số mở rộng).

Định nghĩa 1.4.2.

1. Một bộ gồm n số thực $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ được gọi là một **nghiệm** của hệ phương

trình (3.4.I) nếu thay $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ vào hệ (3.4.I) thì dấu bằng xảy ra với tất cả các phương trình trong hệ.

2. Nếu hệ phương trình tuyến tính cho dưới dạng ma trận $Ax = b$ thì $x_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ được gọi là nghiệm của hệ nếu $Ax_0 = b$.

3. Giải hệ phương trình là đi tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó, tức là đi tìm tập nghiệm của hệ.

4. Hai hệ phương trình được gọi là **tương đương** nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ví dụ 1.4.3. Hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

là một hệ phương trình tuyến tính gồm 2 phương trình theo 3 ẩn. Bộ số $(0, 0, 0)$

không phải là một nghiệm của hệ, bộ số $(2, 0, 1)$ là một nghiệm của hệ.

Định nghĩa 1.4.4. Nếu hệ phương trình tuyến tính (3.4.I) có $b = [0\ 0\ \cdots\ 0]^t$ thì hệ được gọi là **hệ phương trình tuyến tính thuần nhất**. Khi đó, hệ có dạng

$$Ax = 0.$$

Nhận xét 1.4.5. Hệ thuần nhất luôn có nghiệm không $x = [0\ 0\ \cdots\ 0]^t$ và được gọi là nghiệm tầm thường của hệ .

1.4.2 Hệ Cramer

Bây giờ, ta xét hệ gồm n phương trình và n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{3.4.II}$$

với ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

là một ma trận vuông cấp n và $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Dạng ma trận của hệ (3.4.II) là

$$Ax = b. \tag{1.2}$$

Định nghĩa 1.4.6. Hệ (3.4.II) được gọi là **hệ Cramer** nếu $\det(A) \neq 0$.

Định lý 1.4.7 (Quy tắc Cramer)**.** *Hệ Cramer có nghiệm duy nhất, được tính* *bằng công thức* $x = A^{-1}b$, *nghĩa là*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

với mọi $j = \overline{1, n}$, *trong đó* A_j *là ma trận thu được từ ma trận* A *bằng cách thay cột thứ* j *bởi cột hệ số tự do* b.

Chứng minh. Vì $\det(A) \neq 0$, nên theo Định lý **??**, A có ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t.$$

Thay x bởi $A^{-1}b$ trong phương trình (1.2), ta có

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b.$$

Như vậy, $x = A^{-1}b$ là một nghiệm của hệ.

Sử dụng biểu thức của A^{-1} ở Định lý **??**, ta suy ra

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}C^t = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

tức là

$$x_j = \frac{C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \cdots + C_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

Để chứng minh sự duy nhất của nghiệm, ta giả sử hệ (1.2) có hai nghiệm là x và y, ta có

$$Ax = b \quad \text{và} \quad Ay = b.$$

Bằng phép trừ vế với vế, ta được

$$Ax - Ay = 0$$

hay

$$A(x - y) = 0.$$

Nhân hai vế với A^{-1}, ta được

$$A^{-1}A(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0,$$

nghĩa là có $x = y$. Như vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất. $\square$

Ví dụ 1.4.8. Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 & = 5. \end{cases}$$

Ta có

- $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -46 \neq 0,$

- $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -230,$
- $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -46,$
- $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -46.$

Như vậy, hệ phương trình có duy nhất nghiệm $(5, 1, 1)$, *tức là* $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ *hay*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 1.4.9. Trong trường hợp $b = [0\ 0\ \cdots\ 0]^t$, hệ phương trình (3.4.II) trở thành hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với n phương trình và n ẩn số

$$Ax = 0.$$

Khi đó, hệ $Ax = 0$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

1.4.3 Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss

Phương pháp Cramer tuy tường minh nhưng lại chỉ áp dụng được cho các hệ phương trình tuyến tính Cramer. Trên thực tế, người ta thường dùng phương pháp Gauss để giải một hệ phương trình tuyến tính tùy ý.

Trước tiên, ta nhận thấy có sự tương ứng giữa các phép biến đổi phương trình trong hệ phương trình tuyến tính với các phép biến đổi sơ cấp theo dòng trên ma trận hệ số mở rộng của hệ đó:

- Phép biến đổi sơ cấp nhân một dòng của ma trận với một số khác không tương ứng với phép nhân một phương trình của hệ với một số khác không.

- Phép biến đổi chỗ của hai dòng của ma trận tương ứng với phép đổi vị trí của hai phương trình của hệ.

- Phép cộng tích của số k với một dòng vào một dòng khác của ma trận tương ứng với phép cộng tích của số k với một phương trình vào một phương trình khác của hệ.

Các phép biến đổi trên không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình. Như vậy, ta có thể giải một hệ phương trình tuyến tính bằng cách tác động các phép biến đổi sơ cấp theo dòng lên ma trận hệ số mở rộng của hệ và đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng ma trận bậc thang. Khi đó, ta được một hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình ban đầu và việc giải hệ trở nên đơn giản hơn bằng cách giải từ dưới lên. Phương pháp này được gọi là phương pháp khử Gauss, cụ thể như sau:

Xét hệ phương trình tuyến tính (3.4.I), ta có ma trận hệ số mở rộng là

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}.$$

Giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu cần, đổi chỗ các phương trình và đánh số lại các ẩn). Khi đó, nhân phương trình thứ nhất với $(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})$ rồi cộng vào phương trình thứ i với mọi $i = \overline{2, m}$, ta nhận được ma trận mới có dạng

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & | & b'_m \end{bmatrix}.$$

Lặp lại quá trình trên với ma trận con tạo bởi $(m-1)$ dòng cuối và n cột cuối.

Sau một số hữu hạn bước, ta được ma trận hệ số mở rộng có dạng bậc thang là

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
\overline{a}_{11} & * & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_1 \\
0 & \overline{a}_{22} & \dots & * & * & \dots & * & \overline{b}_2 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \overline{a}_{rr} & * & \dots & * & \overline{b}_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{b}_m
\end{array}\right],$$

trong đó $\overline{a}_{ii} \neq 0$ với mọi $i = \overline{1, r}$, các dấu $*$ ký hiệu các phần tử tùy ý trong $\mathbb{R}$.

- Nếu một trong các số $\overline{b}_{r+1}, \dots, \overline{b}_m$ khác 0 thì hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\overline{b}_{r+1} = \dots = \overline{b}_m = 0$ thì hệ phương trình có nghiệm và được xác định bằng cách giải hệ từ dưới lên. Hơn nữa, mỗi nghiệm của hệ phương trình đều có thể nhận được bằng cách gán cho $x_{r+1}, \dots, x_n$ những giá trị tùy ý trong $\mathbb{R}$ (nếu $n > r$), rồi thay vào tính $x_1, \dots, x_r$.

Ví dụ 1.4.10. Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 & = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 25x_4 & = 3. \end{cases}$$

Ta có

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & -4 & -11 & -25 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -40 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - 10d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Do đó, hệ đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = 0. \end{cases}$$

Từ đây, ta suy ra được công thức nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 4x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ 1.4.11. Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 & = 0. \end{cases}$$

Ma trận hệ số mở rộng của hệ là

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ta có

$$[A \mid b] \xrightarrow[d_2 \to d_2 - 2d_1]{d_3 \to d_3 - 3d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hệ phương trình thuần nhất trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 & = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 7x_4 \\ x_2 = -x_3 - 3x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chú ý 1.4.12. Ta có thể lượt bỏ những dòng gồm toàn phần tử không trong quá trình biến đổi ma trận hệ số mở rộng. Đặc biệt, đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, ta chỉ cần biến đổi dòng cho ma trận hệ số.

Ví dụ 1.4.13. Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 3. \end{cases}$$

Ta có

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 \to d_2 + d_3]{d_1 \to d_1 - 1/2 d_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_1 \to d_1 + d_2]{\substack{d_3 \to 1/2 d_3 \\ d_2 \to 1/2 d_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Từ đây, ta có ngay nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x_1 & = 1 \\ x_2 & = 1 \\ x_3 & = 1. \end{cases}$$

Nhận xét 1.4.14. Nếu có thể đưa ma trận bổ sung $[A \mid b]$ của hệ phương trình tuyến tính về dạng $[I \mid b']$ thì ta rút ra ngay nghiệm của hệ là $x = b'$.

1.4.4 Tiêu chuẩn có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý 1.4.15 (Định lý Kronecker - Capelli)**.** *Hệ phương trình tuyến tính* (3.4.I) *có nghiệm khi và chỉ khi*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b].$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát (bằng cách đánh số lại các ẩn nếu cần), ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp dòng để đưa ma trận $[A \mid b]$ về dạng bậc thang:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1(r+1)} & \dots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2(r+1)} & \dots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r(r+1)} & \dots & a'_{rn} & | & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & b'_m \end{bmatrix}$$

trong đó $r \leq \min\{m, n\}$. Từ đây, ta có ngay điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét 1.4.16. Từ Định lý 1.4.15, ta có một số lưu ý sau:

1. Nếu $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}[A \mid b]$ thì hệ vô nghiệm.

2. Nếu $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

3. Nếu $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] < n$ thì hệ có vô số nghiệm, phụ thuộc $n - \operatorname{rank} A$ tham số.

Ví dụ 1.4.17. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính hệ số thực

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 & = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = m^2. \end{cases}$$

Xét ma trận hệ số bổ sung

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & m & 1 & | & m \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & | & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & | & m(1-m) \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & | & (1-m)(m+1)^2 \end{bmatrix}$$

Khi đó, ta có các trường hợp sau có thể xảy ra:

- *Nếu* $m = 1$ *thì* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] = 1 < 3$. *Do đó, hệ có vô số nghiệm và tập nghiệm của hệ được xác định bởi*

$$S = \{(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

- *Nếu* $m = -2$ *thì* $\operatorname{rank} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rank}[A \mid b]$. *Do đó, hệ vô nghiệm.*

- *Nếu* $m \neq 1$ *và* $m \neq -2$ *thì* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b] = 3$. *Khi đó, hệ có duy nhất một nghiệm được xác định bởi hệ phương trình*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 & = m^2 \\ (m-1)x_2 + (1-m)x_3 & = m(1-m) \\ (1-m)(m+2)x_3 & = (1-m)(m+1)^2. \end{cases}$$

Giải từ dưới lên, ta được nghiệm duy nhất của hệ là

$$\begin{cases} x_1 &= -\dfrac{m+1}{m+2} \\ x_2 &= \dfrac{1}{m+2} \\ x_3 &= \dfrac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases}$$