Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC -
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài toán khởi điểm của Đại số tuyến tính là giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Để làm được điều đó, người ta đã đưa ra các khái niệm mới là ma trận và định thức. Đây là những công cụ hữu hiệu, góp phần giải quyết hầu hết các bài toán trong Đại số tuyến tính.

1.1 MA TRẬN

1.1.1 Khái niệm ma trận

1.1.2 Các phép toán trên ma trận

1.1.3 Chuyển vị của ma trận

1.1.4 Ma trận khả nghịch - Ma trận nghịch đảo

1.1.5 Phép biến đổi sơ cấp

1. Các phép biến đổi sơ cấp.

Cho $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $m \geq 2$. Ký hiệu d_i là dòng thứ i của ma trận A. Các phép biến đổi sau được gọi là **các phép biến đổi sơ cấp dòng** của ma trận A:

(i) Đổi chỗ hai dòng của ma trận cho nhau,

$$d_i \leftrightarrow d_k,\ 1 \leq i \neq k \leq m.$$

Ví dụ 1.1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) Nhân một dòng của ma trận với một số λ khác không,

$$d_i \rightarrow \lambda d_i, \; 1 \leq i \leq m.$$

Ví dụ 1.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(iii) Thay một dòng của ma trận bởi tổng của dòng đó và tích của một số λ với một dòng khác của ma trận,

$$d_i \rightarrow d_i + \lambda d_k, \; 1 \leq i \neq k \leq m.$$

Ví dụ 1.1.3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tương tự, ký hiệu c_j là cột thứ j của A, $1 \leq j \leq n$ với $n \geq 2$. Khi đó, **các phép biến đổi sơ cấp cột** của A gồm:

(i) Đổi chỗ hai cột của ma trận cho nhau,

$$c_j \leftrightarrow c_k,\ 1 \leq j \neq k \leq n.$$

(ii) Nhân một cột của ma trận với một số λ khác không,

$$c_j \to \lambda c_j,\ 1 \leq j \leq n.$$

(iii) Thay một cột của ma trận bởi tổng của cột đó và tích của một số λ với một cột khác của ma trận,

$$c_j \to c_j + \lambda c_k,\ 1 \leq j \neq k \leq n.$$

Các phép biến đổi sơ cấp dòng hay cột được gọi chung là **các phép biến đổi sơ cấp**. Chúng là những công cụ quan trọng trong nhiều bài toán của đại số tuyến tính.

2. Các ma trận sơ cấp.

Cho $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ với $m \geq 2$. Gọi E_{ij} là ma trận vuông chỉ có phần tử ở hàng i cột j bằng 1, mọi phần tử khác bằng 0 (cấp của E_{ij} được chọn một cách thích hợp để các phép toán ma trận sau thực hiện được).

• Phép nhân các phần tử của hàng r của ma trận A với số $\lambda \neq 0$, thực hiện bởi phép nhân bên trái ma trận A với ma trận

$$P(r, \lambda) = I + (\lambda - 1)E_{rr} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận $P(r, \lambda)$ thu được từ I bằng cách nhân λ vào hàng r.

Hơn nữa, phép nhân bên phải A với $P(r, \lambda)$ tương ứng với phép nhân cột r của A với số λ.

Ma trận $P(r, \lambda)$ được gọi là **ma trận sơ cấp loại 1**.

Ví dụ 1.1.4.

$$P(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân $P(2,3)$ vào bên trái một ma trận A tương ứng với phép biến đổi sơ cấp nhân các phần tử ở hàng 2 của A với 3.

• Phép đổi chỗ hai hàng r và s của ma trận A, thực hiện bởi phép nhân bên trái ma trận A với ma trận

$$Q(r,s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \cdot & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận $Q(r,s)$ thu được từ I bằng cách đổi chỗ hai hàng r và s (tương đương đổi chỗ hai cột r và cột s). Hơn nữa, phép nhân bên phải A với $Q(r,s)$ tương ứng với phép đổi chỗ hai cột r và s.

Ma trận $Q(r,s)$ được gọi là **ma trận sơ cấp loại 2**.

Ví dụ 1.1.5.

$$Q(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nhân $Q(2,3)$ vào bên trái một ma trận A tương ứng với phép biến đổi sơ cấp đổi chỗ hai hàng 2 và 3 cho nhau.

• Phép cộng λ lần hàng r vào hàng s của ma trận A, thực hiện bởi phép nhân bên trái ma trận A với ma trận

$$R(r,\lambda,s) = I + \lambda.E_{sr} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận $R(r,\lambda,s)$ thu được từ I bằng cách cộng λ lần hàng r vào hàng s (tương đương cộng λ cột s vào cột r). Hơn nữa, phép nhân bên phải A với $R(r,\lambda,s)$ tương ứng với phép cộng λ lần cột r vào cột s,

Ma trận $R(r,\lambda,s)$ được gọi là **ma trận sơ cấp loại 3**.

Ví dụ 1.1.6.

$$R(1,2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân $R(1,2,3)$ vào bên trái một ma trận A tương ứng với phép biến đổi sơ cấp cộng 2 lần hàng 1 vào hàng 3.

Các ma trận sơ cấp loại 1, 2 và 3 thường gọi chung là **ma trận sơ cấp**, ký hiệu là E.

Mệnh đề 1.1.7. *Nếu E là một ma trận sơ cấp thì E khả nghịch. Hơn nữa, E^{-1} cũng là ma trận sơ cấp cùng loại với E.*

Chứng minh. Tính toán trực tiếp. □

Sau đây là một định lý khá đặc biệt, nêu lên ý nghĩa cơ bản của ma trận bậc thang đồng thời làm cơ sở cho nhiều thuật toán trong đại số tuyến tính.

Định lý 1.1.8. *Mọi ma trận cỡ $m \times n$ đều có thể đưa về ma trận bậc thang sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng.*

Chứng minh. Chứng minh bằng quy nạp theo số dòng m. Ta chỉ cần chứng minh định lý cho trường hợp ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ khác không và $m, n \geq 2$. Lúc đó, A có ít nhất một cột khác không. Gọi cột j_1 $(1 \leq j_1 \leq n)$ là cột đầu tiên khác không của A. Nếu cần có thể đổi chỗ hai dòng nào đó của A để nhận được $a_{1j_1} \neq 0$. Ta sẽ biến đổi sơ cấp dòng trên A như sau

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & a_{1(j_1+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j_1} & a_{2(j_1+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj_1} & a_{m(j_1+1)} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{d_i \to d_i - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} d_1}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & a_{1(j_1+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{2(j_1+1)} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a'_{m(j_1+1)} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tiếp tục quá trình này áp dụng cho

$$B = \begin{bmatrix} a'_{2(j_1+1)} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{m(j_1+1)} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

ta thu được ma trận bậc thang. $\square$

Định lý 1.1.9. *Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

1. *A khả nghịch.*
2. *I_n nhận được từ A bởi một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng (hay cột).*
3. *A là tích của một số hữu hạn các ma trận sơ cấp.*

Chứng minh.

• (1)⇒(2) Giả sử A khả nghịch, gọi B là ma trận bậc thang có được từ A bởi một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng $e_1, e_2, \ldots, e_k$ nào đó và đặt $E_i = e_i(I_n)$ là ma trận sơ cấp thu được từ I_n bởi e_i, với mọi $i = \overline{1, k}$. Ta có

$$B = E_k \cdots E_1 A$$

và B khả nghịch vì $E_1, \ldots, E_k, A$ đều khả nghịch. Do đó, mọi dòng của B đều khác không. Tiếp tục thực hiện các phép biến đổi sơ cấp dòng ta có thể đưa B về ma trận I_n. Vậy I_n có thể nhận được từ A bởi một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng.

Tương tự, I_n cũng có thể nhận được từ A bởi một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp cột.

• (2)⇒(3) Giả sử có (2), theo chứng minh trên ta có

$$I_n = E_k \cdots E_1 A \quad \text{hay} \quad I_n = A E_1 \cdots E_k.$$

Do đó, $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ (hay $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$), tức là (3) đúng.

• (3)⇒(1) Giả sử có (3), lúc này A khả nghịch vì mỗi ma trận sơ cấp dòng (hay cột) đều khả nghịch. □

1.2 ĐỊNH THỨC

1.2.1 Định thức của ma trận vuông

Định nghĩa 1.2.1. Cho $A = [a_{ij}]_n$ là một ma trận vuông cấp n và $1 \le i, j \le n$. Ma trận vuông cấp $n-1$ có được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j gọi là **ma trận con bù của** A **ứng với phần tử** a_{ij}, ký hiệu là A_{ij}.

Ví dụ 1.2.2. Với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ thì

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

Định nghĩa 1.2.3. Cho $A \in M(n, \mathbb{R})$. **Định thức** của ma trận A, ký hiệu là $\det(A)$ hay $|A|$, được định nghĩa bằng cách quy nạp theo n như sau:

- Với $n = 1$, $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$.
- Với $n \geq 2$, $A = [a_{ij}]_n$ thì

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}). \tag{1.1}$$

Nhận xét 1.2.4. Với $n = 2$, tức là $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, theo định nghĩa ta có

$$\det(A) = a_{11}\det[a_{22}] + (-1)^{1+2}a_{12}\det[a_{21}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ví dụ 1.2.5.

1) Xét định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5-12) - 2(10+4) - 2(6+1) = -49.$$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times (-2) = 7$

Nhận xét 1.2.6. Với $n = 3$, tức là $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, định thức của A được khai triển cụ thể dưới dạng

$$\begin{aligned}\det(A) = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.7. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $\det I_n = 1$.