FACULTÉ DES SCIENCES & TECHNIQUES
Département de Mathématiques

ANNÉE 2017-2018

MASTER 1- CRYPTIS
Projet d'Initiation à la Recherche

Séries D-finies et suites P-récursives

Soit K un corps commutatif, $K[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans K et $K[[X]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans K.

Suites polynomialement récursives
Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de K. On dit que u est une suite P-récursive s'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ et des polynômes $P_0, \ldots, P_h$ dans $K[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_h(n)u_{n+h} + P_{h-1}(n)u_{n+h-1} + \cdots + P_0(n)u_n = 0.$$

On désigne par $\mathcal{J}(K)$ l'ensemble de ces suites.

Séries différentiellement finies
Soit $f(X)$ un élément de $K[[X]]$. On désigne, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f^{(n)}(X)$ la dérivée formelle n-ième de f. On dit que f est D-finite (différentiellement finie) ou D-finie s'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ et des polynômes $P_0, \ldots, P_h$ dans $K[X]$ tels que

$$P_h(X)f^{(h)}(X) + P_{h-1}(X)f^{(h-1)}(X) + \cdots + P_0(X)f^{(0)}(X) = 0.$$

On désigne par $\mathcal{D}(K)$ l'ensemble de telles séries.

Travail à faire

L'objet de ce mémoire est de se familiariser avec les propriétés algébriques des ensembles $\mathcal{J}(K)$ et $\mathcal{D}(K)$ et de mettre en œuvre certains algorithmes les concernant. Après avoir fait le lien entre $\mathcal{J}(K)$ et $\mathcal{D}(K)$ ainsi que la relation de ces ensembles avec l'ensemble des séries algébriques, le travail consistera à traiter une bonne partie des points suivants :

— étudier la structure de $\mathcal{J}(K)$ (resp. $\mathcal{D}(K)$), muni de l'addition usuelle et du produit de Hadamard ou de Cauchy,

— calculer, dans le cas d'un corps fini, la période d'un élément unitaire de $\mathcal{J}(K)$ et de produire un programme permettant de calculer cette période sur machine.

Références

[1] A. BOSTAN, F. Chyzak, B. Salvy, *D-finitude : algorithmes et applications*, `algo.inria.fr/EJCIM07/EJCIM07-LN.pdf`

[2] A. NECER, *Séries formelles et produit de Hadamard*, Journal de Théorie des nombres de Bordeaux, tome 9, n°2 (1997) p. 319–335.

[3] R. P. STANLEY, *Finite Power series,* European Journal of Combinatorics, 1 (1980), p. 175–188.

Contact : anec@unilim.fr