# LE PROBLÈME DE KAKEYA À DEUX DIMENSIONS DANS LES CORPS FINIS

NICOLAS CHANSON, IDRISSE MOHAMED

*Sous la direction du professeur S. Vinatier à l'occasion du Projet d'Initiation à la Recherche.*

Résumé. Le problème de Kakeya dans les corps finis vise à déterminer le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) contenant une droite dans chaque direction. Dans ce document, nous cherchons à établir des formules pour son cardinal et à le minorer. En annexe, sont proposés par Van Minh Nhon TRUONG des algorithmes pour étudier quelques conjectures.

## Table des matières



## 1. Introduction

Le problème de Kakeya a été originellement posé en 1917 par S. Kakeya [1], mathématicien japonais, dans le plan usuel $\mathbb{R}^2$ : quelle figure contient un même segment dans toutes les directions du plan, de sorte que l'aire soit minimale ? Représentant le segment par une aiguille, il est aussi surnommé *problème de l'aiguille de Kakeya*. On pense tout de suite au disque comme solution potentielle. Mais peut-on trouver une figure avec une aire inférieure, i.e. que l'on pourrait inclure dans ce disque en la découpant sans superposer les morceaux ? On peut penser au triangle équilatéral : en effet, au lieu de faire tourner une aiguille autour de son milieu, on peut la faire tourner autour d'une de ses exrémités trois fois, à raison d'un tiers de demi-cercle à chaque fois. On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'exécuter un cercle complet puisque deux aiguilles de sens opposés ont même direction. En regroupant les figures obtenues, on obtient ce triangle. Ainsi, quant au disque, l'aiguille correspond au diamètre, au triangle, elle correspond à la hauteur. Son aire est effectivement inférieure : en fixant la longueur de l'aiguille à 1, on trouve une aire de $1/\sqrt{3} \approx 0,577$ contre $\pi/4 \approx 0,785$ pour le disque. Cependant, rien n'indique qu'il s'agit de l'aire minimale. Alors existe-il un ensemble d'encore plus petite aire ? La réponse est oui et c'est d'ailleurs le problème. Loin d'être évidente, elle a nécessité du temps et a pu surprendre. En effet, elle s'est avérée d'aire... nulle.

Par la suite, cette question a été étendue aux espaces de n'importe quelle dimension sur n'importe quel corps. En ce qui concerne ce document, nous nous intéressons à son étude sur les corps finis et nous nous limitons à la dimension deux : nous nous plaçons donc dans des *plans finis*. Nous notons, en conservant les notations usuelles, $\mathbb{F}_q$ le corps finis à $q$ éléments et le plan associé, $\mathbb{F}_q^2$. La notion d'aire n'ayant plus beaucoup de sens car les ensembles sont finis, on cherchera à déterminer le cardinal d'un ensemble solution, i.e. le nombre de points minimal que doit contenir un ensemble permettant, à un même « segment », que l'on appelera *droite* dans ce cas, de se « retourner » dans toutes les directions sans en sortir. Ce cas a d'abord été formulé par T. Wolff [2], mathématicien américain.

## 2. Définitions

Avant de commencer, il convient de donner les différentes définitions nécessaires à l'étude du problème dans le cadre des corps finis. Elles se rapprochent aux définitions usuelles connues dans le cas du plan réel.

Commençons par une notion que nous avons déjà citée mais pour laquelle nous avons donné aucune définition : qu'est-ce une droite dans $\mathbb{F}_q^2$ ?

**Définition 1.** Une *droite* dans $\mathbb{F}_q^2$ est l'ensemble des couples-solutions $(x, y)$ d'une équation $ax + by = c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Comme nous pouvons le remarquer, cette définition est la même que dans le plan $\mathbb{R}^2$, à ceci près que les coefficients sont à prendre dans $\mathbb{F}_q$. Cela a une conséquence importante : prenons q premier, le corps $\mathbb{F}_q$ étant fini, à ces droites on peut faire correspondre des segments dans $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons le voir facilement si, à $\mathbb{F}_q^2$, nous associons le quadrillage du plan $\mathbb{R}^2$, i.e. à $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{F}_q^2$, on fait correspondre le point de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ où $x$ et $y$ sont respectivement les représentants compris entre 0 et $q - 1$ de $\overline{x}$ et $\overline{y}$, une fois ces points reliés.

*Remarque* 1. $\mathbb{F}_q$ étant un corps, on peut munir $\mathbb{F}_q^2$ d'une structure d'espace vectoriel. Par suite, une droite est un espace affine de dimension 1. On peut donc se ramener à la définition usuelle de sa direction. Ainsi, nous pouvons aussi écrire une droite sous la forme $a + b\,\mathbb{F}_q$ avec $(a, b) \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

*Notation* 2. Nous noterons dans la suite $l(m,b) = \{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2, y = mx+b\}$ et $l(\infty,a) = \{(x,y) \in \mathbb{F}_q^2, x = a\} = \{(a,y), y \in \mathbb{F}_q\}$.

**Définition 2.** Un *ensemble de Besicovitch* dans $\mathbb{F}_q^2$ est un ensemble de points $B \subset \mathbb{F}_q^2$ tel que, $\forall i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}, \exists b_i \in \mathbb{F}_q, l(i,b_i) \subset B$.

Un ensemble de Besicovitch est donc un ensemble contenant une droite dans chaque direction. En effet, $i$ est la direction de $l(i,b_i)$. Ces ensembles existent par construction.

**Définition 3.** Un *ensemble de Besicovitch minimal* dans $\mathbb{F}_q^2$ est un ensemble de points $B \subset \mathbb{F}_q^2$ tel que :

$$\forall i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\},\ \exists b_i \in \mathbb{F}_q, \quad B = \bigcup_{i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}} l(i,b_i).$$

**Définition 4.** Soit $B(\mathbb{F}_q^2)$ l'ensemble de tous les ensembles de Besicovitch de $\mathbb{F}_q^2$.

Un *ensemble de Kakeya* K est un élément de $B(\mathbb{F}_q^2)$ de plus petit cardinal, i.e.

$$K \in \{B \in \mathbb{F}_q^2, \#B = \min_{C \in B(\mathbb{F}_q^2)} \#C\}.$$

Un tel ensemble existe : le nombre d'ensembles ainsi que leur cardinal sont finis car $\mathbb{F}_q$ l'est. Ces ensembles de Kakeya sont les solutions au problème, rapidement énoncé dans l'introduction, que l'on se propose d'étudier, c'est-à-dire une version analogue au plan réel : quel sous-ensemble de $\mathbb{F}_q^2$ contient une droite dans chaque direction, de sorte que son cardinal soit minimal ?

## 3. Etude du problème de Kakeya

Nous considérons uniquement les ensembles de Besicovitch minimaux car cela est suffisant pour étudier le problème de Kakeya : il est inutile de disposer de deux droites dans une même direction pour explorer ce problème. Remarquons qu'un tel ensemble est minimal.

Nous commençons par donner une formule pour le cardinal d'un ensemble de Besicovitch minimal :

**Théorème 5** (Formule d'incidence)**.** *Soit $B$ un ensemble de Besicovitch minimal dans $\mathbb{F}_q^2$ avec $B = \bigcup_{i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}} l(i,b_i)$. Pour $P \in \mathbb{F}_q^2$, notons $m_P$ le nombre de droites passant par $P$. Alors :*

$$\#B = \frac{q(q+1)}{2} + \sum_{P \in B} \frac{(m_P - 1)(m_P - 2)}{2}.$$

*En particulier, tout ensemble de Besicovitch possède au moins $\frac{q(q+1)}{2}$ points.*

Pour démontrer cette formule, nous procédons à l'étude des points d'intersections des différentes droites qui constituent un ensemble de Besicovitch minimal.

*Démonstration.* Soit $B$ un ensemble de Besicovitch minimal dans $\mathbb{F}_q^2$ défini comme dans l'énoncé. Notons $l_0, ..., l_q$ les droites $l(i, b_i)$ de l'énoncé, incluses dans $B$. Toutes ces droites ont des directions distinctes deux à deux. Définissons, pour $i \in [\![0, q]\!]$, la relation $\sim_i$ par :

$$\forall j, k < i, \quad l_j \sim_i l_k \Longleftrightarrow l_i \cap l_j = l_i \cap l_k.$$

C'est une relation d'équivalence.

Soit, pour $i \in [\![0, q]\!]$, $d_i = \#\{l_j, j < i\}/\!\sim_i$ et $C_{i,1}, ..., C_{i,d_i}$ les classes d'équivalence associées. Notons aussi, pour $P \in l_i$, $m_P(i) = \#\{j, j \leq i \text{ } et \text{ } P \in l_j\}$.

Fixons $i$ : soit $i_0 \in [\![0, q]\!]$. On a déjà par définition

$$\forall P \in l_{i_0}, m_P(i_0) \geq 2, \ \exists k \in [\![1, d_{i_0}]\!], \quad m_P(i_0) - 1 = \#C_{i_0,k}$$

car P appartient alors à au moins une intersection. En utilisant le fait que toutes les droites $l_j$, pour $j < i_0$, coupent $l_{i_0}$, on obtient :

$$\#\{P \in l_{i_0}, m_p(i_0) \geq 2\} = \#\{l_j, j < i_0\}/\!\sim_{i_0} = d_{i_0}.$$

Donc par somme, on trouve :

$$\sum_{P \in l_{i_0}} (m_P(i_0) - 1) = \sum_{\substack{P \in l_{i_0} \\ m_P(i_0) \geq 2}} (m_P(i_0) - 1) = \sum_{j=1}^{d_{i_0}} \#C_{i_0,j} = i_0.$$

D'autre part, on a aussi, avec les deux résultats précédents :

$$\#\{P \in l_{i_0}, m_p(i_0) \geq 2\} = i_0 - \sum_{j=1}^{d_{i_0}} (\#C_{i_0,j} - 1) = i_0 - \sum_{\substack{P \in l_{i_0} \\ m_p(i_0) \geq 2}} (m_P(i_0) - 2).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\#\left(l_{i_0} \setminus \bigcup_{j=0}^{i_0-1} l_j\right) &= \#l_{i_0} - \#\{P \in l_{i_0}, \exists j < i_0, P \in l_j\} \\
&= \#l_{i_0} - \#\{P \in l_{i_0}, m_p(i_0) \geq 2\} \\
&= q - i_0 + \sum_{\substack{P \in l_{i_0} \\ m_p(i_0) \geq 2}} (m_P(i_0) - 2)
\end{aligned}$$

En ajoutant les autres points (pour lesquels $m_P(i_0) = 1$), on a :

$$\#\left(l_{i_0} \setminus \bigcup_{j=0}^{i_0-1} l_j\right) = q - i_0 + \sum_{P \in l_{i_0}} \max(0, m_P(i_0) - 2).$$

En sommant sur tous les $i$, puisque $B = \bigsqcup_{i=0}^{q}(l_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} l_j)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\#P &= \sum_{i=0}^{q} \# \left( l_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} l_j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{q} (q-i) + \sum_{i=0}^{q} \sum_{P \in l_i} \max(0, m_P(i) - 2) \\ &= \sum_{i=0}^{q} i + \sum_{P \in B} \sum_{\substack{i=0 \\ P \in l_i}}^{q} \max(0, m_P(i) - 2)\end{aligned}$$

cette dernière ligne étant obtenue par un changement de variables dans le premier terme et une inversions des ordres de sommation dans le second. Or, par récurrence, pour tout $P \in B$,

$$\sum_{\substack{i=0 \\ P \in l_i}}^{q} \max(0, m_P(i) - 2) = \max\Big(0, 1 + 2 + ... + (m_P - 2)\Big)$$

où $m_P = \#\{i, P \in l_i\}$. En effet, en suivant l'ordre de notation des droites, on trouve d'abord que P appartient à une droite, puis à une seconde le cas échéant et dans ce dernier cas, par définition de $m_P(.)$, sa valeur est incrémentée de 1... jusqu'à atteindre $m_P$ droites passant par $P$. Il reste bien sûr le cas où $m_P = 1$, ce qui oblige à conserver le max. Donc,

$$\#B = \frac{q(q+1)}{2} + \sum_{P \in B} \max\Big(0, 1 + 2 + ... + (m_P - 2)\Big).$$

Finalement, nous obtenons :

$$\#B = \frac{q(q+1)}{2} + \sum_{P \in B} \frac{(m_P - 1)(m_P - 2)}{2}$$

(on peut se passer du max car $m_P \geq 1$). □

Comme nous pouvons le voir, la formule du théorème ci-dessus fait apparaître une somme. Essayons donc de la simplifier encore. La tâche s'averant difficile, nous nous contenterons d'étudier un exemple.

**Exemple 6.** On se place ici dans $\mathbb{F}_q^2$. Soit

$$B_0 = \Big( \bigcup_{i \in \mathbb{F}_q} l(i, -i^2) \Big) \cup l(\infty, 0)$$

(pour rappel, $l(i, -i^2)$ correspond à la droite $y = ix - i^2$ et $l(\infty, 0)$ à la droite $x = 0$) et soient $i$ et $j$ deux éléments distincts de $\mathbb{F}_q$. On remarque que

$$l(i, -i^2) \cap l(j, -j^2) = \{i + j, ij\}.$$

En effet :

$$(x,y) \in l(i,-i^2) \cap l(j,-j^2) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = ix - i^2 \\ y = jx - j^2 \end{cases}$$

$$(x,y) \in l(i,-i^2) \cap l(j,-j^2) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = ix - i^2 \\ 0 = x(j-i) - j^2 + i^2 \end{cases}$$

$$(x,y) \in l(i,-i^2) \cap l(j,-j^2) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = ij \\ x = i + j \end{cases}$$

Les droites $l(i,-i^2)$, $l(j,-j^2)$ et $l(k,-k^2)$ n'ont donc pas de point en commun si $i \neq j \neq k \neq \infty$, car

$$l(i,-i^2) \cap l(j,-j^2) = \{i+j, ij\}$$

et

$$l(i,-i^2) \cap l(k,-k^2) = \{i+k, ik\}.$$

Comme $j \neq k$, $i+j \neq i+k$, l'intersection $l(i,-i^2) \cap l(j,-j^2) \cap l(k,-k^2)$ est donc vide.

Or, si $P$ est un point du plan, $m_P$ est le nombre de droites différentes passant par P. On déduit de la remarque précédente que $m_P \leq 3$. On peut aussi en déduire que les seuls points $P$ tels que $m_P = 3$ sont des points appartenant à la droite verticale $x = 0$ ($l(i,-i^2) \cap l(\infty, 0) = \{(0,-i^2)\}$). En effet, si $m_P = 3$, nous avons vu précédemment que trois droites non verticales ne peuvent pas se croiser en un même point. Si on regarde maintenant la droite $x = 0$, qui correspond à la droite $l(\infty, 0)$, il suffit de prendre deux droites $l(i, i^2)$ et $l(j,-j^2)$ telles que $i + j = 0$ et $i, j \neq 0$. Les trois droites se coupent alors en un point $P = (0, ij)$.

Maintenant, prenons $i \neq 0$ et $q$ un entier impair. Alors seules deux droites non verticales passent par le point $(0,-i^2)$ : ce sont $l(i,-i^2)$ et $l(-i, -i^2)$. Ces deux droites se coupent bien au point (0, -$i^2$) et ont une pente non nulle. Comme il y a $\frac{q-1}{2}$ carrés différents de 0 dans $\mathbb{F}_q$, on a bien :

$$\sum_{P \in B_0} \frac{(m_P - 1)(m_P - 2)}{2} = \frac{q-1}{2}.$$

En effet, $m_P \in \{1, 2, 3\}$. Si $m_P \neq 3$, le terme $\frac{(m_P-1)(m_P-2)}{2}$ est nul, et si $m_P = 3$, ce qui est le cas pour tous les carrés non nuls de $\mathbb{F}_q$, alors ce terme vaut 1. On a donc dans la somme autant de 1 que de carrés non nuls dans $\mathbb{F}_q$, ce qui fait bien $\frac{q-1}{2}$.

Si $q$ est pair, alors on remarque qu'il n'y a pas de point $P$ tel que $m_P = 3$. En effet, pour $q$ pair, $i = -i$, ce qui implique que $l(i,-i^2) = l(-i,-i^2)$, donc :

$$\sum_{P \in B_0} \frac{(m_P - 1)(m_P - 2)}{2} = 0.$$

Afin de prolonger l'étude et essayer de trouver d'autres résultats, notamment minorer la formule obtenue avec le théorème 5, des algorithmes sont proposés en annexe.

## 4. CONCLUSION

Il est difficile d'imaginer à quoi ressemble un ensemble de Kakeya sur un corps finis, ne serait-ce que dans un plan fini, i.e. un espace de dimension 2 sur ce corps, le domaine de notre étude. C'est pourquoi nous avons plutôt chercher à minorer son cardinal, afin d'avoir une borne inférieure et par là, nous espérons en apprendre plus. Nous avons obtenu ainsi la formule du théorème 5. Comme on peut le voir, cette formule a fait appraître une somme, dépendant de la multiplicité des points quant aux intersection auxquels ils participent. Nous avons donc chercher à simplifier ladite somme : un exemple est donné dans un cas particulier.

Il existe d'autres résultats, notamment dans le cas où $q$ est impair, éliminant seulement celui des puissances de 2. Un résultat général a même été prouvé : cette fameuse somme est en fait minorée par $\frac{q-1}{2}$ [3]. Nous avons donc, en reprenant les notations du théorème 5 :

$$\#B \geq \frac{q(q+1)}{2} + \frac{q-1}{2}$$

Le cas d'égalité a aussi été explicité dans [3].

## Références


[1] V. Borrelli, J.-L. Rullière, *En cheminant avec Kakeya : voyage au coeur des mathématiques*, Lyon : ENS editions, 2014, 160p.

[2] X. W. C. Faber, *On the finite field Kakeya problem in two dimensions*, Journal of Number Theory 124 (2007), 248–257

[3] A. Blokhuis and F. Mazzocca, *The Finite Field Kakeya Problem*, Bolyai Mathematical Studies 19, 205–218

Annexe A. Algorithme

# Algorithme

Van Minh Nhon TRUONG

12 mai 2017

## 1 Introduction

Dans ma partie, je donnerai des algorithmes raisonnables pour tester les 2 Conjectures qui sont mentionnées dans l'article. On va tester ces 2 Conjectures en vérifiant tous les ensembles de Besicovitch, un par un, qui sont l'union de $q+1$ droites de pentes distinctes avec $q$ assez petit.

## 2 Conjectures

### 2.1 Conjecture 1

Soit $B \subset \mathbb{F}_q^2$ un ensemble de Besicovitch avec q impair. Alors, on a l'inégalité :

$$\sum_{P \in B} \frac{(m_P - 1)(m_P - 2)}{2} \geqslant \frac{q-1}{2}.$$

C'est-à-dire que :

$$\#B \geqslant \frac{q(q+1)}{2} + \frac{q-1}{2}.$$

**Définition 1.** Soit $b$ impair. Un ensemble de Besicovitch $B \subset \mathbb{F}_q$ est appelé *petit* si $\#B$ ne dépasse pas la borne inférieure dans la *Conjecture 1.*

### 2.2 Conjecture 2

Si $q$ impair et $B = \bigcup_{i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}}$ est un ensemble de Besicovitch *petit*. Alors, il existe un $j \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ tel que tout point $P \in B$ avec $m_P \geqslant 3$ se trouve sur la droite $l(j, bj)$.

# 3 Algorithmes

Les algorithmes qui suivent sont, malheureusement, de coût pas moins de $O(q^q)$. Le principe est de vérifier tous les ensembles de Besicovitch possibles qui sont union des $q+1$ droites de pentes différentes : $l_0 \cup l_1 \cup ... \cup l_{q-1} \cup l_\infty$. Pour chaque $l_i$ avec $i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ on a $q$ possibilités pour choisir qui sont des $l(i,0), l(i,1), ..., l(i,q-1)$.

## 3.1 Algorithme 1

Entrée : $q$ premier impair

Sortie : Conclure si $\#B \geqslant \frac{q(q+1)}{2} + \frac{q-1}{2}$ pour tout ensemble de Besicovitch $B \subset \mathbb{F}_q$.

1. $S \leftarrow \{B : B = \bigcup_{i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}} l(i, b_i), b_i \in \mathbb{F}_q\}$
2. $H \leftarrow \frac{q(q+1)}{2} + \frac{q-1}{2}$
3. Pour chaque B dans S Faire
4.     Calculer $\#B$
5.     Si $\#B - H < 0$ Alors
6.         Retourner “Faux”
7.     Fin Si
8. Fin Pour
9. Retourner “Vrai”

## 3.2 Algorithme 2

Entrée : $q$ premier impair

Sortie : Un $j \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ tel que tout point $P \in B$ avec $m_P \geqslant 3$ se trouve sur la droite $l(j, b_j)$.

On suppose que l'on aurait déjà un algorithme pour déterminer tous les points $P$ dans un ensemble de Besicovitch $B$ quelconque tels que $m_P \geqslant 3$

1. $S \leftarrow \{B : B = \bigcup_{i \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}} l(i, b_i), b_i \in \mathbb{F}_q\}$
2. Pour chaque B dans S Faire
3.     $V \leftarrow \{P \in B : m_P \geqslant 3\}$
4.     Si $\#V < 3$ Alors
5.         Retourner “Vrai”

6. Fin Si
7. Choisir 2 points M et N distincts dans V et écrire la fonction de la droite d=(MN)
8. Pour chaque point P dans V ($P \neq Met P \neq N$) Faire
9. Si $P \notin d$ Alors
10. Retourner “Faux”
11. Fin Si
12. Fin Pour
13. Fin Pour
14. Retourner “Vrai”