

Simone Naldi et Vincent Neiger

★ **Homotopie pour la résolution de systèmes polynomiaux**

Résumé : résoudre des systèmes polynomiaux, c'est-à-dire trouver les racines communes de plusieurs polynômes multivariés, est une question centrale d'algèbre commutative et de calcul formel. Elle apparaît dans beaucoup de domaines appliqués (biologie, chimie, génie mécanique, ...), où de nombreux problèmes se ramènent à calculer un ensemble témoin de solutions réelles ou bien de calculer toutes les solutions complexes si elles sont en nombre fini. Concevoir des algorithmes efficaces pour ces tâches reste en général un défi. Dans beaucoup de situations, la stratégie actuellement la meilleure consiste à exploiter la structure des polynômes qui définissent le système (par exemple leur aspect creux ou certaines symétries...). Une famille de méthodes efficace est celle des techniques de déformation telles que l'homotopie.

Le premier objectif est de se familiariser avec les systèmes polynomiaux : avec le cadre algébrique qui les définit et avec les techniques de déformation pour les résoudre. Plus précisément, l'étudiant travaillera à utiliser l'homotopie en particulier pour exploiter la structure spécifique des polynômes afin de construire le « système auxiliaire », et il utilisera des exemples pratiques qui proviennent des applications. Un des défis actuels concernant les techniques de déformation est de réaliser des implantations efficaces des meilleurs algorithmes symboliques connus (cf. bibliographie). En effet, alors que dans un cadre numérique l'homotopie est déjà implantée dans plusieurs logiciels et est efficace en pratique, dans le contexte symbolique il y a actuellement un grand écart entre la complexité théorique et l'efficacité pratique. Une partie du stage pourrait être dédiée à la réalisation d'implantations efficaces d'un ou plusieurs des meilleurs algorithmes connus pour résoudre les systèmes polynomiaux zéro-dimensionnels (c'est-à-dire avec un nombre fini de solutions). En particulier, l'étudiant se concentrera sur l'algorithme de résolution géométrique [1] et/ou sur l'algorithme d'homotopie polyédrale développé dans [2].

Prérequis : intérêt pour approcher des questions mathématiques du point de vue du calcul algorithmique. Le stage pourra être orienté plus particulièrement vers l'implantation, pour les étudiants que ça intéresse.

Références :

[1] M. Giusti, G. Lecerf and B. Salvy. *A Gröbner free alternative for polynomial system solving*. J. Complexity (2001), Vol. 19, No. 1, pp. 154–211.

[2] G. Jeronimo, G. Matera, P. Solernó and A. Weissbein. *Deformation techniques for sparse systems*. Foundations of Computational Mathematics (2009), Vol. 9, No. 1, pp. 1-50.