TÌM CỰC TRỊ RỜI RẠC - abcd

Sư phạm Toán (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2)

2) TÌM CỰC TRỊ RỜI RẠC

2.1) Định hướng chung:

Bước 1: Dựa vào nguyên lí cực trị rời rạc, ta chỉ ra tồn tại giá trị cực trị.

Bước 2: Xây dựng một cấu hình thích hợp để đạt giá trị cực trị.

2.2) Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: *Cho m và d là các số nguyên tố với . Giả sử là các biến nguyên dương sao cho . Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của .*

Lời giải:

(Trước khi tìm GTNN, GTLN chúng ta sẽ cho 1 số ví dụ cụ thể để tìm ra quy luật cách tìm min, max)

Tìm một số bộ thỏa mãn yêu cầu đề bài

Ví dụ lấy		S
Lấy		S S S
Lấy		S S S

- ⇨ Nhận xét khoảng cách giữa các số x_i: Ở tổng khoảng cách chỉ hơn kém nhau tối đa là 1

Giải:

Gọi là tập tất cả các giá trị của . Ta thấy ngay và hữu hạn

Áp dụng nguyên lí cực trị rời rạc, luôn tồn tại số nhỏ nhất và số lớn nhất của là và

♦ Tìm

Giả sử bộ số làm cho

Ta sẽ chứng minh các số chỉ hơn kém nhau tối đa là 1

Giả sử phản chứng, có sao cho

Đặt

Và

Vì ⇒

Thay và lần lượt bằng và
ta tìm được bộ số nguyên dương cho (mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của)

Vậy các số chỉ hơn kém nhau tối đa là 1

Không làm mất tính tổng quát ta giả sử

Vì chỉ hơn kém nhau tối đa là 1

⇨ (là số nguyên dương bất kì và)

Giả sử: (*n* là số nguyên dương)

⇨

Đặt với *k* là số nguyên dương

⇨ là các số nguyên dương,)

Vì

⇨ và

⇨

♦ Tìm

Giả sử bộ làm cho

Không làm mất tính tổng quát ta giả sử

Ta phải chứng minh và

Giả sử

Đặt c và e (c là các số nguyên dương)

⇨

Và =

Vì ⇒

⇨

⇨

⇨ Bộ số nguyên dương làm cho (mâu thuẫn)

⇨

⇨

⇨

⇨

Dạng tổng quát

Cho và là các số nguyên với . Giả sử là các biến nguyên dương sao cho . Tìm GTNN và GTLN của .

- ***GTNN:*** ;

  trong đó

- ***GTLN:***

Ví dụ 2: *Cho là một số nguyên dương. Giả sử là các biến nguyên dương sao cho . Tìm GTLN của .*

Lời giải

Tìm một số bộ thỏa mãn yêu cầu đề bài

Ví dụ lấy		S S
Lấy		S S
Lấy		S S
Lấy		S S

⇨ Từ tổng S có giá trị lớn nhất ta thấy chỉ có 1 phần tử là *m*, còn lại các số khác là 1.

<u>Giải:</u>

Gọi là tập tất cả các giá trị của . Ta thấy ngay và hữu hạn

Áp dụng nguyên lí cực trị rời rạc, luôn tồn tại số lớn nhất của là

Giả sử bộ số làm cho

Không làm mất tính tổng quát, giả sử

Ta cần chứng minh

Giả sử khi đó

Đặt và

⇨

Khi đó

⇨
⇨ Bộ số nguyên dương làm cho (mâu thuẫn)
⇨
⇨
⇨ .

Dạng tổng quát

Cho là một số nguyên dương. Giả sử là các biến nguyên dương sao cho . Tìm GTLN của

2.3) Bài tập giáo trình

Bài 1: *Cho m và d là các số nguyên với .Giả sử là các biến nguyên dương sao cho . Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của*

Lời giải

Gọi là tập tất cả các giá trị của . Ta thấy ngay và hữu hạn
Áp dụng nguyên lí cực trị rời rạc, luôn tồn tại số nhỏ nhất và số lớn nhất của là và
♦ Tìm
Giả sử làm cho
Ta sẽ chứng minh và
Giả sử , khi đó phải tồn tại
Đặt thì
Và (vì)
⇨
⇨ Bộ số nguyên dương cho (mâu thuẫn)
⇨
⇨
⇨

♦ Tìm

Giả sử làm cho
Ta sẽ chứng minh

Giả sử , khi đó tồn tại

Đặt thì

Và

⇨ tìm được bộ số nguyên dương cho (mâu thuẫn)
⇨ và
⇨

Bài 2: *Cho là các hằng số thực dương,còn là các biến không âm sao cho . Hãy tìm GTNN và GTLN của biểu thức .*

Lời giải

Ta có ⇒

Gọi là tập tất cả các giá trị của . Ta thấy ngay và hữu hạn
Áp dụng nguyên lí cực trị rời rạc, luôn tồn tại số nhỏ nhất và số lớn nhất của là và

Không làm mất tính tổng quát giả sử .

Theo giả thiết ta có . Do đó:

⇨

Vậy khi .

khi ; .

Bài 3: *Giả sử là các biến nguyên dương có tích là . Tìm GTLN của .*

Lời giải

Gọi là tập tất cả các giá trị của . Ta thấy ngay và hữu hạn
Áp dụng nguyên lí cực trị rời rạc, luôn tồn tại số lớn nhất của là
Giả sử bộ số làm cho
Không mất tính tổng quát giả sử .
Ta cần chứng minh với .
Thật vậy, giả sử thì .
Đặt
Ta có
Hơn nữa
Vì

⇨ Bộ số cho (mâu thuẫn)

⇨

⇨ **.**

2.4) Bài tập sưu tầm

Bài 1 : *Cho là 3 số nguyên dương thỏa mãn . Tìm GTNN của*

Lời giải:

Gọi là tập tất cả các giá trị của . Ta thấy ngay và hữu hạn
Áp dụng nguyên lí cực trị rời rạc, luôn tồn tại số nhỏ nhất của là .
Gọi bộ để
Để không làm mất tính tổng quát giả sử . Ta cần chứng minh

Giả sử .
Xét bộ và .
Xét hiệu

Vì nên

⇨ (mâu thuẫn với tính cực tiểu của)

Vậy

Ta dễ dàng chỉ ra bộ số

⇨

Bài 2: *Phân tích số 2005 thành tổng các số nguyên dương sao cho tích của chúng là lớn nhất*

Lời giải

Giả sử với là các số nguyên dương.

Ta cần tìm GTLN của

Gọi là tập tất cả các giá trị của . Ta thấy ngay hữu hạn
Áp dụng nguyên lí cực trị rời rạc, luôn tồn tại số lớn nhất của là
Giả sử bộ số làm cho
Ta chứng minh trong cách phân tích đã chọn như trên thì *M* chỉ gồm những thừa số nguyên tố 2 và 3 và không có quá 2 thừa số nguyên tố 2
Không làm mất tính tổng quát giả sử

- Nếu trong các số đã cho có một số là 1. Chẳng hạn , khi đó bỏ đi và thay bởi tình tổng vẫn không đổi trong khi tích lớn hơn.
- Nếu có một số, chẳng hạn thì ta thay bởi 2 số . Khi đó tổng cũng vẫn không đổi trong khi tích lớn hơn, vì với thì .
- Nếu có một số trong các số bằng 4 thì thay nó bởi hai số hạng, mỗi số là 2. Lúc đó tổng và tích đều không đổi.

Vậy khi P đạt GTLN thì hoặc với mọi

Mặt khác, do và nên trong *M* có không quá 2 thừa số bằng 2.

⇨

⇨

Bài 3 (Moscow MO 1984): *Trên vòng tròn người ta xếp ít nhất 4 số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng tổng tất cả các tích các cặp số kề nhau không lớn hơn* $\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta cần chứng minh rằng ∀ số thực không âm có tổng bằng 1, ta có bất đẳng thức:

Với *n* chẵn điều này có thể chứng minh dễ dàng.

Đặt ; khi đó

Giả sử *n* lẻ và là số nhỏ nhất trong các số đã cho. Để thuận tiện, ta giả sử , điều này không làm mất tính tổng quát khi .

Đặt

Áp dụng bất đẳng thức trên cho các số ta được:

Cuối cùng ta sử dụng bất đẳng thức:

⇨ Đpcm

Dấu bằng xảy ra khi 2 trong số *n* số bằng 1/2 , còn các số còn lại bằng 0.

Bài 4: *Cho 999 điểm khác nhau trên mặt phẳng. Chứng minh tồn tại ít nhất 1995 trung điểm của các cặp điểm trong 999 điểm đó*

Lời giải

Xét tập hợp tất cả các khoảng cách giữa 2 điểm trong số 999 điểm

Theo nguyên lý cực trị, tồn tại 2 điểm *A,B* mà khoảng cách giữa chúng là lớn nhất

Gọi *M* là trung điểm của *AB* và *X,Y* là 2 điểm bất kì trong 997 điểm còn lại

Khi đó ta cần chứng minh tất cả các trung điểm của *AB,AX,AY,BX,BY* là khác nhau.

- Rõ ràng, các trung điểm của 3 đoạn *AX,AY,AB* là khác nhau và tương tự trung điểm của *BX,BY,AB* là khác nhau
- Ta chứng minh tiếp các trung điểm của *AX,BY* là khác nhau

  Thật vậy, nếu chúng trùng nhau thì *ABXY* hình bình hành

  (mâu thuẫn với tính cực đại của AB)
- Tương tự, trung điểm của *AY,BX* cũng không trùng nhau
- Xét tổng quát hơn

Trong 999 điểm gồm và ta xét trung điểm *M* của *AB* và các trung điểm của

Theo chứng minh trên thì tất cả các trung điểm này là khác nhau và số trung điểm đó là 2.997+1=1995

Bài 5: *Gọi là tập tất cả các số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 và nhỏ hơn 30. Tìm số nhỏ nhất sao cho mỗi tập con của gồm phần tử đều tồn tại hai số chia hết cho nhau.*

Lời giải

Ta có và

Xét tập

Dễ thấy hai phần tử bất kì thuộc thì không chia hết cho nhau.

Từ đó suy ra

Ta chứng minh thỏa mãn đề bài

Xét tập S là một tập con bất kì của A và |S|=9

Xét 3 cặp {21;7},{27;9},{1;11}, ta thấy mỗi cặp là bội của nhau.

Nếu trong 3 cặp trên có ít nhất 1 cặp thuộc S thì bài toán được giải quyết.

Giả sử trong 3 cặp trên không có cặp nào cùng thuộc S, do |S|=9 nên S phải chứa một số trong mỗi cặp và chứa 6 số còn lại.

Suy ra trong S phải có cặp {3;9} hoặc {3;27} và mỗi cặp này là bội của nhau.

Nói cách khác, trong S luôn tồn tại 2 số chia hết cho nhau. Vậy .