Lecture notes Topology

Sư phạm Toán học (Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh)

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM
KHOA TOÁN - TIN

BÀI GIẢNG TÔPÔ ĐẠI CƯƠNG

Nguyễn Thành Nhân

Tài liệu dành cho sinh viên Khoa Toán - Năm 2019

Bài Giảng Tôpô Đại Cương

Nguyễn Thành Nhân*

3rd September 2019

Contents

*Khoa Toán - Tin, Đại học Sư Phạm Tp. HCM; nhannt@hcmue.edu.vn

GIỚI THIỆU HỌC PHẦN

Học phần Tôpô đại cương dành cho các sinh viên khoa Toán, đã học xong năm nhất tại Trường Đại học Sư Phạm Tp.HCM. Đây là học phần bắt buộc trong hầu hết các chương trình đào tạo cử nhân Toán. Học phần này cung cấp kiến thức cơ bản về không gian tôpô và không gian metric, là nền tảng giúp sinh viên có thể hiểu tốt hơn các học phần Giải tích tiếp theo như Độ đo tích phân, Giải tích hàm, Giải tích hàm nâng cao.

Bài giảng này là tài liệu hỗ trợ học tập cho nội dung được hướng dẫn trên lớp. Bài giảng có thể download ở mục "Teaching/Topology" trên website:

https://sites.google.com/site/nguyenthnhan.

Bài giảng được viết dựa theo *Giáo trình Tôpô đại cương* của thầy Nguyễn An Sum [6] và một số tài liệu tham khảo khác. Nội dung bài giảng bao gồm ba chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức đã học về tập hợp và ánh xạ cần thiết cho học phần này. Chương 2 giới thiệu về không gian tôpô và các khái niệm tôpô. Đây là nội dung chính của học phần này, bao gồm các khái niệm tôpô quan trọng và ánh xạ liên tục trong không gian tôpô. Chương 3 giới thiệu về không gian metric và không gian metric đầy đủ. Chương này cung cấp kiến thức quan trọng để sinh viên bắt đầu học học phần Giải tích hàm.

Bài giảng được viết dưới dạng liệt kê các định nghĩa, mệnh đề, định lý, hệ quả. Chứng minh cho các kết quả này sẽ được giảng viên trình bày chi tiết vào giờ lý thuyết trên lớp. Sinh viên phải tự giải các bài tập ở cuối mỗi chương. Một số bài tập tiêu biểu sẽ được giảng viên lựa chọn để sinh viên trình bày trong giờ bài tập.

Điểm đánh giá học phần bao gồm hai cột điểm, điểm giữa kỳ với trọng số 30% và điểm cuối kỳ với trọng số 70%. Điểm giữa kỳ được đánh giá trong suốt quá trình học, bao gồm điểm tích lũy và điểm một số bài kiểm tra ngắn trong mỗi buổi học trên lớp. Điểm cuối kỳ được đánh giá qua bài kiểm tra dài 90 phút.

Cách tính điểm giữa kỳ

- Trong giờ học lý thuyết, sinh viên **đặt câu hỏi** hoặc **trả lời câu hỏi** được đánh giá tốt sẽ được điểm cộng.
- Trong giờ bài tập, giảng viên sẽ chọn một số bài tập tiêu biểu trong tài liệu để sửa trên lớp.
- Một sinh viên sẽ **trình bày lời giải** bài tập này trước lớp với vai trò như một giáo viên, theo nghĩa hướng dẫn cho cả lớp giải, vừa giải thích vừa viết lời giải trên bảng.
- Sau khi bạn trình bày xong lời giải, giảng viên và các sinh viên khác sẽ **nhận xét lời giải** hoặc **đặt câu hỏi phản biện**.
- Giảng viên có thể loại bỏ các câu hỏi vô nghĩa hoặc câu hỏi khó, ngoài khả năng trả lời của sinh viên trình bày.
- Mỗi câu hỏi được đánh giá tốt, sinh viên đặt câu hỏi được điểm cộng.
- Sinh viên trình bày được giảng viên đánh giá theo các tiêu chí: lời giải chính xác, trình bày rõ ràng, thời gian hợp lý, trả lời tốt các câu hỏi.
- Mỗi lần trình bày, sinh viên sẽ được cộng x điểm, trong đó
  - $1 \le x \le 2$ điểm cho lần trình bày đầu tiên. Điểm này chỉ được tính đến tuần học thứ 6.
  - $0 \le x \le 1$ điểm cho lần trình bày thứ hai.
  - $0 \le x \le 0.5$ điểm cho lần trình bày thứ ba.
  - $0 \le x \le 0.25$ điểm cho những lần trình bày sau đó.
- Điểm tích lũy bao gồm tất cả các điểm cộng trong 8 tuần học.
- Sau mỗi buổi học, một nhóm ngẫu nhiên các sinh viên sẽ được chọn làm bài kiểm tra ngắn. Mỗi sinh viên có thể làm nhiều bài kiểm tra. Mỗi bài kiểm tra ngắn được chấm trên thang điểm 7. Điểm kiểm tra cuối cùng là điểm trung bình của các bài kiểm tra ngắn.

$$\boxed{\text{Điểm giữa kỳ} = \min\{10, \text{điểm tích lũy} + \text{điểm kiểm tra}\}.}$$

- Đặc biệt, các sinh viên được đánh giá xuất sắc có thể được nhận 10 điểm giữa kỳ mà không phải tính điểm kiểm tra và điểm tích lũy.

1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Tập hợp

Tập hợp là khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa. Có thể biểu diễn tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử, dùng giản đồ Venn hoặc nêu đặc trưng của các phần tử. Dưới đây, ta nhắc lại một số ký hiệu và khái niệm cơ bản.

- Nếu phần tử x thuộc tập A, ta viết $x \in A$.
- Nếu phần tử y không thuộc tập A, ta viết $y \notin A$.
- **Tập rỗng:** Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu là $\emptyset$.
- **Tập con:** Tập A gọi là tập con của B nếu mọi phần tử thuộc A đều thuộc B, ký hiệu là $A \subset B$. Nghĩa là

$$A \subset B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

  Hiển nhiên $\emptyset \subset A$ và $A \subset A$.

- **Hợp:** Hợp của hai tập A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B, ký hiệu là $A \cup B$. Nghĩa là

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ hoặc } x \in B.$$

- **Giao:** Giao của hai tập A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc A và thuộc B, ký hiệu là $A \cap B$. Nghĩa là

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ và } x \in B.$$

- **Hiệu:** Hiệu của A và B là một tập hợp chứa các phần tử thuộc A mà không thuộc B, ký hiệu là $A \setminus B$. Nghĩa là

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ và } x \notin B.$$

- **Luật De Morgan**: Cho các tập hợp X, A, B. Khi đó:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

- Cho $A, B \subset X$. Khi đó:

  a) $A \subset B \iff X \setminus B \subset X \setminus A$.

  b) $A \cap B = \emptyset \iff A \subset X \setminus B$.

1.2 Ánh xạ

Định nghĩa 1.1 (Ánh xạ)**.** *Cho hai tập hợp khác rỗng X và Y. Một phép tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với duy nhất một phần tử $y \in Y$ gọi là một ánh xạ từ X vào Y. Ta thường ký hiệu $f: \ X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto y = f(x)$.*

Đặc biệt, ánh xạ từ X vào X, biến x thành chính nó gọi là ánh xạ đồng nhất và ký hiệu là Id_X, nghĩa là $Id_X(x) = x, \ \forall x \in X$.

Định nghĩa 1.2 (Ánh xạ hợp)**.** *Cho hai ánh xạ $f: \ X \longrightarrow Y$ và $g: \ Y \longrightarrow Z$. Khi đó, ánh xạ $h: \ X \longrightarrow Z$ xác định bởi $h(x) = g(f(x))$ gọi là ánh xạ hợp của f và g, ký hiệu là $h = g \circ f$.*

Định nghĩa 1.3 (Ảnh và ảnh ngược)**.** *Cho $f: \ X \longrightarrow Y$ và $A \subset X$, $D \subset Y$. Ta định nghĩa:*

- *Ảnh của A qua f là tập $f(A) = \{f(x): \ x \in A\}$.*
- *Ảnh ngược của B qua f là tập $f^{-1}(D) = \{x \in X: \ f(x) \in D\}$.*

Mệnh đề 1.4. *Cho $f: \ X \longrightarrow Y$ và $A, B \subset X$. Khi đó*

i) Nếu $A \subset B$ thì $f(A) \subset f(B)$.

ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Mệnh đề 1.5. *Cho ánh xạ $f: X \to Y$ và $C, D \subset Y$. Khi đó:*

i) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

ii) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

iii) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Định nghĩa 1.6 (Đơn ánh, toàn ánh, song ánh)**.** *Ánh xạ $f: \ X \longrightarrow Y$ được gọi là*

- *đơn ánh nếu: $\forall x_1, x_2 \in X, \ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;*
- *toàn ánh nếu: $f(X) = Y$, nghĩa là $\forall y \in Y, \ \exists \ x \in X: \ y = f(x)$;*
- *song ánh nếu: f vừa đơn ánh vừa toàn ánh, nghĩa là*

$$\forall y \in Y, \ \exists! \ x \in X: \ y = f(x).$$

Mệnh đề 1.7. *Cho ánh xạ* $f : X \to Y$ *và* $A \subset X,\ B \subset Y$. *Khi đó:*

i) $f(A) \subset B \ \Leftrightarrow\ A \subset f^{-1}(B)$.

ii) $A \subset f^{-1}(f(A))$. *Nếu* f *là đơn ánh thì có chiều ngược lại.*

iii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$. *Nếu* f *là toàn ánh thì có chiều ngược lại.*

Định nghĩa 1.8 (Ánh xạ ngược). *Nếu ánh xạ* $f:\ X \longrightarrow Y$ *là song ánh thì tồn tại duy nhất ánh xạ* $g:\ Y \longrightarrow X$ *sao cho* $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. *Ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của* f *và ký hiệu là* $g = f^{-1}$.

Hiển nhiên ta có $f \circ f^{-1} = Id_Y$ và $f^{-1} \circ f = Id_X$.

1.3 Phép chiếu

Định nghĩa 1.9. *Cho hai tập hợp* X *và* Y *khác rỗng.*

- *Ánh xạ* $p_1:\ X \times Y \to X$ *xác định bởi*

$$p_1(x, y) = x, \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

  được gọi là phép chiếu từ $X \times Y$ *lên* X.

- *Ánh xạ* $p_2:\ X \times Y \to Y$ *xác định bởi*

$$p_2(x, y) = y, \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

  được gọi là phép chiếu từ $X \times Y$ *lên* Y.

Mệnh đề 1.10. *Giả sử* A, D *lần lượt là các tập con của* X *và* Y. *Ta có các mệnh đề sau.*

i) $p_1(A \times D) = A, \quad p_2(A \times D) = D$.

ii) $p_1^{-1}(A) = A \times Y, \quad p_2^{-1}(D) = X \times D$.

iii) Nếu $z \in X \times Y$ *thì* $z = (p_1(z), p_2(z))$.

iv) Giả sử $M \subset X \times Y$. *Khi đó*

$$x \in p_1(M) \ \Leftrightarrow\ \exists y \in Y:\ (x, y) \in M,$$

$$y \in p_2(M) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in X:\ (x, y) \in M.$$

1.4 Đánh số tập hợp

Cho tập X khác rỗng. Ánh xạ $x: \mathbb{N} \longrightarrow X,\ n \longmapsto x_n$ xác định một dãy trong X. Ta thường viết $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ hoặc đơn giản là $(x_n) \subset X$.

Xét một dãy tăng ngặt $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$. Khi đó, dãy $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gọi là dãy con của dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cho I là tập các chỉ số và ánh xạ $x: I \longrightarrow X, \quad \alpha \longmapsto x_\alpha = x(\alpha)$. Khi đó, tập hợp $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ là những phần tử được đánh số theo I.

Người ta có thể mở rộng việc đánh số các phần tử cho việc đánh số các tập hợp.

Mệnh đề 1.11 (Luật De Morgan)**.** *Cho $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là họ các tập con của X. Khi đó:*

i) $X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}(X \setminus A_\alpha)$.

ii) $X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(X \setminus A_\alpha)$.

Mệnh đề 1.12. *Cho $f: X \to Y$ và $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ là họ các tập con của X, $(D_\alpha)_{\alpha\in J}$ là họ các tập con của Y. Khi đó:*

i) $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

ii) $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

iii) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in J} D_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(D_\alpha)$.

iv) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in J} D_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in J} f^{-1}(D_\alpha)$.

1.5 Lực lượng của tập hợp

Định nghĩa 1.13. *Cho hai tập hợp X và Y.*

- *Nếu có một đơn ánh đi từ X vào Y thì ta nói lực lượng của X nhỏ hơn lực lượng của Y, ký hiệu $|X| \leq |Y|$.*

- *Nếu có một song ánh đi từ X vào Y thì ta nói lực lượng của X bằng Y, ký hiệu $|X| = |Y|$.*

Định lý 1.14. *Nếu $|X| \leq |Y|$ và $|Y| \leq |X|$ thì $|X| = |Y|$.*

Định nghĩa 1.15.

- $|\emptyset| = 0$.
- *Nếu $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $|X| = |\{1, 2, ..., n\}|$ thì X hữu hạn và $|X| = n$.*
- *Tập X gọi là vô hạn nếu nó không hữu hạn.*
- *Nếu $|X| \leq |\mathbb{N}|$ thì X gọi là đếm được.*

Tính chất 1.16.

- *Hợp đếm được của các tập đếm được là một tập đếm được.*
- *Nếu A, B đếm được thì $A \times B$ đếm được.*
- *Nếu A đếm được và $|X| \leq |A|$ thì X đếm được.*

2 KHÔNG GIAN TÔPÔ

2.1 Định nghĩa và ví dụ

2.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Cho X là một tập hợp khác rỗng và $\mathcal{T}$ là họ các tập con của X. Họ $\mathcal{T}$ được gọi là một tôpô trên X nếu $\mathcal{T}$ chứa ít nhất 2 tập $\emptyset$ và X, đồng thời $\mathcal{T}$ thỏa tính chất kín với phép hợp bất kỳ và phép giao hữu hạn. Nghĩa là:*

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

ii) Nếu $V_\alpha \in \mathcal{T},\ \forall \alpha \in I$ *thì* $\bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{T}$.

iii) Nếu $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ *thì* $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$.

Khi đó $(X, \mathcal{T})$ *được gọi là một không gian tôpô.*

2.1.2 Một số ví dụ

a) Tôpô thô và tôpô rời rạc

Cho tập hợp X khác rỗng. Khi đó:

i) $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$ là một tôpô trên X và được gọi là tôpô thô.

ii) $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{P}(X)$ gồm tập tất cả các tập con của X, là một tôpô trên X và được gọi là tôpô rời rạc.

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra được $\mathcal{T}_0$ và $\mathcal{T}_\infty$ thỏa ba điều kiện trong định nghĩa tôpô. □

b) Tôpô bù hữu hạn

Cho X là một tập hợp vô hạn. Đặt

$$\mathcal{T}_n = \{V \subset X \mid\ V = \emptyset \text{ hoặc } X \setminus V \text{ hữu hạn}\}.$$

Khi đó, $\mathcal{T}_n$ là một tôpô trên X mà ta gọi là tôpô bù hữu hạn.

Chứng minh.

i) Hiển nhiên $\emptyset \in \mathcal{T}_n$. Do $X \setminus X = \emptyset$ hữu hạn nên $X \in \mathcal{T}_n$.

ii) Giả sử $(V_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}_n$. Ta chứng minh $V = \bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha \in \mathcal{T}_n$.

Thật vậy, nếu $V_\alpha = \emptyset$, $\forall \alpha \in I$ thì $V = \emptyset \in \mathcal{T}_n$. Ngược lại, nếu tồn tại $\alpha_0 \in I$ sao cho $V_{\alpha_0} \neq \emptyset$ thì $X \setminus V_{\alpha_0}$ hữu hạn. Khi đó, do $X \setminus V \subset X \setminus V_{\alpha_0}$ nên $X \setminus V$ hữu hạn, suy ra $V \in \mathcal{T}_n$.

iii) Giả sử $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_n$. Ta chứng minh $V = V_1 \cap V_2$.

Thật vậy, nếu $V_1 = \emptyset$ hoặc $V_2 = \emptyset$ thì $V = \emptyset \in \mathcal{T}_n$. Ngược lại, nếu $V_1 \neq \emptyset$ và $V_2 \neq \emptyset$ thì $X \setminus V_1$ và $X \setminus V_2$ hữu hạn. Khi đó, do

$$X \setminus V = (X \setminus V_1) \cup (X \setminus V_2),$$

nên $X \setminus V$ hữu hạn. Từ đó suy ra $V \in \mathcal{T}_n$.

Vậy $\mathcal{T}_n$ là một tôpô trên X. □

c) Tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$

Xét $\mathcal{T}$ là họ tất cả các tập con U của $\mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau:

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0 :\ (x - r, x + r) \subset U. \tag{2.1}$$

Khi đó, $\mathcal{T}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$ và được gọi là tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh.

i) Hiển nhiên hai tập $\emptyset$ và $\mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất (2.1).

ii) Giả sử $(V_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}_n$. Ta chứng minh $V = \bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha \in \mathcal{T}_n$.

Lấy $x \in V$ tùy ý, tồn tại $\alpha_0 \in I$ sao cho $x \in V_{\alpha_0}$. Do $V_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ nên tồn tại $r > 0$ sao cho $(x - r, x + r) \subset V_{\alpha_0}$. Mặt khác, $V_{\alpha_0} \subset V$ nên $(x - r, x + r) \subset V$. Vậy $V \in \mathcal{T}$.

iii) Giả sử $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_n$. Ta chứng minh $V = V_1 \cap V_2$.

Lấy $x \in V$ tùy ý, ta có $x \in V_1$ và $x \in V_2$. Do $V_1 \in \mathcal{T}$ nên tồn tại $r_1 > 0$ sao cho $(x - r_1, x + r_1) \subset V_1$. Do $V_2 \in \mathcal{T}$ nên tồn tại $r_2 > 0$ sao cho $(x - r_2, x + r_2) \subset V_2$. Đặt $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$, ta có

$$(x - r, x + r) \subset (x - r_1, x + r_1) \cap (x - r_2, x + r_2) \subset V_1 \cap V_2 = V.$$

Ta suy ra được $V \in \mathcal{T}$.

Từ đó ta có thể kết luận $\mathcal{T}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$. □

2.2 Các khái niệm tôpô cơ bản

Kể từ đây trong chương này, nếu không nói gì thêm, ta luôn ký hiệu $(X, \mathcal{T})$ là không gian tôpô và các tập hợp được xét đều là tập con của X.

2.2.1 Tập mở, tập đóng

Định nghĩa 2.2 (Tập mở)**.** *Mỗi phần tử của $\mathcal{T}$ là một tập mở trong X.*

Ví dụ 2.3. *Cho $\mathcal{T}$ là tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$. Cho $a < b$, chứng minh rằng khoảng (a, b) là tập mở trong $\mathbb{R}$.*

Mệnh đề 2.4. *V là tập mở khi và chỉ khi*

$$\forall x \in V,\ \exists U \in \mathcal{T}:\ x \in U \subset V. \tag{2.2}$$

Chứng minh. Giả sử V là tập mở, tức là $V \in \mathcal{T}$. Rõ ràng, mệnh đề sau đúng:

$$\forall x \in V,\ \exists U = V \in \mathcal{T}:\ x \in U \subset V.$$

Ngược lại, giả sử mệnh đề (2.2) đúng, tức là

$$\forall x \in V,\ \exists U_x \in \mathcal{T}:\ x \in U_x \subset V.$$

Dễ dàng kiểm tra được $V = \bigcup\limits_{x \in V} U_x$. Do $\mathcal{T}$ là tô pô nên suy ra $V \in \mathcal{T}$. Vậy V là tập mở. □

Định nghĩa 2.5 (Tập đóng)**.** *A được gọi là tập đóng nếu $X \setminus A$ là tập mở.*

Mệnh đề 2.6. *Họ các tập đóng của X thỏa mãn các tính chất:*

i) $\emptyset, X$ là hai tập đóng.

ii) Nếu A_1, A_2 đóng thì $A_1 \cup A_2$ đóng.

iii) Nếu A_α đóng $\forall \alpha \in I$ thì $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ đóng.

Chứng minh. Mệnh đề được suy ra trực tiếp từ định nghĩa tập mở và tập đóng, sử dụng luật De Morgan ở Chương 1. □

2.2.2 Điểm trong, phần trong

Định nghĩa 2.7.

- *Điểm x được gọi là điểm trong của A nếu tồn tại tập U mở chứa x nằm trọn trong A.*
- *Tập hợp tất cả các điểm trong của A gọi là phần trong của A, ký hiệu là $\overset{\circ}{A}$ hoặc* $\mathrm{int}(A)$.

Như vậy, $x \in \overset{\circ}{A} \;\Leftrightarrow\; \exists U \in \mathcal{T}:\; x \in U \subset A$.

Chú ý 2.8. *Từ định nghĩa, ta thấy $\overset{\circ}{A} \subset A$.*

Ví dụ 2.9. *Giả sử $\mathcal{T}$ là tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$ và $A = [0, 1)$. Chỉ rõ số thực $x \in \mathbb{R}$ có phải là điểm trong của A hay không, trong các trường hợp sau?*

a) $x \in (0, 1)$.

b) $x \leq 0$ *hoặc* $x \geq 1$.

Chứng minh.

a) Giả sử $x \in (0, 1)$. Đặt $r = \min\{x, 1 - x\}$, ta có $r > 0$ và

$$x \in U = (x - r, x + r) \subset (0, 1) = A.$$

Vậy x là điểm trong của A.

b) Giả sử $x \leq 0$. Lấy V mở tùy ý chứa x, tồn tại $r > 0$ sao cho $(x-r, x+r) \subset V$. Do $x - r < 0$ nên $(x - r, x + r) \not\subset A$. Vậy mọi tập V mở chứa x thì $V \not\subset A$ nên x không phải là điểm trong của A. Chứng minh tương tự cho trường hợp $x \geq 1$.

□

Mệnh đề 2.10. *A mở khi và chỉ khi $A = \overset{\circ}{A}$.*

Chứng minh. Giả sử A mở, do Chú ý 2.8 nên ta chỉ cần chứng minh $A \subset \overset{\circ}{A}$. Thật vậy, lấy $x \in A$ tùy ý, do A mở nên tồn tại U sao cho $x \in U \subset A$. Từ đây suy ra $x \in \overset{\circ}{A}$.

Ngược lại, giả sử $A = \overset{\circ}{A}$, ta chứng minh $\overset{\circ}{A}$ là tập mở. Thậy vậy, lấy $x \in \overset{\circ}{A}$ tùy ý, theo định nghĩa tồn tại U mở sao cho $x \in U \subset A$. Để ý thêm rằng U là tập mở nên mọi điểm trong U đều là điểm trong của A, tức là $U \subset \overset{\circ}{A}$. Vậy $\overset{\circ}{A}$ là tập mở. □

Hệ quả 2.11. *Cho $A, B \subset X$. Các mệnh đề sau đây đúng:*

i) Nếu $A \subset B$ thì $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

ii) $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

iii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$.

Chứng minh. i) Ta có $\overset{\circ}{A}$ là tập mở và $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B$ nên mọi điểm thuộc $\overset{\circ}{A}$ đều là điểm trong của B. Suy ra $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

ii) Áp dụng i), ta có $A \cap B \subset A$ nên $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A}$. Tương tự, $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{B}$. Mặt khác, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$ và $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ là tập mở nên mọi điểm thuộc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ đều là điểm trong của $A \cap B$. Suy ra ii) đúng.

iii) Áp dụng i), dễ dàng suy ra iii). □

Ví dụ 2.12. *Xét tôpô thông thường trong $\mathbb{R}$, ta có $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Với $A = [0, 1)$ thì $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$.*

Chứng minh. Dành cho sinh viên. □

2.2.3 Điểm dính, bao đóng

Định nghĩa 2.13.

- *Điểm $x \in X$ gọi là điểm dính của A nếu mọi tập mở chứa x đều giao A khác rỗng.*
- *Tập hợp tất cả các điểm dính của A gọi là bao đóng của A, ký hiệu $\overline{A}$.*

Như vậy, $x \in \overline{A} \Leftrightarrow V \cap A \neq \emptyset, \forall V$ mở chứa x.

Chú ý 2.14. *Từ định nghĩa bao đóng, ta có $A \subset \overline{A}$.*

Mệnh đề 2.15.

i) Nếu V mở rời với A thì V cũng rời với $\overline{A}$.

ii) $\overline{A}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A.

iii) A đóng $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

Chứng minh.

i) Giả sử V mở và $V \cap A = \emptyset$. Khi đó mọi điểm trong V đều không phải là điểm dính của A, vậy $V \cap \overline{A} = \emptyset$.

ii) Trước hết, ta chứng minh $\overline{A}$ đóng, tức là $X \setminus \overline{A}$ mở. Với mỗi $x \notin \overline{A}$, tồn tại V mở chứa x sao cho $V \cap A = \emptyset$. Theo i), $V \cap \overline{A} = \emptyset$, hay $V \subset X \setminus \overline{A}$. Do đó $X \setminus \overline{A}$ mở.

Giả sử B đóng chứa A, ta chứng minh $\overline{A} \subset B$. Thật vậy, do $X \setminus B$ mở và $(X \setminus B) \cap A = \emptyset$ nên theo ii), $(X \setminus B) \cap \overline{A} = \emptyset$. Điều này dẫn đến $\overline{A} \subset B$. Vậy $\overline{A}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A.

iii) Giả sử A đóng, do $\overline{A}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A nên $\overline{A} \subset A$. Kết hợp Chú ý 2.14, suy ra $A = \overline{A}$. Ngược lại, nếu $A = \overline{A}$ thì theo ii) ta có A đóng.

□

Ví dụ 2.16. *Xét tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$, ta có $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ và $\overline{[0,1)} = [0,1]$.*

Mệnh đề 2.17. *Cho $A, B \subset X$. Các mệnh đề sau đây đúng:*

i) Nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$.

ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Chứng minh. Sinh viên chứng minh như bài tập. □

2.2.4 Điểm biên, tập biên

Định nghĩa 2.18.

- *Nếu x là điểm dính của cả A và $X \setminus A$ thì x gọi là điểm biên của A.*
- *Tập hợp tất cả điểm biên của A gọi là biên của A và ký hiệu là ∂A.*

Rõ ràng, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Mệnh đề 2.19. *Các mệnh đề sau đây đúng:*

i) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$.

ii) $\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} = X \setminus \overline{A}$.

iii) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Chứng minh. Sinh viên chứng minh như bài tập. □

2.2.5 Điểm tụ, điểm cô lập

Định nghĩa 2.20.

- *Điểm $x \in A$ gọi là điểm cô lập của A nếu:*

$$\exists U \text{ mở}: \; U \cap A = \{x\}.$$

- *Điểm $x \in X$ gọi là điểm tụ của A nếu:*

$$\forall U \text{ mở chứa } x: \; U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Chú ý 2.21. *Nếu x là điểm dính của A và x không phải điểm cô lập thì x là điểm tụ của A.*

Ví dụ 2.22. *Xét tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$, cho $A = (0,1] \cup \{2\}$. Khi đó 2 là điểm cô lập của A.*

2.2.6 Tập trù mật, không gian T_2, không gian khả ly

Định nghĩa 2.23. *Tập A được gọi là trù mật trong X nếu $\overline{A} = X$.*

Mệnh đề 2.24. *Tập A trù mật trong X khi và chỉ khi*

$$\forall U \text{ mở khác } \emptyset \;\Rightarrow\; U \cap A \neq \emptyset.$$

Chứng minh. Chứng minh suy ra trực tiếp từ định định nghĩa tập trù mật và bao đóng. □

Ví dụ 2.25. *Tập $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{Q}^c$ trù mật trong $\mathbb{R}$.*

Định nghĩa 2.26. *Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian khả ly nếu trong X có một tập trù mật đếm được.*

Định nghĩa 2.27. *Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian Hausdorff (hay không gian T_2) nếu với hai điểm khác nhau của X đều được chứa trong hai tập mở rời nhau. Nghĩa là*

$$X \text{ là } T_2 \iff \forall x, y \in X, \; x \neq y \;\Rightarrow\; \exists U_x, V_y \text{ mở}: \; U_x \cap V_y = \emptyset,$$

trong đó ký hiệu U_x là tập mở chứa x.

Ví dụ 2.28. *Không gian $\mathbb{R}$ là không gian T_2 và khả ly.*

2.2.7 Sự hội tụ trong không gian tôpô

Định nghĩa 2.29. *Cho dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ và điểm $x \in X$. Ta nói dãy x_n hội tụ về x, ký hiệu là $x_n \to x$ hoặc $\lim x_n = x$, nếu*

$$\forall U_x \text{ mở}, \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad x_n \in U_x, \ \forall n \geq N.$$

Mệnh đề 2.30. *Sự hội tụ trong không gian T_2 là duy nhất.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử dãy $(x_n) \subset X$ hội tụ về cả x, y và $x \neq y$. Do X là không gian T_2 nên tồn tại U mở chứa x, V mở chứa y sao cho $U \cap V = \emptyset$. Dãy (x_n) hội tụ về x nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in U$, $\forall n \geq n_1$. Tương tự, tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in V$, $\forall n \geq n_2$. Khi đó, $x_n \in U \cap V$, $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Điều này mâu thuẫn với $U \cap V = \emptyset$. □

2.2.8 Cơ sở và cơ sở địa phương

Định nghĩa 2.31 (So sánh tôpô)**.** *Cho $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ là hai tôpô trên X. Nếu $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ thì ta nói tôpô $\mathcal{T}_1$ nhỏ hơn tôpô $\mathcal{T}_2$ hay tôpô $\mathcal{T}_2$ lớn hơn $\mathcal{T}_1$.*

Ví dụ 2.32.

i) Tôpô thô là tôpô nhỏ nhất và tôpô rời rạc là tôpô lớn nhất trên X.

ii) Cho $\mathcal{T}_n$ là tôpô bù hữu hạn và $\mathcal{T}$ là tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}$.

Chứng minh. Sinh viên chứng minh như bài tập. □

Khi xây dựng một tôpô, ta phải xây dựng tất cả những tập mở của tôpô đó. Việc này thường không dễ dàng và đôi khi không cần thiết. Có một lớp ít hơn các tập mở nhưng vẫn đủ để giải quyết các vấn đề liên quan đến khái niệm tôpô. Hơn nữa, cũng từ chính các tập mở cốt yếu này, ta xây dựng được tất cả những tập mở còn lại. Ta gọi lớp các tập mở cốt yếu này là cơ sở tôpô.

Định nghĩa 2.33 (Cơ sở)**.** *Cho $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X. Một lớp $\mathcal{B}$ các tập mở gọi là 1 cơ sở của $\mathcal{T}$ nếu*

$$\forall U \in \mathcal{T}, \ x \in U \ \Rightarrow \ \exists V \in \mathcal{B}: \ x \in V \subset U.$$

Định lý 2.34. *Tập con $\mathcal{B}$ của $\mathcal{T}$ là một cơ sở của $\mathcal{T}$ khi và chỉ khi mọi tập mở của $\mathcal{T}$ đều là hợp của các tập mở trong $\mathcal{B}$, nghĩa là*

$$\forall U \in \mathcal{T}, \ \exists V_\alpha \in \mathcal{B}, \ \alpha \in I: \ U = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha.$$

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 2.35. *Nếu $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathcal{T}$ thì $\mathcal{T}$ là tôpô nhỏ nhất chứa $\mathcal{B}$.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định nghĩa 2.36 (Không gian DD2)**.** *Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ gọi là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai (hay còn gọi là không gian DD2) nếu $\mathcal{T}$ có một cơ sở đếm được.*

Định lý 2.37. *Mọi không gian DD2 đều khả ly.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định nghĩa 2.38 (Cơ sở địa phương)**.** *Cho không gian tôpô X và $x \in X$. Một họ $\mathcal{B}_x$ gồm các tập mở chứa x được gọi là cơ sở địa phương tại x nếu*

$$\forall U \text{ mở chứa } x,\ \exists V \in \mathcal{B}_x :\ x \in V \subset U.$$

Định nghĩa 2.39 (Không gian DD1)**.** *Không gian tôpô X được gọi là thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất (hay còn gọi là không gian DD1) nếu tại mọi điểm $x \in X$ đều có một cơ sở đại phương đếm được.*

Định lý 2.40. *Nếu X là không gian DD1 thì tại mỗi $x \in X$ có một cơ sở địa phương chính quy $\mathcal{B}_x = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, theo nghĩa:*

- *U_n là tập mở chứa x với mọi $n \in \mathbb{N}$.*
- *Nếu $x_n \in U_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ thì dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về x.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN TÔPÔ

1. Cho $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ là các tôpô trên X. Chứng minh $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ cũng là 1 tôpô trên X.

2. Cho $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ là hai không gian tôpô. Trên $Z = X \cup Y$, đặt

$$\mathcal{T} = \{U \subset Z : \ U \cap X \in \mathcal{T}_X, \ U \cap Y \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Chứng minh:

(a) $\mathcal{T}$ là một tôpô trên Z.

(b) A đóng trong Z khi và chỉ khi $X \setminus A \in \mathcal{T}_X$ và $Y \setminus A \in \mathcal{T}_Y$.

3. Cho A, B là các tập con của không gian tôpô X. Chứng minh:

(a) A mở khi và chỉ khi $A \cap \partial A = \emptyset$.

(b) A đóng khi và chỉ khi $\partial A \subset A$.

4. Cho A là tập con không gian tôpô X và U mở trong X. Chứng minh:

(a) Nếu A là tập đóng thì $A \setminus U$ là tập đóng và $U \setminus A$ là tập mở.

(b) $\overline{U \cap A} = \overline{U \cap \overline{A}}$.

5. Cho A là tập con của không gian tôpô X. Chứng minh:

(a) Nếu A đóng thì A chứa các điểm giới hạn (nếu có) của những dãy trong A.

(b) Nếu X là không gian DD1 và A chứa các điểm giới hạn (nếu có) của những dãy trong A thì A đóng.

6. Cho X là không gian T_2. Chứng minh:

(a) Với n điểm phân biệt của X, tồn tại n tập mở rời nhau sao cho mỗi tập chứa đúng 1 điểm đã cho.

(b) x là điểm tụ của A khi và chỉ khi mọi U mở chứa x, ta có $U \cap A$ là tập vô hạn.

7. Xét tôpô bù hữu hạn trên tập X vô hạn.

(a) Chứng minh X không là không gian T_2.

(b) Xét dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ thỏa $x_m \neq x_n$, $\forall m \neq n$. Chứng minh dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về mọi điểm thuộc X.

(c) Chứng minh mọi tập con vô hạn đều trù mật trong X, suy ra X là không gian khả ly.

(d) Giả sử X không đếm được. Chứng minh X không là không gian DD2.

8. Cho X là tập vô hạn không đếm được. Đặt

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : \ U = \emptyset \ \text{ hoặc } \ X \setminus U \text{ đếm được}\}.$$

Chứng minh:

(a) $\mathcal{T}$ là 1 tôpô trên X.

(b) X không là không gian T_2.

(c) Tập con A trù mật trong X khi và chỉ khi A không đếm được.

(d) Nếu $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ thì A là tập mở.

9. Chứng minh tập những điểm cô lập của một tập A bất kỳ trong không gian DD2 là đếm được.

10. Cho A, U trù mật và U mở trong không gian tôpô X. Chứng minh $U \cap A$ trù mật trong X.

11. Chứng minh nếu $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ thì $X \setminus A$ trù mật trong X.

12. Cho X là không gian DD1. Chứng minh nếu mọi dãy trong X đều có không quá 1 điểm giới hạn thì X là không gian T_2.

13. Cho X là không gian DD1 và A trù mật trong X. Chứng minh tại mỗi điểm $x \in X$ đều tồn tại một dãy trong A hội tụ về x. Suy ra rằng với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại một dãy hữu tỉ và một dãy vô tỉ hội tụ về x.

14. x gọi là điểm ngoài của A nếu $x \in \operatorname{int}(X \setminus A)$. Chứng minh mọi điểm thuộc X chỉ có thể là điểm trong, điểm ngoài hoặc điểm biên của A.

15. Tập A được gọi là không đâu trù mật của X nếu $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

(a) Chứng minh $\mathbb{Z}$ là tập không đâu trù mật của $\mathbb{R}$.

(b) Chứng minh nếu U mở, trù mật trong X thì $X \setminus U$ là tập không đâu trù mật.

16. Cho không gian tôpô X và $A \subset X$.

(a) Chứng minh A là tập không đâu trù mật của X khi và chỉ khi mọi tập mở V khác rỗng, tồn tại tập mở U khác rỗng trong V sao cho $U \cap A = \emptyset$.

(b) Nếu A mở thì ∂A là không đâu trù mật trong X.

17. Cho $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ là hai tôpô trên X và $A \subset X$. Chứng minh:

(a) Nếu x là điểm trong của A trong $(X, \mathcal{T}_1)$ thì x cũng là điểm trong của A trong $(X, \mathcal{T}_2)$.

(b) Nếu x là điểm dính của A trong $(X, \mathcal{T}_2)$ thì x cũng là điểm dính của A trong $(X, \mathcal{T}_2)$.

18. Cho $\mathcal{B}$ là họ các tập con của X thỏa

(i) $\bigcup\limits_{G \in \mathcal{B}} = X$.

(ii) $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{B},\ x \in G_1 \cap G_2 \ \Rightarrow\ \exists G \in B :\ x \in G \subset G_1 \cap G_2$.

Chứng minh tồn tại tôpô $\mathcal{T}$ nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở.

2.3 Ánh xạ liên tục

2.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.41. *Cho X, Y là hai không gian tôpô và ánh xạ $f : X \to Y$.*

- *Ta nói f liên tục tại $x \in X$ nếu với mọi V mở trong Y chứa $f(x)$, tồn tại U mở trong X chứa x sao cho $f(U) \subset V$.*
- *f được gọi là liên tục trên X nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc X.*

Ví dụ 2.42.

- *Nếu tôpô trên X là tôpô rời rạc thì f liên tục trên X.*
- *Nếu tôpô trên Y là tôpô thô thì f liên tục trên X.*

Chứng minh. Sinh viên chứng minh như bài tập. □

Định lý 2.43. *Nếu f liên tục tại x thì với mọi dãy $(x_n) \subset X$ hội tụ về x ta có $f(x_n)$ hội tụ về $f(x)$.*

Chứng minh. Chứng minh trong giờ lý thuyết. □

2.3.2 Sự liên tục của ánh xạ hợp

Định lý 2.44. *Cho ba không gian tôpô X, Y, Z. Hai ánh xạ $f : X \to Y$ liên tục tại x và $g : Y \to Z$ liên tục tại $y = f(x)$ thì ánh xạ hợp $h = g \circ f$ liên tục tại x.*

Chứng minh. Chứng minh trong giờ lý thuyết. □

Định lý 2.45. *Cho $f : X \to Y$. Các mệnh đề sau đây là tương đương:*

i) f liên tục trên X.

ii) Ảnh ngược của tập mở trong Y là mở trong X.

iii) Ảnh ngược của tập đóng trong Y là đóng trong X.

Chứng minh. Chứng minh trong giờ lý thuyết. □

2.3.3 Đồng phôi

Định nghĩa 2.46. *Cho ánh xạ $f: X \to Y$.*

- *f được gọi là đồng phôi nếu f là song ánh liên tục và ánh xạ ngược f^{-1} liên tục.*
- *f được gọi là ánh xạ mở nếu f biến mọi tập mở trong X thành tập mở trong Y.*
- *f được gọi là ánh xạ đóng nếu f biến mọi tập đóng trong X thành tập đóng trong Y.*

Định lý 2.47. *Một song ánh liên tục là một phép đồng phôi khi và chỉ khi nó cũng là ánh xạ mở hoặc ánh xạ đóng.*

Chứng minh. Chứng minh trong giờ lý thuyết. □

BÀI TẬP VỀ ÁNH XẠ LIÊN TỤC

19. Cho X, Y là hai không gian tôpô và $f: X \to Y$. Chứng minh các mệnh đề sau tương đương.

(a) f liên tục trên X.

(b) $\forall A \subset X \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(c) $\forall B \subset Y \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

20. Cho X, Y là không gian tôpô và $f: X \to Y$ liên tục. Chứng minh

(a) Nếu X khả ly và f toàn ánh thì Y khả ly.

(b) Nếu Y là không gian T_2 và f đơn ánh thì X là không gian T_2.

21. Cho X, Y là không gian tôpô và $f, g: X \to Y$ liên tục. Đặt

$$A = \{x \in X: f(x) = g(x)\}.$$

(a) Chứng minh nếu Y là không gian T_2 thì A đóng trong X.

(b) Áp dụng câu (a) để chứng minh lại tính chất: nếu f, g là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ thì $f = g$ trên $\mathbb{R}$.

22. Cho X, Y là các không gian tôpô, $f, g: X \to Y$ liên tục, Y là không gian T_2 và $A \subset X$. Xét ánh xạ $\varphi: X \to Y$ xác định bởi

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \notin A. \end{cases}$$

(a) Chứng minh φ chỉ có thể gián đoạn tại những điểm biên của A.

(b) Chứng minh nếu $x_0 \in \partial A$ thì φ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

(c) Áp dụng để xét tính liên tục của hàm số

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x + 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

23. Cho $f: X \to Y$ với X là không gian DD1. Chứng minh f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi mọi dãy hội tụ về x_0 đều có dãy ảnh hội tụ về $f(x_0)$.

24. Cho X là không gian DD1 và Y là không gian tôpô sao cho mọi dãy trên Y có không quá một điểm giới hạn và $f, g:\ X \to Y$ liên tục. Cho $A \subset X$ và $x_0 \in \partial A$. Xét ánh xạ $\varphi:\ X \to Y$ xác định bởi

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \notin A. \end{cases}$$

Chứng minh φ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $f(x_0) = g(x_0)$.

25. Cho X, Y là hai không gian tôpô và $f:\ X \to Y$. Chứng minh f liên tục trên X khi và chỉ khi

$$f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \ \subset\ \mathrm{int}(f^{-1}(B)), \quad \forall B \subset Y.$$

26. Cho X, Y là hai không gian tôpô và $f:\ X \to Y$ là ánh xạ mở, toàn ánh và liên tục. Chứng minh nếu $\mathcal{T}_Y$ là tôpô trên Y thì $\mathcal{T}_Y$ là tôpô lớn nhất trên Y để f liên tục.

27. Cho X, Y, Z là các không gian tôpô, $f:\ X \to Y$ là toàn ánh liên tục và $g:\ Y \to Z$. Chứng minh nếu ánh xạ hợp $g \circ f$ là ánh xạ đóng hay ánh xạ mở thì g cũng vậy.

28. Cho X, Y là hai không gian tôpô và $f:\ X \to Y$. Chứng minh

(a) f là ánh xạ mở khi và chỉ khi $\forall A \subset X \ \Rightarrow\ f(\mathrm{int}(A)) \subset \mathrm{int}(f(A))$.

(b) f là ánh xạ đóng khi và chỉ khi $\forall A \subset X \ \Rightarrow\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

29. Cho $f:\ X \to Y$ với X là không gian tôpô sao cho mọi tập một điểm là đóng. Chứng minh f là đồng phôi khi và chỉ khi

$$\forall A \subset X \ \Rightarrow\ \overline{A} = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right).$$

30. Cho X, Y là không gian tôpô và $f:\ X \to Y$ là song ánh. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương:

(a) f là phép đồng phôi.

(b) $\forall A \subset X \ \Rightarrow\ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

(c) $\forall B \subset Y \ \Rightarrow\ f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$.

2.4 Tôpô cảm sinh

2.4.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.48. *Cho* $(X, \mathcal{T})$ *là một không gian tôpô và* D *là tập con của* X*. Khi đó,* $\mathcal{T}_D = \{U \cap D : \ U \in \mathcal{T}\}$ *là 1 tôpô trên* D*. Tôpô này là tôpô cảm sinh trên* D *bởi tôpô trên* X *và phần tử của* $\mathcal{T}_D$ *gọi là mở trong* D*.*

Tính chất 2.49. *Cho* $(X, \mathcal{T})$ *là một không gian tôpô và* $A \subset D \subset X$*. Khi đó:*

i) A *là mở trong* D *khi và chỉ khi tồn tại* U *mở trong* X*:* $U \cap D = A$*.*

ii) A *là đóng trong* D *khi và chỉ khi tồn tại* B *đóng trong* X*:* $B \cap D = A$*.*

iii) Nếu A *là mở (hoặc đóng) trong* X *thì* A *cũng mở (hoặc đóng) trong* D*.*

iv) Nếu D *mở trong* X *thì mọi tập mở trong* D *cũng mở trong* X*.*

v) Nếu D *đóng trong* X *thì mọi tập đóng trong* D *cũng đóng trong* X*.*

Chứng minh. Sinh viên chứng minh như bài tập. □

2.4.2 Tôpô tích

Định nghĩa 2.50. *Cho* $(X, \mathcal{T}_X)$ *và* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *là hai không gian tôpô. Khi đó, tôpô* $\mathcal{T}_Z$ *nhận họ* $\mathcal{B} = \{U \times V : \ U \in \mathcal{T}_X, \ V \in \mathcal{T}_Y\}$ *làm cơ sở là một tôpô trên* $Z = X \times Y$ *gọi là tôpô tích của* $\mathcal{T}_X$ *và* $\mathcal{T}_Y$*.* $(Z, \mathcal{T}_Z)$ *gọi là không gian tôpô tích của* $(X, \mathcal{T}_X)$ *và* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*.*

Mệnh đề 2.51. *Cho* $(Z, \mathcal{T}_Z)$ *là không gian tôpô tích của* $(X, \mathcal{T}_X)$ *và* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*.*

i) Nếu U *mở trong* X*,* V *mở trong* Y *thì* $U \times V$ *mở trong* Z*.*

ii) Nếu W *mở trong không gian tích* Z *và chứa* (x, y) *thì tồn tại* U *mở (trong* X*) chứa* x*,* V *mở (trong* Y*) chứa* y *sao cho* $U \times V \subset W$*.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 2.52.

i) Các phép chiếu là những ánh xạ liên tục và mở trên không gian tôpô tích.

ii) Tôpô tích là tôpô nhỏ nhất để các phép chiếu liên tục.

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 2.53. *Giả sử f là ánh xạ từ không gian tôpô Z vào không gian tích $X \times Y$. Khi đó, f liên tục khi và chỉ khi các ánh xạ hợp $p_1 \circ f$ và $p_2 \circ f$ liên tục.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

BÀI TẬP VỀ TÔPÔ CẢM SINH

31. Cho D là không gian tôpô con của X và $A \subset D$. Ký hiệu $\mathring{A}_D$, $\overline{A_D}$ lần lượt là phần trong và bao đóng của A trong D. Chứng minh

$$\mathring{A} = \mathring{A}_D \cap \mathring{D} \quad \text{và} \quad \overline{A_D} = \overline{A} \cap D.$$

32. Cho D là không gian con của X. Chứng minh

(a) Nếu X là không gian T_2 thì D cũng là không gian T_2.

(b) Nếu X khả ly và D là tập mở trong X thì D cũng khả ly.

33. Cho D là không gian con của X. Chứng minh

(a) Nếu $x \in D$ và $\mathcal{B}_x$ là cơ sở địa phương tại x trong không gian X thì họ $\mathcal{C}_x = \{G \cap D : \ G \in \mathcal{B}_x\}$ là cơ sở địa phương tại x trong không gian con D. Từ đó suy ra nếu X là không gian DD1 thì D cũng là không gian DD1.

(b) Nếu $\mathcal{B}$ là cơ sở của tôpô trên X thì họ $\mathcal{C} = \{G \cap D : \ G \in \mathcal{B}\}$ là cơ sở của tôpô trên D. Từ đó suy ra nếu X là không gian DD2 thì D cũng là không gian DD2.

34. Cho $f : \ X \to Y$ và $A \subset X$. Chứng minh

(a) Nếu f liên tục tại $x \in A$ thì ánh xạ thu hẹp $f_{|_A} : \ A \to Y$ cũng liên tục tại x.

(b) Nếu $f_{|_A}$ liên tục tại $x \in \mathring{A}$ thì f cũng liên tục tại x.

(c) Áp dụng xét tính liên tục của hàm f trên $\mathbb{R}$, xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

35. Cho $X = A \cup B$ và $f : \ X \to Y$. Chứng minh

(a) Nếu $f_{|_A}$, $f_{|_B}$ cùng liên tục tại $x \in A \cap B$ thì f liên tục tại x.

(b) Nếu $f_{|_A}$, $f_{|_B}$ lần lượt liên tục trên A, B và nếu A, B cùng đóng (hoặc cùng mở) thì f liên tục trên X.

36. Cho $D \subset X$ và các ánh xạ liên tục $f: \overline{D} \to Y$, $g: X \setminus \overset{\circ}{D} \to Y$, thỏa $f(x) = g(x),\ \forall x \in \partial D$. Xét ánh xạ $\varphi: X \to Y$ xác định bởi

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ g(x), & x \notin D. \end{cases}$$

Chứng minh φ liên tục trên X.

37. Cho $f: X \to Y$ và D là tập con của Y sao cho $f(X) \subset D$. Cho $g: X \to D$ thỏa $g(x) = f(x),\ \forall x \in X$. Chứng minh g liên tục trên X khi và chỉ khi f liên tục trên X.

38. Cho f là ánh xạ đóng trên X và A là tập đóng trong X. Chứng minh $f_{|_A}$ là ánh xạ đóng trong A. Xét trường hợp f là ánh xạ mở.

39. Cho $f: X \to Y$ là ánh xạ đóng, $A \subset X$ và $B \subset Y$. Chứng minh

(a) $f_{|_{f^{-1}(B)}}: f^{-1}(B) \to B$ là ánh xạ đóng.

(b) Nếu f đơn ánh thì $f_{|_A}: A \to f(A)$ là ánh xạ đóng.

40. Cho D là không gian con của X và $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy trong D. Chứng minh

(a) Nếu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về x trong D thì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về x trong X.

(b) Nếu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về x trong X thì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về x trong D khi và chỉ khi $x \in D$.

(c) Áp dụng, chứng minh trong không gian con $D = (0, 1]$ của $\mathbb{R}$ dãy $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy nhưng không hội tụ.

41. Cho $A \subset X$ và $B \subset Y$. Chứng minh

(a) $\mathrm{int}(A \times B) = \mathrm{int}(A) \times \mathrm{int}(B)$ và $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(b) $A \times B$ đóng (hoặc mở) khi và chỉ khi A, B cùng đóng (hoặc mở).

42. Cho $Z = X \times Y$ là không gian tôpô tích của X và Y. Chứng minh

(a) Z là không gian T_2 khi và chỉ khi X, Y là các không gian T_2.

(b) Z khả ly khi và chỉ khi X, Y khả ly.

(c) Z là không gian DD1 khi và chỉ khi X, Y là DD1.

(d) Z là không gian DD2 khi và chỉ khi X, Y là DD2.

43. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lần lượt là các dãy trong X và Y. Chứng minh $(x_n, y_n) \to (x, y)$ khi và chỉ khi $x_n \to x$ và $y_n \to y$.

44. Cho X, Y, Z là các không gian tôpô và các ánh xạ $f: X \to Y$, $g: X \to Z$. Xét ánh xạ $\varphi = (f, g): X \to Y \times Z$, xác định bởi

$$\varphi(x) = (f(x), g(x)), \ \forall x \in X.$$

(a) Chứng minh nếu f, g liên tục tại $x_0 \in X$ thì φ liên tục tại x_0.

(b) Chứng minh φ liên tục trên X khi và chỉ khi f, g liên tục trên X.

(c) Áp dụng chứng minh $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = (\sin x, e^x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

45. Cho X, Y, Z, T là các không gian tôpô và $f: X \to Z$, $g: Y \to T$. Xét ánh xạ $\varphi: X \times Y \to Z \times T$, xác định bởi

$$\varphi(x, y) = (f(x), g(y)), \ \forall (x, y) \in X \times Y.$$

(a) Chứng minh nếu f liên tục tại $x_0 \in X$ và g liên tục tại $y_0 \in Y$ thì φ liên tục tại (x_0, y_0).

(b) Chứng minh φ liên tục trên $X \times Y$ khi và chỉ khi f liên tục trên X và g liên tục trên Y.

(c) Áp dụng chứng minh $f + g$ là hàm liên tục với f, g là các hàm thực hai biến liên tục.

46. Cho $f: X \to Y$ liên tục có đồ thị là tập $G_f = \{(x, f(x)): x \in X\}$. Chứng minh

(a) X đồng phôi với G_f.

(b) Nếu Y là không gian T_2 thì G_f đóng trong $X \times Y$.

(c) Nếu X là không gian DD1 và mọi dãy trong Y có không quá 1 điểm giới hạn thì G_f là tập đóng trong $X \times Y$.

47. Cho $f: X \to Y$ với X là không gian DD1 và thỏa mãn mọi dãy hội tụ trong X có ảnh qua f là dãy hội tụ trong Y. Chứng minh nếu G_f là tập đóng thì f liên tục.

48. Cho X, Y, Z là các không gian tôpô và các ánh xạ $f: X \to Z$, $g: Y \to Z$. Xét tập hợp $D = \{(x, y) \in X \times Y: f(x) = g(y)\}$. Chứng minh

(a) Nếu f, g liên tục và Z là không gian T_2 thì D là tập đóng trong $X \times Y$.

(b) Nếu f, g là ánh xạ mở, toàn ảnh và D đóng thì Z là không gian T_2.

2.5 Tập compact, tập liên thông

2.5.1 Tập compact

Định nghĩa 2.54. *Tập con A của không gian tôpô X được gọi là tập compact nếu mọi phủ mở của A đều chứa một phủ con hữu hạn, nghĩa là:*
nếu $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của A thì tồn tại $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in I$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Nếu X là tập compact thì X được gọi là không gian compact.

Ví dụ 2.55. *Xét tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$.*

i) Mọi tập hữu hạn đều là tập compact.

ii) Mọi tập con của không gian bù hữu hạn đều là tập compact.

iii) $\mathbb{R}$ không phải là không gian compact.

iv) $[a, b]$ là tập compact của $\mathbb{R}$.

Chứng minh.

i) Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của A. Khi đó, với mỗi $i = \overline{1, n}$, tồn tại $\alpha_i \in I$ sao cho $a_i \in U_{\alpha_i}$. Do đó $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Vậy A compact.

ii) Giả sử $\mathcal{T}_n$ là tôpô bù hữu hạn trên X và $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Giả sử $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của A. Khi đó, tồn tại $\alpha_0 \in I$ sao cho $U_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Nếu $A \setminus U_{\alpha_0} = \emptyset$ thì $A \subset U_{\alpha_0}$ nên A compact. Ngược lại, nếu $A \setminus U_{\alpha_0} \neq \emptyset$ thì $A \setminus U_{\alpha_0} \subset X \setminus U_{\alpha_0}$ hữu hạn. Tương tự chứng minh trên, $A \setminus U_{\alpha_0}$ có phủ con hữu hạn $(U_{\alpha_i})_{i=\overline{1,n}}$. Do đó, $A \subset \bigcup_{i=0}^{n} U_{\alpha_i}$. Vậy A compact.

iii) Xét $U_n = (-n, n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta thấy $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một phủ mở của $\mathbb{R}$. Mọi họ hữu hạn của phủ mở này đều có dạng $(U_n)_{n\in I}$, trong đó $I \subset \mathbb{N}^*$ hữu hạn. Đặt $K = \max I$. Khi đó: $\bigcup_{n\in I} U_n = U_K = (-K, K)$ nên họ $(U_n)_{n\in I}$ không phải là phủ mở của $\mathbb{R}$. Vậy $\mathbb{R}$ không có phủ con hữu hạn nên không compact.

iv) Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết.

□

Định lý 2.56. *Cho $A, B \subset X$ và $A \subset B$. Khi đó*

i) Nếu A đóng và B compact thì A compact.

ii) Nếu A compact và X là không gian T_2 thì A đóng.

Chứng minh.

i) Giả sử A đóng và B compact, ta chứng minh A compact.

Giả sử $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ là phủ mở của A. Vì A đóng nên $V = X \setminus A$ mở. Khi đó

$$B \subset X = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cup V).$$

Do B compact nên tồn tại $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in I :\ B \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\alpha_i} \cup V)$.

Do $A \subset B$ nên $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\alpha_i} \cup V)$.

Chú ý rằng $A \cap V = \emptyset$ nên suy ra $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Vậy A compact.

ii) Giả sử A compact và X là không gian T_2, ta chứng minh A đóng hay $X \setminus A$ mở.

Lấy $y \in X \setminus A$ tùy ý. Khi đó, với mỗi $x \in A$ ta có $x \neq y$. Do X là không gian T_2 nên tồn tại U_x mở chứa x và V_x mở chứa y sao cho $U_x \cap V_x = \emptyset$. Rõ ràng $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$. Mà A compact nên tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Đặt $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ thì V là tập mở chứa y.

Ta kiểm tra $V \subset X \setminus A$. Thật vậy, với mọi $z \in V$, ta có $z \in V_{x_i}, \forall i = \overline{1, n}$. Do $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$ nên suy ra $z \notin U_{x_i}, \forall i = \overline{1, n}$. Do đó $z \notin A$ hay $z \in X \setminus A$.

□

Hệ quả 2.57. *Tập con A của $\mathbb{R}$ là tập compact khi và chỉ khi A đóng và bị chặn.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 2.58. *Ảnh liên tục của tập compact cũng là tập compact.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Hệ quả 2.59. *Giả sử A là tập con compact của X và $f: X \to \mathbb{R}$ liên tục trên X. Khi đó, f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên A.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

2.5.2 Tập liên thông

Định nghĩa 2.60. *Tập con A của không gian tôpô X được gọi là liên thông nếu không tồn tại hai tập U, V mở sao cho*

i) $A \subset U \cup V$.

ii) $A \cap U \neq \emptyset$.

iii) $A \cap V \neq \emptyset$.

iv) $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Nếu X là tập liên thông thì X được gọi là không gian liên thông.

Định lý 2.61. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

i) X là không gian liên thông.

ii) X không biểu diễn được thành hợp của hai tập mở khác rỗng rời nhau.

ii) X không biểu diễn được thành hợp của hai tập mở khác rỗng rời nhau.

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Chú ý 2.62. *A là tập liên thông khi và chỉ khi không gian con A là không gian liên thông.*

Định lý 2.63. *Nếu A là tập liên thông và $A \subset B \subset \overline{A}$ thì B cũng liên thông.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Hệ quả 2.64. *Nếu A là tập liên thông thì $\overline{A}$ là tập liên thông.*

Định lý 2.65. *Nếu $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ là tập liên thông và $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ thì $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ liên thông*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 2.66. *Ảnh liên tục của tập liên thông là tập liên thông.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Hệ quả 2.67. *Hàm số thực liên tục trên tập liên thông đều đạt mọi giá trị trung gian.*

BÀI TẬP VỀ TẬP COMPACT, TẬP LIÊN THÔNG

49. Cho A, B là các tập compact của không gian tôpô X. Chứng minh

(a) $A \cup B$ là tập compact.

(b) Nếu X là không gian T_2 thì $A \cap B$ là tập compact.

50. Cho $f: X \to Y$ là ánh xạ liên tục, X là không gian compact và Y là không gian T_2. Chứng minh f là ánh xạ đóng.

51. Cho không gian tôpô X có cơ sở $\mathcal{B}$ và tập $A \subset X$ sao cho mọi họ trong $\mathcal{B}$ phủ A đều có chứa một phủ con hữu hạn. Chứng minh A là tập compact.

52. Chứng minh không gian tôpô tích $X \times Y$ là compact khi và chỉ khi X, Y là các không gian compact. Áp dụng, chứng minh D là tập compact của $\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi D đóng và bị chặn.

53. Cho X là không gian T_2, compact. Chứng minh

(a) Nếu A đóng và $x \notin A$ thì tồn tại 2 tập mở U, V rời nhau sao cho $x \in U$ và $A \subset V$.

(b) Nếu A, B là hai tập đóng rời nhau thì tồn tại hai tập mở G, H rời nhau sao cho $A \subset G$ và $B \subset H$.

54. Cho W là tập mở chứa tập compact $A \times B$ của không gian tích $X \times Y$. Chứng minh với mỗi $x_0 \in A$, tồn tại U mở chứa x_0 và V mở chứa B sao cho $U \times V \subset W$. Từ đó suy ra, tồn tại G mở trong X và H mở trong Y sao cho $A \times B \subset G \times H \subset W$.

55. Chứng minh nếu X là không gian compact thì ánh xạ chiếu p_2 từ không gian tích $X \times Y$ xuống Y là ánh xạ đóng.

56. Cho $f: X \to Y$ liên tục và G_f là đồ thị của f. Chứng minh

(a) Nều f liên tục và Y là không gian T_2 thì G_f là tập đóng trong $X \times Y$.

(b) Nếu G_f đóng và Y là không gian compact thì f liên tục.

57. X được gọi là compact theo dãy nếu mọi dãy con trong X đều chứa một dãy con hội tụ. Cho X là không gian T_2. Chứng minh

(a) Nếu X compact theo dãy thì mọi tập con vô hạn của X đều có một điểm tụ.

(b) Nếu X là không gian DD1 và mọi tập con vô hạn của X đều có một điểm tụ thì X compact theo dãy

58. Cho X là không gian T_2. Chứng minh

(a) Nếu X compact thì mọi tập con vô hạn của X đều có một điểm tụ.

(b) Nếu mọi tập con vô hạn của X đều có ít nhất một điểm tụ thì mọi phủ mở đếm được của X đều chứa một phủ con hữu hạn.

59. Chứng minh A là tập liên thông khi và chỉ khi không tồn tại 2 tập đóng E, F sao cho

$$A \subset E \cup F, \quad A \cap E \neq \emptyset, \quad A \cap F \neq \emptyset, \quad A \cap E \cap F = \emptyset.$$

60. Nếu A, B liên thông và $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ thì $A \cup B$ liên thông.

61. Chứng minh $X \times Y$ là không gian liên thông khi và chỉ khi X, Y là các không gian liên thông.

3 KHÔNG GIAN METRIC

3.1 Không gian metric

3.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3.1. *Cho tập hợp X khác rỗng. Một ánh xạ $d: X \times X \to \mathbb{R}$ được gọi là metric (khoảng cách) trên X nếu d thỏa các tính chất sau:*

i) $d(x,y) \geq 0,\ \forall x, y \in X$. *Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x = y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x, y \in X$.

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall x, y, z \in X$.

Khi đó, (X, d) *là một không gian metric.*

Ví dụ 3.2.

i) Ánh xạ $d(x,y) = |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ *là một metric trên* $\mathbb{R}$.

ii) Trên $\mathbb{R}^n$*, xét các ánh xạ được định nghĩa như sau: với* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$,

$$d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},\ \ d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,\ \ d_3(x,y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|.$$

Khi đó, d_1, d_2, d_3 *là các metric trên* $\mathbb{R}^n$.

iii) Cho tập hợp X *khác rỗng, xét ánh xạ* d *xác định bởi*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \qquad \forall x, y \in X.$$

Khi đó, d *là một metric trên* X *(gọi là metric rời rạc).*

iv) Xét $X = C[a,b]$ *là không gian các hàm liên tục trên* $[a,b]$ *và ánh xạ*

$$p(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in X.$$

(X, p) *là không gian metric.*

Định nghĩa 3.3 (Quả cầu). *Cho không gian metric (X, d), điểm $x_0 \in X$ và số thực $r > 0$. Quả cầu mở tâm x_0 bán kính r là tập hợp*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}.$$

Quả cầu đóng tâm x_0 bán kính r là tập hợp

$$B'(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\}.$$

Chú ý 3.4. *Trong trường hợp tổng quát, nói chung $B'(x, r)$ có thể không trùng với $\overline{B(x, r)}$. Ví dụ cụ thể trong phần bài tập.*

3.1.2 Tôpô sinh bởi metric

Định lý 3.5. *Cho không gian metric (X, d). Tồn tại tôpô $\mathcal{T}$ trên X nhận họ $\mathcal{B} = \{B(x, r) : \ x \in X, \ r > 0\}$ làm cơ sở.*

Tôpô $\mathcal{T}$ được gọi là tôpô sinh bởi metric d.

Chứng minh. Xét họ $\mathcal{T}$ bao gồm các tập $\emptyset$ và các tập $U \subset X$ thỏa mãn:

$$\forall x \in U, \ \exists r > 0 : \ B(x, r) \subset U.$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra $\mathcal{T}$ là tôpô nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở. □

Chú ý 3.6. *Các khái niệm, tính chất trong không gian tôpô hiển nhiên đúng trong không gian metric, với thuật ngữ "tập mở" được thay bằng "quả cầu mở".*

Định lý 3.7. *Không gian metric X là không gian T_2 và $DD1$.*

Chứng minh. Với mọi $x, y \in X$, $x \neq y$, đặt $3r = d(x, y) > 0$. Ta thấy $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Do đó, X là không gian T_2. Mặt khác, tại mỗi $x \in X$, ta thấy $\{B(x, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ là cơ sở địa phương chính quy của $\mathcal{T}$ tại x nên X là không gian $DD1$. □

Hệ quả 3.8. *Trong không gian metric, các mệnh đề sau đúng.*

i) Giới hạn của dãy hội tụ trong không gian metric là duy nhất.

ii) x là điểm tụ của A khi và chỉ khi $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A$ là tập vô hạn.

iii) A đóng khi và chỉ khi mọi dãy trong A, nếu hội tụ thì điểm giới hạn thuộc A.

Định lý 3.9. *Không gian metric (X, d) là không gian $DD2$ khi và chỉ khi X khả ly.*

Chứng minh. Nếu X là không gian $DD2$ thì X khả ly theo Định lý 2.37. Ngược lại, giả sử X khả ly, ta chứng minh X là không gian $DD2$. Do X khả ly nên tồn tại tập $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ trù mật trong X. Xét họ

$$\mathcal{B} = \{B(a_k, 1/n) : \ k, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ta chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathcal{T}$. Thật vậy, lấy U mở trong X và $x \in U$. Khi đó, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset U$. Chọn $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\dfrac{1}{n_0} < r$.

Mặt khác, do A trù mật nên $B\left(x, \dfrac{1}{2n_0}\right) \cap A \neq \emptyset$. Do đó, tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a_{k_0} \in B\left(x, \dfrac{1}{2n_0}\right)$. Với mọi $y \in B\left(a_{k_0}, \dfrac{1}{2n_0}\right)$, ta có:

$$d(y, x) \leq d(y, a_{k_0}) + d(a_{k_0}, x) < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} < r.$$

Suy ra $y \in B(x, r)$ và do đó $y \in U$. Dẫn đến $x \in B\left(a_{k_0}, \dfrac{1}{2n_0}\right) \subset U$. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathcal{T}$. □

3.1.3 Metric tương đương

Định nghĩa 3.10. *Cho d_1, d_2 là các metric trên X. Hai metric d_1 và d_2 được gọi là tương đương*

i) theo nghĩa tôpô (ký hiệu $d_1 \sim d_2$) nếu mọi tập mở trong (X, d_1) cũng là tập mở trong (X, d_2) và ngược lại.

ii) theo nghĩa metric (ký hiệu $d_1 \simeq d_2$) nếu tồn tại hai số $\alpha, \beta > 0$ sao cho:

$$\alpha \ d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \ d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Ví dụ 3.11. *Các metric d_1, d_2, d_3 trên $\mathbb{R}^n$ ở mục ii) trong Ví dụ 3.2 là tương đương theo nghĩa metric $\simeq$.*

Mệnh đề 3.12. *Các mệnh đề sau đúng:*

i) Nếu $d_1 \simeq d_2$ thì $d_1 \sim d_2$.

ii) $d_1 \sim d_2$ khi và chỉ khi mọi dãy hội tụ về x trong (X, d_1) cũng hội tụ về x trong (X, d_2) và ngược lại.

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

3.1.4 Sự liên tục trong không gian metric

Định lý 3.13. *Cho hai không gian metric* (X, d_X), (Y, d_Y) *và ánh xạ* $f : X \to Y$. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

i) f *liên tục tại* $x_0 \in X$.

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in X,\ d_X(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$

iii) Mọi dãy (x_n) *hội tụ về* x_0 *thì dãy* $f(x_n)$ *hội tụ về* $f(x_0)$.

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định nghĩa 3.14 (Liên tục đều)**.** *Ánh xạ* $f :\ X \to Y$ *được gọi là liên tục đều trên* $A \subset X$ *nếu thỏa:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, y \in A,\ d_X(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Định lý 3.15. *Ánh xạ liên tục trên tập compact thì liên tục đều.*

Chứng minh. Chứng minh tương tự như trường hợp hàm thực một biến. □

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN METRIC

62. Cho không gian metric (X, d) và $r > 0$. Chứng minh

(a) Nếu $y \in B(x, r)$ thì $x \in B(y, r)$.

(b) Nếu $x \in B(a, r/2)$ thì $B(x, r/2) \subset B(a, r)$.

(c) $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z),\ \forall x, y, z \in X$.

(d) $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v),\ \forall x, y, u, v \in X$.

63. Cho không gian metric (X, d). Chứng minh nếu $y \notin B(x, r_1)$ và $x \notin B(y, r_2)$ thì $B(x, r_1/2) \cap B(y, r_2/2) = \emptyset$. Áp dụng để chứng minh

(a) Nếu A, B là 2 tập đóng rời nhau thì tồn tại 2 tập mở rời nhau lần lượt chứa A và B.

(b) Nếu A là tập con của không gian metric X khả ly thì tập các điểm cô lập của A là đếm được.

64. Cho không gian metric (X, d). Xét ánh xạ

$$p(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},\ \forall x, y \in X.$$

(a) Chứng minh p là một metric trên X và $p \sim d$.

(b) Chứng minh nếu $p \simeq d$ thì d bị chặn.

65. Cho các không gian metric (X_1, d_1) và (X_2, d_2). Trên $X = X_1 \times X_2$, ta định nghĩa

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2), \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X.$$

(a) Chứng minh d là metric trên X.

(b) Cho dãy $x^n = (x_1^n, x_2^n)$ và $a = (a_1, a_2)$ trong X. Chứng minh

$$x^n \xrightarrow{d} a \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x_1^n \xrightarrow{d_1} a_1, \\ x_2^n \xrightarrow{d_2} a_2. \end{cases}$$

66. Xét X là tập hợp các dãy số thực. Ta định nghĩa

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} . \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}, \quad x = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, y = (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X.$$

(a) Chứng minh d là metric trên X.

(b) Cho dãy $x_n = (a_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ và $x = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ thuộc X. Chứng minh

$$x_n \xrightarrow{d} x \iff \lim_{n\to\infty} a_k^n = a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

67. Cho $X = C[-1,1]$ là tập hợp các hàm thực liên tục trên $[-1,1]$ và số thực $a > 0$. Xét các ánh xạ:

$$d(f,g) = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)|, \quad p(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx,$$

$$k(f,g) = \max_{x\in[-1,1]} e^{-ax} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X.$$

(a) Chứng minh d, p, k là các metric trên X.

(b) Chứng minh $k \simeq d$.

(c) Xét dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Chứng minh nếu $f_n \xrightarrow{d} f$ thì $f_n \xrightarrow{p} f$.

(d) Cho hàm $f(x) = 0,\ \forall x \in [-1,1]$ và dãy

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \dfrac{1}{n^2} \le |x| \le 1, \\ n^3 x + n, & \text{nếu } -\dfrac{1}{n^2} \le x \le 0, \\ -n^3 x + n, & \text{nếu } 0 \le x \le \dfrac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Chứng minh $f_n \xrightarrow{p} f$ nhưng $f_n \overset{d}{\nrightarrow} f$.

68. Chứng minh trong không gian metric (X, d), metric d là ánh xạ liên tục. Từ đó suy ra nếu $f : X \to X$ liên tục thì ánh xạ $\varphi : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(x) = d(x, f(x)),\ \forall x \in X$ là ánh xạ liên tục.

69. Cho không gian metric (X, d), và $A \subset X$. Với mọi $x \in X$, ta định nghĩa khoảng cách từ x đến tập A là $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$. Chứng minh

(a) $|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y), \quad \forall x, y \in A$.

(b) $V_\alpha = \{x \in X : d(x, A) < \alpha\}$ là tập mở với mọi $\alpha > 0$.

(c) $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$. Từ đây suy ra A trù mật trong X khi và chỉ khi $d(x, A) = 0,\ \forall x \in X$.

(d) Nếu A là tập compact thì với mọi $x \in X$, tồn tại $x_0 \in A$ sao cho $d(x, x_0) = d(x, A)$.

(e) Chứng minh quả cầu đóng $B'(x,r)$ trong không gian metric là tập đóng và $\overline{B(x,r)} \subset B'(x,r)$.

(f) Chỉ ra rằng trong không gian rời rạc ta có $\overline{B(x,1)} \subsetneq B'(x,1)$.

70. Cho không gian metric (X,d) và $A, B \subset X$. Chứng minh

(a) $U = \{x \in X:\ d(x,A) < d(x,B)\}$ là tập mở.

(b) Nếu $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ thì tồn tại G mở chứa A, H mở chứa B sao cho $G \cap H = \emptyset$.

71. Cho không gian metric (X,d). Với mỗi $A \subset X$, ta định nghĩa đường kính của A là $D(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)$. Chứng minh

(a) Nếu $A \subset B$ thì $D(A) \leq D(B)$.

(b) Nếu $A \cap B \neq \emptyset$ thì $D(A \cup B) \leq D(A) + D(B)$.

(c) $D(A) = D(\overline{A})$.

72. Cho không gian metric (X,d). Với $A, B \subset X$, ta định nghĩa khoảng cách giữa hai tập A và B là $d(A,B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} d(x,y)$. Chứng minh

(a) Nếu A là tập compact thì tồn tại $x_0 \in A$ sao cho $d(x_0,B) = d(A,B)$.

(b) Nếu A, B là tập compact thì tồn tại $x_0 \in A$ và $y_0 \in B$ sao cho $d(A,B) = d(x_0,y_0)$.

(c) Nếu A compact, B đóng và $A \cap B = \emptyset$ thì $d(A,B) > 0$.

73. Cho $a > 0$ và không gian metric $X = C[0,1]$ với metric d xác định bởi

$$d(x,y) = \max_{t\in[0,1]} e^{-at}\left|x(t) - y(t)\right|, \quad \forall x,y \in X.$$

Giả sử $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa điều kiện Lipschitz theo biến thứ 2, nghĩa là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|f(t,u) - f(t,v)| \ \leq\ M|u - v|, \quad \forall t,u,v \in \mathbb{R}.$$

Với mỗi $x \in X$, đặt $F(x):\ [0,1] \to \mathbb{R}$, cho bởi

$$F(x)(t) = b + \int_0^t f(s,x(s))ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Chứng minh F là ánh xạ từ X vào X và

$$d(F(x),F(y)) \ \leq\ \frac{M}{a} d(x,y), \quad \forall x,y \in X.$$

3.2 Không gian metric đầy đủ

Định nghĩa 3.16 (Dãy Cauchy)**.** *Dãy* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *trong không gian metric* (X, d) *được gọi là dãy Cauchy nếu:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall m, n \geq n_0 \ \Rightarrow \ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Mệnh đề 3.17. *Trong không gian metric:*

i) Mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy.

ii) Mọi dãy Cauchy, nếu chứa một dãy con hội tụ thì hội tụ.

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định nghĩa 3.18 (Không gian metric đầy đủ)**.** *Không gian metric* X *được gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong* X *đều hội tụ.*

Ví dụ 3.19.

i) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *là không gian metric đầy đủ.*

ii) Xét $X = C[a, b]$ *là không gian các hàm liên tục trên* $[a, b]$ *và metric*

$$d(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in X.$$

(X, d) *là không gian metric đầy đủ.*

iii) Xét $X = C[a, b]$ *và metric*

$$p(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx, \quad f, g \in X.$$

(X, p) *không phải là không gian metric đầy đủ.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 3.20. *Cho không gian metric đầy đủ* X *và* $A \subset X$*. Khi đó,* A *là không gian con đầy đủ khi và chỉ khi* A *đóng.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 3.21. *Không gian metric* X *là đầy đủ khi và chỉ khi* X *có tính chất: mọi dãy giảm các tập đóng, khác rỗng, đường kính dần về 0 đều có giao khác rỗng, nghĩa là*

$$\forall\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ đóng, khác rỗng, } A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{và } \lim_{n\to\infty} D(A_n) = 0 \text{ thì } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 3.22. *Không gian metric X là compact khi và chỉ khi X đầy đủ và hoàn toàn bị chặn.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định nghĩa 3.23. *Không gian metric X được gọi là thuộc phạm trù thứ I nếu X biểu diễn được dưới dạng $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, trong đó X_n là các tập thưa. Ngược lại, X được gọi là thuộc phạm trù thứ II.*

Định lý 3.24. *Mọi không gian metric đầy đủ đều thuộc phạm trù thứ II.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Hệ quả 3.25 (Nguyên lý bị chặn đều)**.** *Giả sử F là họ các hàm số liên tục trên không gian metric đầy đủ X sao cho với mọi $x \in X$, tập $\{f(x) : f \in F\}$ bị chặn thì tồn tại tập con U mở khác rỗng của X và số $M > 0$:*

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in U, \ \forall f \in F.$$

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Hệ quả 3.26 (Định lý Weierstrass)**.** *Tồn tại một hàm số thực liên tục trên $[a, b]$ nhưng không khả vi tại mọi điểm thuộc $[a, b]$.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN METRIC ĐẦY ĐỦ

74. Cho dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong không gian metric (X,d) và dãy số thực $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, thỏa mãn

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ và } \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Chứng minh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy.

75. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lần lượt là dãy trong không gian metric (X,d), (X,p). Giả sử rằng

$$d(x_m, x_n) \leq p(x_m, x_n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh nếu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy thì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cũng là dãy Cauchy.

76. Cho không gian metric (X,d), dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X và $f: \ X \to X$ liên tục đều. Chứng minh nếu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy thì $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy.

77. Cho không gian metric (X,d), dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X. Đặt

$$A_n = \{x_k : \ k \geq n\}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to\infty} D(A_n) = 0$.

78. Chứng minh tập A trong không gian metric là hoàn toàn bị chặn khi và chỉ khi mọi dãy trong A đều có chứa một dãy con Cauchy.

79. Cho $d \simeq p$ là hai metric tương đương trên X. Chứng minh nếu (X,d) đầy đủ thì (X,p) đầy đủ.

80. Trên $\mathbb{R}$, đặt $p(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh

(a) p là metric tương đương với metric thông thường d trên $\mathbb{R}$.

(b) Không gian (X,p) không đầy đủ.

81. Cho không gian metric (X,d). Đặt

$$p(x,y) = \ln\left(1 + d(x,y)\right), \ \forall x, y \in X.$$

(a) Chứng minh p là một metric trên X.

(b) Chứng minh nếu (X,p) đầy đủ thì (X,d) đầy đủ.

82. Cho $X = B[0,1]$ là tập hợp các hàm thực bị chặn trên $[0,1]$. Xét ánh xạ

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad f,g \in X.$$

(a) Chứng minh d là một metric trên X.

(b) Xét dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trên X xác định bởi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

Tính $d(f_m, f_n)$ với $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge n$.

(c) Chứng minh dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ trên (X, d).

83. Cho $X = C[0,1]$. Xét các ánh xạ

$$p(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,$$

$$d(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad f,g \in X.$$

(a) Chứng minh d, p là các metric trên X.

(b) Xét dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong X. Chứng minh nếu $f_n \xrightarrow{p} f$ thì $f_n \xrightarrow{d} f$.

(c) Cho ví dụ để chỉ chiều ngược lại ii) có thể không đúng.

(d) (X, d) có phải là không gian metric đầy đủ hay không?

3.3 Không gian metric compact

3.3.1 Tập hoàn toàn chị chặn

Định nghĩa 3.27. *Tập con A của không gian metric (X, d) gọi là hoàn toàn bị chặn nếu với mỗi số dương r, A được phủ bởi hữu hạn quả cầu mở có bán kính r, nghĩa là:*

$$\forall r > 0,\ \exists x_1, x_2, ..., x_n \in X:\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r).$$

Nhận xét:

i) Tập compact là hoàn toàn bị chặn.

ii) Tập hoàn toàn bị chặn thì bị chặn.

iii) Tập con của tập hoàn toàn bị chặn cũng hoàn toàn bị chặn.

iv) Tập con bị chặn của $\mathbb{R}$ là hoàn toàn bị chặn.

Định lý 3.28. *Nếu không gian metric X hoàn toàn bị chặn thì X là không gian khả ly.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

3.3.2 Compact theo dãy

Định nghĩa 3.29. *Không gian metric X được gọi là compact theo dãy nếu mọi dãy trong X đều chứa một dãy con hội tụ.*

Định lý 3.30. *Không gian metric X là compact theo dãy khi và chỉ khi mọi tập con vô hạn của X đều có ít nhất một điểm tụ.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 3.31. *Không gian metric X compact theo dãy thì X hoàn toàn bị chặn*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

Định lý 3.32. *Không gian metric X là compact khi và chỉ khi mọi dãy trong X có chứa một dãy con hội tụ.*

Chứng minh. Chứng minh được trình bày trong giờ lý thuyết. □

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN METRIC COMPACT

84. Chứng minh nếu X, Y là các không gian metric compact thì $X \times Y$ compact.

85. Chứng minh mọi tập compact của không gian metric đều đóng và bị chặn.

86. Cho A là tập compact và $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một phủ mở của A. Chứng minh tồn tại số $r > 0$ sao cho

$$\forall B \subset A,\ D(B) < r \ \Rightarrow\ \exists \alpha_0 \in I:\ B \subset U_{\alpha_0}.$$

87. Chứng minh X là không gian metric compact khi và chỉ khi mọi hàm liên tục trên X đều bị chặn.

88. Cho $f:\ X \to Y$ là toàn ánh, liên tục đều. Chứng minh nếu X hoàn toàn bị chặn thì Y cũng hoàn toàn bị chặn.

89. Chứng minh nếu A hoàn toàn bị chặn thì $\overline{A}$ cũng hoàn toàn bị chặn.

90. Cho X là không gian metric compact và $f:\ X \to X$ liên tục. Đặt $X_n = f^n(X),\ \forall n \in \mathbb{N}$ và $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Chứng minh $A \neq \emptyset$ và $f(A) = A$.

91. Cho X là không gian metric compact và $f:\ X \to X$ thỏa

$$d\left(f(x), f(y)\right) = d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Chứng minh f là song ánh.

92. Cho X là không gian metric compact và $f:\ X \to X$ thỏa

$$d\left(f(x), f(y)\right) < d(x, y), \quad \forall x \neq y,\ x, y \in X.$$

Chứng minh f có duy nhất một điểm bất động.

93. Cho $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ là dãy trong không gian metric compact, có dãy con hội tụ về x. Giả sử mọi dãy con của (x_n) nếu hội tụ, thì cũng hội tụ về x. Chứng minh (x_n) hội tụ về x.

94. Cho X, Y là hai không gian metric và $f: X \to Y$. Chứng minh

(a) Nếu f liên tục thì đồ thị G_f là tập đóng.

(b) Nếu G_f đóng và Y compact thì f liên tục.

95. Chứng minh nếu trên không gian metric liên thông, mọi cặp tập đóng khác rỗng rời nhau đều cách nhau một khoảng dương thì đó là không gian compact.

96. Hai điểm x, y trong không gian metric gọi là nối được nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại n điểm $a_1 = x, a_2, ..., a_{n-1}, a_n = y$ sao cho $d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon,\ \forall i = \overline{1, n-1}$. Chứng minh trong không gian metric liên thông, hai điểm bất kỳ đều nối được.

97. Chứng minh trong không gian metric compact X, hai điểm bất kỳ đều nối được thì X liên thông.

98. Cho X là không gian metric compact, sao cho

$$\overline{B(x,r)} \subset B'(x,r), \quad \forall x \in X,\ \forall r > 0.$$

Chứng minh mọi quả cầu đều là tập liên thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Davide Batic, *Introduction to General Topology*, 2016.

[2]. Mahmoud Filali, *Topology I - Lecture Notes*, Version 2.3a, 2007.

[3]. Nguyễn Bích Huy, *Bài giảng ôn thi Thạc sĩ Toán học - Trường ĐHSP Tp.HCM*, 2004.

[4]. C. McMullen, *Topology - Course Notes*, Harvard University, 2013.

[5]. John Rognes, *Lecture Notes on Topology*, MAT3500/4500, 2010.

[6]. Nguyễn An Sum, *Tôpô đại cương*, Giáo trình dành riêng cho SV Khoa Toán - Trường ĐHSP Tp.HCM.

[7]. Huỳnh Quang Vũ, *Lecture notes on Topology*, Version of January 26, 2018.