# CÁC DẠNG TOÁN ĐƯỜNG BẬC HAI

Sư phạm Toán học (Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh)

# MỤC LỤC

## ĐƯỜNG BẬC HAI



## MẶT BẬC HAI

# ĐƯỜNG BẬC HAI

# *Chủ đề 1*
# ĐỔI MỤC TIÊU

**Phương pháp**

Sử dụng các công thức đổi mục tiêu đã học:

1. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{OI}$ : $Oxy \xrightarrow{T_{\overrightarrow{OI}}} Ix'y'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_o + a_1x' + b_1y' \\ y = y_o + a_2x' + b_2y' \end{cases}$$

2. Phép quay tâm O một góc α : $Oxy \xrightarrow{Q(O;\alpha)} Ox'y'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

***Bài mẫu 1*: Cho hình bình hành ABCD**
***Hãy viết công thức đổi mục tiêu $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sang mục tiêu $(C;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$.***

***Giải***

Ta có : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad C(1;1)$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CB} = (-1;0)$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = 0.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = (0;-1)$

Vậy ta có công thức đổi trục là:

$$\begin{cases} x = 1 - x' + 0.y' = 1 - x' \\ y = 1 + 0x' - y' = 1 - y' \end{cases}$$

***Nhận xét :*** *- Để đổi mục tiêu trong Afin hay trong trực chuẩn không khó, nhưng để tránh sai xót chúng ta cần nhận định đúng yêu cầu của đề bài.*
*- Ở bài này ta đã vận dung tính chất bằng nhau của các cặp cạnh đối của hình bình hành để giải quyết bài toán.*

***Bài mẫu 2* : Cho hai hệ toạ độ trực chuẩn xOy và x'O'y'. Đối với hệ xOy, đường thẳng O'x' và O'y' lần lượt có phương 2x + y - 1 = 0 và x - 2y +4 = 0. Viết công thức đổi toạ độ từ mục tiêu xOy sang mục tiêu x'O'y'.**

***Giải***

Đối với hệ toạ độ Oxy, điểm O'là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow O' = (-\frac{2}{5}; \frac{9}{5})$$

Đường thẳng O'x' có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1;2) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{5}$

Gọi $\vec{i'}$ là véc tơ đơn vị cùng phương với $\vec{u}$ thì ta có :

$$\vec{i'} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}) \text{ hoặc } \vec{i'} = (\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}})$$

Đường thẳng O'y' có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}' = (2;1) \Rightarrow |\vec{u'}| = \sqrt{5}$

Gọi $\vec{j'}$ là véc tơ đơn vị cùng phương với $\vec{u}'$ thì ta có :

$$\vec{j'} = (\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}) \text{ hoặc } \vec{i'} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

Vậy ta có công thức đổi trục là :

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{9}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{9}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = -\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{9}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{9}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

***Nhận xét*** : - *Việc suy ra được $\vec{i'}$ và $\vec{j'}$ là do ta áp dụng tính chất của véc tơ $\vec{u} = |\vec{u}|.\vec{i'}$ và $\vec{u}' = |\vec{u'}|.\vec{j'}$.*

- *Bài toán này có thể có 4 công thức đổi trục.*

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1 :*** Trong hệ trực chuẩn Oxy cho O'= (-4; 2); A = (2; 0) và B = (0; 8)

Hãy viết công thức đổi trục toạ độ từ mục tiêu ***(O'; A,B)*** sang mục tiêu $(O';\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

***Đáp số***: $\begin{cases} x = -4 + 2x' \\ y = 2 + 8y' \end{cases}$

***Bài 2***: Trong hệ trục Oxy, cho tam giác ABC

Hãy viết công thức đổi mục tiêu $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sang mục tiêu $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.

***Đáp số***: $\begin{cases} x = 1 - x' - y' \\ y = x' \end{cases}$

# Chủ đề 2:
# LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG BẬC HAI

## *Dạng 1: Viết phương trình đường bậc hai biết trước hai tiệm cận*

**Phương pháp:**

(C) nhận $\begin{cases}(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{cases}$ làm hai đường tiệm cận

Nên (C) có dạng: $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) + k = 0$ (*)

Dựa vào điều kiện đề bài tìm $k \Rightarrow (C)$

***Bài 1:*** **Một đường cong bậc hai đi qua điểm $(+1; -1)$ và thừa nhận các đường $2x + 3y - 5 = 0$ và $5x + 3y - 8 = 0$ làm tiệm cận. Lập phương trình đường cong đó.**

***Lời giải:***

(C) nhận các đường $2x + 3y - 5 = 0$ và $5x + 3y - 8 = 0$ làm tiệm cận
nên (C) có dạng:

$$(2x + 3y - 5)(5x + 3y - 8) + k = 0$$

$$(+1; -1) \in (C) \Rightarrow \quad (2 - 3 - 5)(5 - 3 - 8) + k = 0 \Rightarrow k = -36$$

Vậy $(C): 10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$

***Nhận xét:*** *- Để giải quyết bài toán này chúng ta chỉ cần vận dụng phương trình (*), sau đó cho qua điểm (1, -1) là xong.*

***Bài mẫu 2:*** **Lập phương trình đường cong tiếp xúc với đường thẳng $4x + y + 5 = 0$ và thừa nhận các đường thẳng $x - 1 = 0$ và $2x - y + 1 = 0$ làm tiệm cận.**

***Lời Giải:***

(C) nhận các đường $x - 1 = 0$ và $2x - y + 1 = 0$ làm tiệm cận nên (C) có dạng:

$$(x - 1)(2x - y + 1) + k = 0$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x + y + 5 = 0 \\ (x-1)(2x - y + 1) + k = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -4x - 5 \\ (x-1)(6x+6) + k = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -4x - 5 \\ 6x^2 - 6 + k = 0 \quad (1)\end{cases}$$

(C) tiếp xúc với đường thẳng $4x + y + 5 = 0 \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép: $x = 0 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy $(C): 2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$

***Nhận xét**:* *- Bài toán này giải quyết vẫn dựa vào phương trình (*), và sử dụng điều kiện tiếp xúc với đường thẳng. Việc tính toán không có gì khó khăn.*

***Bài mẫu 3:*** **Lập phương trình Hyperbol qua các điểm *(2, 1); (-1, -2) và* $(+\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$ với điều kiện một tiệm cận của nó trùng với Ox.**

***Lời Giải:***

(H) nhận các đường $y=0$ và $ax+by+c=0$ với $(a,b)\neq(0,0)$ làm tiệm cận
nên (H) có dạng: $(ax+by+c)y+k=0$

(H) qua $(+2;+1);(-1;-2);(+\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a+b+c+k=0 \\ 2a+4a-2c+k=0 \\ 2a-b+4c-16k=0 \end{cases} \quad (1)$$

Lập ma trận các hệ số mở rộng:

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -16 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3\to d_3-d_1]{d_2\to d_2-d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -17 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3\to 3d_3+2d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -51 & 0 \end{array}\right]$$

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{35}{2}k \\ b=c=17k \end{cases}$ .Chọn $k=-2\Rightarrow a=35, b=c=-34$

$$\text{Vậy}\,(H): 35xy-34y^2-34y-2=0$$

***Nhận xét**:* *- Một tiệm cận trùng với trục Ox, nghĩa là (H) có phương tiệm cận là phương Ox, tức là véc tơ (1, 0) của trục Ox.*
*- Như vậy, bài toán này có thể giải quyết theo cách khác.Tuy nhiên cách giải trên là tốt nhất.*

## *Dạng 2: Đường bậc hai qua các điểm và cắt các đường thẳng*

**Phương pháp:**

$(C): ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, (a,b,c)\neq(0,0,0)$

Dựa vào điều kiện đề bài thiết lập mối liên hệ giữa các hệ số, từ đó tìm được phương trình (C).

***Bài mẫu1: Đường cong bậc hai đi qua cácđiểm*** $(0;0);(0;+2);(+2;+4)$ ***và chỉ cắt mỗi đường thẳng sau:*** $3x-2y+1=0$ và $2x+y-5=0$ ***tại một điểm. Lập phương trình đường cong đó.***

*Lời Giải:*

$(C): ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, (a,b,c)\neq(0,0,0)$

(C) qua điểm $(0;0);(0;+2)$ nên $f=0$ và $4c+4e=0$

Vậy (C) có dạng: $ax^2+2bxy+cy^2+2dx-2cy=0$

Thay $y=\frac{1}{2}(3x+1)$ vào (C) ta được:

$$ax^2+bx(3x+1)+\frac{1}{4}c(3x+1)^2+2dx-c(3x+1)=0 \Leftrightarrow (a+3b+\frac{9}{4}c)x^2+(b-\frac{3}{2}c+2d)x-\frac{3}{4}c=0$$

Thay $y=5-2x$ vào (C) ta được:

$$ax^2+2bx(5-2x)+c(5-2x)^2+2dx-2c(5-2x)=0 \Leftrightarrow (a-4b+4c)x^2+(10b-16c+2d)x+15c=0$$

(C) qua điểm $(+2;+4)$ và cắt $3x-2y+1=0$ và $2x+y-5=0$ tại một điểm nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+4b+2c+d=0 \\ 4a+12b+9c=0 \\ a-4b+4c=0 \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} b-\frac{3}{2}c+2d\neq 0 \\ 10b-16c+2d\neq 0 \end{cases}$ (2)

Lập ma trận các hệ số mở rộng:

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3\to d_3-d_1]{d_2\to d_2-4d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3\to d_3-2d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3c \\ b=\frac{1}{4}c \\ d=0 \end{cases}$ .Chọn $c=-2 \Rightarrow a=6, b=-\frac{1}{2}, d=0$ thỏa (2)

$$\text{Vậy } (C): 6x^2-xy-2y^2+4y=0$$

***Nhận xét*** : *- Bài toàn này chúng ta có tất cả 5 dữ kiện, do đó chúng ta sẽ thiết lập các phương trình theo một tham số khác không do đó bài toán đã được giải quyết.*

***Bài mẫu 2:*** **Một đường cong bậc hai chỉ cắt mỗi trục tọa độ tại gốc O. Ngoài ra biết nó đi qua hai điểm** $(+2;-1);(-2;+2)$ **. Lập phương trình đường cong đó.**

*Lời Giải:*

$(C): ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, (a,b,c)\neq(0,0,0)$

(C) chỉ cắt mỗi trục tọa độ tại gốc O nên

$a = c = f = 0 \Rightarrow (C): bxy + dx + ey = 0, b \neq 0$

(C) qua $(2;-1);(-2;2)$ nên ta có hệ pt :

$$\begin{cases} -2b + 2d - e = 0 \\ -4b - 2d + 2e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 2d - e = 0 \\ -6b + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4b \\ e = 6b \end{cases}$$

$\Rightarrow (C): bxy + 4bx + 6by = 0$

Vậy $(C): xy + 4x + 6y = 0$

***Nhận xét*** *: - Các dữ kiện của bài toán này cho hơi khó nhận biết. Tuy nhiên, với các dữ kiện đó, nếu phát hiện tốt thì bài toán được giải quyết đơn giản như trên.*

*- (C) cắt trục Ox tại một điểm thì a = 0, cắt Oy tại một điểm thì c = 0 và qua O nên f = 0. Việc còn lại thật dễ dàng.*

***Dạng 3: Đường bậc hai có tâm cho trước***

**Phương pháp:**

(C) có tâm tại điểm $(x_o; y_o)$ có dạng:

$$a(x - x_o)^2 + 2b(x - x_o)(y - y_o) + c(y - y_o)^2 + d = 0, (a, b, c) \neq (0,0,0)$$

Dựa vào điều kiện đề bài tìm $a, b, c, d \Rightarrow (C)$

***Bài mẫu 1:*** **Đường cong bậc hai có tâm $(0;-1)$, đi qua $(+3;0)$ và chỉ cắt mỗi đường sau: $2x - 3y + 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$ tại một điểm. Lập phương trình đường cong đó.**

*Lời Giải:*

(C) có tâm $(0;-1)$ nên có dạng: $ax^2 + 2bx(y+1) + c(y+1)^2 + d = 0, (a, b, c) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow (C): ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2bx + 2cy + c + d = 0$

Thay $x = \frac{1}{2}(3y - 1)$ vào (C) ta được:

$$\frac{1}{4}a(3y-1)^2 + by(3y-1) + cy^2 + b(3y-1) + 2cy + c + d = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}a + 3b + c\right)y^2 + \left(-\frac{3}{2}a + 2b + 2c\right)y + \frac{1}{4}a - b + c + d = 0$$

Thay $x = 5 - y$ vào (C) ta được:

$$a(5-y)^2 + 2by(5-y) + cy^2 + b(5-y) + 2cy + c + d = 0 \Leftrightarrow (a - 2b + c)y^2 + (-10a + 9b + 2c)y + 25a + 5b + c + d = 0$$

(C) qua điểm $(+3;0)$ và cắt $2x - 3y + 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$ tại một điểm nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ 9a + 12b + 4c = 0 \\ 9a + 6b + c + d = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{và} \quad \begin{cases} -\frac{3}{2}a + 2b + 2c \neq 0 \\ -10a + 9b + 2c \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Lập ma trận các hệ số mở rộng:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 9d_1]{d_2 \to d_2 - 9d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to 5d_3 - 4d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1/6d\\ b=1/24d\\ c=1/4d\end{cases}.\text{Chọn } d=-12\Rightarrow a=2, b=-\frac{1}{2}, c=-3.\text{Vậy}$$

$(C): 2x^2-xy-3y^2-x-6y-15=0$

<u>***Nhận xét***</u>: *- Với điều kiện bài toán có tâm thì bài toán chỉ còn 4 ẩn số. Do đó với 3 dữ kiện còn lại ta có thể tìm ba tham số theo một tham số ( lời giải trên là tìm theo tham số d). Khi đó bài toán được giải quyết.*

***Bài mẫu 2:*** **Một đường cong bậc hai đi qua các điểm** $(0;0);(0;+1);(+1;0)$. **Ngoài ra biết tâm của nó là** $(+2;+3)$. **Lập phương trình của đường cong đó.**

<u>*Lời Giải:*</u>

(C) có tâm $(+2;+3)$ có dạng: $a(x-2)^2+2b(x-2)(y-3)+c(y-3)^2+d=0,(a,b,c)\neq(0,0,0)$

$\Rightarrow (C): ax^2+2bxy+cy^2-(4a+6b)x-(4b+6c)y+4a+12b+9c+d=0$

(C) qua $(0;0);(0;+1);(+1;0)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a+6b+9c+d=0\\ 4a+12b+9c+d=0\\ 4a+8b+4c+d=0\end{cases}$ (1)

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&6&9&1&0\\4&12&9&1&0\\4&8&4&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[d_3\to d_3-4d_1]{d_2\to-\frac{1}{3}(d_2-4d_1)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&6&9&1&0\\0&4&9&1&0\\0&-16&-32&-3&0\end{array}\right]\xrightarrow{d_3\to d_3+4d_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&6&9&1&0\\0&4&9&1&0\\0&0&4&1&0\end{array}\right]$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5/8d\\ b=5/16d\\ c=-1/4d\end{cases}$$

.Chọn $d=-8\Rightarrow a=5, b=-\frac{5}{2}, c=2$.Vậy $(C): 5x^2-5xy+2y^2-5x-2y=0$

<u>***Nhận xét***</u>: *- Bài toán này tương tự bài toán trên là (C) có tâm và ngoài ra còn có thêm 3 dữ kiện.*

***Dạng 4: Đường bậc hai qua các điểm cho trước***

<u>**Phương pháp:**</u>

$(C): ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Dựa vào điều kiện đề bài thiết lập mối liên hệ giữa các hệ số , từ đó tìm được phương trình đường bậc hai (C).

***Bài mẫu1:*** **Lập phương trình đường cong bậc hai đi qua 5 điểm:**
$(0;0);(0;+2);(-1;0);(-2;+1);(-1;+3)$.

*Lời Giải:*

$(C): ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, (a,b,c)\neq(0,0,0)$

(C) qua điểm $(0;0);(0;+2);(-1;0)$ nên $f=0; 4c+4e=0$ và $a-2d=0$

Vậy (C) có dạng: $ax^2+2bxy+cy^2+ax-2cy=0$

(C) qua điểm $(-2;+1);(-1;+3)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2a-4b-c=0\\-6b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3b\\c=2b\end{cases}$

$\Rightarrow (C): 3bx^2+2bxy+2by^2+3bx-4by=0$

$$\text{Vậy } (C): 3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$$

***Nhận xét:*** *- Bài toán này đã có 5 giả thiết, do đó ta thiết lập 5 ẩn theo ẩn còn lại là bài toán được giải quyết.*
*- Lời giải trên đã trình bày một cách giải là để rút gọn dần các hệ số làm cho cách giải đơn giản hơn.*

***Bài mẫu 2:*** **Lập phương trình Parabol đi qua 4 điểm:**
$(0;+15);(+3;0);(+5;0);(+2;+3)$.

*Lời Giải:*

(P) có dạng: $(C): ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, (a,b,c)\neq(0,0,0)$

(P) qua $(+3;0);(+5;0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}9a+6d+f=0\\25a+10d+f=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a+6d+f=0\\16a+4d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f=15a\\d=-4a\end{cases}$$

$\Rightarrow (P): ax^2+2bxy+cy^2-8ax+2ey+15a=0$

(P) qua $(0;+15);(+2;+3)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}3a+45c+6e=0\\3a+12b+9c+6e=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+45c+6e=0\\12b-36c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+45c+e=0\\b=3c\end{cases}\quad(1)$$

(P) không có tâm nên hệ pt: $\begin{cases}ax+by-4a=0\\bx+cy+e=0\end{cases}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}\neq\dfrac{-4a}{e}$ (2)

$$(1)\&(2)\Rightarrow\begin{cases}a=9c\\b=3c\\e=-72c\end{cases}\Rightarrow (P): 9cx^2+6cxy+cy^2-72cx-144cy+135c=0$$

$$\text{Vậy (P): } 9x^2+6xy+y^2-72x-144y+135=0$$

***Nhận xét:*** *- Bài toán này yêu cầu là tìm Parabol, do đó chúng ta phải chú ý tới một điều kiện đã cho ẩn, đó là (P) không có tâm. Bài toán đã được giải quyết như trên.*

*Dạng 5: Đường bậc hai tiếp xúc với các đường thẳng tại các điểm*

***Bài mẫu 1:*** **Lập phương trình Parabol tiếp xúc với trục Ox tại** $(+3;0)$ **và trục Oy tại** $(0;+5)$.

*Lời Giải:*

(P) có dạng: $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Thay $y=0$ vào (P) ta được: $ax^2+2dx+f=0$ (1)

Thay $x=0$ vào (P) ta được: $cy^2+2ey+f=0$ (2)

(P) tiếp xúc với Ox tại $(+3;0)\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm kép:

$$x=-\frac{d}{a}=3 \text{ và } d^2-af=0\Rightarrow\begin{cases}d=-3a\\ f=9a\end{cases}$$

(P) tiếp xúc với Oy tại $(0;+5)\Leftrightarrow(2)$ có nghiệm kép:

$$y=-\frac{e}{c}=5 \text{ và } e^2-cf=0\Rightarrow\begin{cases}e=-5c\\ f=25c\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1/9f\\ c=1/25f\\ d=-1/3f\\ e=-1/5f\end{cases}.\text{Chọn } f=225\Rightarrow a=25,c=9,d=-75,e=-45$$

$$\Rightarrow(P):25x^2+2bxy+9y^2-150x-90y+225=0$$

(P) không có tâm nên hệ phương trình:

$$\begin{cases}25x+by-75=0\\ bx+9y-45=0\end{cases}\text{vô nghiệm }\Leftrightarrow\frac{25}{b}=\frac{b}{9}\neq\frac{-75}{-45}\Rightarrow b=-15$$

$$\text{Vậy}(P):25x^2-30xy+9y^2-150x-90y+225=0$$

***Nhận xét:*** *- Các dữ kiện của bài toán đã rõ: không tâm (vì là Parabol), Qua 2 điểm và tiếp xúc với hai đường thẳng.*
*- Việc tính toán hơi phức tạp do đó phải cẩn thận vì các bài toán dạng này thường là số hơi lớn.*

***Bài mẫu 2:*** **Lập phương trình đường cong bậc hai qua gốc tọa độ tiếp xúc với đường thẳng** $(\Delta_1):4x+3y+2=0$ **tại** $(+1;-2)$ **và với đường thẳng** $(\Delta_2):x-y-1=0$ **tại** $(0;-1)$**.**

*Lời Giải:*

(C) đi qua gốc tọa độ có dạng: $(C):ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey=0,(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $(+1;-2)$ là:

$(d_1):ax+b(y-2x)-2cy+d(1+x)+e(y-2)=0\Rightarrow(d_1):(a-2b+d)x+(b-2c+e)y+d-2e=0$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $(0;-1)$ là:

$(d_2):-bx-cy+dx+e(y-1)=0\Rightarrow(d_2):(d-b)x+(e-c)y-e=0$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}(d_1)\equiv(\Delta_1)\\(d_2)\equiv(\Delta_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a-2b+d}{4}=\dfrac{b-2c+e}{3}=\dfrac{d-2e}{2}\\ d-b=c-e=e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-b+e}{4}=\dfrac{b-3e}{3}=\dfrac{b-e}{2}\\ c=2e\\ d=b+e\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-12e\\ b=-3e\\ c=2e\\ d=-2e\end{cases}\Rightarrow (C):-12ex^2-6exy+2ey^2-4ex+2ey=0$$

$$\text{Vậy}\,(C):6x^2+3xy-y^2+2x-y=0$$

***Nhận xét***: - *Các dữ kiện của bài toán này dễ dàng thấy rõ, tuy nhiên việc tính toán hơi phức tạp. Chúng ta sử dụng kỹ thuật như trên sẽ đơn giản hoá bài toán đi rất nhiều.*

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1*** **:**Cho đường cong $(C):2x^2-6xy+5y^2-2x+2y-10=0$. Tịnh tiến hệ trục tới tâm. Viết phương trình đường cong trong hệ mới.

***Đáp số***: $2X^2-6XY+5Y^2-11=0$

***Bài 2:*** Tìm a,b để $(C):2x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$ biểu diễn:

a. Một đường cong có tâm.
b. Một đường cong thuộc loại Parabol.
c. Một đường cong có vô số tâm.

***Đáp số***: a. $a\neq\dfrac{9}{2}\wedge b\in\mathbb{R}$ b. $a=\dfrac{9}{2}\wedge b\neq\dfrac{9}{2}$ c. $a=\dfrac{9}{2}\wedge b=\dfrac{9}{2}$

***Bài 3:*** Viết phương trình Parabol đi qua 2 điểm $(0;0);(0;+1)$ biết rằng trục của nó song song với đường thẳng $x+y=0$

***Đáp số***: $(P):x^2+2xy+y^2+kx-y=0,\forall k\neq-1$

# *Chủ đề 3*
# PHƯƠNG TIỆM CẬN - ĐƯỜNG TIỆM CẬN

**A-*<u>ĐỐI VỚI ĐƯỜNG BẬC HAI</u>*: (C): $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$**

***<u>Dạng 1</u>: Tâm - Phương tiệm cận - Đường tiệm cận***

**<u>Phương pháp</u>:**

Đường bậc hai (C) có dạng: $F(x,y)= ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f =0$

Tâm $I(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} F'_x(x_o,y_o)=0 \\ F'_y(x_o,y_o)=0 \end{cases}$

Phương tiệm cận $\vec{v}=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ thoả hệ phương trình:

$$a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2=0$$

=> Ta tìm được $\alpha,\beta$

Nếu tâm không thuộc (C) thì đường tiệm cận là đường thẳng qua tâm và có véc tơ chỉ phương là phương tiệm cận.

***<u>Bài mẫu 1</u>:Tìm tâm của các đường cong :***

**a) (C): $x^2-4xy+4y^2+10x-20y+25=0$**

**b) (C): $9x^2-6xy+y^2+2x-7=0$**

**c) (C): $x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$**

**<u>Lời Giải</u> .**

**a) (C): $x^2-4xy+4y^2+10x-20y+25=0$**

Tâm I(x,y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ -2x+4y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y-10=0 \\ -2x+4y+10=0 \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm suy ra ( C) có vô số tâm.

**b) (C): $9x^2-6xy+y^2+2x-7=0$.**

Tâm I(x,y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x-3y+1=0 \\ -3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-3y+1=0 \\ -9x+3y=0 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm suy ra (C ) không gó tâm:

**c) (C): $x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$.**

Tâm I(x,y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+3y+2=0 \\ 3x+9y+6=0 \end{cases}$$

Hệ có vô nghiệm suy ra (C ) có vô số tâm.

***Bài mẫu 2**: Tìm phương tiệm cận của các đường bậc hai sau:*

**a)** $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$

**b) (C ):** $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

**a)** $\mathbf{3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0}$

Gọi $\vec{v}(\alpha,\beta)$ là phương tiệm cận . Ta giải phươg trình:

$$3\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\beta}{3} \\ \alpha = -\beta \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (1,3) \\ \vec{v}_2 = (-1,1) \end{cases}$$

Vậy có 2 phương tiệm cận là: $\begin{cases} \vec{v}_1 = (1,3) \\ \vec{v}_2 = (-1,1) \end{cases}$

**b) (C ):** $\mathbf{3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0}$

Gọi $\vec{v}(\alpha,\beta)$ là phương tiệm cận . Ta giải phươg trình:

$$3\alpha^2 + 10\alpha\beta + 7\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-7\beta}{3} \\ \alpha = -\beta \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (-7,3) \\ \vec{v}_2 = (-1,1) \end{cases}$$

Vậy (C ) có hai phương tiệm cận là : $\begin{cases} \vec{v}_1 = (-7,3) \\ \vec{v}_2 = (-1,1) \end{cases}$

***Bài mẫu 3**: Tìm tâm - Phương tiệm cận - Đường tiệm cận của các đường bậc hai sau:*

*a)* $9x^2-2xy+6y^2-16x-8y-2=0$

*b)* $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$

*c)* $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$

**Lời Giải**

**a/** Tâm I(x; y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 9x - y - 8 = 0 \\ -x + 6y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-\dfrac{-44}{53}, \dfrac{28}{53})$

Phương tiệm cận $\vec{v} = (\alpha,\beta)$ . Ta giải pt:

$$9\alpha^2 - 2\alpha\beta + 6\beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 + 8\alpha^2 + 5\beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Vậy không có phương tiệm cận.

**Vậy không có đường tiệm cận**.

**b**) Tâm I(x,y) là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} 8x+3y-13=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow I(2,-1) \notin (C)$$

Phương tiệm cận $\vec{v}=(\alpha,\beta)$. Xét pt:

$$8\alpha^2+6\alpha\beta=0$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha(4\alpha+3\beta)=0$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=0 \\ \alpha=\dfrac{-3\beta}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} v_1=(0,1) \\ v_2=(-3,4) \end{cases}$$

**Vậy ta sẽ có hai đường tiệm cận có pt là :**

$$d_1 \begin{cases} x=2 \\ y=-1+t \end{cases} (t\in R)$$
$$d_2 \begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+4t \end{cases} (t\in R)$$

**c**) Tâm I(x; y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-5=0 \\ -x+y-3=0 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm .suy ra ( C) không có tâm.

Phương tiệm cận $\vec{v}=(\alpha,\beta)$ . ta xét pt:

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha=\beta$$

Vậy chỉ có một phương tiệm cận: $\vec{v}$ **=(1,1)**

**Vì ( C) không có tâm nên không có đường tiệm cận** .

***Nhận xét*:** *-Đường bậc hai ( C) có thể có duy nhất một tâm hoặc vô số tâm, cũng có thể không có tâm .*

*-Khi đường bậc hai không có tâm hoặc không có phương tiệm cận thì đường bậc hai không có đường tiệm cận.*

***<u>Dạng 2</u>:Lập phương trình đường cong ( C) với các điều kiện có liên quan tới tâm, phương tiệm cận , đường tiệm cận**.*

***<u>Phương pháp:</u>***

- Viết pt tổng quát của đường cong ( C).
- Dựa vào các điều kiện đã cho ta tìm ra các hệ số của phương trình.
- Sau đó thế các hệ số vào phương trình tổng quát ta được phương trình đường bậc 2 ( C) cần tìm.

***<u>Bài mẫu 1</u>:Lập phương trình Hypebol đi qua các điểm (1,2),(-1,-1),*** $(\frac{1}{2},\frac{-1}{4})$ ***với điều kiện một tiệm cận của nó trùng với Ox.***

**<u>Lời Giải:</u>**

Phương trình tổng quát của Hypebol: (H):$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+e=0$.

Vì (H) có 1 tiệm cận $\vec{v}=(\alpha,\beta)$ trùng với Ox nên $\Rightarrow(0,1)$ là nghiệm của pt:

$$a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2=0\Rightarrow a=0$$

(H) trở thành :$2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$

Vì *c, b* khác không nên ta có thể viết (H) như sau:$2xy+y^2+2dx+2ey+f=0$

Vì (H) đi qua 3 điểm (2,1),(-1,-1), $(\frac{1}{2},\frac{-1}{4})$ nên ta có hệ pt:

$$\begin{cases}4d+2e+f=-5\\-2d-2e+e=-3\\d-\frac{1}{2}e+f=\frac{3}{16}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=\frac{21}{4}\\e=\frac{-67}{8}\\f=\frac{-37}{4}\end{cases}$$

Vậy phương trình của (H) là:$\boldsymbol{16xy+8y^2+42x-67y-74=0}$.

***<u>Nhận xét</u>*** : *- Những bài toán lập phương trình với dữ kiện có liên quan đến tâm, phương tiệm cận và đường tiệm cận thì không khó. Tuy nhiên đòi hỏi người học phải biến đổi tốt dựa vào các dữ kiện của đề bài.*

***<u>Bài mẫu 2</u>:Lập pt đường cong bậc hai có tâm tại I(0,-1), qua (3,0) và chỉ cắt mỗi đường thẳng $d_1$, $d_2$ tại 1 điểm:***

$$d_1: 2x-3y+1=0$$
$$d_2 x+y-5=0$$

**Lời Giải:**

Đường cong ( C) có tâm I(0,1) nên có pt:

$$a(x-0)^2+2b(x-0)(y+1)+c(y+1)^2+f=0$$

$$\Leftrightarrow \quad ax^2+2bxy+cy^2+2bx+2cy+c+f=0\ (*)$$

Qua (3,0) nên ( C) có dạng:

$$9a+6b+c+f=0 \qquad (1)$$

$$d_1:\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+2t\end{cases}(t\in R)$$

$$d_2:\begin{cases}x=2+t\\ y=3-t\end{cases}(t\in R)$$

Vì $d_1$ cắt (C ) tại một điểm nên pt sau chỉ có 1 nghiệm:

$a(1+3t)^2+2b(1+3t)(1+2t)+c(1+2t)^2+2b(1+3t)+2c(1+2t)+c+f=0$

$\Leftrightarrow (9a+12b+4c)t^2+(6a+16b+8c)t+a+4b+4c+f=0\ (*)$

(*) chỉ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}9a+12b+4c=0\\ 6a+16b+8c\neq 0\end{cases}(2)$

Vì $d_2$ cắt ( C) tại một điểm tương tự như trên ta có pt:

$a(2+t)^2+2b(2+t)(3-t)+c(3-t)^2+2b(2+t)+2c(3-t)+c+f=0$

$\Leftrightarrow (a-2b+c)t^2+(4a+4b-8c)t+4a+16b+16c+f=0 \qquad (*)$

(*)chỉ có một nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}a-2b+c=0\\ 4a+4b-8c\neq 0\end{cases}(3)$

Từ (1),(2),(3) chọn f=12 $\Rightarrow$ a=2,b=$\frac{-1}{2}$,c=-3

Vậy pt của (C ) là:

$$\mathbf{2x^2-xy-3y^2-x-6y+9=0.}$$

***Nhận xét***: *-Phương trình đường bậc 2 ( C) có tâm $I(x_o,y_o)$ có dạng:*

$$a(x-x_o)+2b(x-x_o)(y-y_0)+c(y-y_0)^2+f=0.$$

*-Phương trình :$Ax^2+2Bx+C=0$ chỉ có 1 nghiệm khi và chỉ khi :*

$$\begin{cases}A=0\\ B\neq 0\end{cases}$$

# Bài tập tương tự

***Bài 1*** **:** Tìm phương tiệm cận của các đường bậc hai sau:

1) $10xy-2y^2+6x+4y-21=0$

***Đáp số***: $\begin{cases} \vec{v}_1 = (1,0) \\ \vec{v}_2 = (-1,1) \end{cases}$

2) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$

***Đáp số***: $\begin{cases} \vec{v}_1 = (0,1) \\ \vec{v}_2 = (3,2) \end{cases}$

***Bài 2*** **:** Tìm tâm - Phương tiệm cận - Đường tiệm cận của các đường bậc hai sau:

a) (C) $9x^2-2xy+6y^2-16x-8y-2=0$.

b) (C): $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$ (1)

***Đáp số*** : a. $I(\frac{-44}{53}, \frac{28}{53})$, ***Không có phương tiệm cận***

**b.** $I(2,-1)$, $\begin{cases} v_1 = (0,1) \\ v_2 = (-3,4) \end{cases}$;

**(d₁):** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1+t \end{cases} (t \in R)$ **(d₂)**: $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -1+4t \end{cases} (t \in R)$

# Chủ đề 4

# GIAO TUYẾN CỦA ĐƯỜNG BẬC HAI VỚI ĐƯỜNG THẲNG

***Phương pháp:***

*Cho đường cong (C): $F(x;y) = ax^2+2bxy + cy^2 +2dx +2ey + f = 0,(a,b,c) \neq (0,0,0)$* ***(1)***

*Và đường thẳng (d)* : $\begin{cases} x = x_o + t\alpha \\ y = y_o + t\beta \end{cases}$ ***(2)***

*Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C) và (d). khi đó tọa độ của M là nghiệm của hệ (1) và (2).*

*(2) thế vào (1)*

$\Rightarrow a(x_0+t\alpha)^2 + 2b(x_0+t\alpha)(x_0+t\beta) + c(x_0+t\beta)^2 +2d(x_0+t\alpha) +2e(x_0+t\beta)+f=0$

$\Leftrightarrow Pt^2 +2Qt + R = 0$ ***(3)***

*Trong đó:*

$P = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2$

$2Q = (2ax_0 + 2by_0 + 2d) + (2bx_0 + 2cy_0 + 2e) = F_x'(x_0;y_0) + F_y'(x_0;y_0)$

$R = F(x_0;y_0)$

* $P = 0$: ***(3)***..$Qt+R = 0$ ***(4)***

- $Q = 0$: (4) $\rightarrow R = 0$ :$M(x_0;y_0) \in (C) \rightarrow$ (d) nằm trên (C)

  $M(x_0;y_0) \notin (C) \rightarrow$ (d) không nằm trên (C)

- $Q \neq 0$ : (4) $\rightarrow t = -\dfrac{R}{Q}$:(d) giao với (C) tại 1 điểm

* $P \neq 0$: $\Delta' = Q^2 - PR$

- $\Delta>0$: ***(3)*** *có 2 nghiệm phân biệt $\rightarrow$ (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt*
- $\Delta = 0$: ***(3)*** *có nghiệm kép $\rightarrow$ (d) cắt (C) tại 2 điểm trùng nhau*
- $\Delta<0$ : ***(3)*** *có 2 nghiệm phức $\rightarrow$ (d) cắt (C) tại 2 nghiệm ảo*

*Khi (d) nằm trên (C) hoặc (d) cắt (C) tại 2 điểm trùng nhau thì ta nói (d) là tiếp tuyến của (C)*

***Bài mẫu 1: Tìm giao điểm của đường cong***

$$(C): x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

***với các đường thẳng:***

***a.*** $(d_1): 5x - y - 5 = 0$

***b.*** $(d_2): x + 2y + 2 = 0$

***c.*** $(d_3): x + 4y - 1 = 0$

***d.*** $(d_4): x - 3y = 0$

***<u>Lời Giải:</u>***

a. Tọa độ giao điểm của $(d_1)$ và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0 \\ 5x-y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x(5x-5)-3(5x-5)^2-4x-6(5x-5)+3=0 \\ y=5x-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -84x^2+126x-42=0 \\ y=5x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right. \\ y=5x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \wedge y=-\frac{5}{2} \\ x=1 \wedge y=0 \end{array}\right.$$

Vậy $(d_1)$ và (C) có 2 giao điểm lần lượt có tọa độ là $(+\frac{1}{2};-\frac{5}{2})$ và $(+1;\ 0)$

b. Tọa độ giao điểm của $(d_2)$ và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0 \\ x+2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ (2y+2)^2+2(2y+2)y-3y^2+4(2y+2)-6y+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ 5y^2+14x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ Hệ phương trình vô nghiệm}$$

Vậy (C) và $(d_2)$ không có điểm chung.

c. Tọa độ giao điểm của $(d_3)$ và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0 \\ x+4y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-4y \\ (1-4y)^2-2(1-4y)y-3y^2-4(1-4y)-6y+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-4y \\ 21y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy giao điểm của (C) và $(d_3)$ có tọa độ là $(+1;\ 0)$

d. Tọa độ giao điểm của $(d_4)$ và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0 \\ x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ (3y)^2-2(3y)y-3y^2-4(3y)-6y+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ -18y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Vậy giao điểm của (C) và $(d_4)$ có tọa độ là $(+\frac{1}{2};+\frac{1}{6})$

***<u>Nhận xét</u>**:* *- Việc tìm giao điểm thực chất là quy về việc giải phương trình bậc hai. Việc này thật dễ dàng.*

# Chủ đề 5
# PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG BẬC HAI

***Dạng 1: Tiếp tuyến thoả điều kiện cho trước***

**<u>Phương pháp:</u>**

Trong $(xOy)$ cho đường bậc hai

$(C): ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, (a,b,c) \neq (0,0,0)$

(d) là tiếp tuyến của (C) khi nó nằm trên (C) hoặc cắt (C) tại hai điểm trùng nhau ,từ đó ta giải hệ gồm hai phương trình (C) và (d), sử dụng điều kiện tiếp xúc $\Rightarrow$ (d)

***Bài mẫu 1:*** **Trong** $(xOy)$ **cho đường bậc hai**

$$(C): 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$$

**Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) trong các trường hợp sau đây:**

**a. (d) song song với đường thẳng** $x + y = 0$

**b.(d) đi qua điểm** $(+5;0)$

**c. (d) đi qua điểm** $(+1;+1)$

*<u>Lời Giải:</u>*

$(C): 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$

**a)** Tiếp tuyến (d) của (C) song song với đường thẳng $x + y = 0$

nên (d) có dạng: $x + y + m = 0\ (m \neq 0)$

Thay $y = -x - m$ vào (C) ta được:

$2x^2 - 4x(x+m) + 5(x+m)^2 - 6x + 8(x+m) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(3m+1)x + 5m^2 + 8m - 1 = 0 \quad (1)$

$(1): \Delta' = (3m+1)^2 - 3(5m^2 + 8m - 1) = -6m^2 - 18m + 4$

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = -6m^2 - 18m + 4 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 9m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-9 \pm \sqrt{105}}{6}$

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến $(d): x + y + \dfrac{-9 \pm \sqrt{105}}{6} = 0$

**b)** (d) đi qua điểm $(+5;0)$ nên (d) có dạng: $\begin{cases} x = 5 + at \\ y = bt \end{cases}, (a,b) \neq (0,0)$ thay vào (C)

ta được: $2(5+at)^2 + 4bt(5+at) + 5b^2t^2 - 6(5+at) - 8bt - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2a^2 + 4ab + 5b^2)t + 2(7a + 6b)t + 19 = 0 \quad (2)$

$\Delta' = (7a + 6b)^2 - 19(2a^2 + 4ab + 5b^2)$ và $2a^2 + 4ab + 5b^2 > 0, \forall a, b$

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = (7a+6b)^2 - 19(2a^2+4ab+5b^2) = 0 \Leftrightarrow 11a^2 + 8ab - 59b^2 = 0$

Chọn $b=1$ ta có: $11a^2 + 8a - 59 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-4 \pm \sqrt{665}}{11}$

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến $(d): \begin{cases} x = 5 + \dfrac{-4 \pm \sqrt{665}}{11} t \\ y = t \end{cases}$

**c)** (d) đi qua điểm $(+1;+1)$ nên (d) có dạng : $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \end{cases}, (a,b) \neq (0,0)$ thay vào (C) ta được: $2(1+at)^2 + 4(1+at)(1+bt) + 5(1+bt)^2 - 6(1+at) - 8(1+bt) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2a^2 + 4ab + 5b^2)t + 2(a+3b)t - 4 = 0 \quad (3)$

$\Delta' = (a+3b)^2 + 4(2a^2+4ab+5b^2)$ và $2a^2 + 4ab + 5b^2 > 0, \forall a, b$

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = (a+3b)^2 + 4(2a^2+4ab+5b^2) = 0 \Leftrightarrow 9a^2 + 22ab + 29b^2 = 0 \Leftrightarrow$ vô nghiệm

Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua điểm $(+1;+1)$

***Nhận xét***: *- Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi (d) cắt (C) tại hai điểm trùng nhau hoặc (d) nằm hoàn toàn trên (C).*
*- Có nhiều cách để giải dạng toán này. Tuy nhiên, tuỳ theo bài toán mà ta sử dụng phương pháp cho phù hợp. Chúng ta có thể tham khảo cách giải trên.*

***Bài mẫu 2:*** **Viết phương trình tiếp tuyến với** $(C): x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$**, biết tiếp tuyến song song với trục Ox**

Lời Giải:

$(C): x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$

Tiếp tuyến (d) của (C) song song với Ox nên (d) có dạng: $y + m = 0$ $(m \neq 0)$ thế (d) vào (C) ta được: $x^2 - mx + m^2 + 2x - 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x + m^2 - 3m - 3 = 0 \quad (1)$

$(1): \Delta = (2-m)^2 - 4(m^2 - 3m - 3) = -3m^2 + 8m + 16$

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép

Vậy có 2 phương trình tiếp tuyến : $(d_1): y + 4 = 0$ và $(d_2): 3y - 4 = 0$

***Nhận xét***: *- Đây là một bài toán dễ, lời giải trên chỉ có một tham số. Nếu giải dưới dạng tham số của phương trình (d) thì chúng ta sẽ giải quyết với phương trình hai tham số. Tuy nhiên chúng ta sẽ không bao giờ thiếu nghiệm, có nghĩa là bài toán luôn giải quyết được.*

***Dạng 2: Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm***

**<u>Phương pháp:</u>**

$(C): ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, (a,b,c) \neq (0,0,0)$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_o; y_o)$

nên (d) có dạng: $ax_o x + b(x_o y + y_o x) + cy_o y + d(x_o + x) + e(y_o + y) + f = 0$ (*)

***Bài mẫu 1:*** **Viết phương trình tiếp tuyến của đường bậc hai (C):**

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

**tại tiếp điểm** $M(-2; y)$

*<u>Lời Giải:</u>*

Ta có $M(-2; y) \in (C) \Rightarrow 2y^2 - 8y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 3 \end{array}\right. \Rightarrow M_1(-2; +1), M_2(-2; +3)$

Tiếp tuyến của (C) tại $M(x_o; y_o)$: $3x_o x + (x_o y + y_o x) + 2y_o y + \frac{3}{2}(x_o + x) - 2(y_o + y) = 0$

Vậy Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(-2; +1)$: $7x + 4y + 10 = 0$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_2(-2; +3)$: $3x - 4y + 18 = 0$

***<u>Nhận xét</u>**: Bài toán này toạ độ điểm M cho khuyết. Áp dụng phương trình (*) ta được hai tiếp tuyến như trên.*

***Bài mẫu 2:*** **Viết phương trình tiếp tuyến của đường bậc hai (C):**

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

**biết tiếp tuyến đi qua điểm** $A(+3; +4)$

*<u>Lời Giải:</u>*

Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_o; y_o)$

nên $(d): 2x_o x - 2(x_o y + y_o x) + y_o y - (x_o + x) + 3(y_o + y) - 3 = 0$

$\Rightarrow (d): (2x_o - 2y_o - 1)x + (-2x_o + y_o + 3)y - x_o + 3y_o - 3 = 0$

Ta có : $\begin{cases} A(+3; +4) \in (d) \\ M(x_o; y_o) \in (C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_o + y_o + 6 = 0 \\ 2x_o^2 - 4x_o y_o + y_o^2 - 2x_o + 6y_o - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_o = 3(x_o - 2) \\ 2x_o^2 - 12x_o(x_o - 2) + 9(x_o - 2)^2 - 2x_o + 18(x_o - 2) - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 - 4x_o + 3 = 0 \\ y_o = 3(x_o - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = -3 \end{cases} \Rightarrow M_1(+1; -3) \\ \begin{cases} x_o = 3 \\ y_o = 3 \end{cases} \Rightarrow M_2(+3; +3) \end{array}\right.$

Vậy Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(+1; -3)$: $7x - 2y - 13 = 0$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_2(+3;+3)$: $x-3=0$

***Nhận xét***: *- Đây là dạng toán viết phương trình tiếp tuyến qua một điểm không thuộc (C). Bài toán trên đã sử dụng phương pháp tìm tiếp điểm trước sau đó tìm được hai tiếp tuyến như trên. Ta cũng có thể viết phương trình đường thẳng (d) qua A dạng:*
*y = k(x - 3) + 4 hoặc A(x-3) + B(y-4) = 0 sau đó sử dụng điều kiện tiếp xúc để tìm tham số.*

***Bài mẫu 3:*** **Tại các giao điểm của đường thẳng $(d): 3x-y+6=0$ với đường cong $(C): x^2-2xy+y^2+2x-6y=0$ kẻ các tiếp tuyến với đường cong. Tìm giao điểm của các tiếp tuyến đó**

*Lời Giải:*

Tọa độ giao điểm của (d) với (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x-y+6=0 \\ x^2-2xy+y^2+2x-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+6 \\ x^2-2x(3x+6)+(3x+6)^2+2x-6(3x+6)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+6 \\ 4x^2+8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+6 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow M(0;+6) \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow N(-2;0) \end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_o;y_o)$ là (d) có dạng:

$$x_ox-(x_oy+y_ox)+y_oy+(x_o+x)-3(y_o+y)=0$$

$$\Rightarrow (d): (x_o-y_o+1)x+(-x_o+y_o-3)y+x_o-3y_o=0$$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;+6)$ có dạng: $5x-3y+18=0$

Phương trình tiếp tuyến tại $N(-2;0)$ có dạng: $x+y-2=0$

Tọa độ giao điểm của 2 tiếp tuyến là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 5x-3y+18 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3}{2} \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

***Nhận xét***: *- Đây là một bài toán đơn giản, chỉ cần tìm toạ độ giao điểm sau đó viết phương trình tiếp tuyến theo phương trình (*).*

***Bài mẫu 4: Qua điểm $M(+3;+1)$ kẻ được 2 tiếp tuyến với đường bậc hai (C):***

$$3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0.$$

***Viết phương trình đường thẳng đi qua các tiếp điểm.***

*Lời Giải:*

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_o;y_o)$ là (d) có dạng:

$$3x_o x-(x_o y+y_o x)+3y_o y+2(x_o+x)+2(y_o+y)-4=0$$

$$\Rightarrow (d):(3x_o-y_o+2)x+(-x_o+3y_o+2)y+2x_o+2y_o-4=0$$

(d) qua điểm $M(+3;+1)\Rightarrow 10x_o+2y_o+4=0$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các tiếp điểm là: $5x+y+2=0$

***Nhận xét***: *- Bài toán này chỉ yêu cầu viết phương trình đường thẳng qua các tiếp điểm. Do đó nếu viết phương trình tiếp tuyến rồi tìm tiếp điểm thì bài toán trở nên phức tạp. Do đó chúng ta sử dụng thủ thuật trên thì yêu cầu bài toán trở nên dễ dàng hơn rất nhiều.*

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1*** **:**Cho đường cong : $x^2 + xy + y^2 +2x + 3y -3 = 0$

Lập tiếp tuyến song song với đường thẳng 3x + 3y -5 = 0. Xác định toạ độ các tiếp điểm.

***Đáp số : x + y -1 =0 và 7x + 7y -17 =0 ; $M_1$=(1 ; 0) và $M_2$(-5 ; -6)***

***Bài 2*** **:** Trong tất cả những đường thẳng tiếp xúc với đường cong :

$$x^2 + xy + y^2 +2x + 3y -3 = 0$$

Hãy tìm những đường song song với trục hoành.

***Đáp số : 3y - 4=0 và y + 4 =0***

# *Chủ đề 6*
# ĐƯỜNG KÍNH LIÊN HỢP VỚI MỘT PHƯƠNG.

**Phương pháp**:

+Trước tiên cần nắm rõ khái niệm đường kính và đường kính liên hợp vói 1 phương cho trước.
+Đường kính và đường kính liên hợp vói 1 phương đều là 2 đường thẳng qua tâm và có phương khác phương tiệm cận.
+Đường kính liên hợp vói 1 phương là đường thẳng đi qua trung diểm các dây cung của đường bậc hai (C ).
+Đường kính liên hợp với phương $\vec{v}$=(a,b) (khác phương tiệm cận )có dạng:

**aF'$_x$(x,y)+bF'$_y$(x,y)=0** (*)

***Bài mẫu 1***:**Tìm 2 đường kính liên hợp với đường cong :**
**(C ):$x^2$-2xy+2$y^2$-4x-6y+3=0**
**Biết rằng 1 đường kính đi qua gốc tọa độ.**

**Lời Giải**

Tâm I(x,y) là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ -x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(7,5)$$

Gọi đường kính qua gốc tọa độ có pt: ax+by=0(1)

Đường kính qua I(7,5) thế vào (1)$\Rightarrow$a=5,b=7.

Vậy pt đường kính là: $\begin{cases} x=7t \\ y=5t \end{cases} (t \in R)$ có v=(7,5)

Đường kính liên hợp với phương v có pt:7F'$_x$+5F'$_y$=0

$\Leftrightarrow$ 7(2x-2y-4)+5(-2x+4y-6)=0

$\Leftrightarrow$ 2x+3y-29=0.

Vậy pt đường kính liên hợp với phương v là **:2x+3y-29=0.**

***Nhận xét*** : *- Việc tìm đường kính và đường kính liên hợp thì trước hết phải tìm tâm của (C).*
*- Nếu biết trước phương v thì áp dụng phương trình (*) để tìm đường kính liên hợp.*

***Bài mẫu 2*:cho đường cong:$2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0$**
**Lập phương trình đường kính song song với trục hoành và đường kính liên hợp với nó.**

**Lời Giải**

Tâm I(x,y) là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} 4x+5y+3=0 \\ 5x-6y+16=0 \end{cases} \Rightarrow$ I(-2,1)

Phương trình đường kính song song với trục Ox có dạng:y = m

Đường kính qua (-2,1) $\Rightarrow$ Đường kính (d):y=1 $\Leftrightarrow$ y-1=0 có $\vec{v}$=(1,0)

Phương trình đường kính liên hợp với (d) có dạng:$1.F'_x(x,y)+0.F'_y(x,y)=0$

$\Leftrightarrow 4x+5y+3=0$

Vậy phương trình đường kính liên hợp với (d)là:**4x+5y+3=0**

***Nhận xét*** : *- Đường kính liên hợp với đường kính song song với trục hoành tức là liên hợp với phương $\vec{v}$=(1,0). Sử dụng công thức (*) để giải quyết.*

**Bài mẫu 3:Lập phương trình đường kính của $2x^2+4xy+5y^2-8x+6=0$ song song với đường thẳng (d):2x-y+5=0**

**Lời Giải**

Tâm I (x,y) là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} 2x+2y-4=0 \\ 2x+5y=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{10}{3},\frac{-4}{3}\right)$$

Đường kính song song với đường thẳng(d) có dạng: 2x-5y+m=0(1)

Vì đường kính qua tâm I nên $\Rightarrow m=\frac{-40}{3}$

Vậy phương trình đường kính là:$2x-5y-\frac{40}{3}=0 \Rightarrow$ **6x-15y-40=0**.

***Nhận xét*** : *- Bài toán này thật đơn giản, sử dụng cách giải trên rất hiệu quả. Hãy thử giải bài toán này với điều kiện là ''lập phương trình đường kính liên hợp với đường kính vuông góc với đường thẳng (d) ở đầu bài.''*

***Bài mẫu 4*:Cho đường cong :$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$.Tìm quĩ tích trung điểm những dây:**
**a)Song song với trục x (y=0).**
**b)Song song với trục y (x=0).**
**c)Song song với đường thẳngx+y+1=0. có vtcp: $\vec{v}$=(1,-1)**

**Lời Giải**

**a)Song song với trục Ox: (y=0)**

Yêu cầu bài toán tương đương với yêu cầu:viết pt đường kính của (C) liên hợp vói phương với đt y=0

Ta có:aF'$_x$(x,y)+0F'$_y$(x,y)=0 $\Leftrightarrow$ a(6x+7y+4)=0. Vì $a \neq 0$ nên ta có thể viết pt đường kính như sau:**6x+7y+4=0,**

**b)Song song với trục Oy : (x=0)**

Tương tự như câu a:ta có phương trình đường kính như sau:**7x+10y+5=0**.

**c)Song song với đường thẳngx+y+1=0. có vec tơ chỉ phương: v=(1,-1)**

Phương trình đường kính có dạng:1F'$_x$(x,y)-1F'$_y$(x,y)=0

$\Leftrightarrow$ (6x=7y+4)-(7x+10y+5)=0

$\Leftrightarrow$ **x+3y+1=0**

**<u>Nhận xét</u>:** *-Đề có thể yêu cầu tìm quĩ tích trung điểm các dây cung của (C ) tương đương với yêu cầu viết pt đường kính liên hợp với 1 phương.*

## ***<u>Bài tập tương tự</u>***

***<u>Bài 1</u> :*** Qua điểm A(1; -2) dựng đường kính của (C):

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$$

và đường kính liên hợp với nó.

***Đáp số :(d) : x + 2y + 3 =0 và (d') : 7x - 5y +2 =0***

***Bài 2 :*** Cho đường cong (C) :

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

Và một đường kính của nó là (d) : x + 2y -2 =0. Lập phương trình đường kính liên hợp với đường kính trên.

***Đáp số: x + 1 =0***

# Chủ đề 7
# ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

***Dạng 1: Phương trình chính tắc của đường bậc hai trong AFIN***

**Phương pháp**

Dùng phép ***đổi mục tiêu*** một cách thích hợp ta sẽ đưa đường bậc hai (C) về một trong 9 dạng sau :

| | |
|---|---|
| 1. Elip thực | $X^2 + Y^2 = 1$ |
| 2. Elip ảo | $X^2 + Y^2 = -1$ |
| 3. Hypebol | $X^2 - Y^2 = 1$ |
| 4. Parabol | $X^2 + 2Y=0$ |
| 5. Hai đường thẳng thực cắt nhau | $X^2 - Y^2 = 0$ |
| 6. Hai đường thẳng thực song song | $X^2 - 1 = 0$ |
| 7. Hai đường thẳng thực trùng nhau | $X^2 = 0$ |
| 8. Hai đường thẳng ảo cắt nhau | $X^2 + Y^2 = 0$ |
| 9. Hai đường thẳng ảo song song. | $X^2 + 1 = 0$ |

***Bài mẫu**: Trong hệ toạ độ Afin, hãy đưa các đường bậc hai sau về dạng chính tắc:*

1. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
2. $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
3. $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
4. $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y - \dfrac{13}{3} = 0$

**Lời Giải**

**1.** $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 - 4x' - 10y' + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x'-2}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(\frac{y'-5}{\sqrt{26}}\right) = 1$$

Đặt $\begin{cases} X = \dfrac{x'-2}{\sqrt{26}} \\ Y = \dfrac{y'-5}{\sqrt{26}} \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \quad X^2 + Y^2 = 1$$

Vậy đường bậc hai đã cho thuộc loại **Elip**

**2.** $\boldsymbol{x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0}$

$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0 \qquad (1)$

Đặt $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \quad x'^2 - 3y'^2 - 4x' - 10y' + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left[\sqrt{3}(y' + \frac{5}{3})\right]^2 - (x'-2)^2 = \frac{22}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{3y'+5}{\sqrt{22}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}(x'-2)}{\sqrt{22}}\right)^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} X = \dfrac{3y'+5}{\sqrt{22}} \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}(x'-2)}{\sqrt{22}} \end{cases} \qquad (2)$

$(2) \Leftrightarrow \quad X^2 - Y^2 = 1$

Vậy đường bậc hai đã cho thuộc loại **Hypebol.**

**3.** $\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0}$

$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 - 4x - 6y + 3 = 0 \qquad (1)$

Đặt $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \quad x'^2 - 4(x' + y') - 6y' + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x'-2)^2 = 10y' + 1 \qquad (2)$

Đặt $\begin{cases} X = x' - 2 \\ Y = \dfrac{10y'+1}{2} \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \quad X^2 = 2Y$

Vậy đường bậc hai đã cho thuộc loại **Parabol.**

***4.*** $\boldsymbol{x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y - \frac{13}{3} = 0}$

$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 - 3y^2 - 4x - 6y - \frac{13}{3} = 0 \qquad (1)$

Đặt $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad x'^2 - 3y'^2 - 4x' - 10y' - \frac{13}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x'-2)^2 - \left[\sqrt{3}(y' + \frac{5}{3})\right]^2 = 0 \qquad (2)$$

Đặt $\begin{cases} X = x' - 2 \\ Y = \sqrt{3}(y' + \frac{5}{3}) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \quad X^2 - Y^2 = 0$$

Vậy đường bậc hai đã cho là hai **đường thẳng thực cắt nhau.**

**Nhận xét :** *- Bài toán dạng này tuy không khó nhưng nó đòi hỏi người làm phải biết nhóm các ẩn số một cách thích hợp để đưa phương trình về dạng đơn giản, sau đó dùng phép đổi mục tiêu để đưa nó về dạng chính tắc.*

*- Các bài toán 2, 3, 4 là mở rộng của bài toán 1, tức là chỉ cần thay đổi hệ số tự do và hệ số của $y^2$. Vì vậy chúng ta thấy rằng từ 1 bài toán chúng ta có thể mở rộng ra nhiều bài toán khác để nhận được tất cả 9 loại đường đã nêu.*

**Dạng 2: Phương trình chính tắc của đường bậc hai trong TRỰC CHUẨN**

**Phương pháp**

Dùng phép ***Quay quanh gốc toạ độ O*** một ***góc*** thích hợp ta sẽ đưa đường bậc hai (C) về một trong 9 dạng sau :

| | |
|---|---|
| 1. Elip thực | $X^2 + Y^2 = 1$ |
| 2. Elip ảo | $X^2 + Y^2 = -1$ |
| 3. Hypebol | $X^2 - Y^2 = 1$ |
| 4. Parabol | $X^2 + 2Y = 0$ |
| 5. Hai đường thẳng thực cắt nhau | $X^2 - Y^2 = 0$ |
| 6. Hai đường thẳng thực song song | $X^2 - 1 = 0$ |
| 7. Hai đường thẳng thực trùng nhau | $X^2 = 0$ |
| 8. Hai đường thẳng ảo cắt nhau | $X^2 + Y^2 = 0$ |
| 9. Hai đường thẳng ảo song song. | $X^2 + 1 = 0$ |

***Bài mẫu: Trong hệ toạ độ Trực chuẩn, hãy đưa các đường bậc hai sau về dạng chính tắc:***

***1.*** $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$

***2.*** $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

**Lời Giải**

***1.*** $\quad x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0 \qquad$ ***(1)***

Thực hiện phép quay tâm O một góc thích hợp : $Oxy \xrightarrow{Q(O;\alpha)} Ox'y'$

Khi đó ta có :

$$\cot g2\alpha = \frac{a-c}{2b} = \frac{1-1}{6} = 0$$

Chọn $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Ta dùng phép đổi mục tiêu : $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 4x'^2 - 2y'^2 - 4\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (y' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \qquad (2)$$

Đặt $\begin{cases} X = x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = y' - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{1}{2}} - Y^2 = 1$$

Vậy đường bậc hai đã cho thuộc loại **Hypebol.**

***2.*** $\boldsymbol{3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0}$ ***(1)***

Thực hiện phép quay tâm O một góc thích hợp : $Oxy \xrightarrow{Q(O;\alpha)} Ox'y'$

Khi đó ta có :

$$\cot g2\alpha = \frac{a-c}{2b} = \frac{3-3}{-2} = 0$$

Chọn $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Ta dùng phép đổi mục tiêu : $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x'^2 + 4y'^2 + 4\sqrt{2}x' - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x' + \sqrt{2})^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1 \qquad (2)$$

Đặt $\begin{cases} X = x' + \sqrt{2} \\ Y = y' \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \quad \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1$$

Vậy đường bậc hai đã cho thuộc loại **Elip**

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1 :***Trong hệ toạ độ Afin, hãy đưa các đường bậc hai sau về dạng chính tắc:

1. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$
2. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$
3. $x^2 - 4xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$
4. $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

***Đáp số :*** 
***1. $X^2 - Y^2 = 1$.Đây là đường hypebol***
***2. $X^2 + Y^2 = 1$.Đây là đường elip.***
***3. $X^2 - 2Y = 0$.Đây là đường parabol.***
***4. $XY = 0$. Đây là cặp đường thẳng cắt nhau***

***Bài 2 :*** Trong hệ toạ độ Trực chuẩn, hãy đưa các đường bậc hai sau về dạng chính tắc:

1. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$
2. $-5x^2 - 4xy + y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$

***Đáp số :*** 
***1. $X^2 - 1 = 0$. Hai đường thẳng thực song song.***
***2. $X^2 = 0$ . Hai đường thẳng thực trùng nhau.***

# MẶT BẬC HAI

# *Chủ đề 1*

# PARABOLOIT HYPERBOLIC

***Dạng 1: Tìm giao tuyến của mặt bậc hai (trong đó có mặt yên ngựa)***

**Phương pháp:**
Lập hệ phương trình gồm hai phương trình của hai mặt mặt bậc hai sau đó dùng các phép biến đổi để nhận dạng giao tuyến là đường gì.

***Bài mẫu 1:*** **Tìm giao tuyến của hai mặt bậc hai:**

$$x^2+y^2-z^2=a^2$$
$$x^2-y^2=2az$$

*Lời Giải:*

Giao tuyến của mặt bậc hai là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=a^2 \\ x^2-y^2=2az \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=(z+a)^2 \\ 2y^2=(z-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\sqrt{2}=z+a \\ x\sqrt{2}=-z-a \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y\sqrt{2}=z-a \\ y\sqrt{2}=a-z \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy hai mặt bậc hai giao nhau tại bốn đường thẳng có phương trình:

$$\begin{cases} x\sqrt{2}-z-a=0 \\ y\sqrt{2}-z+a=0 \end{cases};\ \begin{cases} x\sqrt{2}-z-a=0 \\ y\sqrt{2}+z-a=0 \end{cases};\ \begin{cases} x\sqrt{2}+z+a=0 \\ y\sqrt{2}-z+a=0 \end{cases};\ \begin{cases} x\sqrt{2}+z+a=0 \\ y\sqrt{2}+z-a=0 \end{cases}$$

***Nhận xét:*** *- Việc tìm giao tuyến của mặt bậc hay ở bài toán này đòi hỏi người học phải khéo léo biến đổi để thấy rõ giao tuyến.*

***Dạng 2: Xác định phương trình của mặt yên ngựa***

**Phương pháp:**
Paraboloit hyperbolic $(S): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+2kz=0\ (k\neq 0)$
Dựa vào điều kiện đề bài thiết lập mối liên hệ giữa các giá trị $a,b,k\Rightarrow(S)$

***Bài mẫu 1:*** **Viết phương trình của paraboloit hyperbolic qua hai đường thẳng $y=\pm x$ và $z=0$ và qua điểm $(+1;+2;+3)$ biết rằng Oz là trục đối xứng.**

Lời Giải:

Paraboloit hyperbolic $(S): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2kz = 0 \ (k \neq 0)$ (Oz là trục đối xứng)

(S) qua hai đường thẳng $y = \pm\, x$ và $z = 0$ nên $\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$ (1)

Mặt khác (S) qua $(+1;+2;+3)$ nên $\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} + 6k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2b^2}$ (2)

$\Rightarrow (S): \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2}{2b^2} z = 0$ Vậy $(S): x^2 - y^2 + z = 0$

***Nhận xét*** *Dạng bài này tùy vào yêu cầu của đề ma ta có phương pháp giải thích hợp.*

### *Dạng 3: Đường sinh thẳng của mặt yên ngựa*

**Phương pháp:**
Để giải bài toán dạng này ta thực hiện các bước:
B1: Viết phương trình tham số của (d) dựa vào điều kiện cho trước (nếu có)
B2: Để (d) là đường sinh của mặt yên ngựa (S) thì $(d) \subset (S)$
B3 :Tìm vectơ chỉ phương của (d) và viết phương trình đường sinh (d).

***Bài mẫu 1:*** **Tìm đường sinh thẳng của** $(S): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ **;biết nó song song với mặt phẳng** $(P): 3x + 2y - 4z = 0$

***Giải:***

Gọi (d) qua $M(x_o; y_o; z_o)$ và có VTCP $\vec{u} = (\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0) \Rightarrow (d): \begin{cases} x = x_o + \alpha t \\ y = y_o + \beta t \\ z = z_o + \gamma t \end{cases}$

Thay (d) vào (S) ta được: $(x_o + \alpha t)^2 - 4(y_o + \beta t)^2 = 16(z_o + \gamma t)$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - 4\beta^2)t^2 + 2(\alpha x_o - 4\beta y_o - 8\gamma)t + x_o^2 - 4y_o^2 - 16z_o = 0$$

(d) là đường sinh thẳng của (S)

$$\Leftrightarrow (d) \subset (S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 4\beta^2 = 0 \\ \alpha x_o - 4\beta y_o - 8\gamma = 0 \\ x_o^2 - 4y_o^2 - 16z_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \alpha x_o - 4\beta y_o - 8\gamma = 0 \\ x_o^2 - 4y_o^2 - 16z_o = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \alpha x_o - 4\beta y_o - 8\gamma = 0 \\ x_o^2 - 4y_o^2 - 16z_o = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Với $\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \alpha x_o - 4\beta y_o - 8\gamma = 0 \end{cases}$ .Chọn $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 2,\ \gamma = \frac{x_o}{4} - \frac{y_o}{2}$

Với $\begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \alpha x_o - 4\beta y_o - 8\gamma = 0 \end{cases}$ .Chọn $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = -2,\ \gamma = -\frac{x_o}{4} - \frac{y_o}{2}$

Họ hai đường sinh của (S) có VTCP là: $\overrightarrow{u_1} = (+2;+1;\frac{x_o}{4} - \frac{y_o}{2})$ ; $\overrightarrow{u_2} = (-2;+1;-\frac{x_o}{4} - \frac{y_o}{2})$

Mặt khác $(d) \,//\, (P)$ có VTPT $\vec{n} = (+3,+2,-4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1}.\vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{u_2}.\vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - x_o + 2y_o = 0 \\ -4 + x_o + 2y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 6 \\ y_o = -1 \end{cases} \Rightarrow z_o = 2 \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = (+2;+1;+2) \text{ ; } \overrightarrow{u_2}(-2;+1;-1)$$

Vậy có 2 đường sinh thẳng thỏa yêu cầu đề bài là:

$$(d_1): \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ ; } (d_2): \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

***<u>Nhận xét</u>:*** *- Ở đây thay vì đề bài cho các đường sinh song song với mặt phẳng thì có thể cho đường sinh vuông góc với một đường thẳng hoặc hợp với mặt phẳng một góc $\alpha$.*

***Bài mẫu 2:*** **Tìm các đường sinh thẳng của mặt yên ngựa $(S): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$ đi qua điểm $(+8;+3\sqrt{2};+1)$**

*<u>Giải:</u>*

Gọi (d) qua $(+8;+3\sqrt{2};+1)$ và có VTCP $\vec{u} = (a;\, b;\, c) \neq (0;\, 0;\, 0) \Rightarrow (d): \begin{cases} x = 8 + at \\ y = 3\sqrt{2} + bt \\ z = 1 + ct \end{cases}$

Thay (d) và (S): $\frac{(8+at)^2}{16} - \frac{(3\sqrt{2}+bt)^2}{9} = 2(1+ct) \Leftrightarrow (\frac{a^2}{16} - \frac{b^2}{9})t^2 + (a - \frac{2\sqrt{2}}{3}b - 2c)t = 0$

(d) là đường sinh của (S) $\Leftrightarrow (d) \subset (S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{16} = \frac{b^2}{9} \\ a - \frac{2\sqrt{2}}{3}b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3a = 4b \\ 3a = -4b \end{array}\right. \\ c = \frac{1}{2}(a - \frac{2\sqrt{2}}{3}b) \end{cases}$

Chọn $a = 4 \Rightarrow b = 3,\ c = 2 - \sqrt{2}$

Chọn $a = 4 \Rightarrow b = -3,\ c = 2 + \sqrt{2}$

Vậy có hai đường sinh thẳng của (S) là

$$(d_1): \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 3\sqrt{2} + 3t \\ z = 1 + (2 - \sqrt{2})t \end{cases} \text{ ; } (d_2): \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 3\sqrt{2} - 3t \\ z = 1 + (2 + \sqrt{2})t \end{cases}$$

***Bài mẫu 3: Cho mặt yên ngựa*** $(S): x^2 - y^2 = 2z$***.Tìm quỹ tích những giao điểm của những đường sinh thẳng vuông góc với nhau.***

***<u>Lời Giải:</u>***

Gọi (d) qua $M(x_o; y_o; z_o) \in (S)$ và có VTCP $\vec{u} = (a;b;c) \neq (0;0;0) \Rightarrow (d): \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases}$

Thay (d) vào (S): $(x_o + at)^2 - (y_o + bt)^2 = 2(z_o + ct) \Leftrightarrow (a^2 - b^2)t^2 + 2(ax_o - by_o - c)t = 0$

(d) là đường sinh thẳng của $(S) \Leftrightarrow (d) \subset (S)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ax_o - by_o - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = a \\ a(x_o - y_o) - c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -a \\ a(x_o + y_o) - c = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = a \\ c = a(x_o - y_o) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = (+1; +1; x_o - y_o) \\ \begin{cases} b = -a \\ c = a(x_o + y_o) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = (+1; -1; x_o + y_o) \end{array}\right.$$

Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Rightarrow 1 - 1 + (x_o^2 - y_o^2) = 0 \Leftrightarrow x_o^2 - y_o^2 = 0$

$$M(x_o; y_o; z_o) \in (S) \Rightarrow z_o = 0$$

Vậy quỹ tích giao điểm của những cặp đường sinh thẳng vuông góc với nhau là hai đường thẳng cắt nhau: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

# *Chủ đề 2*

# ELIPXOIT

***Dạng 1: Viết phương trình Elipxoit thoả điềukiện cho trước***

***Phương pháp:***

*Elipxoit:* $(S): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

*Sử dụng các dữ kiện bài đã cho trước để tìm các hệ số a, b, c.*

*Viết phương trình mặt elipxoit tìm được.*

***Bài mẫu 1:*** **Viết phương trình elipxoit có trục trùng với trục toạ độ, nếu biết rằng nó đi qua điểm** $I(+3;+1;+1)$ **và đi qua đường tròn có pt:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = x \end{cases}$$

*Lời Giải:*

Phương trình Elipxoit có dạng $(S): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (1)

(S) qua đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = x \end{cases}$ nên (S) qua $(+2;+1;+2);(\sqrt{2};\sqrt{5};\sqrt{2})$

(S) qua $(+3;+1;+1);(+2;+1;+2);(\sqrt{2};\sqrt{5};\sqrt{2})$ nên ta có hệ pt: $\begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} = 1 \\ \frac{2}{a^2} + \frac{5}{b^2} + \frac{2}{c^2} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 = 12; b^2 = 9; c^2 = \frac{36}{5}$ .Vậy $(S): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{\frac{36}{5}} = 1$

***Nhận xét*** : *- Phương trình Elipsoid ở (1) nhận các trục toạ độ làm trục đối xứng. Nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.*

*- Lời giải trên đã khéo léo tìm thêm hai điểm mà (E) đi qua để dẫn tới hệ 3 phương trình 3 ẩn.*

*- Ta cũng có thể có hướng khác vẫn đi đến kết quả trên như sau :*

*Giao của (E) với mặt phẳng z =x là :*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=x \end{cases} \quad (*)$$

*Phương trình đường tròn được viết lại:*

$$\begin{cases} \dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ z=x \end{cases} \quad (**)$$

*So sánh (*) và (**) và cho (E) qua I ta sẽ tìm lại được kết quả như lời giải trên.*

$$(S): \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{\frac{36}{5}}=1$$

***Dạng 2 : Giao tuyến của Elipxoit với đường và mặt***

***Bài mẫu 1 :*** **Cho Elipxoit** $(S): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

**a)Nếu** $a=b=c$ **thì elipxoit trở thành mặt gì?**

**b) CMR: Nếu** $0<c\le b\le a$ **thì** $\forall M\in(S)$ **ta đều có :** $c\le OM\le a$

**c) Chứng minh rằng nếu** $a>b>c$ **thì giao tuyến của Elipxoit với các mặt phẳng:** $\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}}\,x\pm\sqrt{\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}}\,z=0$ **là những đường tròn.**

*Lời Giải:*

a) Khi $a=b=c$ Elipxoit trở thành mặt cầu tâm O bán kính $R=a$

b) Giả sử $M(x;y;z)$ nằm trên Elipxoit ,tức là : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Khi $0<c\le b\le a$ .Ta có: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}\le\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \frac{OM^2}{a^2}\le 1\le\frac{OM^2}{c^2}\Rightarrow c\le OM\le a$$

c) Phương trình của cặp mặt phẳng đã cho có thể viết dưới dạng:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0$$

Giao tuyến của Elipxoit với các mặt phẳng đã cho có phương trình :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)x^2-\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)z^2=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \\ \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2 = \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2 \quad (1) \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình **(1)** cho ta một cặp mặt phẳng cắt nhau theo trục Oy, còn phương trình **(2)** cho ta một mặt cầu tâm O bán kính b. Vậy hệ phương trình trên cho ta một cặp đường tròn tâm **O** bán kính là **b**, lần lượt nằm trên cặp mặt phẳng **(1).**

***<u>Nhận xét</u>**: Bài toán này tương đối đơn giản do đó lời giải trên là hiệu quả. Ở câu c/ đòi hỏi chúng ta phải linh hoạt biến đổi thành giao tuyến của mặt phẳng với mặt cầu thì xem như yêu cầu bài toán đã được thực hiện vì giao tuyến đó luôn là đường tròn.*

***<u>Dạng 3:</u> Cho phương trình elipxoit, tim tiếp tuyến, tìm điều kiện để 1 đường thẳng là tiếp tuyến , tìm điều kiện để 1 mặt phẳng là thiết diện của elipxoit…***

***Phương pháp giải***:

Nắm vững lý thuyết về điều kiện của một đường thẳng là tiếp tuyến của elipxoit
Kết hợp với dữ kiện bài cho
Tìm các hệ số (đối với bài đi tìm tiếp tuyến),các điều kiện (với bài biện luận), hoặc tìm thiết diện …thoả yêu cầu từng bài.

***Bài mẫu: cho elipxoit (S) co pt*** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

***a) gọi $M_0(x_0 , y_0 , z_0$ là điểm nằm trên (S).Một đường thẳng (d) đi qua $M_0$ gọi là tiếp tuyến của (S) tại $M_0$ nếu nó chỉ cắt (S) tại điểm duy nhất $M_0$. hãy tìm đk của vectơ chỉ phương $\vec{u}=(\alpha;\beta;\gamma)$ của (d) để (d) là tiếp tuyến của (S) tại $M_0$. .***
***b) chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (S) tại $M_0$ nằm trên 1 mặt phẳng . Mặt phẳng này gọi là tiếp diện của (S) tại $M_0$.***

*<u>Lời Giải:</u>*

a) Đường thẳng (d) đi qua $M_0$ với vécto chỉ phương $\vec{u}=(\alpha;\beta;\gamma)$ có pt: $x=x_0+\alpha t; y=y_0+\beta t; z=z_0+\gamma t$ Giao điểm của (d) và (S) ứng với giá trị của t là nghiệm của hệ gồm 3 pt đó với pt của (S).

Việc giải hệ phương trình đó tương đương với việc giải phương trình :

$$\frac{(x+\alpha t)^2}{a^2}+\frac{(y+\beta t)^2}{b^2}+\frac{(z+\gamma t)^2}{c^2}=1$$

hay $\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0\alpha}{a^2}+\frac{y_0\beta}{b^2}+\frac{z_0\gamma}{c^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$

Với chú ý rằng $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nằm trên (S) ta suy ra :

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0\alpha}{a^2}+\frac{y_0\beta}{b^2}+\frac{z_0\gamma}{c^2}\right)t=1$$

đk để (d) cắt (S) chỉ tại điểm duy nhất $M_0$lá pt (*) chỉ có nghiệm duy nhất t = 0 . Vậy k\đk đó là : $\frac{x_0\alpha}{a^2}+\frac{y_0\beta}{b^2}+\frac{z_0\gamma}{c^2}=0$ (**)

b)ta xét vectơ $\overrightarrow{n_0}=\left(\frac{x_0}{a^2};\frac{y_0}{b^2};\frac{z_0}{c^2}\right)$, vectơ này khác 0 vì $x_0;y_0;z_0$ không đồng thời bằng 0 .

Điều kiện (**) chứng tỏ rằng vectơ $\vec{u}$ của d vuông góc với vectơ $\overrightarrow{n_0}$ . Vậy các tiếp tuyến nằm trên d phải đi qua $M_0$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_0}$ .mặt phẳng đó có pt:

$\frac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2}=0$ hay : $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$

Đó chính là pt tiếp diện của (S) tại điểm $M_0$ . ⊕

# *Chủ đề 3*
# HYPEBOLOIT

***Dạng 1 : Biện luận - Tìm giao của Hypeboloit với đường thẳng và mặt phẳng***

**Phương pháp:**
Bằng cách giải hệ phương trình ta xác định được dạng của phương trình giao tuyến cần tìm

***Bài mẫu 1:*** **Mặt phẳng** $x = a$ **cắt hyperboloit 1 tầng** $(H): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ **theo đường gì?.**

*Lời Giải:*
Giao tuyến của (H) với mặt phẳng $x = a$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = a \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \left[\begin{array}{l} cy - bz = 0 \\ cy + bz = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy giao tuyến cần tìm là hai đường thẳng cắt nhau: $\begin{cases} x = a \\ cy + bz = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = a \\ cy - bz = 0 \end{cases}$

***Bài mẫu 2:*** **Tìm giao tuyến của mặt phẳng** $x = 9$ **và mặt hypeboloit :**

$$(H): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$$

*Lời Giải:* Giao tuyến được xác định bởi:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1 \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = -8 \Leftrightarrow -\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Đây là dạng Hyperbol trong mặt phẳng $x = 9$

**Nhận xét**: *- Đây là (H) nằm trong mặt phẳng x = 9.*
*- Chúng ta có thể tìm giao tuyến của (H) với các mặt phẳng đối xứng và xét xem thử giao tuyến đó là đường gì.*

***Dạng 2: Đường sinh thẳng của mặt Hypeboloit***

***Bài mẫu 1:*** **Tìm đường thẳng đi qua điểm** $I(+1;+1;+1)$ **và nằm trên Hyperboloit 1 tầng** $(H): x^2 + y^2 - z^2 = 1$

*Lời Giải:*

(d) qua $I(+1;+1;+1)$ có phương trình : $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 1 + ct \end{cases}$ $,(a;\ b;\ c) \neq (0;\ 0;\ 0)$

Thay (d) vào (H) ta được: $(1+at)^2 + (1+bt)^2 - (1+ct)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - c^2)t^2 + 2(a+b-c)t = 0$$

(d) nằm trên (H) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - (a+b)^2 = 0 \\ c = a + b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ c = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ c = b \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ c = a \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng nằm trên (H) là $(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$

***Nhận xét**:* *Đây thực chất là đi tìm đường sinh thẳng của Hypeboloit 1 tầng. Chúng ta sẽ làm rõ vấn đề này trong chủ đề đường sinh thẳng.*

***Bài mẫu 2:* Cho Hyperboloit 1 tầng $(H): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(x_o;\ y_o;\ z_o) \in (H)$ và nằm trên (H)**

*Lời Giải:*

(d) qua $M(x_o;\ y_o;\ z_o) \in (H)$ với VTCP $\vec{u} = (\alpha; \beta; \gamma) \neq (0;\ 0;\ 0) \Rightarrow (d): \begin{cases} x = x_o + \alpha t \\ y = y_o + \beta t \\ z = z_o + \gamma t \end{cases}$

Thay (d) vào (H) ta được:

$$\frac{(x_o + \alpha t)^2}{a^2} + \frac{(y_o + \beta t)^2}{b^2} - \frac{(z_o + \gamma t)^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_o\alpha}{a^2} + \frac{y_o\beta}{b^2} - \frac{z_o\gamma}{c^2}\right)t = 0$$

(d) nằm trên (H) $\Leftrightarrow (d) \subset (H) \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{\gamma^2}{c^2}$ và $\frac{x_o\alpha}{a^2} + \frac{y_o\beta}{b^2} = \frac{z_o\gamma}{c^2}$ (1)

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{x_o\alpha}{a^2} + \frac{y_o\beta}{b^2}\right)^2 = \frac{z_o^2}{c^2}\frac{\gamma^2}{c^2} = \left(\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) \Leftrightarrow 2\frac{x_o y_o \alpha\beta}{a^2b^2} = \frac{y_o^2\alpha}{a^2b^2} + \frac{x_o^2\beta}{a^2b^2} - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_o\alpha}{ab} - \frac{x_o\beta}{ab}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{y_o\alpha}{ab} - \frac{x_o\beta}{ab} = \pm\frac{\gamma}{c}$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{y_o\alpha}{ab} - \dfrac{x_o\beta}{ab} = \pm\dfrac{\gamma}{c} \\ \dfrac{x_o\alpha}{a^2} + \dfrac{y_o\beta}{b^2} = \dfrac{z_o\gamma}{c^2} \end{cases}$

Giải hệ pt trên, xem $\alpha$ và $\beta$ là ẩn số, ta được:

$$\left(\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}\right)\frac{\alpha}{a} = \left(\pm\frac{y_o}{b}+\frac{x_oz_o}{ac}\right)\frac{\gamma}{c} \;;\; \left(\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}\right)\frac{\beta}{b} = \left(\pm\frac{x_o}{a}+\frac{y_oz_o}{bc}\right)\frac{\gamma}{c}$$

Như vậy nếu ta chọn $\gamma = c\left(\dfrac{x_o^2}{a^2}+\dfrac{y_o^2}{b^2}\right) = c\left(1+\dfrac{z_o^2}{c^2}\right)$

thì $\alpha = a\left(\pm\dfrac{y_o}{b}+\dfrac{x_oz_o}{ac}\right); \beta = b\left(\pm\dfrac{x_o}{a}+\dfrac{y_oz_o}{bc}\right)$

Tóm lại có hai phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu đề bài là:

$$\frac{x-x_o}{a\left(\pm\dfrac{y_o}{b}+\dfrac{x_oz_o}{ac}\right)} = \frac{y-y_o}{b\left(\pm\dfrac{x_o}{a}+\dfrac{y_oz_o}{bc}\right)} = \frac{z-z_o}{c\left(1+\dfrac{z_o^2}{c^2}\right)}$$

***Dạng 3: Các bài toán liên quan đến Hypeboloit***

***Bài mẫu 1:*** **Chứng minh Hyperboloit 1 tầng:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>0)$ **cắt mặt cầu** $x^2+y^2+z^2=a^2$ **theo 2 đường tròn có bán kính** $R=a.$

*Lời Giải:*

Giao tuyến của Hyperboloit và mặt cầu có phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y^2(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2})-z^2(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2})=0 \end{cases}$$

Đặt

$$(S): x^2+y^2+z^2=a^2 \;;\; (\alpha_1): y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}+z\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}=0 \;;\; (\alpha_2): y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}-z\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}=0$$

(S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=a$

Khoảng cách $d_{(O,(\alpha_1))} = d_{(O,(\alpha_2))} = 0$

Vậy hai mặt bậc hai cắt nhau theo hai đường tròn có bán kính $R=a.$

***Bài mẫu 2:*** **Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua** $M(x_o;y_o;z_o)$ **và chỉ cắt** $(H): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **tại 1 điểm duy nhất.**

*Lời Giải:*

Làm tương tự như ta được pt : $(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2})t^2+2(\frac{x_o\alpha}{a^2}+\frac{y_o\beta}{b^2}-\frac{z_o\gamma}{c^2})t=0$ (*)

(d) chỉ cắt (H) tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $t=0$. Vậy điều kiện đó là: $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\neq\frac{\gamma^2}{c^2}$ và $\frac{x_o\alpha}{a^2}+\frac{y_o\beta}{b^2}=\frac{z_o\gamma}{c^2}$

***Dạng 4: Tìm họ đường sinh thẳng của Hypeboloit 1 tầng***

***Phương pháp giải***:

$*$ *Từ pt chính tắc của hyperboloit 1 tầng là :*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

*Ta có hai họ đường sinh thẳng của (H) có dạng:*

$$\begin{cases}p\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=q\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ q\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=p\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}\text{ và }\begin{cases}p'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=q'\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ q'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=p'\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}\text{ với }(p;\,q)\neq(0;\,0)\text{ và }(p';q')\neq(0;0)$$

$*$ *Dựa vào điều kiện đề bài tìm* $p;\,q;\,p';\,q'$

$*$ *Viết phương trình đường sinh thẳng của (H)*

***Bài mẫu 2*** **Tìm đường sinh thẳng của Hyperboloit 1 tầng** $(H):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$ **và đi qua điểm** $M(+3;+2;+1)$

***Lời Giải:***

$$(H)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{1}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right)=\left(1-\frac{y}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)$$

Phương trình hai họ đường sinh thẳng của (H):

$$\begin{cases}p\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right)=q\left(1+\frac{y}{2}\right)\\ q\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{1}\right)=p\left(1-\frac{y}{2}\right)\end{cases};\begin{cases}p'\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{1}\right)=q'\left(1-\frac{y}{2}\right)\\ q'\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{1}\right)=p'\left(1+\frac{y}{2}\right)\end{cases}\quad(*)\text{ với}$$

$(p;\,q)\neq(0;\,0)$ và $(p';q')\neq(0;0)$

Thay $M(+3;+2;+1)$ vào (*) ta được $p=q$ ; $p'=0$

Vậy có hai phương trình đường sinh thẳng của (H): $\begin{cases}2x-3y+6z=6\\2x+3y-6z=6\end{cases}$ và $\begin{cases}y-2=0\\x-3z=0\end{cases}$

## <u>**Bài tập tương tự**</u>

***<u>Bài 1</u>:*** Lập phương trình Elipxoit biết rằng nó nhận các trục toạ độ làm trục đối xứng và nó cắt các mặt (Oxz) và (Oyz) theo các đường :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

***Đáp số:*** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$

***Bài 2:*** Lập phương trình Elipsoid qua M (1, 2, $\sqrt{23}$) và cắt mặt phẳng (Oxy) theo đường (C):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

***Đáp số:*** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{36} = 1$

***Bài 3***: Xác định mặt bậc hai do một đường thẳng chuyển động tạo nên biết nó tựa lên ba đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}; d_2 : \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}; d_3 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$$

***Đáp số:*** $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$

# *Chủ đề 4*
# ĐƯỜNG SINH THẲNG

**Bài 1:** **Tìm đường sinh thẳng của mặt:**

**a/** $(S): y^2+3xy+2yz-zx+3x+2y=0$ **qua** $O(0;0;0)$

**b/** $x^2+y^2+5z^2-6xy+2yz-2zx-9=0$

**và song song** $(D): \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-1}$

***Giải:***

**a**.

(d) qua $O(0;0;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u}=(a;b;c)\neq(0;0;0)$ nên $(d):\begin{cases}x=at\\y=bt\\z=ct\end{cases}$

Thay (d) vào (S) ta được: $(bt)^2+3(at)(bt)+2(bt)(ct)-(ct)(at)+3(at)+2(bt)=0$

$$\Leftrightarrow (b^2+ab+bc-ac)t^2+(3a+2b)t=0$$

(d) là đường sinh của $(S)\Leftrightarrow(d)\subset(S)\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=0\\b^2+3ab+2bc-ac=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{3a}{2}\\ \dfrac{9}{4}a^2+3a(-\dfrac{3a}{2})+2(-\dfrac{3a}{2})c-ac=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{3a}{2}\\ -\dfrac{9}{4}a^2-4ac=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=-\dfrac{3a}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{u}=(0;0;c)\ //\ \overrightarrow{u_1}=(0;0;+1)\\ \begin{cases}b=-\dfrac{3a}{2}\\c=-\dfrac{9a}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{u}=(a;-\dfrac{3a}{2};-\dfrac{9a}{16})\ //\ \overrightarrow{u_2}=(+16;-24;-9)\end{array}\right.$$

Vậy có 2 đường sinh thẳng của (S) là $(d_1):\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases}x=16t\\y=-24t\\z=-9t\end{cases}$

**b/**

(d) // (D) nên (d) qua $M(x_o;y_o;z_o)\in(S)$ và có VTCP $\vec{u}=(+2;+1;-1)$

nên $(d):\begin{cases}x=x_o+2t\\ y=y_o+t\\ z=z_o-t\end{cases}$

Thay (d) vào (S) ta được:

$(x_o+2t)^2+(y_o+t)^2+5(z_o-t)^2-6(x_o+2t)(y_o+t)+2(y_o+t)(z_o-t)-2(z_o-t)(x_o+2t)-9=0$

$\Leftrightarrow(-12y_o-12z_o)t+x_o^2+y_o^2+5z_o^2-6x_oy_o+2y_oz_o-2z_ox_o-9=0$

(d) là đường sinh của $(S)\Leftrightarrow(d)\subset(S)\Leftrightarrow\begin{cases}z_o=-y_o\\ x_o^2+6y_o^2-6x_oy_o-2y_o^2+2x_oy_o-9=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}z_o=-y_o\\ x_o^2-4x_oy_o+4y_o^2-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_o=-y_o\\ (x_o-2y_o)^2-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_o=-y_o\\ x_o=2y_o\pm 3\end{cases}$

Vậy các đường sinh thẳng của (S) có dạng $(d):\begin{cases}x=2k\pm 3+2t\\ y=k+t\\ z=-k-t\end{cases},\forall k\in\mathbf{R}$

***Bài 2:*** **Một mặt phẳng song song với mặt $x+y-z=0$ cắt mặt $(H):x^2+y^2-z^2=1$ theo hai đường sinh thẳng. Tìm giao điểm của hai đường sinh thẳng này và góc tạo bởi chúng.**

***Giải:***

(P) song song với mặt phẳng $x+y-z=0$ nên $(P):x+y-z+m=0\ (m\neq 0)$

có VTPT $\vec{n}=(+1;+1;-1)$

$(H)\Leftrightarrow(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$

Phương trình hai họ đường sinh thẳng của (H):

$(d):\begin{cases}p(x+z)=q(1+y)\\ q(x-z)=p(1-y)\end{cases}$ ; $(d'):\begin{cases}p'(x+z)=q'(1-y)\\ q'(x-z)=p'(1+y)\end{cases}$ với $(p;\,q)\neq(0;\,0)$ và $(p';q')\neq(0;0)$

$\Leftrightarrow(d):\begin{cases}px-qy+pz-q=0\\ qx+py-qz-p=0\end{cases}$ ; $(d'):\begin{cases}p'x+q'y+p'z-q'=0\\ q'x-p'y-q'z-p'=0\end{cases}$

(d) có cặp VTPT $\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1}=(p;-q;p)\\ \overrightarrow{n_2}=(q;p;-q)\end{array}\right.$ nên có VTCP $\vec{u}=(q^2-p^2;2pq;\,p^2+q^2)$

$(d')$ có cặp VTPT $\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1'}=(p';q';p')\\ \overrightarrow{n_2'}=(q';-p';-q')\end{array}\right.$ nên có VTCP $\overrightarrow{u'}=(p'^2-q'^2;2p'q';\,-p'^2-q'^2)$

$$(d)\subset(P)\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 2pq-2p^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} p=0\Rightarrow \vec{u}=(q^2;\ 0;\ q^2)\ //\ \overrightarrow{u_1}=(+1;\ 0;+1)\\ p=q\Rightarrow \vec{u}=(0;\ 2q^2;\ 2q^2)\ //\ \overrightarrow{u_2}=(0;+1;+1)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (d_1):\begin{cases} y+1=0\\ x-z=0\end{cases}\ ;\ (d_2):\begin{cases} x-y+z-1=0\\ x+y-z-1=0\end{cases}$$

$$(d')\subset(P)\Leftrightarrow \vec{u'}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 2p'q'+2p'^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} p'=0\Rightarrow \vec{u'}=(-q'^2;\ 0;-q'^2)\ //\ \overrightarrow{u_1}=(+1;\ 0;+1)\\ p'=-q'\Rightarrow \vec{u'}=(0;\ -2p'q';-2q'^2)\ //\ \overrightarrow{u_2}=(0;\ +1;+1)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (d_1'):\begin{cases} y-1=0\\ x-z=0\end{cases}\ ;\ (d_2'):\begin{cases} x-y+z+1=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$$

Ta được: $(d_1)\ //\ (d_1')$ và $(d_2)\ //\ (d_2')$

Giao điểm của $(d_2)$ và $(d_1')$ là điểm $(+1;+1;+1)$ trong mặt phẳng $(P_1): x+y-z+1=0$

Giao điểm của $(d_1)$ và $(d_2')$ là điểm $(-1;-1;-1)$ trong mặt phẳng $(P_2): x+y-z-1=0$

$$\cos(d_2, d_1')=\cos(d_1, d'_2)=\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$$

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1***: Tìm đường sinh thẳng của (S): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ biết nó song song với mặt phẳng (P) : 3x+2y-4z=0

***Đáp số :*** $\triangle_1=\begin{cases} x=5+2t\\ y=-3/4+1t\\ z=1+2t\end{cases}$ $\quad\triangle_2:\begin{cases} x=4+2t\\ y=-t\\ z=1+t\end{cases}$

***Bài 2***: Tìm đường thẳng đi qua điểm $I(+1;+1;+1)$ và nằm trên Hyperboloit 1 tầng $(H): x^2+y^2-z^2=1$

***Đáp số:*** $(d_1):\begin{cases} x=1\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases} x=1+t\\ y=1\\ z=1+t\end{cases}$

# Chủ đề 5
# MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP.

***Bài 1: Tìm các đường sinh thẳng của mặt yên ngựa*** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$ ***đi qua điểm*** $(8;3\sqrt{2};1)$

Lời Giải:

Gọi d là dường thẳng đi qua điểm(..)và có VTCP $\vec{u}(a;b;c)\neq(0;0'0)$

$$\begin{cases} x=8+ta \\ y=3\sqrt{2}+tb \\ z=1+tc \end{cases}$$

Xét hệ pt tạo bởi (d) và(S):

$$\frac{(8+ta)^2}{16}-\frac{(3\sqrt{2}+tb)^2}{9}=2(1+tc)\Leftrightarrow(\frac{a^2}{16}-\frac{b^2}{9})t^2+(a-\frac{2\sqrt{2}}{3}b-2c)t=0(*)$$

D là đường sinh của (S)$\Leftrightarrow$ có vô số nghiệm t $\begin{cases} \begin{cases}\frac{a^2}{16}=\frac{b^2}{9}\end{cases} \\ a-\frac{2\sqrt{2}}{3}b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3a=4b \\ 3a=-4b \end{array}\right. \\ c=\dfrac{a-\frac{2\sqrt{2}}{3}b}{2} \end{cases}$

Chọn a=4$\Rightarrow b=3\Rightarrow c=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

Chọn a=4$\Rightarrow b=3\Rightarrow c=\frac{4+\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

Vậy hai đừơng sinh của (S)là $d_1:\begin{cases} x=8+4t \\ y=3\sqrt{2}+3t \\ 1+(2-\sqrt{2})t \end{cases};d_2:\begin{cases} x=8+4t \\ y=3\sqrt{2}-3t \\ z=1+(2+\sqrt{2})t \end{cases}$

***<u>Nhận xét</u>***: *để giải bài toán dạng này ta thực hiện các bươc:*

*B1:viết pt dạng tham số của đường thẳng d dựa vào điểm cho trước*

*B2:để d là đường sinh của mặt yên ngựa thì hệ phương trình hợp bởi mặt yên ngựa và d phải co nghiệm dúng với mọi t*

*B3:tìm vecto chỉ phương của d và viết phương trình đường sinh d.*

***<u>Bài 2</u>: Lập phương trình mặt tròn xoay do đường thẳng (d) :*** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+3t \\ z=t \end{cases}$ ***quay một vòng xung quanh trục Oz tạo nên.***

*Lời Giải* :

Giao của mặt tròn xoay với mặt phẳng bất kì $z = t$ là một đường tròn có bán kính $r$ phụ thuộc vào $t$ và có tâm thuộc trục Oz.

Do đó, với mỗi điểm M(x, y, z) bất kì thuộc đường tròn và $x^2 + y^2 = r^2$

Vì $r$ phụ thuộc vào $t$ nên từ phương trình đường thẳng (d) ta có :

$$x^2 + y^2 = (1+2z)^2 + (-3+3z)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2 + y^2 - 13z^2 + 14z - 10 = 0}$$

***Bài 3 : Cho mặt yên ngựa $x^2 - y^2 = 2z$. Tìm quỹ tích những giao điểm của những đường sinh thẳng vuông góc với nhau.***

Lời Giải

Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm M($x_0; y_0; z_0$) $\in$(S)và VTCP $\vec{u} = (a;b;c) \neq (0;0;0)$

$$d\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Xét hệ phương trình hợp bởi(d) và(S): $(x_0 + at)^2 - (y_0 + bt)^2 = 2(z_0 + ct)$

$(a^2 - b^2)t^2 + 2(ax_0 - by_0 - c)t = 0 \quad (*)$

(d) là đường sinh thẳng của (S) khi và chỉ khi hệ (*) có nghiệm đúng với mọi t

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ax_0 - by_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b \\ a(x_0 - y_0) - c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -b \\ a(x_0 + y_0) - c = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b \\ c = b(x_0 - y_0) \end{cases} \\ \begin{cases} a = -b \\ c = -b(x_0 + y_0) \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \vec{u} \ = (1;1; x_0 - y_0); \vec{u}_2 (1;-1; -x_0 - y_0$

$\vec{u}_1\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow 1 - 1 - ({x_0}^2 - {y_0}^2) = 0 \Rightarrow x_0^2 - y_0^2 = 0$

Vậy quỹ tích giao điểm của những cặp đường sinh vuông góc với nhau là hai đường thẳng cắt nhau: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

***<u>Bài 4</u>:Tìm tâm ,bán kính của mặt cầu :***

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36 (S) \\ 3x + y - z = 0 (P) \end{cases}$$

**<u>Lời Giải.</u>**

(S) có tâm I(4,7,-1) và có bán kính = 6.

Tâm của (C) là hình chiếu vuông gốc của I(4,7,-1) lên(P)

Phương trình đường thẳng qua I và vuông gốc với (P) là :

$$(d)\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 7+t \quad (t\in R) \\ z = -1-t \end{cases}$$

Giao điểm M(x,y,z) của (d) và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x+y-z-9=0 \\ x=4+3t \\ y=7+t \\ z=-1-t \end{cases} \quad (t\in R)$$

Ta có :3(4+3t)+7+t+1+t-9=0 $\Leftrightarrow$ t=-1. Vậy tọa độ của M là (1,6,0) Đây là tâm của đường tròn (C)

Bán kính (C) :Áp dung định lí Pitago trong tam giác cho ta :$r^2=R^2-d^2_{(M,(P))}$ [Trong đó:r:bán kính đường tròn,R:bán kính mặt cầu (S), $d^2_{(M,(P))}$ :khoàng cách từ M đến (P).] Vậy ta có bán kính (C)là:r=$\sqrt{36-11}$ =5.

***Bài 5**:Qua điểm M(1,-2) dựng đường kính của ( C):*

$$3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$$

***Và đường kính liên hợp với nó.Viết phương trình các đường kính đó:***

**Lời Giải** .

Vì đường kính là đường thẳng qua tâm I nên trong trường hợp này đường kính cần tìm là đường thẳng MI.

Tâm I(x,y) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ -x+3y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I(-1,-1)$

Phương trình IM: $\dfrac{x-1}{-1-1}=\dfrac{y+2}{-1+2} \Leftrightarrow x+2y+3=0$

Phương trình đường kính liên hợp với đường kính trên có dạng:

$1F'_x(x,y)+2F'_y(x,y)=0$

$\Leftrightarrow$ 6x-2y+4+2(-2x+6y+4)=0

$\Leftrightarrow$ **x+5y+6=0**

***Bài 6 : Xác định mặt do 1 đường thẳng chuyển động tạo nên biết rằng nó tựa trên 3 đường thẳng***

$(d_1): \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}$ ; $(d_3): \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z}{1}$

$(d_2): \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

***Giải***

Lấy $M_0(x_0,y_0,z_0)\in$ (d) và $\vec{v}(a,b,c)\neq(0,0,0,)$ là vtcp của (d)

$$\text{d cắt } d_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & -1 \\ x_0 & y_0-1 & z_0 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow a(y_0-1)-(x_0+2z_0)b+(2y_0-2)c=0 \ (1)$$

$$\text{d cắt } d_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ x_0-2 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(z_0-y_0)-b(2-x_0)+c(2-x_0)=0 \ (2)$$

$$\text{d cắt } d_3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \\ x_0 & y_0+1 & z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(-y_0-1)-b(2z_0-x_0)+c(2y_0+2)=0 \ (3)$$

Hệ (1), (2), (3) là hệ thuần nhất có nghiệm (a, b, c) ≠ (0, 0, 0)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_0-1 & -x_0-2z_0 & 2y_0-2 \\ z_0-y_0 & x_0-2 & 2-x_0 \\ -y_0-1 & -2z_0+x_0 & 2y_0+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_0-1 & -x_0-2z_0 & 2y_0-2 \\ z_0-y_0 & x_0-2 & 2-x_0 \\ -2 & -4z_0 & 4y_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+4y_0^2-4z_0^2+4=0$$

Vậy phương trình của mặt phẳng cần tìm là : $x_0^2+4y_0^2-4z_0^2+4=0$

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1:*** Cho đường cong : $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0.$ và 1 đường kính của nó : x+2y-2=0.Lập phương trình đường kính liên hợp với đường kính trên.

***Đáp số***:**2x+2y-1=0**

***Bài 2:*** Một mặt phẳng song song với mặt x + y – z = 0 cắt mặt $x^2+y^2-z^2=1$ theo hai đường sinh thẳng. Tìm giao điểm của hai đường sinh thẳng này và góc tạo bởi chúng.

# Chuyên đề
# QUỸ TÍCH

***Dạng 1**: Quỹ tích tâm của đường bậc hai (C)*

***Phương pháp***:
Đường bậc 2 (C) có dạng: $F(x, y, m) = 0$ trong đó m là tham số.
Toạ độ tâm I (x,y) của (C) thoả hệ phương trình: $\begin{cases} F_x'(x, y, m) = 0 \\ F_y'(x, y, m) = 0 \end{cases}$ (1)
Khử tham số m trong hệ (1) Ta được quỹ tích cần tìm.

***Bài mẫu 1**:Tìm quỹ tích tâm của tất cả những đường cong có phương trình:*
***(C): $F(x, y,m) = x^2 + 2xy - y^2 - 2mx + 4my + 1 = 0$, trong đó m là tham số.***

***Giải** :*

Trước hết, ta đi tìm toạ độ tâm I(x ;y) của(C) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} F_x' = x + y - m = 0 & (1) \\ F_y' = x - y + 2m = 0 & (2) \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với mọi *m*,do đó đường cong (C) luôn có tâm .
Bây giờ ta sẽ khử *m* trong hệ trên bằng cách rút *m= x+y* từ (1) thay vào (2) ta được quỹ tích tâm I của họ đường cong (C) là đường thẳng :

$$3x+y = 0$$

***Nhận xét :*** *- Quỹ tích vừa tìm được là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ O.*
*- Có thể khử m ở hệ trên bằng cách nhân phương trình (1) với 2 rồi cộng vào (2) ta vẫn được quỹ tích cần tìm.*

***Bài mẫu 2** : Tìm quỹ tích tâm của tất cả những đường cong bậc hai(C) đi qua bốn điểm O(0 ;0) ; A(2 ;0) ; B(0 ;1) ; C(1 ;2).*

***Giải :***

Trước hết, ta viết phương trình (C) ở dạng tổng quát :

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Vì (C) qua O(0;0) nên: $f = 0$
(C) qua A(2 ;0) nên : $d = -a$
(C) qua B(0 ;1) nên : $c = - 2e$
Khi đó (C) được viết lại là : $ax^2 + 2bxy - 2ey^2 - 2ax + 2ey = 0$
Mặt khác, vì C(1 ;2) $\in$ (C) nên ta được : $a = 4(b-e)$ (1)
Toạ độ tâm I (x ;y) của (C) thoả hệ phương trình :

$$\begin{cases} ax + by - a = 0 \\ bx - ey + e = 0 \end{cases}$$

<=> $$\begin{cases} a(x-1) + by = 0 \\ bx + e(1-y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được :

$$\begin{cases} 4(b-e)(x-1) + by = 0 \\ \quad bx + e(1-y) = 0 \end{cases}$$

<=> $$\begin{cases} b(4x + y - 4) = 4e(x-1) \\ \quad bx = e(y-1) \end{cases}$$

Chia vế theo vế ta được :

$$\frac{4x + y - 4}{x} = \frac{4(x-1)}{y-1}$$

<=> $\boldsymbol{4x^2 - 4xy - y^2 + 5y - 4 = 0}$ ***(C')***

Vậy quỹ tích các tâm của đường cong (C) chính là đường cong (C') và thoả điều kiện : $\begin{vmatrix} 4(b-e) & b \\ b & -e \end{vmatrix} \neq 0$

***Nhận xét:*** *- Quỹ tích ở bài này chứa hai tham số trong hệ phương trình nên ta lựa chọn phương pháp lập tỉ số để khử ẩn.*

*- Đây là bài toán quỹ tích có điều kiện nên phải chú ý đến điều kiện*

***Dạng 2: Quỹ tích trung điểm các dây cung có phương $\vec{v}$ của đường bậc hai (C).***

***Phương pháp:***

Trung điểm của các dây cung có phương $\vec{\mathbf{v}}(\alpha;\beta)$ là đường kính liên hợp với phương đó:

- Trước hết ta viết phương trình tổng quát (d) có phương $\vec{\mathbf{v}}(\alpha;\beta)$
- Tìm điều kiện để (d) và (C) có giao điểm A,B.

Tới đây ta có 2 cách để giải:

***Cách 1***: Toạ độ trung điểm thoả: $\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{cases}$ (I)

- Khử tham số trong hệ (I) ta quỹ tích là một đường thẳng với điều kiện bước 2

***Cách 2***:

Quỹ tích có dạng:

$$\boldsymbol{\alpha . F_x'(x;y) + \beta . F_y'(x;y) = 0}$$

Và có điều kiện như bước 2.

***<u>Bài</u> <u>mẫu</u> <u>1</u>: Cho đường cong (C) có phương trình:***

$$F(x;y) = 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0 \qquad (1)$$

***Tìm quỹ tích trung điểm của những dây song song với trục Ox.***

***<u>Giải</u>***:

Đường thẳng song song với trục Ox có dạng: y = m. Thay vào (1) ta được:

$$3x^2 + (7m+4)x + 5m^2 + 5m + 1 = 0 \qquad (*)$$

Để phương trình (*) có nghiệm thì $\Delta = (7m + 4)^2 - 12(5m^2 + 5m + 1) \geq 0$ hay:

$$-11m^2 - 4m + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4\sqrt{3}+2}{11} \leq m \leq \frac{4\sqrt{3}-2}{11} \qquad (**)$$

Với điều kiện (**) thì phương trình (*) có 2 nghiệm $x_1$ và $x_2$ là hoành độ của các giao điểm A,B của (C) và đường thẳng y = m. Trung điểm I của AB có toạ độ:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{1}{6}(7m+4) \\ y = m \end{cases} \qquad (***)$$

Khử m trong (***) ta được quỹ tích trung điểm I của các dây song song với trục Ox là đường thẳng:

$$\boldsymbol{6x + 7y + 4 = 0}$$

với điều kiện $\mathbf{-\frac{4\sqrt{3}+2}{11} \leq y \leq \frac{4\sqrt{3}-2}{11}}$

***<u>Nhận</u> <u>xét</u> :*** *- Ở đây đã sử dụng cách 1 để giải quyết bài toán. Tuy nhiên ta có có thể sử dụng cách 2 cũng đi đến kết quả trên.*

*- Trong điều kiện(**) không nhất thiết phải có $\Delta >$ 0, vì khi $\Delta = 0$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm trùng nhau, nên xem như vẫn có trung điểm của những dây này.*

***<u>Bài</u> <u>mẫu</u> <u>2</u>:Cho đường cong (C) có phương trình:***

$$F(x;y) = 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0 \qquad (1)$$

***Tìm quỹ tích trung điểm của những dây vuông góc với đường thẳng (d): x - y + 1 = 0.***

***<u>Giải</u>***:

Phương trình đường thẳng (D) vuông góc với (d) có dạng: x + y + m = 0.
Giao điểm của (D) và (C) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + (3m-1)x + 5m^2 - 5m + 1= 0 \qquad (*)$$

Để phương trình (*) có nghiệm thì:

$$\Delta = (3m-1)^2 - 4(5m^2 - 5m +1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -11m^2 + 14m - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{11} \leq m \leq 1 \qquad (**)$$

Hoành độ trung điểm I của AB là: $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = -\frac{1}{2}(3m-1) \quad (***)$

*($x_A$ , $x_B$ là nghiệm của (*))*

Từ (**) và (***) ta được : $-1 \le x_I \le \frac{1}{11}$ (****)

Với điều kiện (****) thì quỹ tích trung điểm I của AB là đường kính liên hợp với phương $\vec{v}(1;-1)$ là vectơ chỉ phương của (D) có phương trình:

$$1.F_x'(x;y) - 1.F_y'(x;y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 3y + 1 = 0$$

Vậy quỹ tích trung điểm I của AB là: $\begin{cases} \mathbf{x + 3y + 1 = 0} \\ \mathbf{-1 \le x \le \frac{1}{11}} \end{cases}$

***<u>Nhận</u> <u>xét</u>:*** *- Ở đây đã sử dụng cách 2 để giải quyết bài toán, nếu sử dụng cách 1 ta vẫn đi đến kết quả trên, nhưng việc sử dụng cách nào để giải quyết dạng toán này là tuỳ vào kỹ năngcủa mỗi người.*

*- Ở đây giới hạn quỹ tích ở (****) có được là do chúng ta linh hoạt dựa vào điều kiện (**) và (***)*

***<u>Dạng</u> <u>3</u>: Quỹ tích giao điểm của những cặp đường sinh thẳng của mặt kẻ bậc hai (S) vuông góc nhau.(Mặt Hypeboloit 1 tầng và Paraboloit hypebolic)***

***<u>Phương</u> <u>pháp</u>:***

- Viết phương trình hai họ đường sinh thẳng d và d' của mặt bậc hai (S).
- Tìm vecto chỉ phương của d và d'.
- Để d ⊥ d' thì $\vec{u}_d.\vec{u}_{d'} = 0$

=> Quỹ tích cần tìm.

***<u>Bài</u> <u>mẫu</u> <u>1</u>: Cho mặt Paraboloit Hypebolic :*** $x^2 - y^2 = 2z$ ***(S).***
***Tìm quỹ tích những cặp đường sinh thẳng vuông góc với nhau.***

***<u>Giải</u>***:

Hai họ đường sinh thẳng của (S) là :

$$d: \begin{cases} p(x-y) = 2q \\ q(x+y) = pz \end{cases} \quad (p \neq 0) \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} p'(x-y) = q'z \\ q'(x+y) = 2p' \end{cases} \quad (q' \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow d: \begin{cases} px - py - 2q = 0 \\ qx + qy - pz = 0 \end{cases} \quad (p \neq 0) \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} p'x - p'y - q'z = 0 \\ q'x + q'y - 2p' = 0 \end{cases} \quad (q' \neq 0)$$

Đường thẳng d có cặp vec tơ pháp tuyến $\begin{vmatrix} \vec{n}_1 = (p;-p;0) \\ \vec{n}_2 = (q;q;-p) \end{vmatrix}$ nên có vec tơ chỉ phương

$\vec{u}_1 = (p^2;p^2;2pq) // (p;p;2q)$

Đường thẳng d' có cặp vec tơ pháp tuyến $\begin{vmatrix} \vec{n}'_1 = (p';-p';-q') \\ \vec{n}'_2 = (q';q';0) \end{vmatrix}$ nên có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (q'^2;-q'^2;2p'q')//(q';-q';2p')$

Để d ⊥ d' thì $\vec{u}_d.\vec{u}_{d'} = 0$

⇔ 4p'q = 0

- Nếu p'= 0 thì quỹ tích các giao điểm cần tìm là đường thẳng: $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$
- Nếu q = 0 thì quỹ tích các giao điểm cần tìm là đường thẳng: $\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Vậy quỹ tích các giao điểm của hai đường sinh thẳng vuông góc nhau là hai đường thẳng vừa tìm được ở trên.

***Nhận xét:*** *- Ở đây phương trình mặt bậc 2 được cho ở dạng chính tắc. Nếu (S) không ở dạng chính tắc thì bài toán trở nên phức tạp hơn nhưng có thể giải quyết như trên khi chuyển nó về dạng chính tắc.*
*- Ở bài giải này đã sử dụng một tính chất đặc biệt của mặt Paraboloit hypebolic là:* ***hai đường sinh thẳng khác họ luôn cùng nằm trong một mặt phẳng và cắt nhau.***

***Bài mẫu 2: Cho mặt yên ngựa:*** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ ***(a ≠ b). Tìm quỹ tích giao điểm của những cặp đường sinh thẳng vuông góc với nhau.***

**Giải:**

Họ hai đường sinh thẳng của (S) là:

$$d:\begin{cases} p(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}) = 2q \quad (1) \\ q(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}) = pz \quad (2) \end{cases} \quad (p \neq 0) \qquad \text{và} \qquad d':\begin{cases} p'(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}) = q'z \quad (1') \\ q'(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}) = 2p' \quad (2') \end{cases} \quad (q' \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad d:\begin{cases} \frac{p}{a}x - \frac{p}{b}y - 2q = 0 \\ \frac{q}{a}x + \frac{q}{b}y - pz = 0 \end{cases} \quad (p \neq 0) \text{ và } d':\begin{cases} \frac{p'}{a}x - \frac{p'}{b}y - q'z = 0 \\ \frac{q'}{a}x + \frac{q'}{b}y - 2p' = 0 \end{cases} \quad (q' \neq 0)$$

Đường thẳng d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (\frac{p^2}{b};\frac{p^2}{a};\frac{2pq}{ab}) \ // \ (\frac{p}{b};\frac{p}{a};\frac{2q}{ab})$

Đường thẳng d' có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'} = (\frac{q'^2}{b};-\frac{q'^2}{a};\frac{2p'q'}{ab}) \ // \ (\frac{q'}{b};-\frac{q'}{a};\frac{2p'}{ab})$

Vì d và d' là hai họ đường sinh thẳng của mặt Paraboloit hypebolic nên chúng luôn cắt nhau.

Để d ⊥ d' thì $\vec{u}_d.\vec{u}_{d'} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{pq'}{b^2} - \frac{pq'}{a^2} + 4\frac{p'q}{ab} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4p'q = (b^2 - a^2)pq' \qquad (3)$$

Lấy (1) nhân với (2') rồi so sánh với (3) ta được: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = b^2 - a^2$

Lấy (2) nhân với (1') rồi so sánh với (3) ta được: $z^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2}{4}$

Vậy quỹ tích cần tìm là đường cong: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = b^2 - a^2 \\ z = \frac{b^2 - a^2}{2} \end{cases}$

***<u>Nhận</u> <u>xét</u>:*** *- Đây là một dạng tổng quát của mặt Paraboloit hypebolic. Ở bài này ở phương trình (3) có 4 ẩn p,p',q,q' nên ta đã chọn phương pháp so sánh để khử ẩn.*

*- Trong phương trình* $z^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2}{4}$ *ta chỉ nhận* $z = \frac{b^2 - a^2}{2}$

vì $z = -\frac{b^2 - a^2}{2}$ *không thoả phương trình mặt yên ngựa.*

# Bài tập tương tự

***Bài 1***: Cho đường cong bậc 2 (C):

$$F(x;y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4mx - 6my + 3 = 0$$

Tìm quỹ tích tâm I của đường cong (C).

***Đáp số***: $x - 7y = 0$

***Bài 2***: Cho đường cong bậc 2 (C):

$$F(x;y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

Một đường thẳng thay đổi song song với trục Oy cắt đường bậc hai (C) tại các điểm M và N. Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng MN.

***Đáp số***: $\begin{cases} x + 4y - 14 = 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} \le x \le 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$

***Bài 3***: Cho mặt yên ngựa: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 2z$ Tìm quỹ tích giao điểm của những cặp đường sinh thẳng vuông góc với nhau.

***Đáp số***: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 5 \\ z = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

# Chuyên đề
# CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

***Dạng 1**: Chứng minh các tính chất của đường bậc hai*

| |
|---|
| ***Phương pháp***<br>- Nắm vững các kiến thức về đường tròn, Elip, Hypebol, Parabol.<br>- Nắm vững các kiến thức về tâm, phương tiệm cận, đường tiệm cận.<br>- Có kỹ năng tính toán và biến đổi. |

| |
|---|
| ***Bài mẫu 1**: Một dây cung AB tuỳ ý đi qua tiêu điểm F của Elip, Hypebol, Parabol. Chứng minh rằng : $\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}$ luôn không đổi.* |

***CM*** :

- Xét Parabol : $y^2 = 2px$. Đường thẳng (d) qua F có phương trình $y = k(x-\frac{p}{2})$

Giao của (d) và (P) là : $k^2(x-\frac{p}{2})^2 = 2px$

$$\Leftrightarrow \quad k^2x^2 - p(k^2+2)x + \frac{p^2k^2}{4} = 0 \qquad (*)$$

Gọi $x_A$ ; $x_B$ lần lượt là nghiệm của phương trình (*) thì ta được :

$$x_A.x_B = \frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_B = \frac{p^2}{4x_A} \quad \text{và} \quad x_A > 0$$

Ta có: $FA = \sqrt{(x_A-\frac{p}{2})^2 + y_A^2} = \sqrt{(x_A+\frac{p}{2})^2} = x_A + \frac{p}{2}$

Tương tự ta có : $FB = x_B + \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4x_A} + \frac{p}{2} = \frac{p}{2}(\frac{p}{2x_A}+1) = \frac{p}{2}(\frac{p+2x_A}{2x_A})$

Khi đó : $\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB} = \frac{1}{x_A+\frac{p}{2}} + \frac{1}{\frac{p}{2}(\frac{p+2x_A}{2x_A})}$

$$= \frac{1}{x_A+\frac{p}{2}} + \frac{2x_A}{p(x_A+\frac{p}{2})}$$

$$= \frac{2}{p} \qquad \text{(đpcm)}$$

- Tương tự với Elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{2a}{b^2}$
- Với Hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{2c}{b^2}$

***Nhận xét:*** *- Dạng bài tập chứng minh đòi hỏi người làm phải có kiến thức vững và có kĩ năng tính toán,vì vậy chúng ta phải biến đổi cẩn thận và vận dụng các giả thiết của bài toán.*
*- Cách chứng minh cho Elip và Hypebol hoàn toàn tương tự như (P).*

***Bài mẫu 2: Chứng minh rằng:***
***Nếu một đường bậc hai có tâm nằm trên Ox và tiếp xúc với trục Oy tại O thì phương trình của nó có dạng:*** $\boldsymbol{ax^2 + cy^2 + 2dx = 0.}$

***CM:***

Giả sử đường bậc hai (C) có phương trình:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Tâm I của (C)là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$

Do tâm I $\in$ Ox nên ta có: $\begin{cases} ax + d = 0 \\ bx + e = 0 \end{cases}$

Mặt khác, vì (C) tiếp xúc với Oy tại O nên phương trình $cy^2 + 2ey + f = 0$ phải có nghiệm kép y = 0, do đó ta có: $\begin{cases} c \neq 0 \\ e = f = 0 \end{cases}$

Vì e = 0 nên từ điều kiện bx + e =0 ta suy ra b= 0 và từ phương trình ax + d = 0 ta suy ra a $\neq$ 0.

Vậy đường bậc hai (C) có dạng: $\boldsymbol{ax^2 + cy^2 + 2dx = 0.}$

***Nhận xét:*** *- Đây là một bài toán dễ, nhưng đòi hỏi người học phải phát hiện ra đầy đủ các dữ kiện thì mới có thể giải quyết được.*
*- Chú ý trường hợp nghiệm kép y = 0 trong bài toán ta chỉ cần e= f = 0 và c $\neq$ 0.*

***<u>Bài</u> <u>mẫu</u> <u>3</u>: Trong hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxy cho Hypebol:***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

***a. CMR: tiếp tuyến tại M của Hypebol là phân giác trong của góc $F_1\hat{M}F_2$ ($F_1$, $F_2$) là hai tiêu điểm..***

***b. CMR :diện tích của tam giác tạo bởi hai đường tiệm cận của Hypebol với tiếp tuyến tuỳ ý của nó là không đổi.***

***<u>CM</u>*** :

***G***ọi A,B là 2 giao điểm của hai đường tiệm cận của Hypebol và một tiếp tuyến bất kì của nó.

Phương trình của tiếp tuyến AB tại điểm $M(x_0, y_0)$ bất kì là :

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

Phương trình hai tiệm cận OA và OB là :

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{và} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Toạ độ của A,B lần lượt là :

$$A = \left( \frac{a}{\frac{x_o}{a} - \frac{y_o}{b}} ; \frac{b}{\frac{x_o}{a} - \frac{y_o}{b}} \right) \qquad B = \left( \frac{a}{\frac{x_o}{a} + \frac{y_o}{b}} ; \frac{b}{\frac{x_o}{a} + \frac{y_o}{b}} \right)$$

Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB.

Khi đó diện tích tam giác OAB là :

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.d(O, AB) = ab \qquad \text{(đpcm)}$$

***<u>Nhận</u> <u>xét</u>*** : *- Vì $M \in (H)$ nên* $\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1$

*- Khi tính toán cần hết sức cẩn thận để tránh sai sót dẫn đến sai.*

***Dạng 2: Chứng minh các tính chất của mặt bậc hai***

***<u>Phương pháp</u>***

Đây là một dạng bài tập khó, vì vậy để giải tốt ta phải có một số kĩ năng sau :

- Nắm vững phép chiếu và tìm giao điểm của mặt bậc hai với một mặt phẳng.
- Biết viết và biến đổi trên họ đường sinh thẳng.
- Có kỹ năng tính toán cẩn thận.

***Bài mẫu 1** :CMR : mặt phẳng $z = Ax + By + C$ cắt Paraboloit $x^2 + y^2 = 2pz$ (với $p>0$) theo một Elip thì hình chiếu vuông góc của Elip đó xuống mặt phẳng Oxy là một đường tròn.*

***CM*** :

Mặt phẳng cắt Paraboloit nên hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2pz \\ z = Ax + By + C \end{cases} \quad (*)$$

Do đó tập hợp các điểm M(x,y,z) thoả mãn phương trình sau không rỗng :

$$x^2 + y^2 = 2p(Ax + By + C)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x\text{-}pA)^2 + (y - pB)^2 = p(2pC + A^2 + B^2)$$

Phương trình cuối là một mặt trụ tròn xoay có đường chuẩn là một đường tròn trong mặt phẳng Oxy có tâm (pA, pB) và bán kính $R = \sqrt{p(2pC + A^2 + B^2)}$

***Nhận xét*** : *- Bất kì mặt bậc hai nào có dạng F(x, y) hoặc F(x, z) ; F(y, z) là một mặt trụ tròn xoay.*
*- Bài này tìm hình chiếu của đường cong xuống mặt phẳng Oxy Nên ta khử z trong phương trình (*).*

***Bài mẫu 2** : CMR:Không có bất kì đường thẳng nào nằm hoàn toàn trên một Elipxoit :* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

***CM***

Gọi $M_0$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$) là một điểm bất kì thuộc (E).
Phương trình đường thẳng (d) qua $M_0$ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \\ z = z_o + pt \end{cases}$$

Tham số *t* ứng với giao điểm của(d) và (E) là nghiệm của phương trình :

$$\frac{(x_0 + mt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + nt)^2}{b^2} + \frac{(z_0 + pt)^2}{c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (m^2b^2c^2 + n^2a^2c^2 + p^2a^2b^2).\boldsymbol{t}^2 + 2(mb^2c^2x_0 + na^2c^2y_0 + pa^2b^2z_0).\boldsymbol{t} = 0 \quad (*)$$

Vì phương trình (*) có $m^2b^2c^2 + n^2a^2c^2 + p^2a^2b^2 > 0$ nên phương trình này có nhiều nhất là hai nghiệm do đó (d) cắt (E) nhiều nhất tại hai điểm. Do đó (d) không nằm hoàn toàn trên Ellipxoit.

***Nhận xét*** : *- Ngoài Elipxoit còn có những mặt sau cũng có kết quả chứng minh tương tự : Hypeboloit hai tầng ; Paraboloit Eliptic.*

*- Để đường thẳng (d) nằm hoàn toàn trên mặt bậc hai thì phương trình (*) phải nghiệm đúng với mọi t.*

***Bài mẫu 3 : Cho Hypeboloit 1 tầng :*** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ***(H)***

***Xét các họ nằm hoàn toàn trên (H). CMR : Qua mỗi điểm của mặt có đúng một đường thẳng của mỗi họ.***

***CM***

Hai họ đường sinh thẳng của (H) là :

$$d:\begin{cases} p\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=q\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ q\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=p\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} (p,q)\neq(0,0) \text{ và } d':\begin{cases} p'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=q'\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ q'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=p'\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases} (p',q')\neq(0,0)$$

Giả sử $M_o(x_0, y_0, z_0) \in (H)$ thì $M_o$ phải thuộc d và d'. Từ đó ta được :

+ Nếu $M_o \in d$ : $\begin{cases} p\left(\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}\right)=q\left(1+\frac{y_o}{b}\right) \\ q\left(\frac{x_o}{a}-\frac{z_o}{c}\right)=p\left(1-\frac{y_o}{b}\right) \end{cases}$

Vì p và q được chọn sai khác một thừa số khác 0 nên d là đường thẳng qua $M_o$ duy nhất.

Tương tự, vì p' và q' được chọn sai khác một thừa số khác 0 nên:

+ Nếu $M_o \in d'$ : $\begin{cases} p'\left(\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}\right)=q'\left(1-\frac{y_o}{b}\right) \\ q'\left(\frac{x_o}{a}-\frac{z_o}{c}\right)=p'\left(1+\frac{y_o}{b}\right) \end{cases}$ thì d' cũng là đường thẳng qua $M_o$ duy nhất.

Tóm lại, qua mỗi điểm thuộc (H) có đúng một đường sinh thẳng của mỗi họ đi qua.

***Nhận xét:*** *- Cách chứng minh cho Paraboloit hypebolic hoàn toàn tương tự.*
*- p,q sai khác một thừa số khác 0 nghĩa là ta luôn có thể chọn được (p,q) ≠ (0,0).*

***<u>Bài</u> <u>mẫu</u> <u>4</u> : Cho Hypeboloit 1 tầng :*** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ***(H)***

***CMR:***
***+ Hai đường thẳng phân biệt của cùng một họ đường sinh thẳng luôn chéo nhau.***
***+ Hai đường sinh thẳng khác họ luôn cùng nằm trong một mặt phẳng.***

***<u>CM</u>***

+ Giả sử hai đường sinh thẳng của cùng một họ có phương trình:

$$d_1:\begin{cases}\dfrac{p}{a}x-\dfrac{q}{b}y+\dfrac{p}{c}z=q\\ \dfrac{q}{a}x+\dfrac{p}{b}y-\dfrac{q}{c}z=p\end{cases}(p,q)\neq(0,0)\ \text{ và }\ d_2:\begin{cases}\dfrac{p'}{a}x-\dfrac{q'}{b}y+\dfrac{p'}{c}z=q'\\ \dfrac{q'}{a}x+\dfrac{p'}{b}y-\dfrac{q'}{c}z=p'\end{cases}(p',q')\neq(0,0)$$

Giao điểm của $d_1$ và $d_2$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{p}{a}x-\dfrac{q}{b}y+\dfrac{p}{c}z=q\\ \dfrac{q}{a}x+\dfrac{p}{b}y-\dfrac{q}{c}z=p\\ \dfrac{p'}{a}x-\dfrac{q'}{b}y+\dfrac{p'}{c}z=q'\\ \dfrac{q'}{a}x+\dfrac{p'}{b}y-\dfrac{q'}{c}z=p'\end{cases}\qquad(*)$$

Giải hệ phương trình trên có rank(A)= 3<rank($\overline{A}$)= 4 nên hệ phương trình (*) vô nghiệm. Do đó d và d' chéo nhau.

+ Hai họ đường sinh thẳng của (H) là :

$$d:\begin{cases}p\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=q\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ q\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=p\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}(\text{p,q})\neq(0,0)\ \text{ và }\ \text{d'}:\begin{cases}p'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=q'\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ q'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=p'\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}(\text{p}',\text{q}')\neq(0,0)$$

Hay

$$d:\begin{cases}\dfrac{p}{a}x-\dfrac{q}{b}y+\dfrac{p}{c}z=q\\ \dfrac{q}{a}x+\dfrac{p}{b}y-\dfrac{q}{c}z=p\end{cases}(p,q)\neq(0,0)\ \text{ và }\ \text{d'}:\begin{cases}\dfrac{p'}{a}x+\dfrac{q'}{b}y+\dfrac{p'}{c}z=q'\\ \dfrac{q'}{a}x-\dfrac{p'}{b}y-\dfrac{q'}{c}z=p'\end{cases}(p',q')\neq(0,0)$$

Giao điểm của d và d' là nghiệm của hệ phương trình :

Đặt $X=\dfrac{x}{a};Y=\dfrac{y}{b};Z=\dfrac{z}{c}$

Khi đó:

$$d:\begin{cases} pX - qY + pZ = q \\ qX + pY - qZ = p \end{cases} \qquad d':\begin{cases} p'X + q'Y + p'Z = q' \\ q'X - p'Y - q'Z = p' \end{cases}$$

Từ phương trình của d ta được: $\begin{cases} X = 2pq + (q^2 - p^2)Z \\ Y = p^2 - q^2 + 2pqZ \end{cases}$

Từ phương trình của d' ta được: $\begin{cases} X = 2p'q' + (q'^2 - p'^2)Z \\ Y = q'^2 - p'^2 - 2p'q'Z \end{cases}$

d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} 2pq + (q^2 - p^2)Z = 2p'q' + (q'^2 - p'^2)Z \\ p^2 - q^2 + 2pqZ = q'^2 - p'^2 - 2p'q'Z \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} (q^2 - p^2 + p'^2 - q'^2)Z = 2(p'q' - pq) \\ 2(pq + p'q')Z = q'^2 - p'^2 + q^2 - p^2 \end{cases} \qquad (**)$$

Vì p,q và p',q' không đồng thời bằng 0 và xác định sai khác một thừa số khác 0 nên ta có thể chọn sao cho : $p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2 = 1$

Khi đó từ (**) chứng tỏ d và d' cắt nhau.

***<u>Nhận</u> <u>xét:</u>*** *- Với Paraboloit hypebolic ta chứng minh hoàn toàn tương tự.*

*- Trong (*) A là ma trận các hệ số, $\overline{A}$ là ma trận các hệ số mở rộng và theo định lý Kronecker Capelly hệ (*) vô nghiệm.*

*- Việc đặt $X = \frac{x}{a}; Y = \frac{y}{b}; Z = \frac{z}{c}$ là để thuận tiện cho việc tính toán.*

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1***: Cho Hypeboloit 1 tầng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (H)

CMR : hình chiếu vuông góc của các đường sinh thẳng của (H) xuống các mặt phẳng toạ độ là tiếp tuyến của giao tuyến của (H) với mặt phẳng toạ độ đó.

***Bài 2 :*** Cho Paraboloit hypebolic : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (P)

CMR :Qua mỗi điểm của mặt (P) có đúng một đường thẳng của mỗi họ đường sinh thẳng đi qua.

***Bài 3 :*** Cho Paraboloit hypebolic : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (P)

CMR : Hai đường sinh thẳng khác họ luôn cắt nhau.

## ***Hướng dẫn :***

***Bài 1 :***

*- Viết một họ đường sinh thẳng d của (H)*
*- Tìm hình chiếu của họ đó xuống mỗi mặt phẳng toạ độ, giả sử là d'.*
*- giao điểm của d' với mỗi mặt phẳng thuộc (H)*
*- Từ hai phương trình của d'ta rút p, q của (1) thay vào (2) và rút p, q từ (2) thay vào (1) rồi cộng hai phương trình đó với nhau ta được điều cần chứng minh.*

***Bài 2 :*** *Làm tương tự như bài mẫu 3.*

***Bài 3 :*** *Làm tương tự như bài mẫu 4.*

# Chuyên đề
# ĐỒ THỊ

## *Dạng 1 : Đồ thị đường bậc hai*

***Phương pháp***

Sử dụng các phép đổi mục tiêu đã học biến đổi phương trình của đường bậc hai (C) về dạng đơn giản.
Vẽ đồ thị của đường bậc hai đó.
Nắm vững hai phép đổi mục tiêu quan trọng :

1. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{OI}$ : $Oxy \xrightarrow{T_{\overrightarrow{OI}}} Ix'y'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1x' + b_1y' \\ y = y_0 + a_2x' + b_2y' \end{cases}$$

2. Phép quay tâm O một góc α : $Oxy \xrightarrow{Q(O;\alpha)} Ox'y'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

***Bài mẫu 1 : Cho đường bậc hai (C) trong hệ toạ độ Đề các :***

$$F(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0 \qquad (*)$$

***a. Đường bậc hai (C) thuộc loại nào ?***
***b. Hãy vẽ (C)***

**Giải :**

**a.**

Bằng phép quay tâm O một góc α ta có : $\cot g2\alpha = \frac{a-c}{2b} = \frac{5-5}{6} = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha = 45^0$

Khi đó ta có $Oxy \xrightarrow{Q(O;\alpha)} Ox'y'$ và $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$ ( 1)

Thay (1) vào (*) ta được :

$$8x'^2 + 2y'^2 + 8\sqrt{2}x' - 14\sqrt{2}y' + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8(x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 2(y' - \frac{7}{\sqrt{2}})^2 - 32 = 0 \qquad (2)$$

Bằng phép đổi mục tiêu : $Ox'y' \xrightarrow{T_{\overline{OI}}} IXY$ ta có : $\begin{cases} X = x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ Y = y' - \dfrac{7}{\sqrt{2}} \end{cases}$

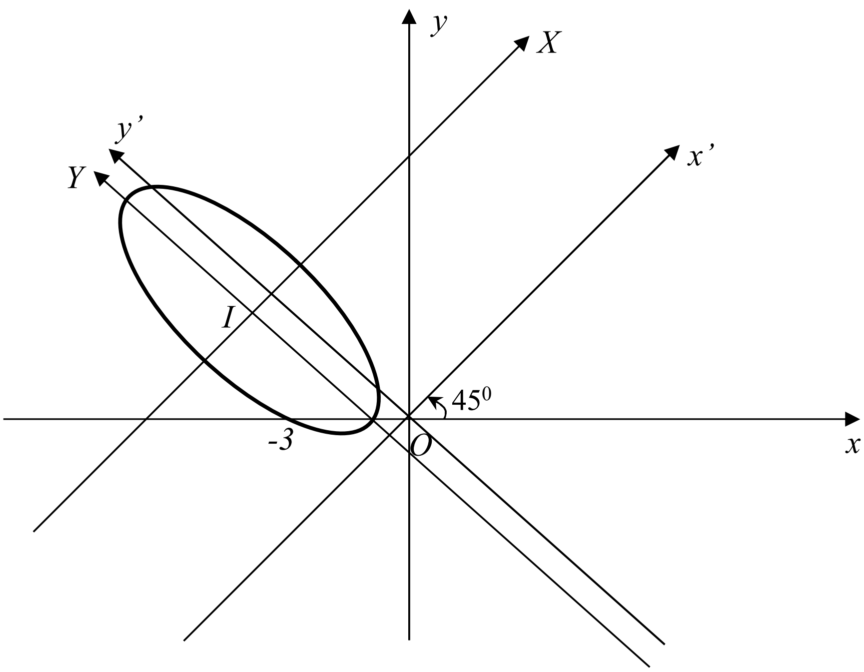
Vậy ta đã tịnh tiến hệ trục Ox'y' sang IXY, trong đó $I = (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{7}{\sqrt{2}})$

Khi đó (2) được viết lại : $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{16} = 1$

Vậy (C) là một Elip có trục lớn là trục IY và độ dài trục lớn là 2a = 8, trục nhỏ là trục IX và độ dài trục nhỏ là 2b = 4.

**b.**

Dựa vào câu a. ta vẽ được đồ thị như sau :




***Nhận xét*** : - *Đây là một dạng toán biến đổi không phức tạp nhưng nó đòi hỏi người làm phải hết sức cẩn thận và chọn cách biến đổi sao cho phương trình cuối cùng là đơn giản nhất.*

*- Ở bài toán này để vẽ đồ thị chúng ta thực hiện lần lượt các thao tác : Quay quanh O một góc $45^0$, rồi tịnh tiến hệ trục đến hệ trục toạ độ IXY và vẽ đồ thị trong hệ trục mới này.*

***Bài mẫu 2 : Cho đường bậc hai (C) trong hệ toạ độ Đề các :***

$$F(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 2x - 2y - 9 = 0 \qquad (*)$$

***a. Đường bậc hai (C) thuộc loại nào ?***

***b. Hãy vẽ (C)***

**Giải**

**a**.

Bằng phép quay tâm O một góc α ta có : $\cot g2\alpha = \frac{a-c}{2b} = \frac{3-3}{10} = 0$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = 45^0$$

Khi đó ta có $Oxy \xrightarrow{Q(O;\alpha)} Ox'y'$ và $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases}$ ( 1)

Thay (1) vào (*) ta được :

$$8x'^2 - 2y'^2 - 2\sqrt{2}y' - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 8x'^2 - 2(y' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 8 = 0 \qquad (2)$$

Bằng phép đổi mục tiêu : $Ox'y' \xrightarrow{T_{\overline{OI}}} IXY$ ta có : $\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Vậy ta đã tịnh tiến hệ trục Ox'y' sang IXY, trong đó $I = (0; -\frac{1}{\sqrt{2}})$

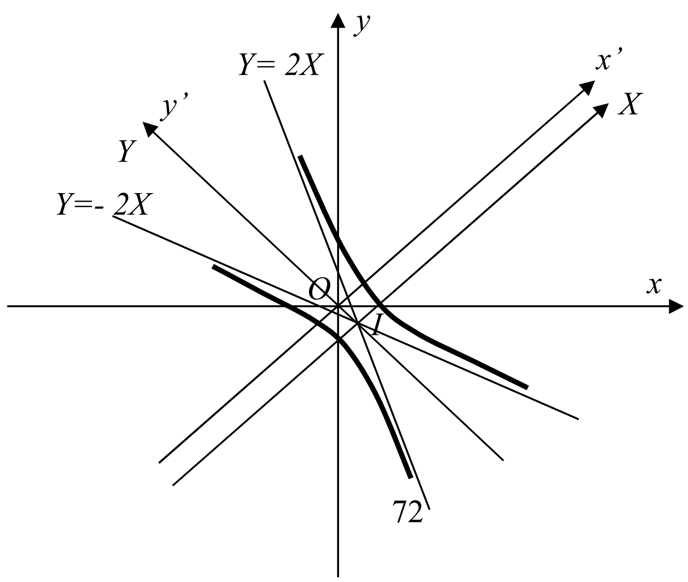
Khi đó (2) được viết lại : $X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1$

Vậy (C) là một Hypebol có trục thực là trục IX và độ dài trục thực là 2a = 2 ; trục ảo là trục IY và độ dài trục ảo là 2b = 4.

Hypebol (C) có hai tiệm cận là Y = 2X và Y = - 2X

**b**.

Dựa vào kết quả ở câu a. ta vẽ đồ thị của (C) như sau :



***Nhận xét*** : *- Ở bài toán này để vẽ đồ thị chúng ta thực hiện lần lượt các thao tác : Quay quanh O một góc $45^0$, rồi tịnh tiến hệ trục đến hệ trục toạ độ IXY và vẽ đồ thị của Hypebol trong hệ trục mới này.*
*- Việc vẽ đồ thị trong hệ toạ độ mới không cần quan tâm đến các hệ toạ độ cũ mà chỉ quan tâm đến hệ đang vẽ mà thôi.*

## *Dạng 2 : Đồ thị mặt bậc hai*

**Phương pháp**

Để vẽ được đồ thị của mặt bậc hai ta phải chú ý tới các tính chất đặc biệt của mặt đó như là trục đối xứng, các mặt phẳng đối xứng, giao của nó với các mặt toạ độ.
Ta cần nắm vững tính chất của hai mặt đặc biệt sau:

1. Mặt Hypeboloit một tầng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

- Hypeboloit 1 tầng đối xứng với các mặt phẳng toạ độ, các trục toạ và gốc toạ độ.
- Giao của Hypeboloit 1 tầng với mặt phẳng song song với trục Oz là Hypebol hoặc là những cặp đường thẳng.

2. Mặt Paraboloit hypebolic : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$

- Đối xứng với các mặt Oxz ; Oyz và trục Oz.
- Giao với mặt phẳng z = h là 1 cặp đường thẳng ( nếu h = 0) hoặc là những Hypebol (nếu $h \neq 0$).

***Bài mẫu 1 : Trong không gian cho mặt (S) :***

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

***a. Mặt (S) thuộc loại nào?***
***b. Hãy vẽ (S).***

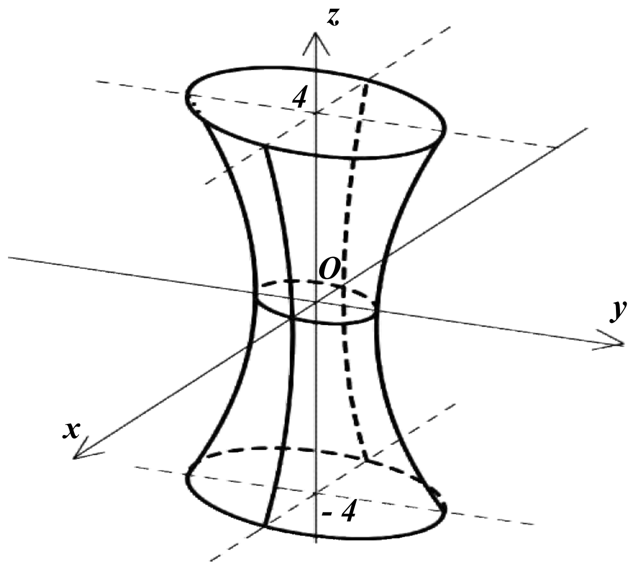
**Giải**

**a.**
Mặt bậc hai (S) là Hypeboloit 1 tầng đối xứng với các trục toạ độ,các mặt toạ độ và gốc toạ độ.

- Giao của (S) với mặt Oxy là một Elip có phương trình: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ .Đây là Elip có trục lớn là Oy, trục nhỏ là Ox.
- Giao của (S) với các mặt z = 4 và z = - 4 là Elip có phương trình là: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$

Đây cũng là các Elip có trục lớn song song với trục Oy.
- Nếu cắt (S) theo các mặt phẳng song song với trục Oz ta sẽ có giao tuyến là những Hypebol có trục thực nằm trong mặt đó và song song với trục Oz.

**b.** Dựa vào kết quả ở câu a. ta vẽ đồ thị của mặt S như sau:




**Nhận xét**: *- Để vẽ mặt (S) ta cần tìm các giao tuyến đặc biệt, tức là giao tuyến với các mặt phẳng toạ độ.*
*- Để vẽ cân xứng đồ thị ta cần sử dụng các đường gióng song song với các trục toạ độ.*
*- Việc chọn z = 4 và z = -4 là để cho kết quả đẹp đẽ hơn mà thôi.*

***Bài mẫu 2: Trong không gian cho mặt (S) :***

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$$

***a. Mặt (S) thuộc loại nào?***
***b. Hãy vẽ (S).***

**Giải:**

**a.**
Mặt (S) là mặt bậc hai Paraboloit hypebolic
- Mặt (S) nhận trục Oz làm trục đối xứng, mặt Oxz, Oyz làm mặt đối xứng.
- Giao của (S) với mặt phẳng Oxy là hai đường thẳng cắt nhau tại O :

$$y = \frac{3}{4}x \qquad \text{và} \qquad y = -\frac{3}{4}x$$

- Giao của (S) với mặt phẳng z = 2 là hypebol : $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ (1)

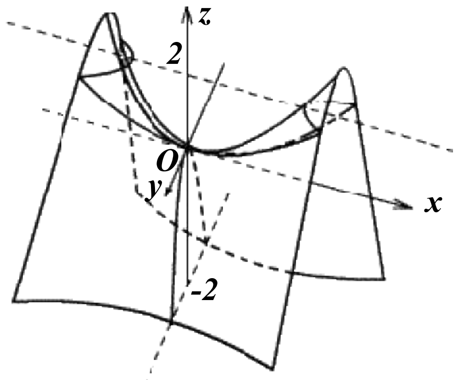
Hypebol này có trục thực song song với Ox.

- Giao của (S) với mặt phẳng z = -2 là hypebol : $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ (2)

Hypebol này có trục thực song song với Oy.

**b.**

Dựa vào phân tích ở câu a. ta vẽ đồ thị của mặt (S) như sau :




***Nhận xét*** : - *Việc vẽ đồ thị của Paraboloit hypebolic rất phức tạp nên đòi hỏi chúng ta phải nhận diện các giao tuyến cho thật chính xác.*

*- Việc chọn z = 2 và z = -2 chỉ có mục đích giúp việc tính toán tiện hơn mà thôi.*

*- Mục đích sử dụng các đường gióng song song với các trục toạ độ là để cho đồ thị được cân đối hơn. Đây là một việc rất quan trọng.*

## ***Bài tập tương tự***

***Bài 1 :*** Cho đường bậc hai (C) trong hệ toạ độ Đề các :

$$F(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

a. Đường bậc hai (C) thuộc loại nào ?

b. Hãy vẽ (C)

***Hướng dẫn*** : *Đồ thị là một Hypebol.*

***Bài 2 :*** Cho đường bậc hai (C) trong hệ toạ độ Đề các :

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0 \quad (*)$$

a. Đường bậc hai (C) thuộc loại nào ?

b. Hãy vẽ (C)

***Hướng dẫn*** : *Đồ thị là một Elip.*

***Bài 3 :*** Trong không gian cho mặt (S) :

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18} = 2z$$

a. Mặt (S) thuộc loại nào?

b. Hãy vẽ (S).

***Hướng dẫn*** : *Đây là đồ thị mặt Paraboloit hypebolic.*

# TÀI LIỆU THAM KHẢO