TOAN CAO CAP 1 Chuong 1+2

Trêng ®¹i häc c«ng nghiÖp hµ néi

Chóc hoµng nguyªn (Chñ biªn)
NGUYÔN THÞ MINH T¢M

Gi¸o tr×nh

TO¸N CAO CÊP i

(Tái bản lần thứ nhất)

Nhµ xuÊt b¶n gi¸o dôc viÖt nam

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Toán cao cấp là môn học không dễ đối với đa số các bạn sinh viên. Bởi vậy, lựa chọn cho mình một giáo trình phù hợp với yêu cầu và bám sát chương trình của môn học là việc rất cần thiết. Hiểu rõ điều đó, chúng tôi biên soạn bộ sách này. Hy vọng rằng nó sẽ trở thành người bạn đồng hành hữu ích cho các bạn trong suốt quá trình học tập và vận dụng toán học vào công việc chuyên môn của mình.

Bộ sách gồm hai tập, được biên soạn theo chương trình môn học Toán cao cấp của trường Đại học Công nghiệp Hà Nội.

Giáo trình Toán cao cấp I *là tài liệu dùng chung cho tất cả các ngành học, nó bao gồm các nội dung cơ bản của đại số tuyến tính và giải tích hàm một biến. Cuốn sách gồm ba chương:*

Chương 1. Đại số tuyến tính

Chương 2. Phép tính vi phân

Chương 3. Phép tính tích phân.

Giáo trình Toán cao cấp II *giới thiệu với bạn đọc về phép tính vi phân hàm nhiều biến, tích phân bội, phương trình vi phân và phương trình sai phân. Nội dung tập sách này gồm bốn chương:*

Chương 1. Hàm nhiều biến

Chương 2. Tích phân bội

Chương 3. Phương trình vi phân

Chương 4. Phương trình sai phân.

Trong giáo trình này các chương 1, 2 và 3 dành cho nhóm ngành kỹ thuật. Các chương 1,3 và 4 dành cho nhóm ngành kinh tế.

Do thời lượng dành cho môn học không nhiều, cho nên chúng tôi biên soạn bộ giáo trình này trên quan điểm trang bị cho người học những kiến thức cơ bản nhất, đủ để vận dụng trong việc giải bài tập và tiếp cận được các môn học *liên quan. Bộ giáo trình này dành sự ưu tiên cho việc vận dụng các kết quả lý thuyết. Với cách viết này, bạn đọc sẽ cảm thấy Toán Cao cấp dễ học và dễ vận dụng.*

Hy vọng bộ giáo trình này cũng là tài liệu tham khảo tốt cho các bạn sinh viên của các trường cao đẳng và đại học khác.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp ở tổ bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản trường Đại học Công nghiệp Hà Nội đã có nhiều góp ý trong quá trình biên soạn bộ sách này.

Các tác giả rất mong nhận được những ý kiến của bạn đọc gần xa để bộ sách ngày càng hoàn thiện.

Xin được trân trọng giới thiệu với bạn đọc Tập 1 của bộ sách.

CÁC TÁC GIẢ

Ch¬ng 1

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

§1. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

1. TẬP HỢP

1.1. Tập hợp và phần tử

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học (không định nghĩa), được hiểu thông qua mô tả. Chẳng hạn ta nói: tập hợp các học sinh trong một lớp, tập hợp các lớp trong một trường, tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$, tập các số nguyên $\mathbb{Z}$, tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, tập các số thực $\mathbb{R}$, tập các số phức $\mathbb{C}$,...

Các đối tượng tạo nên một tập hợp nào đó được gọi là các *phần tử* của tập hợp ấy. Để chỉ "*x* là một phần tử của tập hợp *A*" ta ký hiệu $x \in A$ (đọc là *x* thuộc *A*). Khi muốn chỉ "*x* không là phần tử của tập hợp *A*" ta ký hiệu $x \notin A$ hoặc $x \overline{\in} A$ (đọc là *x* không thuộc *A*).

Ví dụ 1.

$\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên thì $-2 \notin \mathbb{N};\ 1{,}1 \notin \mathbb{N};\ 8 \in \mathbb{N}$.

P là tập hợp các số nguyên tố thì $5 \in P;\ 9 \notin P$.

A là tập hợp các số nguyên chẵn thì $2 \in A;\ 3 \notin A$.

1.2. Cách biểu diễn một tập hợp

Có hai cách biểu diễn một tập hợp:

a) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

Chẳng hạn $A = \{a, b, c, d\}$ là tập hợp gồm 4 phần tử *a, b, c, d*.

b) Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử tạo nên tập hợp

Nếu tập hợp *A* gồm các phần tử x, có tính chất $p(x)$, ta ký hiệu $A = \{\, x : p(x) \,\}$ hoặc $A = \{\, x \mid p(x) \,\}$.

Chẳng hạn, tập hợp các số nguyên chẵn $A = \{\, a = 2k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$.

1.3. Các tập hợp thường gặp

a) Tập hợp rỗng

Ta quy ước tập hợp rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào cả. Tập hợp rỗng được ký hiệu là $\varnothing$.

Ví dụ 2. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\} = \varnothing$.

Ví dụ 3. Tập hợp các giao điểm của hai đường thẳng song song là tập rỗng.

b) Tập hợp hữu hạn

Tập hợp hữu hạn là tập hợp có số phần tử xác định.

Ví dụ 4. Tập hợp số học sinh trong một lớp, tập hợp số tự nhiên bé hơn 100,...là các tập hợp hữu hạn.

c) Tập hợp vô hạn

Tập hợp vô hạn là tập hợp có vô số phần tử.

Ví dụ 5. Tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các số nguyên, tập hợp các số hữu tỷ là các tập hợp vô hạn.

1.4. Tập hợp con

Định nghĩa 1. Nếu mọi phần tử của tập A cũng là phần tử của tập B thì ta nói A là tập hợp con của B và ký hiệu $A \subseteq B$.

Chú ý: Ta quy ước tập $\varnothing$ là tập hợp con của mọi tập hợp.

Ví dụ 6. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

1.5. Hai tập hợp bằng nhau

Định nghĩa 2. Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau và ký hiệu là $A = B$, nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B và ngược lại.

Như vậy: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$

Ví dụ 7. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$.

1.6. Các phép toán trên tập hợp

a) Hợp của hai tập hợp

Định nghĩa 3. Hợp của hai tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử *thuộc tập A hoặc thuộc* tập B. Ký hiệu là: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

b) Giao của hai tập hợp

Định nghĩa 4. Giao của hai tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm tất cả các phần tử *đồng thời thuộc A và thuộc B*. Ký hiệu là: $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

c) Hiệu của hai tập hợp

Định nghĩa 5. Hiệu của hai tập hợp A và B là một tập hợp bao gồm các phần tử *thuộc A nhưng không thuộc B*. Ký hiệu là: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Nếu $A \subseteq X$, thì $X \setminus A$ được gọi là *phần bù* của A trong X và ký hiệu là $\overline{A}$.

Ví dụ 8. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ và $C = \{1, 2, 3\}$.

Theo định nghĩa thì:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$; $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; $A \setminus B = \{1, 3\}$;

Vì $C \subset A$ nên $A \setminus C = \overline{C} = \{4, 6\}$.

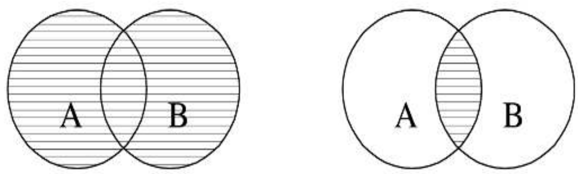
Ví dụ 9. Trong một trường học, gọi A là tập hợp các học sinh giỏi Toán, B là tập hợp các học sinh giỏi Văn, khi đó:

$A \cup B = \{x \mid x$ là học sinh giỏi ít nhất một môn Toán hoặc Văn$\}$;

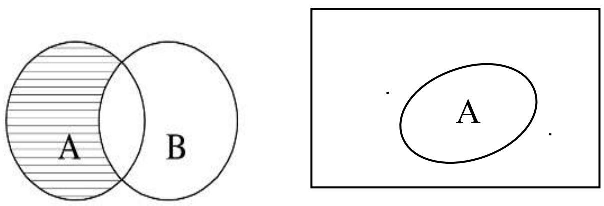
$A \cap B = \{x \mid x$ là học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn$\}$;

$A \setminus B = \{x \mid x$ là học sinh chỉ giỏi môn Toán, không giỏi môn Văn$\}$.

Để dễ hình dung về tập hợp và mối liên hệ giữa các tập hợp, ta thường dùng biểu đồ Ven để minh hoạ.



A∪B   A∩B



A\ B   X \ A = $\overline{A}$

1.7. Các tính chất

Cho *A, B, C, E* là ba tập hợp bất kỳ. Ta có một số tính chất sau

a) Tính chất giao hoán

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

b) Tính chất kết hợp

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

c) Tính chất phân phối

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

d) Công thức De Morgan

Cho $A, B \subseteq E$ thì

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B);$$

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

Dễ dàng chứng minh các tính chất trên, chẳng hạn ta chứng minh tính chất

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Thật vậy:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.8. Tích Đề-các (Descartes)

Định nghĩa 6. Cho hai tập hợp khác rỗng $A, B.$ Tập hợp tất cả các cặp sắp thứ tự (a, b) trong đó $a \in A, b \in B$ gọi là *tích Đề-các* của *A* và *B*, ký hiệu là $A \times B$. Như vậy $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Ta mở rộng khái niệm tích Đề-các của nhiều tập hợp: Cho *n* tập hợp khác rỗng $A_1, A_2, ..., A_n$. Tích Đề-các của *n* tập hợp này, ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ là tập hợp tất cả các bộ sắp thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_n)$ với $a_i \in A_i, i = \overline{1, n}$.

Đặc biệt, khi $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ thì tích Đề-các $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ được ký hiệu là A^n.

Ví dụ 10. Cho $A = \{1, 2\}, B = \{1, 4, a\}$.

Khi đó $A \times B = \{(1,1); (1,4); (1,a); (2,1); (2,4); (2,a)\}$,

$$A^2 = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2)\}.$$

2. ÁNH XẠ

2.1. Định nghĩa ánh xạ

Định nghĩa 7. Cho hai tập hợp khác rỗng *X* và *Y*. Ánh xạ f từ tập *X* đến tập *Y* là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử của *X* với một và chỉ một phần tử của *Y*.

Ký hiệu: $f : X \to Y$

$$x \mapsto y = f(x)$$

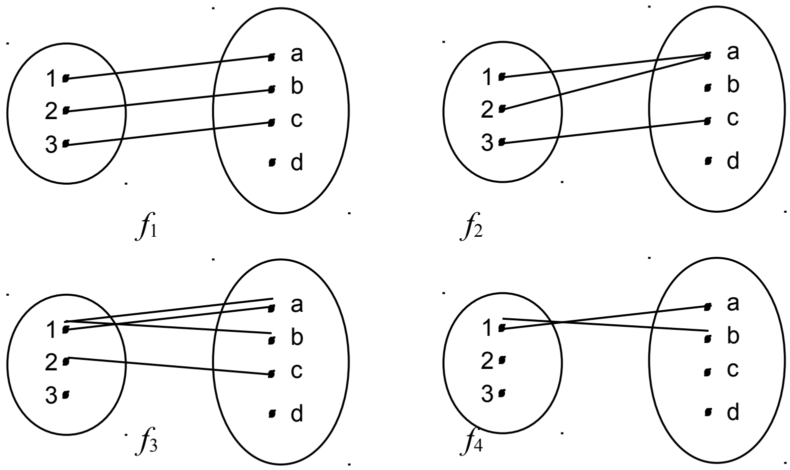
• *X* được gọi là *tập nguồn*, *Y* được gọi là *tập đích* của ánh xạ f.

• Phần tử $y \in Y$ tương ứng với phần tử $x \in X$ qua ánh xạ f được gọi là *ảnh* của x qua ánh xạ f. Khi đó, phần tử x được gọi là *tạo ảnh* của phần tử *y*.

• Tập $f(X) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x) \}$ được gọi là tập ảnh của *X* qua ánh xạ f.

Ví dụ 11.

a) Cho hai tập hợp *X* = {1, 2, 3}; *Y* = {*a, b, c, d*}. Xét các quy tắc sau



f_1 f_2 f_3 f_4

• Quy tắc f_1, f_2 là ánh xạ.

• Quy tắc f_3 không phải là ánh xạ vì phần tử 2 thuộc tập hợp *X* cho tương ứng với hai phần tử *b, c* của tập hợp *Y.*

• Quy tắc f_4 không phải ánh xạ vì phần tử 3 thuộc tập hợp *X* không cho tương ứng với phần tử nào của tập hợp *Y.*

b) Mỗi hàm số là một ánh xạ từ tập xác định của nó đến tập số thực $\mathbb{R}$. Chẳng hạn hàm số $y = x^3$ là một ánh xạ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ vì với mỗi $x \in \mathbb{R}$ tương ứng với một và chỉ một $y \in \mathbb{R}$ xác định bởi $y = x^3$.

c) Phép cộng hai số thực là ánh xạ:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\mapsto a+b. \end{aligned}$$

2.2. Đơn ánh

Xét ánh xạ $f : X \to Y$, nói chung mỗi phần tử $y \in Y$ có thể là ảnh của một hay nhiều tạo ảnh thuộc tập nguồn *X*. Nếu mỗi $y \in Y$ có nhiều nhất một tạo ảnh thì ta nói f là *đơn ánh*. Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 8. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *đơn ánh* nếu

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2.3. Toàn ánh

Xét ánh xạ $f : X \to Y$, nói chung $f(X) \subseteq Y$. Nếu $f(X) = Y$ thì f được gọi là một *toàn ánh*. Ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 9. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *toàn ánh* nếu $f(X) = Y$, nghĩa là $\forall y \in Y, \exists x \in X$ sao cho $y = f(x)$.

2.4. Song ánh

Định nghĩa 10. Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Ví dụ 12.

a) Ánh xạ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ là một đơn ánh nhưng không là toàn ánh.

$$x \mapsto y = x^2$$

b) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ là một toàn ánh nhưng không là đơn ánh.

$$x \mapsto y = x^2$$

c) Ánh xạ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là song ánh.

$$x \mapsto y = x^2$$

2.5. Ánh xạ ngược

Định nghĩa 11. Cho f là một song ánh từ *X* đến *Y*. Khi đó ứng với mỗi phần tử $y \in Y$, tồn tại duy nhất phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, như vậy quy tắc này xác định một ánh xạ từ *Y* đến *X*. Ánh xạ này được gọi là *ánh xạ ngược* của song ánh f ký hiệu là f^{-1}.

Ta viết: $f^{-1} : Y \to X$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Rõ ràng f^{-1} xác định như trên là cũng là một song ánh.

Ví dụ 13. Song ánh $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ có ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto y = x^2 \qquad\qquad y \mapsto x = \sqrt{y}\,.$$

2.6. Tích các ánh xạ

Định nghĩa 12. Cho các tập hợp $X, Y, Z \neq \emptyset$ và hai ánh xạ

$$f : X \to Y \quad ; \quad g : Y \to Z.$$
$$x \mapsto f(x) \qquad\quad y \mapsto g(y)$$

Xét ánh xạ $h : X \to Z$

$$x \mapsto h(x) = g(f(x))\,.$$

Ánh xạ h được gọi là *tích* của các ánh xạ f và g. Ký hiệu là $h = g \circ f$.

Ví dụ 14. Cho hai ánh xạ f và g như sau

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2 \quad \text{và} \quad y \mapsto z = g(y) = y + 7$$

Khi đó tích của hai ánh xạ *f* và *g* xác định như sau.

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 7\,.$$

§2. MA TRẬN

1. CÁC KHÁI NIỆM

1.1. Ma trận cấp $m \times n$

Định nghĩa 1. Một bảng gồm $m \times n$ số xếp thành *m* dòng và *n* cột gọi là ma trận cấp $m \times n$ và được ký hiệu như sau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ hoặc } A = (a_{ij})_{m \times n}$$

a_{ij} là phần tử nằm trên dòng thứ *i* và cột thứ *j* của ma trận *A*.

Ví dụ 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ta có $a_{12} = 2; \quad a_{22} = 5; \ldots$

1.2. Ma trận đối

Định nghĩa 2. Ma trận $(-a_{\mathrm{ij}})_{m \times n}$ được gọi là *ma trận đối* của ma trận $A = (a_{\mathrm{ij}})_{m \times n}$, và ký hiệu là: $-A$.

Ví dụ 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ thì $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

1.3. Ma trận bằng nhau

Định nghĩa 3. Hai ma trận cùng cấp $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$ được gọi là *bằng nhau*, và ký hiệu là $A = B$, nếu và chỉ nếu các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau: $a_{\mathrm{ij}} = b_{\mathrm{ij}}, \forall i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}.$

1.4. Ma trận không

Định nghĩa 4. Ma trận có tất cả các phần tử bằng 0 được gọi là *ma trận không*. Ma trận không cấp $m \times n$ được ký hiệu là $O_{m \times n}$ hoặc đơn giản là O.

1.5. Ma trận vuông

Định nghĩa 5. Ma trận có số dòng bằng số cột bằng *n* được gọi là *ma trận vuông cấp n*. Trong ma trận vuông

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ được gọi là các *phần tử chéo*. Đường chéo chứa các phần tử chéo được gọi là *đường chéo chính*.

1.6. Ma trận tam giác

Định nghĩa 6. Ma trận vuông mà tất cả các phần tử nằm về phía dưới (hoặc trên) của đường chéo chính bằng 0 được gọi là ma trận tam giác trên (hoặc là ma trận tam giác dưới).

Ví dụ 3.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác trên.

$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác dưới.

1.7. Ma trận chéo

Định nghĩa 7. Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0 được gọi là ma trận chéo.

Ma trận chéo có dạng $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Đặc biệt, nếu $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=1$ thì ma trận chéo được gọi là *ma trận đơn vị*. Ma trận đơn vị thường được ký hiệu bởi chữ *I* (hay I_n).

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

1.8. Ma trận chuyển vị

Định nghĩa 8. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$, nếu đổi dòng thành cột (hoặc đổi cột thành dòng) thì ma trận mới được gọi là ma trận chuyển vị của *A*, ký hiệu là A^t. Vậy $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$.

Ví dụ 4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

2.1. Phép cộng ma trận

Định nghĩa 9. Tổng của hai ma trận cùng cấp $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ là một ma trận cùng cấp $m \times n$ ký hiệu là $A + B$ và được xác định như sau:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Ví dụ 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Tính chất:

1. $A + B = B + A,$
2. $(A + B) + C = A + (B + C),$
3. $A + O = A,$
4. $A + (-A) = O.$
5. $(A + B)^t = A^t + B^t.$

Định nghĩa 10. Hiệu hai ma trận cùng cấp *A* và B, ký hiệu $A - B$, là tổng của ma trận *A* với ma trận đối của ma trận *B*. Vậy $A - B = A + (-B).$

2.2. Phép nhân một số với ma trận

Định nghĩa 11. Tích của số α với ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là một ma trận ký hiệu là αA (hoặc $\alpha.A$) và được xác định như sau: $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$.

Ví dụ 6. $2.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$

Tính chất:

1) $1.A = A,$
2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$
3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$
4) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$
5) $(\alpha A)^t = \alpha\left(A^t\right).$

Trong đó A, B, C là các ma trận cùng cấp, với α, β là các số thực bất kỳ.

2.3. Phép nhân ma trận

Định nghĩa 12. Cho ma trận *A* cấp $m \times p$ và ma trận *B* cấp $p \times n$ (số cột của ma trận *A* bằng số dòng của ma trận *B*).

Tích của ma trận *A* với ma trận *B* là một ma trận cấp $m \times n$ ký hiệu là AB được xác định như sau.

$$AB = (c_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Trong đó mỗi phần tử c_{ij} được xác định nhờ công thức sau:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{P} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}, \ \forall i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}. \qquad (1)$$

Chú ý:

i) Khi tìm phần tử c_{ij} theo công thức (1) ta có thể coi c_{ij} bằng "tích" của dòng i của ma trận A với cột j của ma trận B.

Ta ghi nhớ một cách hình thức theo sơ đồ sau:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} \, a_{i2} \ldots a_{ip} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$$

Khi đó: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}$.

Ví dụ 7. Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 5 & 6\\ 12 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -7 & 4\end{bmatrix}$, tìm AB.

Theo định nghĩa ta có

$$AB=\begin{bmatrix}2.1+(-2)(-7) & 2.3+(-2).4\\ 5.1+6.(-7) & 5.3+6.4\\ 12.1+7.(-7) & 12.3+7.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -2\\ -37 & 39\\ -37 & 64\end{bmatrix}.$$

Ví dụ 8. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$, tìm AA.

$$AA=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\varphi-\sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi\\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{bmatrix}.$$

ii) Phép nhân ma trận A với ma trận B chỉ thực hiện được khi số cột của A bằng số dòng của B. Vì vậy, khi phép nhân AB thực hiện được thì có thể BA không thực hiện được. Trong trường hợp A, B là hai ma trận vuông cùng cấp, hoặc A là ma trận cấp $m\times n$, B là ma trận cấp $n\times m$ thì phép nhân AB và BA đồng thời thực hiện được nhưng nói chung AB và BA là các ma trận khác nhau. Nói cách khác phép nhân ma trận *không có tính chất giao hoán*.

Ví dụ 9. Cho $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

Khi đó ta có:

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}29 & -22\\ 31 & -24\end{bmatrix}$$ rõ ràng $AB\neq BA$.

iii) Nếu $AB=O$ ta không suy ra được $A=O$ hoặc $B=O$. Nói cách khác có thể xảy ra $A\neq O,\ B\neq O$ mà $AB=O.$

Ví dụ 10. Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.

Rõ ràng tích $AB=O$, mà cả hai ma trận A và B đều khác ma trận O.

Tính chất

Phép nhân các ma trận thoả mãn tính chất sau:

1. *Tính chất kết hợp*

$$(AB)C = A(BC).$$

Trong đó A, B, C là các ma trận cấp $m \times n, n \times p, p \times q.$

2. *Tính chất phân phối.*

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)D = BD + CD.$$

Trong đó A là ma trận có cấp $m \times n,$ B và C là các ma trận cấp $n \times p$, D là ma trận cấp $p \times q.$

3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$ Trong đó A, B là các ma trận cấp $m \times n$ và $n \times p, \alpha$ là số thực bất kỳ.

4. $AI = IA = A.$ Trong đó I là ma trận đơn vị cấp n, A là ma trận vuông cấp n.

5. $(AB)^t = B^t A^t$. Trong đó A, B là các ma trận cấp $m \times n$ và $n \times p.$

Chú ý:

i) Từ tính chất kết hợp của phép nhân ma trận ta có thể đề cập đến tích của một số hữu hạn các ma trận như $ABC, ABCD,...$ Trong đó, mỗi ma trận đứng trước có số cột bằng số dòng của ma trận đứng sau nó.

ii) Với A là một ma trận vuông ta định nghĩa *luỹ thừa nguyên dương cấp n* của ma trận A là $A^n = \underbrace{A.A...A}_{n}$.

3. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI MA TRẬN

Các phép biến đổi sau đây đối với ma trận được gọi là các phép biến đổi sơ cấp:

i) Đổi chỗ hai dòng hoặc hai cột.

ii) Nhân tất cả các phần tử của một dòng (hoặc cột) với cùng một số khác 0.

iii) Nhân các phần tử của một dòng (cột) với một số rồi cộng vào các phần tử tương ứng của một dòng (cột) khác.

§3. ĐỊNH THỨC

1. CÁC KHÁI NIỆM

1.1. Ma trận con

Định nghĩa 1. Cho A là một ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nếu ta bỏ đi dòng và cột chứa phần tử a_{ij}, tức là bỏ dòng *i* cột *j* của ma trận *A* thì thu được ma trận cấp $(n-1)$ được gọi là ma trận con ứng với phần tử a_{ij} và ký hiệu là M_{ij}.

Ví dụ 1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ thì $M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; $M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;...

1.2. Định thức

Định nghĩa 2. Cho ma trận vuông *A*, định thức của *A* là một số thực ký hiệu là $\det(A)$ và được định nghĩa bằng phương pháp quy nạp như sau.

• Nếu *A* là ma trận cấp một $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$.

• Nếu *A* là ma trận cấp hai $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

• Nếu *A* là ma trận cấp ba $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ thì

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}).$$

Một cách tổng quát, nếu *A* là ma trận vuông cấp *n* thì định thức của ma trận *A* được xác định như sau:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + ... + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n}).$$

Lưu ý rằng $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ là các phần tử cùng nằm ở dòng 1 của ma trận *A*.

Chú ý: Với ma trận cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ngoài ký hiệu $\det(A)$ người ta còn dùng ký hiệu:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

để chỉ định thức của ma trận A, vì vậy trong tài liệu này ta vẫn dùng các thuật ngữ *"dòng"*, *"cột"*, *"phần tử"* của định thức như vẫn dùng đối với ma trận.

Ví dụ 2. Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

Theo định nghĩa ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 70 + 9 = -53.$$

Ví dụ 3. Tính định thức

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \left(2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -4 - 8 + 12 + 3(16 - 10 - 18) = -36.$$

2. TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận ban đầu, nghĩa là $\det(A) = \det(A^t)$.

Từ tính chất 1 ta suy ra: một khẳng định nào đó đúng khi phát biểu theo dòng của định thức thì cũng đúng khi phát biểu theo cột của định thức và ngược lại. Vì thế các tính chất còn lại của định thức ta chỉ phát biểu cho các dòng.

Tính chất 2. Khi đổi chỗ hai dòng bất kỳ của định thức A ta nhận được định thức B và khi đó $\det(B) = -\det(A)$.

Tính chất 3. Khi nhân tất cả các phần tử của một dòng của định thức với cùng một số *k* ta được định thức mới bằng *k* lần định thức ban đầu. Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nói cách khác, thừa số chung của các phần tử trên cùng một dòng có thể đưa ra ngoài dấu định thức.

Tính chất 4. Một định thức có các phần tử trên hai dòng nào đó tương ứng tỷ lệ thì bằng 0.

Tính chất 5. Định thức có một dòng mà các phần tử đều bằng 0 thì bằng 0.

Tính chất 6. Ta có thể phân tích một định thức thành tổng của hai định thức như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chú ý: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Tính chất 7. Khi nhân các phần tử trên một dòng của định thức A với cùng một số rồi cộng vào các phần tử tương ứng của một dòng khác ta nhận được định thức B và khi đó $\det(A) = \det(B)$.

Tính chất 8. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Tính chất 9. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

3.1. Tính định thức cấp 2 và định thức cấp 3

• Để tính định thức cấp 2 ta sử dụng công thức sau

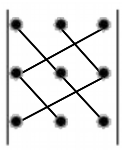
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ví dụ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 5(-3) = 6 + 15 = 21.$

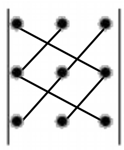
• Đối với định thức cấp 3 ta dùng công thức sau:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Chú ý: Ta có thể ghi nhớ ba số hạng mang dấu (+) và ba số hạng mang dấu (-) theo sơ đồ sau:



(+)



(-)

Ví dụ 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1.1.(-2) + 2.3.3 + 2.1.(-1) - 3.1.(-1) - 2.2.(-2) - 1.3.1$$

$$= -2 + 18 - 2 + 3 + 8 - 3 = 22.$$

3.2. Tính định thức bằng phương pháp khai triển theo dòng hoặc cột

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Ta gọi $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ là *phần bù đại số* của phần tử a_{ij}. Khi đó ta có thể khai triển định thức của ma trận A theo một dòng hoặc theo một cột tuỳ ý nhờ các công thức dưới đây.

- Khai triển theo dòng *i*.

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in},\ \forall i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

- Khai triển theo cột *j*.

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj},\ \forall j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Các công thức (1) và (2) được gọi là các công thức khai triển định thức theo dòng thứ *i* và theo cột thứ *j*. Các công thức khai triển cho phép ta tính một định thức cấp cao bằng cách chuyển qua tính các định thức cấp thấp hơn. Để việc tính toán đơn giản ta nên khai triển định thức theo dòng hay cột có nhiều phần tử bằng 0.

Ví dụ 6. Tính định thức cấp 4 sau

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Khai triển định thức đã cho theo dòng thứ ba ta được

$$d = -2A_{31} + 5A_{32} + 0A_{33} + 0A_{34}$$

$$= -2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2.8 - 5(-48) = 224.$$

Nhận xét: Từ công thức (1) hoặc (2) ta suy ra: Nếu một dòng hay một cột nào đó của định thức chỉ có một phần tử duy nhất khác 0 thì định thức đó bằng tích của phần tử này với phần bù đại số của nó.

Dựa vào tính chất của định thức ta có thể biến đổi sao cho một dòng hay một cột nào đó chỉ còn lại một phần tử khác 0, sau đó áp dụng nhận xét trên. Đây là một phương pháp thông dụng để tính định thức.

Ví dụ 7. Tính định thức

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng thứ năm với 3 rồi cộng tương ứng vào dòng hai. Nhân dòng thứ năm với (-4) rồi cộng tương ứng vào dòng bốn ta được

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Vì cột thứ ba chỉ có một phần tử khác 0 nên ta khai triển định thức theo cột thứ ba

$$\det(A) = (-1).A_{53} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

Nhân dòng thứ hai với 2 rồi cộng tương ứng vào dòng một. Nhân dòng thứ hai với (-3) rồi cộng tương ứng vào dòng ba. Nhân dòng thứ hai với (-2) rồi cộng tương ứng vào dòng bốn. Ta được

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Khai triển định thức này theo cột thứ nhất sau đó áp dụng phương pháp tính định thức cấp 3.

$$\det(A) = (-1).A_{21} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -1032.$$

3.3. Tính định thức bằng phương pháp biến đổi sơ cấp

Theo Tính chất 9 định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo. Bởi vậy ta biến đổi định thức về dạng định thức của ma trận tam giác, sau đó áp dụng tính chất đó để tính định thức (Trong quá trình biến đổi định thức không làm thay đổi giá trị của định thức).

Ví dụ 8. Tính định thức

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Ta biến đổi định thức về dạng định thức của ma trận tam giác lần lượt theo các bước sau đây:

Nhân dòng thứ nhất với (1), (-3), (-4), rồi cộng lần lượt vào các dòng thứ hai, thứ ba, và thứ tư

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 9 & -11 & -1 \end{vmatrix}$$

Tiếp theo, nhân dòng thứ hai với (-5), (-9) rồi cộng lần lượt vào dòng thứ hai, thứ ba.

$$d=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 11 & 3\\ 0 & 0 & -55 & -20\\ 0 & 0 & -110 & -28\end{vmatrix}$$

Nhân dòng thứ 3 với (-2) rồi cộng vào dòng thứ tư, ta thu được

$$d=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 11 & 3\\ 0 & 0 & -55 & -20\\ 0 & 0 & 0 & 12\end{vmatrix}=1\times 1\times(-55)\times 12=-660.$$

§4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1. CÁC KHÁI NIỆM

1.1. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1. Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại một ma trận vuông B cùng cấp với A sao cho $AB=BA=I$ thì B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A (Khi đó ma trận A được gọi là *ma trận khả đảo*). Ma trận nghịch đảo của ma trận A được ký hiệu là A^{-1}. Như vậy $A^{-1}A=AA^{-1}=I$.

Nhận xét: Khi A là ma trận khả đảo thì $(A^{-1})^{-1}=A$.

Ví dụ 1. Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ thì $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. Vì $A^{-1}A=AA^{-1}=I$.

1.2. Ma trận không suy biến

Định nghĩa 2. Ma trận vuông A được gọi là ma trận không suy biến nếu $\det(A)\neq 0$.

Ví dụ 2. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, khi đó A là ma trận không suy biến vì $\det(A)=1\times 1-2\times 2=-3\neq 0$.

1.3. Ma trận phụ hợp

Định nghĩa 3. Xét một ma trận vuông cấp *n* bất kỳ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ứng với ma trận A ta lập ma trận

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij}. Ma trận A^* được gọi là *ma trận phụ hợp* của ma trận A.

Ví dụ 3. Tìm ma trận phụ hợp của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ta có $A_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) = 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40,$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13}) = 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

Tương tự ta có $A_{21} = -16; A_{22} = 5; A_{23} = 2; A_{31} = -9; A_{32} = 3; A_{33} = 1$

$$\Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Nếu ma trận A là ma trận khả đảo thì ma trận nghịch đảo của nó là duy nhất.

Thật vậy, giả sử X và Y cùng là ma trận nghịch đảo của A thì

$$(XA)Y = IY = Y \text{ và } X(AY) = XI = X.$$

Vì phép nhân ma trận có tính chất kết hợp nên từ đây suy ra $X = Y$.

Tính chất 2. Nếu ma trận A không suy biến thì

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Tính chất 3. Nếu A và B là các ma trận vuông cùng cấp, không suy biến thì:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Thật vậy:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

3.1. Sử dụng ma trận phụ hợp để tìm ma trận nghịch đảo

Định lý. Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo là $\det(A) \neq 0$. Khi đó ta có công thức:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{*}.$$

Định lý này không những cho ta biết điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo mà còn cho ta công thức để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Ví dụ 4. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Tìm A^{-1} nếu có.

Ta có $\det(A) = -1 \neq 0$ do đó tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Ta có $A^* = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ suy ra $A^{-1} = \dfrac{1}{-1} A^* = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

3.2. Phương pháp Gauss - Jordan

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (A là ma trận vuông cấp n, $\det(A) \neq 0$), ta thực hiện tuần tự các bước sau

Bước 1. Đặt bên cạnh ma trận A một ma trận đơn vị I cùng cấp với A.

Bước 2. Tác động các phép biến đổi sơ cấp như nhau đồng thời lên các dòng của A và I đến khi A trở thành I thì khi đó I trở thành A^{-1}.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo trên đây được gọi là phương pháp Gauss-Jordan.

Ví dụ 5. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Ta có: $\det(A) = -2 \neq 0$ do đó tồn tại A^{-1}.

- *Bước 1*. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- *Bước 2*. Nhân dòng một của cả hai ma trận với (-3) rồi cộng vào dòng thứ hai ta được:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nhân dòng hai với $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ta được:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Nhân dòng hai với (-2) rồi cộng vào dòng một ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

§5. HẠNG CỦA MA TRẬN

1. CÁC KHÁI NIỆM

1.1. Ma trận bậc thang

Định nghĩa 1. Ma trận bậc thang là ma trận thoả mãn hai tính chất sau:

Dòng khác không (dòng có phần tử khác 0) luôn nằm trên *dòng không* (dòng có tất cả mọi phần tử bằng 0).

Phần tử khác 0 đầu tiên của dòng trên luôn ở phía bên trái cột chứa phần tử khác 0 đầu tiên của dòng dưới.

Ví dụ 1. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 5 \\ 0 & \mathbf{6} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{5} & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy A, B, C là các ma trận bậc thang, *D* không là ma trận bậc thang.

1.2. Hạng của ma trận bậc thang

Định nghĩa 2. Hạng của ma trận bậc thang bằng *số dòng khác không* của nó.

Ví dụ 2. Xét các ma trận A, B, C ở Ví dụ 1 ta có:

- Hạng của ma trận *A* là 3.
- Hạng của ma trận *B* là 3.
- Hạng của ma trận *C* là 2.

2. HẠNG CỦA MA TRẬN BẤT KỲ

Người ta đã chứng minh được rằng nếu dùng các phép biến đổi sơ cấp về dòng, bằng những cách khác nhau, đưa ma trận *A* bất kỳ về dạng bậc thang thì số dòng khác không của những ma trận bậc thang thu được là như nhau, vì vậy ta định nghĩa.

Định nghĩa 3. Hạng của ma trận A là hạng của ma trận bậc thang thu được từ việc thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của A, hạng của ma trận A được ký hiệu là $r(A)$.

Ví dụ 3. Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp tác động vào ma trận A ta có sơ đồ

$$A \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chi tiết các phép biến đổi như sau:

(1) Nhân dòng một lần lượt với: -2; -3; -1 rồi cộng tương ứng vào các dòng thứ hai, thứ ba và thứ tư.

(2) Nhân dòng hai với -2 rồi cộng vào dòng thứ ba.

(3) Lấy dòng hai cộng vào dòng bốn sau khi đã nhân dòng bốn với 3.

(4) Chia dòng ba cho 5, sau đó nhân với 14 rồi cộng vào dòng bốn.

Ma trận cuối có ba dòng khác không, vậy $r(A) = 3$.

Ví dụ 4. Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -9 & 8 \\ 6 & 12 & 14 & -4 & 26 \end{bmatrix}$$

Ta biến đổi ma trận đã cho lần lượt như sau:

$$A \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -13 & -30 & -27 \\ 0 & 2 & -3 & -16 & -1 \\ 0 & 0 & -16 & -46 & -28 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -13 & -30 & -27 \\ 0 & 0 & -16 & -46 & -28 \\ 0 & 0 & -16 & -46 & -28 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -13 & -30 & -27 \\ 0 & 0 & -16 & -46 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chi tiết các phép biến đổi như sau:

(1) Nhân dòng một với (-3); (-1); (-6) rồi cộng lần lượt vào các dòng thứ hai, và thứ ba và bốn.

(2) Lấy dòng thứ hai cộng vào dòng thứ ba.

(3) Nhân dòng thứ 3 với (-1) rồi cộng vào dòng thứ tư.

Ma trận cuối cùng có ba dòng khác 0 nên $r(A) = 3$.

§6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa 1

Hệ phương trình tuyến tính là hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các ẩn số, a_{ij} và b_i, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ lần lượt là các hệ số của ẩn và hệ số tự do. Để cho gọn ta có thể viết (1) dưới dạng:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ i = 1, 2, ...m \end{cases}$$

Ứng với hệ phương trình (1) ta lập các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Các ma trận A và $\overline{A}$ được gọi tương ứng là ma trận hệ số và ma trận hệ số mở rộng của hệ phương trình tuyến tính. Ma trận X là ma trận ẩn, ma trận B là ma trận hệ số tự do. Khi đó hệ (1) có thể biểu diễn dưới dạng phương trình ma trận: $AX = B$.

Một bộ n số sắp thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (1) nếu khi thay $x_1, x_2, ..., x_n$ lần lượt bởi các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ vào tất cả các phương trình của hệ đó ta được các đẳng thức đúng. Giải một hệ phương trình tuyến tính là tìm tất cả các nghiệm của hệ đó.

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ là ma trận hệ số.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$ là ma trận hệ số mở rộng.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$ là ma trận hệ số tự do của hệ phương trình.

Bộ bốn số thực có thứ tự (1; 1; 2; -1) là một nghiệm của hệ phương trình vì khi thay $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1$ vào cả ba phương trình, ta nhận được các đẳng thức đúng.

Hoặc ta kiểm tra được

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$, nghĩa là ma trận $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

thoả mãn phương trình ma trận $AX = B$.

1.2. Hệ tương đương

Định nghĩa 2. Hai hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số như nhau được gọi là tương đương nếu tập nghiệm của chúng bằng nhau.

Thông thường, để giải một hệ phương trình tuyến tính người ta biến đổi nó thành một hệ tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi một hệ phương trình thành một hệ mới tương đương được gọi là các phép biến đổi tương đương.

1.3. Các phép biến đổi sơ cấp

Các phép biến đổi sau đây đối với một hệ phương trình tuyến tính được gọi là các phép biến đổi sơ cấp:

i) Đổi chỗ hai phương trình của hệ cho nhau.

ii) Nhân hai vế của một phương trình với cùng một số $k \neq 0$.

iii) Nhân hai vế của một phương trình với cùng một số rồi cộng vào các vế tương ứng của một phương trình khác.

Hiển nhiên rằng, các phép biến đổi sơ cấp là các phép biến đổi tương đương.

1.4. Điều kiện tồn tại nghiệm

Định lý 1 (Kronecker – Capelli). Điều kiện cần và đủ để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm là hạng của ma trận mở rộng bằng hạng của ma trận hệ số của nó, tức là: $r(A) = r(\overline{A})$.

Hệ quả.

i) Nếu $r(A) \neq r(\overline{A})$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

ii) Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ thì hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

iii) Nếu $r(A) = r(\overline{A}) < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

2. MỘT SỐ DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH ĐẶC BIỆT

2.1. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 3. Hệ phương trình tuyến tính có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn luôn có ít nhất một nghiệm: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$ nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

Đối với hệ phương trình thuần nhất, chỉ xảy ra một trong hai trường hợp sau đây:

1. Khi $r(A) = n$ thì hệ phương trình (2) có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường.

2. Khi $r(A) < n$ thì hệ phương trình (2) có vô số nghiệm.

2.2. Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác

Định nghĩa 4. Hệ phương trình tuyến tính dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

trong đó $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$ được gọi là hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác. Dễ dàng giải hệ (3) bằng cách xác định lần lượt $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ theo thứ tự từ phương trình dưới cùng trở lên.

Như vậy hệ tam giác luôn có một nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ \quad - x_2 - 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad - 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ ba ta có $x_3 = -1$. Thay $x_3 = -1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$-x_2 + 3 = 1 \Rightarrow x_2 = 2.$$

Thay $x_3 = -1, x_2 = 2$ vào phương trình thứ nhất ta được:

$$2x_1 + 2 + 1 = 5 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Vậy hệ đã cho có một nghiệm duy nhất: $(1; 2; -1)$.

2.3. Hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang

Định nghĩa 5. Hệ phương trình tuyến tính dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1m}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{ss}x_s + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{4}$$

trong đó $s < n$ (số phương trình nhỏ hơn số ẩn) và $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = \overline{1,s}$ được gọi là hệ hình thang.

Trong hệ hình thang các ẩn $x_1, x_2, ..., x_s$ được gọi là ẩn chính, các ẩn còn lại là ẩn phụ. Chuyển tất cả các số hạng chứa các ẩn phụ sang vế phải ta được:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1s}x_s = b_1 - a_{1(s+1)}x_{s+1} - ... - a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}x_2 + ... + a_{2s}x_s = b_2 - a_{2(s+1)}x_{s+1} - ... - a_{2n}x_n \\ .... \\ \qquad\qquad a_{ss}x_s = b_s - a_{s(s+1)}x_{s+1} - ... - a_{sn}x_n \end{cases} \quad (5)$$

Gán cho mỗi ẩn phụ một giá trị tuỳ ý:

$$x_{s+1} = \alpha_{s+1}, ..., \ x_n = \alpha_n.$$

Khi đó hệ (5) trở thành một hệ tam giác đối với các ẩn chính $x_1, x_2, ..., x_s$. Giải hệ tam giác này ta xác định được

$$x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, ..., \ x_s = \alpha_s.$$

Như vậy $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \alpha_{s+1}, ..., \alpha_n)$ là nghiệm của hệ (4), nghiệm này được gọi là nghiệm tổng quát của (4).

Hệ hình thang có vô số nghiệm. Giải hệ hình thang là tìm nghiệm tổng quát của nó.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \\ \quad - 2x_2 + \ x_3 - \ x_4 = 2 \end{cases}$$

Ta có các ẩn chính là x_1, x_2. Các ẩn phụ là x_3, x_4.

Chuyển các số hạng chứa x_3, x_4 sang vế phải ta được:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - 4x_3 - 6x_4 \\ \quad - 2x_2 = 2 - x_3 + x_4 \end{cases}$$

Gán cho các ẩn phụ các giá trị tuỳ ý $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$, ta được hệ tam giác đối với các ẩn chính:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - 4\alpha - 6\beta \\ \quad\; - 2x_2 = 2 - \alpha + \beta \end{cases}$$

Giải hệ tam giác này ta được:

$$x_2 = -1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta,\ x_1 = 3 - 5\alpha - 5\beta.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là:

$(3 - 5\alpha - 5\beta; -1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta; \alpha; \beta)$ với α, β là hai số thực bất kỳ.

3. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

3.1. Phương pháp Gauss

Trên đây ta đã biết cách giải một hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác hoặc dạng hình thang.

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp, ta có thể biến đổi một hệ phương trình tuyến tính bất kỳ về dạng tam giác hoặc dạng hình thang hoặc một hệ chứa một phương trình vô nghiệm, từ đó dễ dàng xác định được nghiệm của hệ. Phương pháp trên đây được gọi là phương pháp Gauss.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ta biến đổi ma trận hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ tam giác sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ \qquad x_2 + 4x_3 = 14 \\ \qquad\qquad 8x_3 = 24 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 11x_3 - 3x_4 = -2 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$$

Lập ma trận hệ số mở rộng và dùng các phép biến đổi sơ cấp tác động vào ma trận theo sơ đồ sau:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & -11 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & 2 & 10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -5 \\ 0 & 7 & -1 & 3 & 11 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & -16 & -17 \\ 0 & 0 & 20 & -32 & -31 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & -16 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Từ ma trận sau cùng ta nhận được hệ phương trình tương đương với hệ ban đầu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 6 \\ \qquad\quad 10x_3 - 16x_4 = -17 \\ \qquad\qquad\quad 0x_4 = 3 \end{cases}$$

Phương trình cuối của hệ vô nghiệm nên hệ này vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng các phép biến đổi sơ cấp biến một hệ thuần nhất thành một hệ thuần nhất. Do đó, khi giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ta chỉ cần biến đổi trên ma trận hệ số:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ -4 & -1 & 10 & -5\\ -2 & 3 & 7 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 7 & 3 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 7 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Hệ phương trình nhận được có dạng hình thang:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=0\\ \quad 7x_2+2x_3-x_4=0\\ \qquad\quad x_3+x_4=0\end{cases}$$

Ở đây x_1, x_2, x_3 là các ẩn chính, còn x_4 là ẩn phụ. Gán cho x_4 giá trị tuỳ ý $x_4=\alpha$ ta lần lượt tìm được:

$$x_3=-\alpha,\ x_2=\frac{3}{7}\alpha,\ x_1=-\frac{27}{7}\alpha.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là:

$(-\frac{27}{7}\alpha; \frac{3}{7}\alpha; -\alpha; \alpha)$, trong đó α là một số bất kỳ.

3.2. Phương pháp giải hệ Cramer

3.2.1. Định nghĩa 6

Hệ phương trình tuyến tính mà ma trận hệ số của nó là ma trận vuông không suy biến, được gọi là hệ Cramer. Hệ Cramer có dạng sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \text{...}\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Nhận xét:

i) Hệ Cramer có số phương trình bằng số ẩn.

ii) Vì $\det(A)\neq 0$ nên $r(A)=n$ do đó hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất.

3.2.2. Định lý 2

Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất, được tính theo công thức

$$x_j=\frac{\det(A_j)}{\det(A)},\ j=\overline{1,n}.$$ (Công thức Cramer)

Trong đó $\det(A)$ là định thức của ma trận hệ số, $\det(A_j)$ là định thức nhận được từ định thức của ma trận A nhưng đã *thay cột thứ* j *bằng cột số hạng tự do* B (các cột khác giữ nguyên).

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \det(A_j)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (\textit{cột } j) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}.$$

Phương pháp xác định nghiệm của hệ Cramer theo công thức trên được gọi là phương pháp Cramer.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-3 \\ 2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 3x_1-x_2+4x_3=11 \end{cases}$$

Ta có: $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=20, \quad \det(A_1)=\begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 11 & -1 & 4 \end{vmatrix}=40,$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}=-20, \quad \det(A_3)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 11 \end{vmatrix}=20.$$

Áp dụng công thức (12):

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=2,\ x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=-1,\ x_3=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(2;-1;1)$.

3.2.3. Giải hệ Cramer bằng phương pháp ma trận nghịch đảo

Trước hết ta biểu diễn hệ Cramer dưới dạng phương trình ma trận:

$$AX=B. \qquad (6)$$

Trong đó: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Theo giả thiết ma trận A không suy biến $(\det(A) \neq 0)$, do đó tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}. Từ (6) ta có:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Ngược lại, nếu thay $X = A^{-1}B$ vào (6) thì ta được đẳng thức đúng:

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B.$$

Vậy hệ Cramer có nghiệm duy nhất, được xác định nhờ công thức:

$$X = A^{-1}B.$$

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\det(A) \neq 0$ do đó tồn tại A^{-1}. Dễ dàng tìm được:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất là: $(1; 2)$.

§7. KHÔNG GIAN VECTƠ

1. KHÔNG GIAN VECTƠ

1.1. Định nghĩa 1

Cho V là tập hợp khác rỗng, $\mathbb{R}$ là tập hợp số thực. Trên V đã được trang bị hai ánh xạ:

• Ánh xạ: $f : V \times V \to V$ gọi là phép cộng.

$$(x, y) \mapsto x + y$$

• Ánh xạ: $g: \mathbb{R} \times V \to V$ gọi là phép nhân.

$(k, x) \mapsto kx$

V được gọi là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, mỗi phần tử của V được gọi là một vectơ nếu V cùng với hai phép toán trên V thoả mãn các tiên đề sau:

(1) $\forall x, y \in V: x + y \in V$,

(2) $\forall x, y \in V: x + y = y + x$,

(3) $\forall x, y, z \in V: x + (y + z) = (x + y) + z$,

(4) $\exists \theta \in V$ sao cho $\theta + x = x + \theta = x$, $\forall x \in V$ (θ gọi là phần tử trung hoà),

(5) $\forall x \in V$, $\exists (-x) \in V$ sao cho $x + (-x) = \theta$, ($-x$ gọi là phần tử đối của x),

(6) $\forall k \in \mathbb{R}, x \in V: kx \in V$,

(7) $k(x + y) = kx + ky$, $\forall k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$,

(8) $(k + l)x = kx + lx$, $\forall k, l \in \mathbb{R}, \forall x \in V$,

(9) $k(lx) = (kl)x$, $\forall k, l \in \mathbb{R}, \forall x \in V$,

(10) $\forall x \in V \Rightarrow 1.x = x$.

Ví dụ 1. Xét $V = \mathbb{R}$ là tập hợp số thực, dễ dàng thấy $\mathbb{R}$ là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ với hai phép toán cộng và nhân thông thường, mỗi số thực là một vectơ.

Ví dụ 2. Tập $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ cùng hai phép toán được xác định như sau:

Phép cộng: với $(x, y); (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

Phép nhân: với $k \in \mathbb{R}; (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$k(x, y) = (kx, ky)$$

là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, mỗi vectơ là cặp số thực (x, y).

Ví dụ 3. Xét tập hợp $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ... x_n) | x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\}$ với phép cộng và nhân xác định như sau:

$$x = (x_1, x_2, ... x_n),\ y = (y_1, y_2, ... y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

$$kx = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$$

là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Khi đó, mỗi vectơ của không gian $\mathbb{R}^n$ là một bộ n số thực có dạng $(x_1, x_2, ...x_n)$.

Ví dụ 4.

a) Tập các vectơ trên mặt phẳng cùng hai phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số thực là một không gian vectơ ký hiệu là H_2.

b) Tập các vectơ trong không gian cùng hai phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số thực là một không gian vectơ ký hiệu là H_3.

Ví dụ 5. Ký hiệu $P_n(x)$ là tập hợp các đa thức có bậc bé hơn hoặc bằng n thì $P_n(x)$ với phép cộng đa thức và nhân một số thực với đa thức là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6. $V = M_{m\times n}$ là tập hợp các ma trận cùng cấp $m \times n$ cùng hai phép toán cộng ma trận và nhân một số với ma trận là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Mỗi ma trận cấp $m \times n$ là một vectơ trong không gian $V = M_{m\times n}$.

Bạn đọc dễ dàng kiểm tra tính đúng đắn của các ví dụ trên.

1.2. Tính chất

a) Phần tử θ (trung hoà) của không gian vectơ là duy nhất.

b) Phần tử đối ($-x$) của $x \in V$ là duy nhất.

c) $\forall x \in V : 0x = \theta.$

d) $\forall x \in V : -x = (-1)x.$

e) $\forall k \in \mathbb{R} : k\theta = \theta.$

f) $\forall x \in V, k \in \mathbb{R} : kx = \theta \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $x = \theta.$

1.3. Định nghĩa 2

Hiệu của hai vectơ x và y ký hiệu là $x - y$, là tổng của vectơ x với vectơ đối của vectơ y. Vậy: $x - y = x + (-y)$.

2. KHÔNG GIAN CON

2.1. Định nghĩa 3

Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Tập hợp con $W \neq \emptyset$ của V được gọi là không gian con của không gian vectơ V nếu W cùng với phép toán cộng và phép toán nhân trên V, cũng là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

2.2. Định lý

Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Tập hợp con $W \neq \varnothing$ của V là không gian con của V khi và chỉ khi hai điều kiện sau được thoả mãn:

(i) $\forall x, y \in W$ thì $x + y \in W$.

(ii) $\forall x \in W$, $k \in \mathbb{R}$ thì $kx \in W$.

Chứng minh

⇒) Nếu W là không gian con của V thì hiển nhiên (i) và (ii) được thoả mãn.

⇐) Giả sử W thoả mãn (i) và (ii) vì $W \neq \varnothing$ nên tồn tại $x \in W$ và theo điều kiện (ii) thì $0.x = \theta \in W$.

Mọi $x \in W$ đều có phần tử đối vì theo điều kiện (ii) thì: $(-1)x = -x \in W$. Vì $W \subset V$ nên các phép toán cộng và nhân trên W (thực chất là các phép toán được định nghĩa trên V) vẫn thoả mãn các tính chất giao hoán, kết hợp...Vậy W là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, nhưng $W \subseteq V$ nên W là không gian con của không gian vectơ V.

Ví dụ 7. Cho V là không gian vectơ thì bản thân V cũng là không gian con của chính nó (bạn đọc tự giải thích).

Ví dụ 8. $W = \{\theta\}$ là không gian con của V vì:

i) $\theta + \theta = \theta \in W$.

ii) $0.\theta = \theta \in W$.

Ví dụ 9. $V = M_{2\times2}$ là không gian vectơ các ma trận vuông cấp 2. Xét W là tập các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ với a, b là các số thực. W là không gian con của không gian vectơ V vì:

Dễ thấy $W \neq \varnothing$, lấy hai phần tử $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}$ thuộc W.

Ta có:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+c \\ b+d & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

$$k\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & ka\\ kb & 0\end{bmatrix}\in W.$$

Ví dụ 10. Cho V là tập hợp các vectơ hình học trong không gian thì V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Xét tập con:

$$W=\{(a,b,c)\,|\,b=a+c+1, a,b,c\in\mathbb{R}\}\subset V \cdot$$

W không phải là không gian con của không gian vectơ V, vì:

• Với 2 vectơ $x=(a,\ b,\ c)$ và $y=(a',\ b',\ c')$ thuộc W thì

$$\begin{cases} b=a+c+1\\ b'=a'+c'+1\end{cases}$$

Từ đó $b+b'=(a+a')+(c+c')+2$,

suy ra vectơ tổng $x+y=(a+a',\ b+b',\ c+c')$ không thoả mãn điều kiện

$(b+b')=(a+a')+(c+c')+1$ nên $x+y\notin W$.

3. KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT HỆ VECTƠ

3.1. Tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ

Định nghĩa 4. Cho V là một không gian vectơ, $S=\{x_1,\ x_2,\ldots,x_n\}$ là hệ gồm n vectơ của V. Khi đó mỗi vectơ $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n,\ \alpha_i\in\mathbb{R}$, gọi là một tổ hợp tuyến tính của hệ S, hay x biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ S.

Ví dụ 11. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, vectơ θ biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của một hệ bất kỳ: $\theta=0.x_1+0.x_2+\ldots+0.x_n$.

Ví dụ 12. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, cho hệ vectơ $S=\{x_1=(1,2), x_2=(3,4)\}$.

Khi đó vectơ $x=(-7,-8)$ là một tổ hợp tuyến tính của S vì: $x=2x_1-3x_2$

3.2. Không gian con sinh bởi một hệ vectơ

Bài toán: Cho V là một không gian vectơ, $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (1) là hệ gồm n vectơ của V. Gọi W là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S. Chứng minh rằng W là không gian con của V.

Thật vậy $W = \left\{ x \middle| \; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, x_i \in S \right\}$. (*)

Ta có $\theta = 0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n \in W$ nên $W \neq \emptyset$.

Lấy $x \in W$ suy ra $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ với $\alpha_i \in \mathbb{R}, x_i \in S, i = \overline{1,n}$.

Lấy $y \in W$ suy ra $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n$ với $\beta_i \in \mathbb{R}, x_i \in S, i = \overline{1,n}$.

Ta có $x + y = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)x_n \in \mathrm{W}$.

Với $k \in \mathbb{R}$, ta có $kx = k\alpha_1 x_1 + k\alpha_2 x_2 + ... + k\alpha_n x_n \in \mathrm{W}$.

Vậy W là không gian con của V. Ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 5. Không gian vectơ W (xác định bởi (*)) được gọi là không gian con sinh bởi hệ vectơ $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Trong trường hợp W trùng với V thì S là một hệ sinh của không gian vectơ V, tức là mọi vectơ của V đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ vectơ S.

Ví dụ 13. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ ba vectơ

$$S = \{x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,0), x_3 = (0,0,1)\}.$$

Hệ S là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Thật vậy, xét vectơ $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Ta luôn có: $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ nghĩa là x là một tổ hợp tuyến tính của hệ đã cho.

Vậy hệ vectơ S là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 14. Trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho hai vectơ $x = (1,2)$, $y = (1,1)$. Chứng minh rằng hệ $\{x, y\}$ là hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy, giả sử $z = (z_1, z_2)$ là vectơ bất kỳ của $\mathbb{R}^2$ ta đi tìm $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $z = ax + by$, nghĩa là $(z_1, z_2) = a(1,2) + b(1,1) = (a + b, 2a + b)$. Đẳng thức tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} a + b = z_1 \\ 2a + b = z_2 \end{cases}$$

Định thức của ma trận hệ số: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 1.2 = -1 \neq 0$, do đó hệ phương trình ẩn a,b luôn có nghiệm.

Vậy mọi vectơ của $\mathbb{R}^2$ đều biểu diễn tuyến tính qua hệ $\{x, y\}$ nên hệ $\{x, y\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.

§8. HỆ VECTƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

1. HỆ VECTƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

1.1. Định nghĩa 1.

Cho V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Hệ $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ gồm n vectơ của V. Hệ S được gọi là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại n số thực $k_1, k_2, ..., k_n$ trong đó có ít nhất một số khác 0 sao cho $k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n = \theta$ (*).

Nếu hệ thức (*) chỉ thỏa mãn khi $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$ thì hệ S được gọi là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 1. Trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta xét hệ vectơ:

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, ..., 0)$$

....

$$e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Các vectơ $e_1, e_2, ..., e_n$ được gọi là các vectơ đơn vị trong không gian $\mathbb{R}^n$. Xét hệ thức

$$k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_ne_n = (k_1, k_2, ..., k_n) = \theta \text{ suy ra } k_1 = k_2 = ... = k_n = 0 \cdot$$

Vậy hệ vectơ đơn vị của $\mathbb{R}^n$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ S gồm các vectơ:

$$x_1 = (2, 3, 7),\ x_2 = (1, 4, -3),\ x_3 = (5, -2, 4),\ x_4 = (1, 1, 0).$$

Hệ S là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, xét hệ thức:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = \theta.$$

Hệ thức trên tương đương với

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 5k_3 + k_4 = 0 \\ 3k_1 + 4k_2 - 2k_3 + k_4 = 0 \\ 7k_1 - 3k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Vì hệ phương trình (*) có vô số nghiệm cho nên hệ vectơ đã cho là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3. Trong không gian $P_2(x)$ (không gian các đa thức có bậc bé hơn hoặc bằng hai), cho hệ vectơ $S = \{x^2 + x + 1, 2x + 1, 3\}$. Khi đó hệ vectơ S là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, xét hệ thức:

$$k_1(x^2 + x + 1) + k_2(2x + 1) + 3k_3 = \theta.$$

(Trong không gian $P_2(x)$ phần tử θ là đa thức $0x^2 + 0x + 0$).

Hệ thức này tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ vectơ đã cho là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 4. Trong không gian các đa thức có bậc bé hơn hoặc bằng *n*: $P_n(x)$.

Hệ vectơ: $S = \{1, x, x^2, ..., x^n\}, \forall x \in \mathbb{R}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Thật vậy xét hệ thức

$$k_0 + k_1x + k_2x^2 + ... + k_nx^n = \theta, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác $\theta = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$.

Suy ra $k_0 + k_1x + k_2x^2 + ... + k_nx^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Ta thu được $k_0 = k_1 = ... = k_n = 0.$ Vậy hệ S là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 5.

Trong không gian vectơ H_2 (**§7** Mục 1.1 Ví dụ 4a), thì hệ hai vectơ cùng phương là phụ thuộc tuyến tính, hệ hai vectơ không cùng phương là độc lập tuyến tính.

Trong không gian vectơ H_3 ((**§7** Mục 1.1 Ví dụ 4b), thì hệ ba vectơ đồng phẳng là phụ thuộc tuyến tính, hệ ba vectơ không đồng phẳng là độc lập tuyến tính.

1.2. Các tính chất

Tính chất 1. Một hệ có n vectơ $(n \geq 2)$, nếu trong đó có chứa một vectơ biểu diễn tuyến tính được qua các vectơ còn lại thì hệ đó phụ thuộc tuyến tính và ngược lại.

Tính chất 2. Nếu trong một hệ vectơ có chứa một hệ vectơ con phụ thuộc tuyến tính thì hệ vectơ đó phụ thuộc tuyến tính.

Tính chất 3. Mọi hệ vectơ con của một hệ vectơ độc lập tuyến tính đều là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Chú ý:

i) Tính chất 1 áp dụng cho hệ vectơ có từ hai vectơ trở lên, còn hệ chỉ chứa duy nhất một vectơ x là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi x là vectơ không (θ).

ii) Mọi hệ vectơ có chứa vectơ không (θ) đều là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

1.3. Ứng dụng định thức để khảo sát một hệ vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, xét hệ vectơ S gồm n vectơ $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, trong đó

$$x_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$$
$$x_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$$
$$.............................$$
$$x_n = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

Nếu xếp các vectơ này thành một bảng sắp thứ tự (theo dòng) ta được một ma trận vuông cấp n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Như vậy, mỗi ma trận có thể coi là một hệ vectơ dòng hoặc hệ vectơ cột. Hệ vectơ này là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu có một vectơ trong hệ biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại, nghĩa là có một dòng (cột) biểu diễn tuyến tính qua các dòng (cột) còn lại. Điều này đồng nghĩa với $\det(A) = 0$. Vậy ta có kết luận:

* S *là hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* $\det A \neq 0$.

* S *là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi* $\det A = 0$.

Ví dụ 6. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ $S = \{x_1, x_2, x_3\}$, trong đó: $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 1, 3)$, $x_3 = (3, 2, 1)$.

Chứng minh rằng hệ S là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Lập ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Vì $\det A = 12 \neq 0$ nên hệ S là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

2. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

2.1. Cơ sở của không gian vectơ

Định nghĩa 2. Hệ vectơ độc lập tuyến tính $S = \{x_1, x_2, \dots x_n\} \subset V$, được gọi là một cơ sở của không gian vectơ *V,* nếu S là một hệ sinh của *V*.

Ví dụ 7. Trong $\mathbb{R}^2$, hệ $S = \{e_1(1, 0), e_2(0, 1)\}$ là một cơ sở.

Thật vậy:

- S độc lập tuyến tính vì $e_1 \neq k\, e_2\ \forall k \in \mathbb{R}$.
- S là hệ sinh của $\mathbb{R}^2$ vì $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ta có: $(a, b) = a e_1 + b e_2$.

Vậy S là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Cơ sở này được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 8. Trong $\mathbb{R}^2$, hệ $S = \{x_1(1, 2),\ x_2(1, 3)\}$ cũng là một cơ sở. Thật vậy:

- S độc lập tuyến tính vì $x_1 \neq k\, x_2\ \forall k \in \mathbb{R}$.

• S là hệ sinh của $\mathbb{R}^2$ vì: $\forall x=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ luôn tồn tại $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ để

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2 \Leftrightarrow (a,b)=(\lambda_1+\lambda_2, 2\lambda_1+3\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=a\\ 2\lambda_1+3\lambda_2=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=3a-b\\ \lambda_2=b-2a\end{cases}$$

Nghĩa là, mọi vectơ của $\mathbb{R}^2$ đều biểu diễn tuyến tính qua S. Vậy S là cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 9. Trong không gian $P_2(x)$, cho hệ vectơ $S=\{x^2+x+1,\ 2x+1,\ 3\}$. Chứng minh S là cơ sở của $P_2(x)$.

Thật vậy:

• S độc lập tuyến tính (đã chứng minh ở §8 Mục 1.1 Ví dụ 3).

• S là hệ sinh:

Giả sử $p(x)=ax^2+bx+c$ là đa thức bất kỳ của $P_2(x)$, ta phải chứng minh tồn tại $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R$ để:

$$ax^2+bx+c=\lambda_1(x^2+x+1)+\lambda_2(2x+1)+3\lambda_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=a\\ \lambda_1+2\lambda_2=b\\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=c\end{cases} \quad \text{có nghiệm với mọi } a,b,c.$$

Điều này hiển nhiên vì hệ này là hệ tam giác. Vậy S là cơ sở của $P_2(x)$.

2.2. Toạ độ của vectơ

Định lý. Trong không gian vectơ V cho hệ vectơ $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Khi đó hệ S là cơ sở của không gian vectơ V nếu và chỉ nếu mọi vectơ $x\in V$ đều biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua hệ S.

(Tức là tồn tại duy nhất bộ số thực $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ sao cho $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$) (1)

Định nghĩa 3. Bộ số thực $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ trong biểu diễn (1) gọi là toạ độ của vectơ x đối với cơ sở S. Khi đó ký hiệu $(x)_S=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

Ví dụ 10. Trong không gian vectơ H_3, cho vectơ $x=(1,\ 2,\ 3)$ và hệ cơ sở chính tắc $S=\{i=(1,\ 0,\ 0);\ j=(0,\ 1,\ 0);\ k=(0,\ 0,\ 1)\}$.

Ta có: $x=1i+2j+3k$.

Suy ra (1, 2, 3) là toạ độ của x với cơ sở chính tắc hay $(x)_S = (1, 2, 3)$.

Ví dụ 11. Cho một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ gồm các vectơ:

$$x_1 = (1,2,1), x_2 = (1,3,1), x_3 = (2,3,-1)$$

Hãy tìm toạ độ của vectơ $x = (-2, 1, 7)$ đối với cơ sở đã cho.

Giả sử $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là toạ độ của x với cơ sở trên.

Ta có: $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$.

Đẳng thức trên tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = -2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 7 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -3$.

Vậy toạ độ của vectơ $x = (-2, 1, 7)$ trong cơ sở đã cho là $(2, 2, -3)$.

Ví dụ 12. Trong không gian $P_2(x)$ cho cơ sở $S = \{x^2 + x + 1,\ 2x + 1,\ 3\}$.

Tìm toạ độ của vectơ $p(x) = x^2 + 3x - 1$ đối với cơ sở *S*.

Ta có: $p(x) = (x^2 + x + 1) + (2x + 1) - 3$.

Vậy $(1, 1, -1)$ là toạ độ của $p(x)$ đối với cơ sở *S*.

Ví dụ 13. Trong không gian $P_2(x)$, cho vectơ $p(x)$ có toạ độ đối với cơ sở $E = \{x^2 + x + 1,\ 7x - 2,\ 2\}$ là $(2, 1, -3)$.

Tìm toạ độ của $p(x)$ đối với cơ sở $F = \{x^2,\ 3x,\ 3\}$.

Ta có:

$$p(x) = 2(x^2 + x + 1) + (7x - 2) - 3.2$$
$$= 2x^2 + 9x - 6.$$

Giả sử $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là toạ độ của $p(x)$ với cơ sở *F*. Khi đó ta có

$$p(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 3x + \alpha_3.3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ 3\alpha_2 = 9 \\ 3\alpha_3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Vậy đối với cơ sở F vectơ $p(x)$ có toạ độ là:

$$(2,3,-2) \text{ hay } [p(x)]_F = (2, 3, -2).$$

2.3. Số chiều của không gian vectơ

Mỗi không gian vectơ có thể có nhiều cơ sở, tuy nhiên người ta đã chứng minh số vectơ trong các cơ sở đó là bằng nhau, bởi vậy ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 4. Số chiều của không gian vectơ V là số vectơ trong một cơ sở của V ký hiệu là $\dim(V)$.

Ví dụ 14. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\dim\left(P_2(x)\right) = 3, \ldots$

Không gian vectơ H_2 là không gian hai chiều, không gian vectơ H_3 là không gian ba chiều (H_2 và H_3 là các không gian vectơ được nêu trong §7 Mục 1.1 Ví dụ 4a, 4b).

Tính chất 1. Giả sử V là không gian vectơ, $\dim(V) = n$. Khi đó:

- Mọi hệ gồm n vectơ độc lập tuyến tính của V đều là cơ sở của V.
- Có thể bổ sung $n - k$ vectơ vào hệ gồm k vectơ độc lập tuyến tính của V để tạo nên một cơ sở của V.

Tính chất 2. Từ một hệ sinh của không gian vectơ V luôn tìm ra một cơ sở bằng cách chọn ra một hệ vectơ độc lập tuyến tính tối đại (hệ vectơ độc lập tuyến tính có số vectơ lớn nhất).

Tính chất 3. Trong không gian vectơ n chiều mọi hệ vectơ có số vectơ lớn hơn n đều phụ thuộc tuyến tính.

§9. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. ĐỊNH NGHĨA

1.1. Định nghĩa 1 (Dạng toàn phương)

Ánh xạ

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \mapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j \qquad (1)$$

được gọi là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$.

Để đơn giản người ta viết dạng toàn phương (1) dưới dạng:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j .$$

Dạng khai triển của biểu thức trên như sau:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, ..., x_n) = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + ... + b_{1n}x_1x_n \\ + b_{21}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + ... + b_{2n}x_2x_n \\ .... \\ + b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + ... + b_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

1.2. Định nghĩa 2 (Ma trận của dạng toàn phương)

Cho dạng toàn phương F xác định bởi (1). Đặt

$$\begin{aligned} &\bullet\ a_{ij} = b_{ij} \quad khi\ i = j \\ &\bullet\ a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) \quad khi\ i \neq j \end{aligned} \qquad (2)$$

Khi đó $F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, ma trận $A = (a_{ij})_n$ được gọi là ma trận của dạng toàn phương F.

Nhận xét:

i) Ma trận A của dạng toàn phương (1) là ma trận đối xứng.

ii) F là một dạng toàn phương không đồng nhất bằng 0 khi và chỉ khi $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một đa thức đẳng cấp bậc hai của n biến $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ví dụ 1. Xét ánh xạ

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto 3x^2 + 4xy - 2xz + y^2 + 6yz - 2z^2$$

Vì $F(x, y, z)$ là một đa thức đẳng cấp bậc hai của ba biến thực x, y, z nên F là một dạng toàn phương của ba biến thực đã cho. Áp dụng công thức (2) ta thu được ma trận của F là

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2. Ánh xạ

$$F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto xy - xz + yz$$

là một dạng toàn phương của ba biến thực x,y,z với ma trận của F là

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3. $F(x,y,z)=x^2+y-z^2$ không là dạng toàn phương của ba biến x,y,z vì $F(x,y,z)$ không phải là đa thức đẳng cấp bậc hai của ba biến x,y,z.

Ví dụ 4.

a) Mọi dạng toàn phương của hai biến thực có dạng tổng quát

$$F(x,y)=ax^2+by^2+cxy$$

Ma trận của nó là

$$A=\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & b \end{bmatrix}$$

b) Mọi dạng toàn phương của ba biến thực có dạng tổng quát

$$F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz.$$

Ma trận của nó là

$$A=\begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}.$$

1.3. Định nghĩa 3 (Dạng chính tắc của dạng toàn phương)

Dạng toàn phương F trên $\mathbb{R}^n$ gọi là dạng chính tắc nếu biểu thức của F có dạng $F(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ... + a_nx_n^2 \quad (a_i \in \mathbb{R})$

Nhận xét: Ma trận của dạng toàn phương F có dạng chính tắc là ma trận chéo

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Ví dụ 5. $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ là dạng toàn phương của ba biến thực, có dạng chính tắc. Ma trận của q là ma trận chéo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

2.1. Thuật toán Lagrange

Cho dạng toàn phương

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j .$$

Để đưa F về dạng chính tắc ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Biến đổi đưa F về dạng:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1 y_1^2 + F_1(x_2, x_3, ..., x_n).$$

Bước 2: Biến đổi đưa F_1 về dạng:

$$F_1(x_2, ..., x_n) = a_2 y_2^2 + F_2(x_3, x_4, ..., x_n).$$

Cứ tiếp tục như vậy nhiều nhất là sau n bước F sẽ là tổng các bình phương của các biến, tức là F có dạng chính tắc.

Trong quá trình thực hiện nếu gặp trường hợp trong biểu thức F có $b_{11} = b_{22} = ... = b_{nn} = 0$ tức là F không chứa bình phương của một biến nào cả. Khi đó ta dùng phép biến đổi sau:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2', \\ x_2 = x_1' - x_2', \\ x_3 = \qquad x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \qquad x_n. \end{cases}$$

Ví dụ 6. Đưa dạng toàn phương

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1$$

về dạng chính tắc.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_3x_1) + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{5}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \qquad x_3 \end{cases}$$

Ta thu được

$$F(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2 \ .$$

với phép đổi biến số

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - \dfrac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \qquad y_2 - \dfrac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

Ví dụ 7. Biến đổi dạng toàn phương $q(x,y,z)=2xy+4xz-2yz$ về dạng chính tắc.

Vì q không chứa một bình phương của biến nào nên ta dùng phép biến đổi:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \\ z = \qquad z' \end{cases} \qquad (*)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} q &= 2(x'+y')(x'-y') + 4z'(x'+y') - 2z'(x'-y') \\ &= 2\left(x'+\frac{1}{2}z'\right)^2 - 2\left[y'^2 - 2y'\left(\frac{3}{2}z'\right) + \frac{9}{4}z'^2\right] + \frac{9}{2}z'^2 - \frac{1}{2}z'^2 \\ &= 2\left(x'+\frac{1}{2}z'\right)^2 - 2\left(y'-\frac{3}{2}z'\right)^2 + 4z'^2. \end{aligned}$$

Tiếp tục đổi biến

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{2}z' \\ y'' = y' - \frac{3}{2}z' \\ z'' = \qquad z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' - \frac{1}{2}z'' \\ y' = y'' + \frac{3}{2}z'' \\ z' = \qquad z'' \end{cases} \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có: $\begin{cases} x = x'' + y'' + \; z'' \\ y = x'' - y'' - 2z'' \\ z = \qquad\quad z'' \end{cases}$

Khi đó đối với các biến x'', y'', z'' dạng toàn phương q có dạng chính tắc là

$$q(x'',y'',z'') = 2x''^2 - 2y''^2 + 4z''^2.$$

2.2. Phương pháp Jacobi (Phương pháp biến đổi tam giác)

Phương pháp này chỉ áp dụng cho những dạng toàn phương có ma trận $A=(a_{\text{ij}})_n$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

Các định thức trên gọi là các định thức con chính của ma trận A.

Định lý. (*Định lý Jacobi*) Nếu dạng toàn phương (1) thỏa mãn điều kiện (3) thì có thể đổi từ biến số $x_1, x_2, ..., x_n$ sang biến số $y_1, y_2, ..., y_n$ sao cho

$$Q(y_1, y_2, ..., y_n) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + ... + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2 .$$

Phép đổi biến số nêu trong định lý Jacobi có dạng

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{21} y_2 + \alpha_{31} y_3 + ... + \alpha_{n1} y_n \\ x_2 = \qquad\quad y_2 + \alpha_{32} y_3 + ... + \alpha_{n2} y_n \\ \cdots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y_n \end{cases}$$

trong đó các hệ số $\alpha_{ji} = (-1)^{j+i} \dfrac{D_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}$ với Δ_{j-1} là các định thức con chính trong (3), còn $D_{j-1,i}$ là định thức con của ma trận A lập nên bởi các phần tử nằm trên giao của các dòng thứ $1, 2, ..., j-1$ và các cột $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., j$.

Phép biến đổi trên còn gọi là *phép biến đổi tam giác*.

Ví dụ 8: Đưa dạng toàn phương

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_3x_1 + x_2^2 + x_3^2$$

về dạng chính tắc.

Ta có ma trận của F là:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó: $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{17}{4}.$

Theo định lý Jacobi ta thu được dạng chính tắc:

$$F(y_1, y_2, ..., y_n) = 2y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 + 17y_3^2$$

Nhờ phép đổi biến $\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 \\ x_2 = \quad\quad\; y_2 + \alpha_{32}y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad\quad\; y_3 \end{cases}$

Với

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \frac{D_{1,1}}{\Delta_1} = -\frac{3/2}{2} = -\frac{3}{4},$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4 \frac{D_{2,1}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 3/2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-1}{4}} = 8,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^4 \frac{D_{2,2}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3/2 & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-1}{4}} = -12.$$

Do đó ta có công thức đổi biến $\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{3}{4}y_2 + 8y_3 \\ x_2 = \quad\quad\; y_2 - 12y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad\quad\; y_3. \end{cases}$

3. BIỂU DIỄN DẠNG TOÀN PHƯƠNG QUA MA TRẬN

3.1. Dạng ma trận của dạng toàn phương

Xét dạng toàn phương

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \le i, j \le n} b_{ij} x_i x_j$$

có ma trận $A = (a_{ij})_n$.

Đặt

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ X^t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \end{bmatrix}$$

(X^t là ma trận chuyển vị của ma trận X)

Ta có

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = X^t AX,$$

gọi là dạng ma trận của dạng toàn phương F .

Ví dụ 8. Cho dạng toàn phương $F = ax^2 + bxy + cy^2$ có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

Khi đó dạng toàn phương F có dạng ma trận là

$$F = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

3.2 Áp dụng ma trận biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc

Sử dụng dạng ma trận của dạng toàn phương ta có thể biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc. Ví dụ sau đây mô tả phương pháp này.

Ví dụ 9. Biến đổi dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc:

$$F = 2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

Ma trận của dạng toàn phương F là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ với } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, X^t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}.$$

Ta có: $F = X^t AX$.

Do $a_{11} = 2 \neq 0$, dựa vào dòng một của ma trận A ta đổi biến

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

Thì hệ (*) có dạng ma trận là: $X = Q_1 Y$.

Thay vào F ta được

$$F = X^t AX = (Q_1 Y)^t A(Q_1 Y)$$
$$= Y^t \left(Q_1^t AQ_1\right) Y = Y^t BY$$

trong đó

$$B = Q_1^t AQ_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{4} \\ 0 & \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(Chú ý rằng $(Q_1 Y)^t = Y^t Q_1^t$).

Lúc này $F = Y^t BY = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 + \frac{13}{2}y_2y_3$.

Vì $b_{22} = -\frac{1}{8} \neq 0$, dựa vào dòng 2 của B ta đặt

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = -\frac{1}{8}y_2 + \frac{13}{4}y_3 \\ z_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \quad -8z_2 + 26z_3 \\ y_3 = \qquad\qquad z_3 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 26 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Dạng ma trận của (**) là $Y = Q_2 Z$.

Thay vào F ta được:

$$F = (Q_2Z)^t B(Q_2Z) = Z^t\left(Q_2^t BQ_2\right)Z = Z^t CZ$$

Với $C = Q_2^t BQ_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix}$

Vậy $F = Z^t CZ = \frac{1}{2}z_1^2 - 8z_2^2 + 84z_3^2$.

Vậy dạng toàn phương đã cho được đưa về dạng chính tắc nhờ phép biến đổi

$$X = Q_1Y = Q_1Q_2Z.$$

4. ÁP DỤNG DẠNG TOÀN PHƯƠNG ĐỂ NHẬN DẠNG ĐƯỜNG BẬC HAI.

Ví dụ 10. Hãy nhận dạng đường cong phẳng cho bởi phương trình:

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 36 \qquad (*)$$

Xét dạng toàn phương: $P = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$.

Đưa dạng toàn phương P về dạng chính tắc

$$P = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 5\left[x_1^2 - \frac{4}{5}x_1x_2 + \frac{4}{25}x_2^2\right] + \frac{36}{5}x_2^2$$

$$= 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2\right)^2 + \frac{36}{5}x_2^2.$$

Đặt $\begin{cases} X_1 = x_1 - \frac{2}{5}x_2 \\ X_2 = \quad\quad x_2 \end{cases}$

Suy ra P có dạng chính tắc: $P = 5X_1^2 + \frac{36}{5}X_2^2$.

Khi đó (1) trở thành: $5X_1^2 + \frac{36}{5}X_2^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{X_1^2}{\left(\frac{36}{5}\right)} + \frac{X_2^2}{5} = 1$.

Vậy đường cong phẳng cho bởi phương trình (*) là một đường Elip.

Ví dụ 11. Hãy nhận dạng đường cong phẳng cho bởi phương trình:

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 - 8 = 0 \qquad (**)$$

Xét dạng toàn phương: $Q = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2$

Đưa dạng toàn phương Q về dạng chính tắc:

$$Q = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2$$
$$= 2\left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 3x_2^2$$
$$= 2\left(x_1 - x_2\right)^2 - 3x_2^2$$

Đặt $\begin{cases} X_1 = x_1 - x_2 \\ X_2 = \quad\ x_2 \end{cases}$

Suy ra Q có dạng chính tắc $Q = 2X_1^2 - 3X_2^2$.

Khi đó (2) trở thành

$$2X_1^2 - 3X_2^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2X_1^2 - 3X_2^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{X_1^2}{4} - \frac{X_2^2}{\left(\frac{8}{3}\right)} = 1.$$

Vậy đường cong phẳng cho bởi phương trình (**) là một đường hypebol.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Cho A, B, C là các tập hợp bất kỳ, chứng minh các đẳng thức:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$. b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

c) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$. d) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

e) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$. f) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

2. Biểu diễn hình học các tập $A \times B$ với

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$; $B = \mathbb{R}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$; $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$.

3. Tìm hàm số thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) Là đơn ánh.

b) Là toàn ánh.

c) Là song ánh và khi đó tìm ánh xạ ngược của nó.

4. Cho hai ánh xạ:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{và} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad\qquad x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh?

b) Tìm tập ảnh $g(\mathbb{R})$ của ánh xạ g.

c) Xác định $h = g \circ f$.

5. Cho ánh xạ:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2(1 - x)$$

Chứng minh ánh xạ f là song ánh. Tìm ánh xạ ngược của nó.

6. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 12 & 5 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$

Hãy tính: $A - 2B + 3C$.

7. Cho $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Tìm ma trận X biết:

a) $A + 5X = O$, b) $3A - \frac{1}{2}X = B$.

8. Tính:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^3$.

9. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận: $A^3 - 3A^2 + 4A - I$, trong đó $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận: $(A + I)^2$, trong đó $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thoả mãn $AB = BA$. Hãy chứng minh:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

c) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

12. Tính các định thức sau:

a) $D = \begin{vmatrix} 1273 & 2273 \\ 1272 & 2272 \end{vmatrix}$, b) $D = \begin{vmatrix} 361 & 273 & 568 \\ 2 & 2 & 2 \\ 363 & 275 & 570 \end{vmatrix}$,

c) $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$, d) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

13. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có) bằng phương pháp Gauss – Jordan

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

14. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có) bằng cách sử dụng ma trận phụ hợp

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Tìm ma trận X thoả mãn phương trình ma trận

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $AX + B = 2C$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

16. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 11 & 5 & 8 \\ 15 & 7 & 11 \end{bmatrix}$.

17. Tìm m để hạng ma trận sau bằng 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & m+5 & m^2+1 \\ 1 & -1 & 2 & m-1 \end{bmatrix}.$$

18. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp sử dụng ma trận nghịch đảo:

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$

19. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

20. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$

21. Giải và biện luận hệ sau:

a) $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (k+1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + (k+1)x_3 = k^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} kx_1 + kx_2 + (k+1)x_3 = k \\ kx_1 + kx_2 + (k-1)x_3 = k \\ (k+1)x_1 + kx_2 + (2k+3)x_3 = 1 \end{cases}$

22. Tìm *m* để hệ phương trình sau thoả mãn điều kiện:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \\ 3x + 7y + m^2 z = 6 \end{cases}$ có nghiệm.

b) $\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ -2x - 6y + (m-1)z = 4 \\ 4x + 12y + (3 + m^2)z = m - 3 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + mz = 0 \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

23. Tìm giá trị của tham số λ để phương trình:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ \lambda \\ 2 \end{bmatrix}$ có nghiệm.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 7 & 2\lambda+1 \\ 3 & 9 & 4\lambda \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ có vô số nghiệm.

24. Tập hợp nào trong các tập hợp sau là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$?

a) $V = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$ với hai phép toán được định nghĩa như sau:

Phép cộng: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$.

Phép nhân: $k(x, y, z) = (kx, y, z)$.

b) $V = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ với hai phép toán được định nghĩa như sau:

Phép cộng: $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$.

Phép nhân: $k(x, y) = (kx, ky)$.

25. Các tập dưới đây có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không?

a) $W = \{(a, 1, 1) / a \in \mathbb{R}\}$.

b) $W = \{(a, b, c) / b = a + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

c) $W = \{(a, b, c) / b = a + c + 1; a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

26. Hãy biểu diễn vectơ x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w

a) $x = (7, -2, 15)$; $u = (2, 3, 5)$; $v = (3, 7, 8)$; $w = (1, -6, 1)$.

b) $x = (1, 4, -7, 7)$; $u = (4, 1, 3, -2)$; $v = (1, 2, -3, 2)$; $w = (16, 9, 1, -2)$.

27. Tìm λ để x biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại

a) $x = (2, 1, \lambda)$, $x_1 = (1, 3, 2)$, $x_2 = (-1, -2, -3)$.

b) $x = (1, 2, 3)$, $x_1 = (-1, 2, \lambda)$, $x_2 = (3, -2, -3)$.

28. Hệ vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $x_1 = (2, -3, 1)$; $x_2 = (3, -1, 5)$; $x_3 = (1, -4, 3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $x_1 = (1, 2, 3, 4)$; $x_2 = (2, 3, 4, 1)$; $x_3 = (3, 2, 1, 4)$; $x_4 = (4, 1, 2, 3)$ trong $\mathbb{R}^4$.

29. Hãy giải thích tại sao các hệ vectơ dưới đây không phải là cơ sở của không gian vectơ tương ứng.

a) $x_1 = (1, 2)$; $x_2 = (0, 3)$; $x_3 = (2, 7)$ trong $\mathbb{R}^2$.

b) $x_1 = (-1, 3, 2)$; $x_2 = (6, 1, 1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $P_1 = 1 + x + x^2$; $P_2 = x - 1$ trong $P_2(x)$.

30. Hệ vectơ nào dưới đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$?

a) (1, 0, 0); (2, 2, 0); (3, 3, 3).

b) (2, 3, 1); (4, 1, 1); (0, -7, 1).

c) (1, 6, 4); (2, 4, -1); (-1, 2, 5).

31. Chứng minh rằng $\{x_1, x_2, x_3\}$ dưới đây là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và hãy tìm toạ độ vectơ x đối với cơ sở đó.

a) $x_1 = (1, 2, 3)$; $x_2 = (-2, 1, -1)$; $x_3 = (-1, 3, 4)$; $x = (6, -3, 1)$.

b) $x_1 = (1, 1, 0)$; $x_2 = (1, 0, 1)$; $x_3 = (0, 1, 1)$; $x = (1, 5, 2)$.

32. Xét tính chất độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ vectơ:

$S = \{x = (1, 2, -3, 1), y = (1, -5, 4, 1), z = (3, -1, -2, 3)\}$ trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$.

33. Với giá trị nào của λ thì vectơ x là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại?

a) $x = (1, 3, 5)$; $x_1 = (2, 3, 5)$; $x_2 = (3, 7, 8)$; $x_3 = (1, -6, \lambda)$.

b) $x = (1, 8, 5, \lambda)$; $x_1 = (-6, 7, 3, -2)$; $x_2 = (1, 3, 2, 7)$; $x_3 = (-4, 18, 10, 3)$.

34. Cho $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Xét xem ánh xạ f có phải là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^2$ không?

a) $f(x) = 2x_1x_2$ c) $f(x) = 7x_1^2$

b) $f(x) = x_1 + 2x_2$ d) $f(x) = 1$.

35. Cho các dạng toàn phương

a) $f = x^2 - 4xy + y^2$

b) $f = x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xy - 4xz + 8yz$

c) $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_3x_4$

Hãy tìm ma trận của các dạng toàn phương đã cho.

Biểu diễn các dạng toàn phương đó qua ma trận.

36. Viết biểu thức của dạng toàn phương có ma trận như sau:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

37. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

a) $q = x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 6yz$,

b) $q = x^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$,

c) $q = xy + xz + xt + yz + yt + zt$.

38. Nhận dạng các đường cong bậc hai sau đây:

a) $x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 = 9$,

b) $3x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_2^2 = 16$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 1

4. a) Ánh xạ f là đơn ánh, ánh xạ g không là đơn ánh cũng không là toàn ánh.

b) $g(\mathbb{R}) = [-1;1]$.

c) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

5. Ánh xạ ngược của ánh xạ f là ánh xạ

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) = 1 - \frac{y}{2}$$

6. $A - 2B + 3C = \begin{bmatrix} 4 & -19 \\ 35 & 5 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$.

7. a) $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 34 & -22 & 16 & -6 \\ 12 & -4 & 20 & 38 \end{bmatrix}$

8. a) $\begin{bmatrix} 13 & 17 & 18 \\ 20 & 25 & 13 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 21 & 20 \\ 30 & 21 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

12. a) $D = 1000$ b) $D = 0$ c) $D = 0$ d) $D = 56$.

13. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

14. a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$ b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15. a) $X=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix}$ b) $X=\begin{bmatrix} -5 & 16 & -8 \\ 4 & -7 & 7 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

16. a) $r(A)=2$ b) $r(A)=2$

17. $r(A)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

18. a) $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=1 \end{cases}$

19. a) $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1=-15 \\ x_2=19 \\ x_3=-22 \end{cases}$

20. a) Hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1=-\frac{8}{3}-\frac{22}{5}\alpha \\ x_2=1-\frac{\alpha}{5} \\ x_3=-\frac{7}{3}-\frac{16}{5}\alpha \\ x_4=\alpha \end{cases}$

b) Hệ vô nghiệm

21. a) Nếu $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -2 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{k+2}$.

Nếu $k=1$ thì hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = 1-\alpha_1-\alpha_2 \\ x_2 = \alpha_1 \\ x_3 = \alpha_2 \end{cases}$

Nếu $k=2$ thì hệ vô nghiệm.

b) Nếu $\begin{cases} k\neq 0 \\ k\neq -3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2-k^2}{k(k+3)} \\ x_2 = \dfrac{2k-1}{k(k+3)} \\ x_3 = \dfrac{k^3+2k^2-k-1}{k(k+3)} \end{cases}$.

Nếu $k=0$ hoặc $k=-3$ hệ vô nghiệm.

c) Nếu $k\neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = 1-k \\ x_2 = k \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Nếu $k=0$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

22. a) Hệ luôn có nghiệm với mọi m.

b) Không tồn tại giá trị m để hệ có vô số nghiệm.

c) $m=4$ thì hệ có nghiệm không tầm thường.

23. a) $\lambda=-6$. b) $\lambda=1$.

24. a) Phép nhân không thỏa mãn tính chất 8, do đó V cùng hai phép toán đã cho không là không gian véc tơ.

b) Phép nhân không thỏa mãn tính chất 7, do đó V cùng hai phép toán đã cho không là không gian véc tơ.

25. a) Không là không gian véc tơ con.

b) Là không gian véc tơ con.

c) Không là không gian véc tơ con.

26. a) Có vô số cách biểu diễn *x* qua *u, v, w.*

b) *x* không biểu diễn được qua *u,v,w.*

27. a) $\lambda=9$ b) $\lambda=-3$.

28. a) Hệ độc lập tuyến tính. b) Hệ độc lập tuyến tính.

30. a) S là một cơ sở. b) S là một cơ sở. c) S không là cơ sở.

31. a) Tọa độ của x là $(1;-2;-1)$. b) Tọa độ của x là $(2;-1;3)$.

32. Hệ độc lập tuyến tính.

33. a) $\lambda \neq 1$ b) Với mọi λ.

34. a) có b) không c) có d) không

35. a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

36. a) $3x^2-y^2+4xy$

b) $x^2+2z^2+4xy-8xz+10yz$

c) $y^2+3z^2-2t^2+4xy-8xz+2xt-2yz+8yt$

37. a) $q=(x+2y-z)^2-3\left(y-\frac{5}{3}z\right)^2+\frac{16}{3}z^2=a^2-3b^2+\frac{16}{3}c^2$

b) $q=(x-y+z)^2-(y+2z)^2+6z^2=a^2-b^2+6c^2$

c) $q=y_1^2-y_2^2+4y_1y_3-4y_2y_3 \quad (x=y_1+y_2, y=y_1-y_2, z=y_3)$

d) $q=(3x_1-x_2-x_3)^2+5(x_2+y_3)^2=a^2+5b^2+0.c^2$

38. a) Elip: $\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{7}{4}x_2^2=9$

b) Hypebol $3(x_1-x_2)^2-5x_2^2=16$

Ch¬ng 2

PHÉP TÍNH VI PHÂN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

Định nghĩa 1. Một dãy số thực là một ánh xạ từ tập $\mathbb{N}^*$ các số tự nhiên khác 0 vào tập số thực $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n) \overset{k.h}{=} a_n$$

Người ta thường dùng ký hiệu $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...,$ để chỉ một dãy số, a_n gọi là số hạng tổng quát của dãy số.

Ví dụ 1. Cho dãy số $\{a_n\}$ với $a_n = (-1)^n$ ta có dãy số $-1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...$

Ví dụ 2. Cho dãy số $\{b_n\}$ với $b_n = 5$ $(\forall n)$ ta có dãy số $5, 5, 5, ..., 5, ...$

Định nghĩa 2. Cho dãy số thực $\{a_n\}$. Nếu $n_1 < n_2 < ... < n_k < ... (n_k \in \mathbb{N}^*)$ thì dãy số $\{a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...\}$ gọi là dãy con của dãy $\{a_n\}$. Ký hiệu: $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$.

Ví dụ 3. Dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, có các dãy con là: $\left\{\frac{1}{2k-1}\right\}, \left\{\frac{1}{2k}\right\}, ...$

Định nghĩa 3. Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{a_n\}$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, nhỏ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n > n_0$, ta đều có $|a_n - a| < \varepsilon$ (chú ý rằng số n_0 phụ thuộc vào ε).

Ký hiệu $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ hoặc $a_n \to a$ khi $n \to \infty$.

Nếu dãy số $\{a_n\}$ có giới hạn là a, ta nói dãy này hội tụ về a. Ngược lại, nếu $\{a_n\}$ không có giới hạn, ta nói dãy này phân kỳ.

Ta có một số kết quả sau:

• Giới hạn của một dãy số (nếu có) là duy nhất.

• Nếu dãy $\{a_n\}$ có giới hạn là a thì mọi dãy con của nó cũng có giới hạn là a.

Ví dụ 4. Cho dãy $\{a_n\}$, $a_n = a,\ \forall n.$

Ta có $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = 0,\ \forall n > n_0 :\ |a_n - a| = |a - a| < \varepsilon.$ Vậy $\lim_{n\to\infty} a_n = a.$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],\ \forall n > n_0$ (ký hiệu $[x]$ đọc là *phần nguyên* của x, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x) ta có $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \le \varepsilon.$ Suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Ví dụ 6. Với $q \in \mathbb{R},\ |q| < 1$ chứng minh rằng: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

Thật vậy, với $q = 0$ ta có $\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

Với $q \ne 0, \forall \varepsilon > 0$ xét $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}.$ Chọn $n_0 = \left[\left|\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}\right|\right]$ ta có $\forall n > n_0$ thì $|q^n - 0| < \varepsilon$. Vậy $\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn của dãy số $\{a_n\}$, với $a_n = (-1)^n$.

Xét hai dãy con của dãy $\{a_n\}$ là $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$. Ta có

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1,\ \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1.$$

Vậy không tồn tại $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Định nghĩa 4. Dãy $\{a_n\}$ được gọi là dãy bị chặn, nếu tồn tại số dương M sao cho ta có $|a_n| \le M$ với mọi n.

Dãy $\{a_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $a_n \le M$ với mọi n.

Dãy $\{a_n\}$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số M sao cho $a_n \ge M$ với mọi n.

Định nghĩa 5. Cho dãy $\{a_n\}$. Nếu với mọi $M > 0$ lớn tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $a_n > M$ với mọi $n > n_0$ ta nói dãy $\{a_n\}$ có giới hạn $+\infty$, và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ hay } a_n \to +\infty\cdot$$

Hoàn toàn tương tự, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ hay } a_n \to -\infty$$

nếu với mọi *n* đủ lớn ta có $a_n < -M$.

Chú ý: Để tránh nhầm lẫn, ta chú ý rằng dãy $\{a_n\}$ chỉ được gọi là hội tụ khi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ tồn tại, bằng một số hữu hạn. Khi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) dãy $\{a_n\}$ được coi là có giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) nhưng không được gọi là hội tụ.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$

Thật vậy $\forall M > 0, \exists n_0 = \left[\sqrt{M}\right], \forall n > n_0$ thì $n^2 > M$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - n^2) = -\infty.$

Thật vậy $\forall M > 0, \exists n_0 = \left[\sqrt{1+M}\right], \forall n > n_0$ thì $1 - n^2 < 1 - \left(\sqrt{1+M}\right)^2 = -M$.

2. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN

Định lý 1. Nếu các dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ thì các dãy $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{|a_n|\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ (nếu $b_n \neq 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$), cũng hội tụ và ta có:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$.

Chú ý: *Các trường hợp sau đây được gọi là các dạng vô định.*

Giới hạn của $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ khi cả hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ cùng hội tụ về 0 (dạng $\dfrac{0}{0}$).

Giới hạn của $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ khi cả hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ cùng hội tụ về ∞ (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Giới hạn của $\{a_n b_n\}$ khi dãy $a_n \to 0$ và $b_n \to \infty$ (dạng $0.\infty$).

Giới hạn của $\{a_n\} - \{b_n\}$ khi $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ (dạng $\infty - \infty$).

Ví dụ 10. Tính giới hạn (dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 - n - 3}.$$

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^2 ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 - n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Định lý 2. Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.

Chứng minh. Giả sử $\{a_n\}$ là dãy số hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in \mathbb{R}$. Chọn $\varepsilon = 1$, $\exists n_0$ sao cho $\forall n > n_0$ thì $|a_n - a| < \varepsilon = 1 \Rightarrow |a_n| < |a| + 1$.

Chọn $M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|, |a| + 1\}$ thì $|a_n| \le M, \forall n$. Vậy $\{a_n\}$ là dãy số bị chặn.

Chú ý: Điều ngược lại của định lý trên không đúng.

Ví dụ 11. Dãy số $\{(-1)^n\}$ bị chặn nhưng không hội tụ.

Định lý 3. Nếu $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ là các dãy hội tụ và $a_n \le b_n$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Định lý 4. Cho $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ là các dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, nếu $a_n \le c_n \le b_n$ với mọi n thì dãy $\{c_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Ví dụ 12. Cho dãy số $\{a_n\}$, với $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2} + \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{n^2} + ... + \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n^2}$.

Ta có $\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{n^2} \le a_n \le \dfrac{n\sqrt{n^2+n}}{n^2}$ hay $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} \le a_n \le \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$, mà

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Định nghĩa 6.

Dãy $\{a_n\}$ gọi là dãy đơn điệu tăng nếu $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ...$

Dãy $\{a_n\}$ gọi là dãy đơn điệu giảm nếu $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge ...$

Dãy đơn điệu tăng (giảm) gọi chung là dãy đơn điệu. Hiển nhiên, dãy đơn điệu tăng luôn bị chặn dưới, dãy đơn điệu giảm luôn bị chặn trên.

Định lý 5. Mọi dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên hoặc đơn điệu giảm và bị chặn dưới đều hội tụ.

Ví dụ 13. Cho dãy số $\{a_n\}$ với $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

Đây là dãy đơn điệu tăng, lại có $a_n \le 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Vậy $\{a_n\}$ bị chặn trên, do đó $\{a_n\}$ hội tụ.

3. SỐ E VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

Xét dãy số $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, dùng khai triển nhị thức Newton dễ thấy $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ là dãy số tăng và bị chặn trên nên dãy số $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ hội tụ. Đặt $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Người ta chứng minh được rằng e là số vô tỷ và đã tính được

$$e = 2,718\,28182\dots$$

Số e đóng vai trò rất quan trọng trong giải tích và trong kỹ thuật. Đặc biệt, người ta thường dùng lôgarit với cơ số e, ký hiệu là *lna* và đọc là "*lôgarit Nêpe của a*" hay "*lôgarit tự nhiên của a*".

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ HÀM SỐ

1.1. Hàm số

Định nghĩa 1. Cho tập hợp $X \subseteq \mathbb{R}$. Ta gọi ánh xạ f từ tập X vào tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là một hàm số. Tập X gọi là *tập xác định*, tập ảnh $Y = f(X)$ gọi là *tập giá trị* của hàm số f. Người ta thường ký hiệu hàm số như sau:

$$\begin{aligned} f &: X \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$ (hoặc đơn giản là: $y = f(x)$).

Trong định nghĩa trên x được gọi là biến số độc lập còn $y = f(x)$ gọi là giá trị của hàm số f tại điểm x.

Ví dụ 1. Hàm số $y = 2x + 1$ là hàm số bậc nhất, nó xác định trên tập i .

Ví dụ 2. Hàm số $y = c$ (c là hằng số), gọi là hàm hằng.

Ví dụ 3. Hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$ có tập xác định là $[-1;1]$.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$

i) Ta hiểu tập xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của x làm cho $f(x)$ có nghĩa.

ii) Tập các điểm $M(x, f(x))$ (x thuộc tập xác định của hàm số $y = f(x)$) trên mặt phẳng toạ độ Oxy được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

1.2. Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 2. Ta nói hàm số $y = f(x)$ là đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) trên một miền nào đó nếu với mỗi cặp giá trị bất kỳ x_1, x_2 lấy trên miền đó thì từ $x_1 < x_2$ suy ra $f(x_1) \le f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) \ge f(x_2)$).

Nếu từ $x_1 < x_2$, trong đó x_1, x_2 lấy trong miền đã cho, suy ra $f(x_1) < f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) > f(x_2)$) thì ta nói hàm số $f(x)$ tăng nghiêm ngặt (hoặc giảm nghiêm ngặt) trên miền đó.

Ví dụ 4. Hàm số $y = x^3$ là hàm số tăng nghiêm ngặt trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 5. Hàm số $y = -x^2$ là hàm số giảm nghiêm ngặt trên khoảng $(0; +\infty)$.

Có những hàm số không đơn điệu trên bất kỳ khoảng nào, chẳng hạn hàm Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 \ \ khi \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 \ \ khi \ \ x \in I. \end{cases}$$

(Trong đó $\mathbb{Q}$ là tập số hữu tỉ, I là tập số vô tỉ)

1.3. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Tập $X \subseteq \mathbb{R}$ gọi là tập đối xứng nếu: $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$.

Định nghĩa 3. Hàm số $f(x)$ xác định trên tập đối xứng X được gọi là hàm chẵn nếu $f(x) = f(-x)$, và gọi là hàm lẻ nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in X$.

Ví dụ 6. Dễ thấy hàm số $y = x^2$, $y = \cos x$ là những hàm số chẵn.

Ví dụ 7. Các hàm số $y = x$, $y = \sin x$ là những hàm số lẻ.

1.4. Hàm số tuần hoàn

Định nghĩa 4. Hàm số $f(x)$ xác định trên tập X được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T > 0$ sao cho với $x \in X$ thì $x + T \in X$ và $f(x+T) = f(x)$.

Số bé nhất trong các số T (nếu có) được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $f(x)$.

Ví dụ 8. Các hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Ví dụ 9. Hàm Dirichlet $D(x)$ là hàm số tuần hoàn nhưng không có chu kì.

1.5. Hàm số ngược

Định nghĩa 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $D \subseteq \mathbb{R}$, có tập giá trị là D'. Giả sử f là một song ánh, khi đó ánh xạ ngược f^{-1} là một ánh xạ từ D' vào D. Ta gọi f^{-1} là hàm số ngược của hàm số f. Rõ ràng ta có

$$y = f\left[f^{-1}(y)\right],\ \forall y \in D';\ x = f^{-1}\left[f(x)\right],\ \forall x \in D.$$

Ví dụ 10. Hàm số $y = x^2$ không có hàm số ngược vì nó không phải là một song ánh.

Ví dụ 11. Hàm số $y = 2^x$ xác định trên toàn trục số có hàm số ngược là $x = \log_2 y$, tập xác định của hàm này là khoảng $(0, +\infty)$.

Chú ý:

- Thường ta hay ký hiệu x là biến số y là hàm số, bởi vậy ta nói hàm số $y = \log_2 x$ là hàm số ngược của hàm số $y = 2^x$ và ngược lại. Tương tự ta cũng ký hiệu như thế đối với các trường hợp khác.

- Nếu ta dựng đồ thị của hai hàm số ngược nhau trên cùng một mặt phẳng toạ độ thì đồ thị của chúng sẽ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

1.6. Hàm số hợp

Định nghĩa 6. Cho X, Y, Z là các tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ và cho hai hàm số

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \quad ; \quad g: Y \to Z \\ x &\mapsto f(x) \qquad\quad y \mapsto g(y) \end{aligned}$$

Hàm số

$$\begin{aligned} h: X &\to Z \\ x &\mapsto h(x) = g\left(f(x)\right) \end{aligned}$$

được gọi là hàm số hợp của hai hàm số f và g.

Ký hiệu: $h(x) = g(f(x))$ hay $h(x) = (g \circ f)(x),\ x \in X.$

Ví dụ 12. Cho $f(x) = 2x + 1;\ g(x) = \sin x$ thì $g \circ f(x) = \sin(2x + 1)$.

1.7. Các hàm số cơ bản, hàm số sơ cấp đơn giản

1) Hàm hằng là hàm số $y = f(x) = C,$ với C là hằng số. Hàm số này có tập xác định $\mathbb{R}$, tập giá trị $\{C\}$.

2) Hàm luỹ thừa là hàm số $y = x^\alpha,\ \alpha$ là số thực. Tập xác định của hàm số này phụ thuộc vào α. Chẳng hạn:

$y = x,\ y = x^2,\ y = x^3$ xác định với mọi số thực x.

$y = x^{-1},\ y = x^{-2},\ y = x^{-3}$ xác định với mọi số thực $x \neq 0.$

$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ xác định với mọi số thực $x \geq 0.$

$y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ xác định với mọi số thực $x > 0.$

3) Hàm số mũ là hàm số $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ Hàm số mũ xác định với mọi số thực x có tập giá trị là $(0, +\infty)$. Hàm số này tăng nếu $a > 1$ và giảm nếu $a < 1$.

4) Hàm số lôgarít là hàm số $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$. Hàm số này có tập xác định $(0, +\infty)$ và tập giá trị $(-\infty, +\infty)$. Khi $a > 1$ thì hàm số tăng trên tập xác định, $a < 1$ hàm số giảm trên tập xác định. Hàm $y = \log_a x$ là hàm số ngược của hàm số $y = a^x$.

5) Các hàm số lượng giác

Hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ là hai hàm số cùng có tập xác định $(-\infty, +\infty)$ và tập giá trị là đoạn $[-1, 1]$, hàm $y = \sin x$ là hàm số lẻ còn hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, cả hai hàm số này đều tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Hàm số $y = \tan x$ xác định với mọi $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, tập giá trị $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π.

Hàm số $y = \cot x$ xác định với mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tập giá trị $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ π.

6) Các hàm số lượng giác ngược:

+ Hàm số $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$, là hàm số ngược của hàm số $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tập xác định của hàm số $y = \arcsin x$ là $[-1,1]$ và tập giá trị là $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tương tự ta có:

+ Hàm số $y = \arccos x$, là hàm số ngược của hàm số $y = \cos x, x \in [0, \pi]$. Tập xác định của hàm số là $[-1,1]$, tập giá trị là $[0, \pi]$.

+ Hàm số $y = \arctan x$, là hàm số ngược của hàm số $y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

+ Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$, là hàm số ngược của hàm số $y = \cot x,\ x \in (0, \pi)$. Nó có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $(0, \pi)$.

Chú ý:

i) Các hàm số: Hàm số hằng, hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarít, các hàm số lượng giác và các hàm số lượng giác ngược được gọi là các hàm cơ bản.

ii) Ta gọi hàm số sơ cấp là hàm số xác định bởi một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và lấy hàm hợp của các hàm cơ bản.

Ví dụ 13.

Hàm số $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (đọc là hàm số *sin hypebolic*) là hàm sơ cấp.

Hàm số $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (đọc là hàm số *cos hypebolic*) là hàm sơ cấp.

Hàm số $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (đọc là hàm số *tan hypebolic*) là hàm sơ cấp.

Hàm số $cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (đọc là hàm số *cot hypebolic*) là hàm sơ cấp.

Bốn hàm số trên có tên chung là các hàm *hypebolic*. Chúng có một số tính chất tương tự như các hàm số lượng giác:

$$thx = \frac{shx}{chx}; cthx = \frac{chx}{shx}; ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy; sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy$$

$$ch^2x - sh^2x = 1;\quad ch2x = ch^2x + sh^2x;\quad sh2x = 2shxchx.$$

Dễ dàng kiểm nghiệm tính đúng đắn của các công thức trên.

2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 7. (*Theo ngôn ngữ dãy*)

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b), $x_0 \in [a,b]$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn), khi x dần tới x_0 và viết là $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ bất kỳ trong $(a,b) \setminus \{x_0\}$ mà $x_n \to x_0$ thì $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Có thể hiểu vắn tắt như sau: Hàm $f(x)$ có giới hạn là L nếu bất kỳ dãy số $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0 thì dãy số tương ứng $\{f(x_n)\}$ hội tụ đến L.

Ví dụ 14. Tính $\lim_{x \to 2}(2x^2 + 1)$.

Với dãy số bất kỳ $\{x_n\}$, $x_n \to 2$, $x_n \neq 2$ ta có $2x_n^2 + 1 \to 2 \times 2^2 + 1 = 9$. Vậy $\lim_{x \to 2}(2x^2 + 1) = 9$.

Định nghĩa 8. *(theo ngôn ngữ $\varepsilon - \sigma$)*

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b), $x_0 \in [a, b]$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn), khi x dần tới x_0 nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\sigma > 0$ sao cho ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$ với mọi $x \in (a,b)$ mà $0 < |x - x_0| < \sigma$.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng $\lim_{x \to 1}(3x + 1) = 4$.

Thật vậy, để $|(3x+1) - 4| = |3(x-1)| < \varepsilon$ ta chỉ cần chọn $\sigma = \frac{\varepsilon}{3}$. Lúc ấy với mọi x mà $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ thì $|(3x+1) - 4| < \varepsilon$.

Chú ý: Ta có thể chứng minh được hai định nghĩa trên đây của giới hạn hàm số là tương đương, do vậy tuỳ từng trường hợp ta có thể dùng định nghĩa này hay định nghĩa kia.

2.2. Giới hạn một phía

Định nghĩa 9. Ta gọi giới hạn $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ là giới hạn phải của $f(x)$ tại x_0.

Định nghĩa 10. Ta gọi giới hạn $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ là giới hạn trái của $f(x)$ tại x_0.

Định lý 1. Điều kiện cần và đủ để $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ là

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \cdot$$

2.3. Giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại những điểm có giá trị tuyệt đối khá lớn.

Định nghĩa 11. Ta gọi số L là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến ra $+\infty$, nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại số $M > 0$ sao cho ta có $\left|f(x) - L\right| < \varepsilon$, với mọi x thuộc tập xác định thoả mãn $x > M$. Khi đó ta viết $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L.$

Định nghĩa 12. Ta sẽ gọi số L là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến ra $-\infty$, nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại số $M > 0$ sao cho ta có $\left|f(x) - L\right| < \varepsilon$ với mọi x thuộc tập xác định thoả mãn $x < -M$. Ký hiệu $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L.$

Định nghĩa 13. Ta nói hàm $f(x)$ dần tới $+\infty$ khi $x \to x_0$, nếu với mỗi số dương M, $\exists\sigma > 0$ sao cho $f(x) > M$ với mọi x thuộc tập xác định và thoả mãn $0 < |x - x_0| < \sigma$. Khi đó ta viết $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$

Định nghĩa 14. Ta nói hàm $f(x)$ dần tới $-\infty$ khi $x \to x_0$. Nếu với mỗi số dương M, tồn tại số $\sigma > 0$ sao cho $f(x) < -M$ với mọi x thuộc tập xác định thoả mãn bất đẳng thức $0 < |x - x_0| < \sigma.$ Khi đó ta viết $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Chú ý: Đối với các giới hạn vô cực cũng xảy ra những trường hợp giới hạn một phía.

2.4. Các định lý về giới hạn hàm số

Khi nói đến giới hạn của hàm số bao giờ cũng phải nói đến giới hạn trong quá trình nào: $x \to x_0$ hay $x \to \pm\infty$. Từ nay, để khỏi phải lặp lại, ta sẽ dùng cụm từ "quá trình" hay "quá trình nào đó" để chỉ một trong hai quá trình nói trên và viết $\lim f(x)$.

Định lý 2. (*Giới hạn của hàm số hợp*)

Cho hàm số hợp $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$. Nếu trong quá trình nào đó

i) $\lim u(x) = u_0$.

ii) $f(u)$ xác định tại u_0 và $f(u) \to f(u_0)$ khi $u \to u_0$ thì

$$\lim f(u(x)) = f(\lim u(x)) = f(u_0).$$

Định lý 3. (*Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương*)

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là những hàm số có giới hạn trong cùng một quá trình nào đó. Khi đó ta có các kết quả sau đây:

i) $\lim\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

ii) $\lim\left[f(x)\,g(x)\right] = \lim f(x) \lim g(x)$.

iii) $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, nếu $\lim g(x) \neq 0$.

Định lý 4. Nếu $f(x)$ là hàm số sơ cấp, x_0 thuộc miền xác định của nó thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Định lý 5. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số xác định trên $(a,b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$, khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (nếu các giới hạn ở hai vế là tồn tại).

Định lý 6. Cho các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên khoảng $(a,b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in [a,b]$ thoả mãn bất đẳng thức $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Ví dụ 16. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$.

Ta có $-|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$, mà $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}(|x|)=0$, nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

Một số giới hạn cơ bản

Dễ dàng chứng minh được các giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Khi tính giới hạn, ngoài hai giới hạn cơ bản trên từ định nghĩa các hàm cơ bản ta cần chú ý:

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

Từ định lý về giới hạn của hàm hợp ta có:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\ ,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e.$$

Ví dụ 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}=\dfrac{m}{n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(mx)}{mx}\dfrac{nx}{\sin(nx)}=\dfrac{m}{n},(m,n\neq 0).$

Ví dụ 18.

$$\lim_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}\frac{2\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}}\right]^{\frac{2\sin x}{x}}=e^2.$$

2.5. Vô cùng bé, vô cùng lớn

Định nghĩa 15. Cho hàm số $\alpha(x)$ xác định trên khoảng (a,b), $x_0\in[a,b]$. Khi đó :

i) $\alpha(x)$ gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

ii) $\alpha(x)$ gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |\alpha(x)| = +\infty$.

Từ tính chất của giới hạn xét các VCB, VCL khi $x \to x_0$ ta có các tính chất sau đây:

• Tổng hai VCB là một VCB.

• Tích của một VCB và một đại lượng bị chặn là một VCB.

• Tích của hai VCL là một VCL.

• Tổng của một VCL và một đại lượng bị chặn là một VCL.

• Nếu $\alpha(x)$ là một VCB, $\alpha(x) \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là VCL.

• Nếu $\alpha(x)$ là một VCL, $\alpha(x) \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ là VCB.

Định nghĩa 16. Cho $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$, khi đó ta nói:

i) $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$, ký hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ($\alpha(x)$ tiến đến 0 nhanh hơn $\beta(x)$).

ii) $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB cùng cấp nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k,\ k \in \mathbb{R}^*$.

iii) $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ gọi là hai VCB tương đương nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Ký hiệu là $\alpha(x) \sim \beta(x)$ (khi $x \to x_0$).

Ví dụ 19. $\sqrt[3]{x}, x, x^2, \sin x,$ $1 - \cos x$ là các VCB, (khi $x \to 0$).

Ví dụ 20. Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$ nên $x^2 = o(x)$, (khi $x \to 0$).

Ví dụ 21. Vì $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên $\sin x \sim x$, (khi $x \to 0$).

Ví dụ 22. Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$, nên $1-\cos x$ và x^2 là hai VCB cùng cấp và $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, (khi $x\to 0$).

Chú ý: Nếu các VCB $\alpha(x)$, $\alpha^*(x)$, $\beta(x)$, $\beta^*(x)$ thoả mãn $\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$, $\beta(x)\sim\beta^*(x)$ khi $x\to x_0$ thì: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$

Ví dụ 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$ (vì $\sin 2x\sim 2x$, $\sin 3x\sim 3x$ khi $x\to 0$).

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trong khoảng (a,b), $x_0\in(a,b)$. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Định nghĩa 2. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng (a,b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Định nghĩa 3. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$. Hàm số đó được gọi là liên tục trái tại điểm b (liên tục phải tại điểm a) nếu

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)\ \left(\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)\right).$$

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a,b) và liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Định nghĩa 4. Cho hàm $y=f(x)$ xác định trên (a,b), $x_0\in(a,b)$. Nếu tại x_0 hàm $f(x)$ không liên tục thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại x_0 và x_0 là điểm gián đoạn của hàm $f(x)$.

Người ta phân chia các điểm gián đoạn thành hai loại:

a) Gián đoạn loại I: Cho x_0 là điểm gián đoạn của hàm $f(x)$, nếu tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại I.

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq f(x_0)$ thì điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn bỏ được.

b) Gián đoạn loại II: Nếu hàm $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 nhưng không phải là gián đoạn loại I thì ta nói điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn loại II.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x & khi\, x\le 1\\ 3x+3 & khi\, x>1.\end{cases}$$

Ta thấy hàm số trên xác định trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+3)=6.$ Vậy hàm số gián đoạn loại I tại điểm $x_0=1$.

Ví dụ 2. Hàm số Dirichlet $D(x)=\begin{cases} 1 & khi\;\, x\in\mathbb{Q}\\ 0 & khi\;\, x\in I.\end{cases}$

(Trong đó $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỷ, I là tập các số vô tỷ).

Hàm số này gián đoạn loại hai tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$, mọi điểm đều là điểm gián đoạn loại II.

Ví dụ 3. Hàm số $g(x)=\begin{cases} x & khi\;\, x<1\\ 2x-1 & khi\;\, x>1\\ 2 & khi\;\, x=1\end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)\neq g(1)=2$. Vậy $g(x)$ gián đoạn bỏ được tại $x=1$.

2. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM LIÊN TỤC

Định lý 1. Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại điểm x_0 (mẫu số khác 0 tại điểm đó) là những hàm số liên tục tại điểm đó.

Định lý 2. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Định lý 3. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0 và hàm số $g(y)$ liên tục tại điểm $y_0=f(x_0)$ thì hàm số hợp $g\circ f$ liên tục tại điểm x_0.

Định lý 4. Các hàm số sơ cấp liên tục trên miền xác định của nó.

Định lý 5. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Định lý 6. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$ thì với mọi số α nằm giữa A và B luôn tồn tại số $c\in(a,b)$ sao cho $f(c)=\alpha$.

Định lý 7. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại số $c\in(a,b)$ sao cho $f(c)=0$.

§4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP MỘT

1. ĐẠO HÀM

1.1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Cho x_0 số gia Δx sao cho $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Gọi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia của hàm số tương ứng với số gia Δx của đối số.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$. Khi đó ta cũng nói hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Vậy $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nếu chỉ tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ hoặc $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ thì chúng lần lượt gọi là đạo hàm phải hoặc đạo hàm trái của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, ký hiệu là $f'(x_0^+)$ hoặc $f'(x_0^-)$.

Nhận xét:

i) Hàm số có đạo hàm tại một điểm khi và chỉ khi có đạo hàm phải và đạo hàm trái tại điểm đó, đồng thời các đạo hàm đó bằng nhau.

ii) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó.

Thật vậy $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nên $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, ($\alpha(\Delta x)$ là VCB khi $\Delta x \to 0$).

Suy ra $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, $o(\Delta x) = \Delta x.\alpha(\Delta x)$ là VCB bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ tức là $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

Chú ý: Điều ngược lại của nhận xét thứ hai ở trên chưa chắc đúng. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=|x|$, hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng không có đạo hàm tại điểm $x_0=0$.

1.2. Ý nghĩa của đạo hàm

• ***Ý nghĩa hình học:*** Xét đường cong $y=f(x)$, điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ thuộc đường cong này. Trong chương trình toán phổ thông ta đã biết nếu tồn tại $f'(x_0)$ thì phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

• ***Ý nghĩa vật lý:*** Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình biểu diễn quãng đường đi được S theo thời gian t là $S=S(t)$. Xét tại thời điểm t_0 thì $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ là vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ t_0 đến $t_0+\Delta t$.

Vì vậy $S'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ là vận tốc tức thời của chất điểm tại t_0.

1.3. Các định lý về đạo hàm

Định lý 1. Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại x thì tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng có đạo hàm tại x và

1) $\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$.

2) $\left[f(x)g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},\quad g(x)\neq 0.$

Định lý 2. Nếu hàm $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0, còn $z=g(y)$ xác định trong khoảng chứa điểm $y_0=f(x_0)$ có đạo hàm tại $y_0=f(x_0)$ thì hàm hợp $z=g\left[f(x)\right]$ cũng có đạo hàm tại điểm x_0 và ta có $z'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$

(Công thức trên còn có thể viết gọn là $z'_x = z'_y y'_x$).

Định lý 3. Cho hàm $y = f(x)$ liên tục và đơn điệu trong khoảng (a,b). Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in [a,b]$, và $f'(x_0) \neq 0$ thì hàm số ngược $x = g(y)$ của hàm $y = f(x)$ cũng có đạo hàm tại điểm $y_0 = f(x_0)$ và ta có $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

1.4. Các công thức tính đạo hàm

Theo các định lý trong mục 1.2, để tính đạo hàm của một hàm bất kỳ ta chỉ cần biết đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản rồi áp dụng các định lý, sau đây ta nhắc lại các công thức đó.

1) $(C)' = 0$, C là hằng số.

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

3) $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$.

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5) $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

6) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)^{10}$.

Ta có $y' = 10(2x+1)^9(2x+1)' = 20(2x+1)^9$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^x$; $(x > 0)$.

Ta có $y = e^{x\ln x} \Rightarrow y' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = (1+x^2)^{\sin x}$.

Ta có $\ln y = \sin x \ln\left(1+x^2\right)$, lấy đạo hàm hai vế được

$$\frac{y'}{y} = \left(\sin x \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \cos x \ln\left(1+x^2\right) + \sin x \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}$$

$$= \cos x \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}.$$

Vậy $\quad y' = \left(1+x^2\right)^{\sin x}\left(\cos x \ln\left(1+x^2\right) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right).$

2. VI PHÂN CẤP MỘT

2.1. Vi phân của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a,b), có đạo hàm (khả vi) tại điểm $x \in (a,b)$. Theo định nghĩa đạo hàm ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

suy ra $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$. Khi đó ta gọi biểu thức $f'(x)\Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x, ký hiệu là df. Vậy $df = f'(x)\Delta x$.

Đặc biệt, xét hàm $f(x) = x$ ta được $dx = 1\Delta x = \Delta x$. Do đó $df = f'(x)dx$.

Nhận xét: Từ công thức $df = f'(x)dx$ suy ra $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Vậy đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ theo đối số x bằng tỷ số giữa vi phân của hàm số đối với đối số và vi phân của đối số.

Trong trường hợp hàm $y = f(u)$ ở đó $u = u(x)$ ta có

$$f'(x) = f'(u).u'(x) \Rightarrow f'(u) = \frac{f'(x)}{u'(x)}.$$

Thay $f'(x) = \frac{df}{dx}$, $u'(x) = \frac{du}{dx}$ ta được $f'(u) = \frac{df}{du}$.

Tính chất không phụ thuộc vào đối số của vi phân được gọi là tính bất biến của vi phân.

2.2. Áp dụng vi phân để tính gần đúng

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trong khoảng (a,b). Xét điểm $x_0\in(a,b)$, nếu hàm số khả vi tại điểm x_0 ta có

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

khi $\Delta x\to 0$ thì $f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$. Với Δx đủ nhỏ ta có

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\cdot$$

Đây là công thức tính gần đúng giá trị của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 với độ chính xác $o(\Delta x)$.

Ví dụ 4. Tính gần đúng $\sqrt[3]{7}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$, ta có $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Ta có $\sqrt[3]{7}=2\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{8}}$, với $\Delta x=-\dfrac{1}{8}$, $x_0=1$ thì $\sqrt[3]{7}\approx 2\left(f(1)+f'(1)\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right)=2\left(\sqrt[3]{1}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right)=\dfrac{23}{12}$.

2.3. Một số tính chất của vi phân

Định lý 4. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số khả vi tại x. Khi đó các hàm số $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x)\neq 0)$ cũng khả vi tại x, và ta có

1) $d\left[f(x)\pm g(x)\right]=df(x)\pm dg(x)$.

2) $d\left[f(x)g(x)\right]=g(x)df(x)+f(x)dg(x)$.

3) $d\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$.

2.4. Các định lý về giá trị trung bình

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a,b). Điểm $x_0 \in (a,b)$ gọi là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng (a,b) nếu $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ thì $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$, (tương ứng $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \ge 0$).

Định lý 5. *(Fermat)* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 và tại điểm đó có đạo hàm thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý Fermat thường được gọi là *điệu kiện cần* để có cực trị.

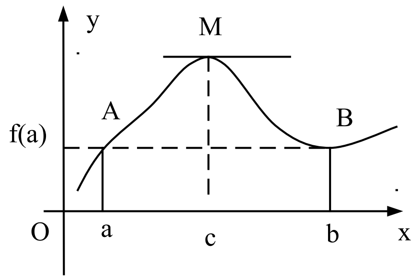
Ta sẽ phát biểu tiếp định lý về giá trị trung bình.

Định lý 6. *(Rolle)* Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b) và $f(a) = f(b)$.

Khi đó tồn tại số $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Ý nghĩa hình học

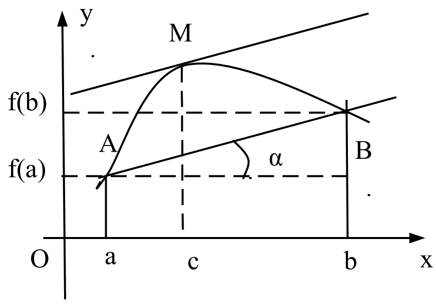
Trên cung liền $\overset{\frown}{AB}$, ở đó $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ luôn tồn tại điểm $M(c, f(c))$ mà tiếp tuyến tại điểm M song song với trục Ox.



Định lý 7. *(Lagrange)* Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b). Khi đó tồn tại số $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ý nghĩa hình học

Trên cung liền $\overset{\frown}{AB}$ ở đó $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ luôn tồn tại điểm $M(c; f(c))$ mà tiếp tuyến tại



điểm M song song với AB (hệ số góc của tiếp tuyến và hệ số góc của đường thẳng AB là bằng nhau).

Định lý 8. (*Cauchy*) Cho các hàm số $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và $g(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$. Khi đó tồn tại số $c \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Chú ý: Nếu $g(x) = x$ thì định lý Cauchy trở thành định lý Lagrange.

Nếu bổ sung giả thiết $f(a) = f(b)$ thì định lý Lagrange trở thành định lý Rolle.

§5. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

1. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Cho hàm số $y = f(x)$. Nếu $f(x)$ có đạo hàm với $\forall x \in (a,b)$ thì $f'(x)$ cũng là một hàm số trên khoảng (a,b). Khi đó, nếu $f'(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b) thì ta gọi $(f'(x))'$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$, và ký hiệu là $f''(x)$.

Một cách tổng quát đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$ được định nghĩa là đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ của hàm số $f(x)$ và ký hiệu là $f^{(n)}(x)$.

Vậy $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$ (quy ước $f^{(0)}(x) = f(x)$).

Người ta chứng minh được các công thức sau:

1) $\left[f(x) + g(x)\right]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$.

2) $\left[f(x)g(x)\right]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x),$ (công thức Leibniz).

Ghi nhớ một số kết quả sau:

1) $f(x)=\sin x$ thì $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right),\ n\in\mathbb{N}.$

2) $f(x)=\cos x$ thì $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right),\ n\in\mathbb{N}.$

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ thì $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}},\ \forall x\neq-1.$

2. VI PHÂN CẤP CAO

Tương tự đạo hàm cấp cao, ta cũng định nghĩa vi phân cấp cao.

Cho hàm số $y=f(x)$, vi phân của nó df gọi là vi phân cấp một. Vi phân cấp hai của hàm số $f(x)$ là vi phân của vi phân cấp một. Ký hiệu là d^2f, vậy $d^2f=d(df)$.

Tổng quát, vi phân cấp n của hàm số $f(x)$, ký hiệu là d^nf là vi phân của vi phân cấp $n-1$, vậy $d^nf=d\left(d^{n-1}f\right)$.

Chú ý: Từ định nghĩa ta có $d^2f=d(df)=d\left(f'dx\right)=f''dx^2$.

Tương tự $d^3f=f'''dx^3$.

Tổng quát $d^nf=f^{(n)}dx^n$, (giả thiết $f(x)$ là hàm khả vi cấp n).

Từ kết quả trên ta có $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^nf}{dx^n}$.

Vi phân cấp cao không có dạng bất biến như vi phân cấp một, bởi vậy khi lấy vi phân cấp cao cần chú ý lấy vi phân theo biến nào, biến độc lập hay biến phụ thuộc.

Ví dụ. Xét hàm số $f(x)=x^2$, khi đó $d^2f=2dx^2$. Đặt $x=t^2$ thì

$$f=t^4\Rightarrow d^2f=12t^2dt^2\cdot$$

Mặt khác, theo trên thì $d^2 f = 2dx^2$, vì $x = t^2$ nên

$$dx = 2tdt \Rightarrow d^2 f = 2(2tdt)^2 = 8t^2 dt^2 \neq 12t^2 dt^2.$$

§6. CÔNG THỨC TAYLOR
VÀ QUY TẮC L'HOSPITAL

1. CÔNG THỨC TAYLOR

1.1. Định lý 1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, có đạo hàm đến cấp $n+1$ trên khoảng (a,b), $x_0\in(a,b)$. Khi đó với $\forall x\in[a,b]$, ta có

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Trong đó c là một số nằm giữa x_0 và x.

Ta gọi $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ là đa thức Taylor bậc n của $f(x)$ tại lân cận của điểm x_0, và gọi $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ là phần dư của công thức Taylor.

Khi $x_0=0$ công thức Taylor gọi là công thức Maclaurin

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

trong đó c là một số nằm giữa 0 và x.

Chú ý: Từ công thức Taylor ta có thể xấp xỉ giá trị $f(x)$ khi x khá gần x_0 bởi đa thức Taylor $p_n(x)$ với sai số $|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$, trong đó $M>0$ thoả mãn $M\ge\left|f^{(n+1)}(x)\right|,\ x\in[a,b]$.

1.2. Khai triển Maclaurin của một số hàm cơ bản

1) Hàm $f(x)=e^x$.

Ta có $f^{(k)}(x) = e^x, \forall k$. Do đó $f^{(k)}(0) = 1$, vậy

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Đặc biệt với $x = 1$, ta có

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Công thức này giúp ta tính gần đúng số e với sai số ε không vượt quá $\frac{e}{(n+1)!}$.

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x, \quad 0 < \theta < 1$.

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x, \quad 0 < \theta < 1$.

4) $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}x^k$$
$$+ \frac{m(m-1)...(m-k)}{(k+1)!}x^{k+1}(1+\theta x)^{m-k-1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

1.3. Ứng dụng của công thức Taylor

Ta đưa ra một số ví dụ về việc dùng công thức Taylor để giải một số bài toán.

Ví dụ 1. Lập công thức tính gần đúng $\sin x$ khi $|x| \le \frac{\pi}{4}$, với độ chính xác $0,0001$.

Từ khai triển của hàm $\sin x$ (Mục 1.2), ta có

$$|R_{2n}| = \left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x\right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Do đó ta tìm n thoả mãn $\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \le 0,0001$. Dễ thấy với $n \ge 3$ thì điều kiện trên được thoả mãn. Vậy $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, là công thức cần tìm.

Ví dụ 2. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x^2 - x\sin x - e^{-x^2}}{x^2 \sin^2 x}$.

Ta có: $\cos x^2 = 1 - \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^8}{4!} - \ldots$

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots$$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Do đó $\cos x^2 - x\sin x - e^{-x^2} = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}\right)x^4 + O\left(x^5\right)$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x^2 - x\sin x - e^{-x^2}}{x^2 \sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{5}{6}x^4 + o\left(x^5\right)}{x^2 \sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{5}{6} + \dfrac{o\left(x^5\right)}{x^4}}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} = -\dfrac{5}{6}$.

2. QUY TẮC L'HOSPITAL

Định lý 2. Giả sử các hàm số $f(x)$, $g(x)$ thoả mãn các điều kiện:

i) Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$.

ii) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (hữu hạn hoặc vô hạn).

Khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Ví dụ 3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x - 1}{\sin 3x}$.

Giới hạn trên có dạng $\dfrac{0}{0}$, sử dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x - 1}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(2^x - 1\right)'}{\left(\sin 3x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x \ln 2}{3\cos 3x} = \frac{\ln 2}{3}.$$

Ví dụ 4. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x}$.

Giới hạn có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x\right)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Chú ý:

i) Trong trường hợp không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ta không có kết luận gì về giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ví dụ 5. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Giới hạn trên có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$. Ta có $\dfrac{\left(x+\sin x\right)'}{\left(x\right)'} = 1+\cos x$ không tồn tại giới hạn khi $x\to \infty$.

Ta tìm giới hạn như sau: $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$.

ii) Có thể linh hoạt sử dụng công thức L'Hospital khi gặp một số dạng vô định khác.

Ví dụ 6. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$.

Giới hạn này có dạng $0.\infty$, ta chuyển dạng vô định này thành dạng vô định có trong định lý để sử dụng được quy tắc L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Ví dụ 7. Tìm giới hạn $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Ta có $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)} = e^0 = 1$ ($\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$ theo ví dụ 6).

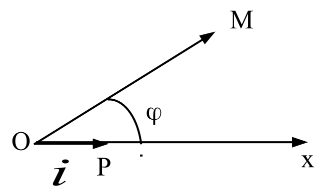
§7. KHẢO SÁT HÀM SỐ TRONG TOẠ ĐỘ CỰC

1. HỆ TOẠ ĐỘ CỰC

Trong mặt phẳng chọn điểm O cố định, gọi là cực. Một vectơ đơn vị $i = OP$. Tia chứa vectơ i gọi là trục cực. Hệ toạ độ xác định bởi cực và trục cực gọi là hệ toạ độ cực.

Toạ độ của điểm M trong hệ toạ độ cực

Rõ ràng vị trí của điểm M trong mặt phẳng được xác định bởi OM, tức là xác định bởi $\varphi = (i, OM)$, và $r = |OM|$; φ gọi là góc cực, r gọi là bán kính cực.



φ là góc định hướng lấy giá trị dương nếu chiều quay OP đến trùng OM ngược chiều kim đồng hồ, lấy giá trị âm theo chiều ngược lại.

Nếu $0 \le \varphi < 2\pi,\ r > 0$ thì cặp số có thứ tự $(r;\varphi)$ gọi là toạ độ cực của điểm M trong mặt phẳng.

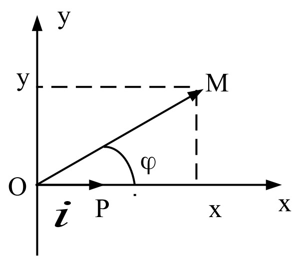
Liên hệ giữa toạ độ Đề-các và toạ độ cực của cùng một điểm

Xét hệ toạ độ cực có cực O, trục cực Ox và hệ toạ độ Đề-các Oxy.

Giả sử toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ Đề-các và toạ độ cực lần lượt là $(x;y)$ và $(r;\varphi)$.

Ta có:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi < 2\pi;\ r \ge 0.$$



Ngược lại: $r^2 = x^2 + y^2, \tan\varphi = \dfrac{y}{x}.$

Chú ý: Có hai góc φ thoả mãn $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ vì $0 \le \varphi < 2\pi$, ta chọn góc φ sao cho $sin\varphi$ cùng dấu với y vì $y = r\sin\varphi$.

Ví dụ 1. Cho $M\left(-\sqrt{3};1\right)$ (toạ độ Đề-các).

Ta có

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2,\ \tan\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{5\pi}{6}\\ \varphi=\dfrac{11\pi}{6}\end{array}\right.,$$

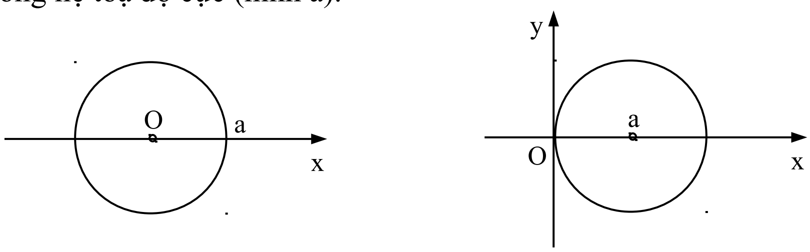
ta chỉ lấy $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$ vì $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)>0$.

Vậy toạ độ cực của điểm M là $\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG CONG TRONG HỆ TOẠ ĐỘ CỰC

Cho hàm số $r=f\left(\varphi\right)\left(1\right)$, tập các điểm $\left(r;\varphi\right)$ thoả mãn phương trình $\left(1\right)$ tạo thành đường cong $\left(C\right)$ gọi là đồ thị của hàm số đã cho. Phương trình $\left(1\right)$ gọi là phương trình của đường cong (C) trong hệ toạ độ cực.

Ví dụ 2. Phương trình $r=a, a>0$ là phương trình của đường tròn tâm O bán kính a trong hệ toạ độ cực (hình a).



a) b)

Ví dụ 3. Phương trình $r=2a\cos\varphi, a>0$ là phương trình đường tròn tâm $\left(a;0\right)$, bán kính a trong hệ toạ độ cực (hình b).

3. KHẢO SÁT HÀM SỐ TRONG TOẠ ĐỘ CỰC

Để khảo sát một hàm số nào đó trong hệ toạ độ cực, ta tiến hành các bước tương tự như đối với hàm số $y = f(x)$ trong hệ toạ độ Đề-các. Cần lưu ý các điểm sau đây:

- Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm chẵn thì đồ thị nhận trục cực làm trục đối xứng.

- Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm số lẻ thì đồ thị nhận đường thẳng vuông góc với trục cực tại cực làm trục đối xứng.

- Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì chỉ khảo sát hàm số trong một chu kỳ $[0, T]$ hoặc $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, sau đó quay phần đồ thị đó quanh điểm O mỗi lần một góc T để nhận được toàn bộ đồ thị.

- Nếu $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi) = \infty$ thì đồ thị có tiệm cận tia $\varphi = \varphi_0$.

- Nếu $r'(\varphi) > 0$ $(r'(\varphi) < 0)$ thì r tăng (giảm) do đó đồ thị càng ngày càng đi ra xa (đến gần) gốc cực.

Xét điểm M trên đường cong, gọi ω là góc giữa OM và tiếp tuyến với đường cong tại M thì $\tan\omega = \frac{r}{r'}$ (r' là đạo hàm của r theo φ).

Ví dụ 4. Khảo sát và vẽ đường cong có phương trình trong hệ toạ độ cực là $r = a\sin 3\varphi,\ a > 0$.

Hàm đã cho xác định với mọi φ, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$.

Để vẽ đồ thị trên một chu kỳ $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ ta chỉ cần vẽ trên $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ rồi lấy đối xứng.

Vì $|r| \le a$ nên đồ thị không có tiệm cận:

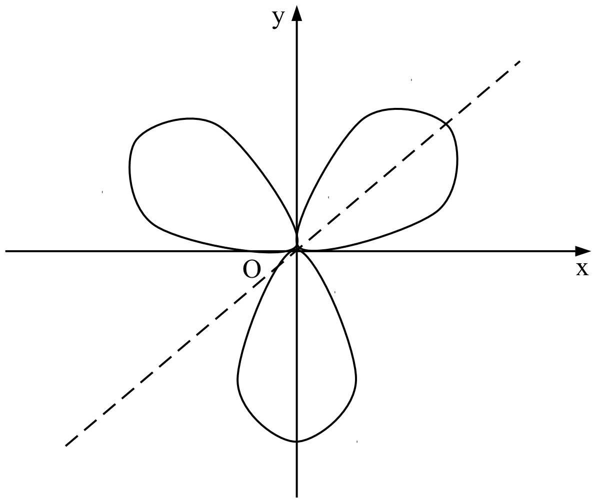
$$r' = 3a\cos 3\varphi \text{ suy ra } r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Bảng biến thiên.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$

r'	$3a$	$+$	0	$-$	$-3a$
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0

Đồ thị được gọi là đường "hoa hồng ba cánh".



BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Tìm hàm số ngược của các hàm số

a) $y = 2x + 3$; b) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$, $x \neq -1$.

2. Viết các hàm số sau đây dưới dạng hàm số hợp

a) $y = (3x^2 - 7x + 1)^3$; b) $y = 2^{\tan\frac{1}{x}}$;

c) $y = \ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$; d) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1 + x}}$.

3. Chứng minh các dãy số sau có giới hạn bằng 0

a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; b) $a_n = \dfrac{100}{n^2}$.

4. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{1-n^3}\right)$.

5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)$.

6. Dùng định nghĩa giới hạn chứng minh rằng

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)=2$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

7. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

8. Chứng minh các VCB sau tương đương (khi $x\to 0$)

a) $\alpha=x\sin^2 x$ và $\beta=x^2\sin x$; b) $\alpha=\sqrt{1+x\sin x}-1$ và $\beta=\dfrac{1}{2}x^2$;

c) $\alpha=a^x-1$ và $\beta=x\ln a$; d) $\alpha=e^{2x}-e^x$ và $\beta=\sin 2x-\sin x$.

9. So sánh bậc của các VCB sau (khi $x\to 0$)

a) $\alpha=1-\cos^3 x$ và $\beta=x\sin x$; b) $\alpha=\tan x-\sin x$ và $\beta=1-\cos x$.

10. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

11. Tìm các giới hạn một phía sau đây

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

12. Tìm điểm gián đoạn của các hàm số sau, cho biết đó là gián đoạn loại gì

a) $y=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$; b) $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

13. Xác định *f(0)* để hàm số liên tục tại $x = 0$

a) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$; b) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

14. a) Tìm *a*, *b* để hàm số sau liên tục với mọi *x*

$$y=\begin{cases}-2\sin x & \text{nÕu } x\le -\pi/2\\ a\sin x+b & \text{nÕu } -\pi/2<x<\pi/2\\ \cos x & \text{nÕu } x\ge \pi/2\end{cases}$$

b) Tìm *a* để hàm số sau liên tục với mọi *x*

$$y=\begin{cases}x+1 & \text{nÕu } x\le 1\\ 3-ax^2 & \text{nÕu } x>1\end{cases}$$

15. Tính các đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=\log_2\left(x^2-\sin x\right)$; b) $y=e^{\cos(\tan x)}$.

c) $y=e^x\ln(\sin x)$; d) $y=x^{\frac{1}{x}}$.

16. Tìm vi phân cấp một, cấp hai của các hàm số sau

a) $y=x(\ln x-1)$; b) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$.

17. Tìm đạo hàm cấp *n* của các hàm số sau

a) $y = xe^x$;   b) $y = e^x \sin x$;

c) $y = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$;   d) $y = \dfrac{x^2+2x-4}{x^2+2x-3}$.

18. a) Tính số e với độ chính xác 10^{-5}.

b) Tính giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{29}$ với độ chính xác đến 10^{-3}.

19. Khai triển Maclaurin của hàm

a) $f(x) = e^{x^2}$;   b) $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$.

20. Dùng quy tắc L'Hospital để tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^2}$;   b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln\left[\cos(\pi \cdot 2^x)\right]}$;   d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan^3 x - 3\tan x}{cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$;

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\arctan x^2 - \pi}$;   f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)}$.

21. Tìm giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x-\pi}$;   b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$;   d) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4)\tan\dfrac{\pi x}{4}$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 2

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^4-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^4}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^4+\left(\dfrac{(n-1)}{n}\right)^4}=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}=3$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n-1)!}{(n+2)!-(n-1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!n(n+1)(n+2)+(n-1)!}{(n-1)!n(n+1)(n+2)-(n-1)!}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(n+2)+1}{n(n+1)(n+2)-1}=...=1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{1-n^3})=...=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+n^2+n^2}=0$

5. a) $\lim\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=...=\lim\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$.

b) $S_n=\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+...\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{1}{2.1}-\dfrac{3}{4.2}+\dfrac{2}{4.2}+\dfrac{1}{4(n+1)}-\dfrac{3}{4(n+1)}+\dfrac{1}{4(n+2)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{S}_n=\dfrac{3}{8}$.

7. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=...=\lim\limits_{x\to 0}(6+11x+6x^2)=6.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}...=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-1}{t^5-1}=...=\dfrac{3}{5}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) 2

8. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\sin^2 x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x.\sin x}-1}{\dfrac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x.\sin x}-1)(\sqrt{1+x.\sin x}+1)}{x^2(\sqrt{1+x.\sin x}+1)}=...=$

$$=2.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{2}=1$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=1$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^x-1)}{2\cos x\sin x-\sin x}=...=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=1$.

9.

a) Hai VCB cùng bậc vì :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x}=3\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=...=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{3}{2}.$$

b) VCB $\tan x-\sin x$ có cấp cao hơn VCB $1-\cos x$ vì

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{1-\cos x}=...=\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

10. a) e^3 b) 1 c) 1 d) e^{-2}

11. a) 1 b) 0

12. a) Điểm $x=1$ là điểm gián đoạn loại 1.

b) Điểm $x=0$ là điểm gián đoạn loại 2 .

13. a) $f(0)=0$ thì hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

b) $f(0)=2$ thì hàm số liên tục tại $x = 0$.

14. a) $a=-1, b=1$. b) $a = 1$.

17. a) $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = C_n^0 x (e^x)^{(n)} + C_n^1 x' (e^x)^{(n-1)} + 0 = xe^x + ne^x$.

b) $y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{4} + 1\right) x$.

c) $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{a-b}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-b)^{n+1}}\right]$.

d) $y = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right) \Rightarrow \mathrm{y}^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4}[(\mathrm{x}+3)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}]$.

19. a) $f(x) = e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!} + \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} + ...$

b) $f(x) = \frac{1}{3x-1} = -\frac{1}{1-3x} = -(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + ... + (3x)^n + ...)$

c) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n + \frac{1}{2^n}]x^n$.

20. a) Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \arctan x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\arctan x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)} = 0 .$$

b) Giới hạn có dạng $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(\sin 2x)'}{\sin 2x}}{\frac{(\sin x)'}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{2\sin x\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = 1$$

c) Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))} = ... = -2\lim_{x\to 1}\cos^2(\pi 2^x) = -2$.

d) Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(\tan^3 x - 3\tan x)'}{(\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right))'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3\tan^2 x\frac{1}{\cos^2 x} - 3\frac{1}{\cos^2 x}}{-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = -24$$

e) Giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\arctan x^2-\pi}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{2\arctan t-\pi}=...$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{t}}\frac{1}{-t^2}}{\frac{2}{t^2+1}}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}=\frac{-1}{2}$$

f) Giới hạn có dạng $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}=...=-2\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-2.$$

21. a) $y=(\tan x)^{2x-\pi}\Rightarrow \ln y=(2x-\pi)\ln(\tan x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x-\pi)\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\ln\tan x)'}{(\frac{1}{2x-\pi})'}=...=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2(2x-\pi)2}{-\sin x}=0\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y=1.$$

b) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=...=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$

c) $y=\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}\Rightarrow \lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\tan\frac{\pi x}{2a}\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)=...=\frac{2}{\pi}\Rightarrow \lim_{x\to a}y=e^{\frac{2}{\pi}}.$

d) $\lim_{x\to2}(x^2-4)\tan\frac{\pi x}{4}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\cos\frac{\pi x}{4}}\lim_{x\to2}(x+2)\sin\frac{\pi x}{4}=...$

$$=4\lim_{x\to2}\frac{1}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi x}{4}}=-\frac{16}{\pi}.$$