

Câu 1: Tính $I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$.

Câu 2: Tính tích phân $\iiint_V x dV$, trong đó V là miền được giới hạn bởi

các mặt phẳng $z = 0, z = x + y + 5$ và các mặt trụ $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9$.

Câu 3: Tính diện tích miền S là giao của hai đường Cardioids:

$$r = 1 + \cos \varphi, \quad r = 1 - \cos \varphi.$$

Câu 4: Cho X, A, B là các tập hợp với $X \subset (A \cup B)$. Chứng minh

$$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \emptyset.$$

Câu 5: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x - 4}{x - 5}$. Ánh xạ f có phải là đơn ánh không? Có phải là toàn ánh không? Vì sao?

Câu 6: Biểu diễn số phức z dưới dạng lượng giác, biết rằng:

$$z^4 = \frac{1 + \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Câu 7: Cho $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6$ và $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $f(A)$.

Câu 8:

$$\overbrace{3x + 4y + 2z}^{\text{Phần 1}} + \overbrace{2x - 5y + 7z}^{\text{Phần 2}} = \overbrace{5x - y + 9z}^{\text{Phần 3}} \quad (1)$$

Câu 9: (1 điểm): Cho x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3 - 2022t + 4 = 0$. Tính

$$A = \begin{vmatrix} xy & yz & zx \\ yz & zx & xy \\ zx & xy & yz \end{vmatrix}.$$

Câu 10: Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$a_{ij} = (i + 2j)^3 + 2(2i + j^2)^2 \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Chứng minh A không là ma trận khả nghịch với $n > 4$.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho hệ phương trình sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} x + y + (1 - m)z &= m + 2 \\ (1 + m)x - y + 2z &= 0 \\ 2x - my + 3z &= m + 2 \end{cases}$$

Câu 12: Với tích vô hướng chính tắc, tìm hình chiếu của $\vec{u} = (1; 2; -3; 4)$ lên $\vec{v} = (5; -4; 2; 2)$.

Câu 13: Trong các ánh xạ sau, có bao nhiêu song ánh?

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2 - 3x + 3$
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^5 + x^3 - 1$
- $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{3x - 1}{x - 2}$
- $f : [1; +\infty) \longrightarrow [-5; +\infty)$
 $x \longmapsto x^2 - 2x - 4$

Câu 14: Cho các ma trận cấp 2020 sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2020 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2019 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2018 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận X thỏa mãn $AX = B$. Tìm các dạng ma trận X thỏa mãn.

Câu 15: Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ có $a_{ij} = i^2 + j^3 \forall i, j = \overline{1, n}$ ($n \geq 5$).
Tìm $\text{rank}(A)$.