

# **XSTK**

**Xác Suất Thống Kê**

Võ Chí Công

# Table of contents

Lời nói đầu	3
Ký hiệu	5
<b>I Xác suất</b>	<b>6</b>
<b>1 Xác suất</b>	<b>7</b>
1.1 Sự kiện . . . . .	7
1.2 Xác suất . . . . .	7
1.3 Tham số . . . . .	8
1.4 Phụ thuộc . . . . .	9
1.5 Đặc trưng . . . . .	10
1.6 Tích suất . . . . .	11
<b>2 Phân phối</b>	<b>12</b>
2.1 Phân phối Bernoulli . . . . .	12
2.2 Phân phối nhị thức . . . . .	12
2.3 Phân phối Poisson . . . . .	13
2.4 Phân phối hình học . . . . .	13
2.5 Phân phối liên tục . . . . .	13
2.6 Phân phối đều . . . . .	13
2.7 Phân phối mũ . . . . .	14
2.8 Phân phối chuẩn . . . . .	14
2.9 Phân phối $\chi^2$ . . . . .	15
2.10 Phân phối Student . . . . .	15
2.11 Phân phối Beta . . . . .	15
2.12 Phân phối Gamma . . . . .	16
<b>3 Hội tụ</b>	<b>17</b>
3.1 Hội tụ xác suất . . . . .	17
3.2 Độ mạnh . . . . .	18
3.3 Tổng và tích . . . . .	18
3.4 Slutsky . . . . .	18

3.5	Ảnh xạ liên tục . . . . .	19
3.6	Đại đa số . . . . .	19
3.7	Hội tụ trung tâm . . . . .	19
3.8	Bất đẳng thức Hoeffding . . . . .	19
3.9	Phương pháp Delta . . . . .	20

## **II Thống kê 21**

### **4 Thống kê 22**

4.1	Mô hình . . . . .	22
4.2	Ước lượng . . . . .	22
4.3	Sai số . . . . .	22
4.4	Khoảng tin cậy . . . . .	23
4.5	Định lý cơ bản . . . . .	23

### **5 Ước lượng 25**

5.1	Tổng biến động . . . . .	25
5.1.1	Khoảng cách . . . . .	25
5.2	Phân kỳ KL . . . . .	26
5.2.1	Phân kỳ KL . . . . .	26
5.2.2	Đặc điểm . . . . .	26
5.3	Hợp lý cực đại . . . . .	26
5.4	Mix model . . . . .	27
5.4.1	Giải thuật EM . . . . .	27
5.5	Chuẩn tính của MLE . . . . .	27
5.6	M-estimation . . . . .	28
5.7	Method of moments . . . . .	29
5.8	Biến đổi tham số . . . . .	29

### **6 Kiểm định 30**

6.1	Giả thuyết . . . . .	30
6.1.1	Kiểm định . . . . .	30
6.1.2	Mức độ lỗi . . . . .	31
6.1.3	p-value . . . . .	31
6.1.4	Khoảng tin cậy . . . . .	32
6.2	Kiểm định tham số . . . . .	32
6.2.1	Wald Test . . . . .	32
6.2.2	Định lý Cochran . . . . .	33
6.2.3	Student's T test . . . . .	33
6.2.4	Two-sample T-test . . . . .	34
6.2.5	Kiểm định tỷ lệ hợp lý . . . . .	34

6.2.6	Định lý Wilks . . . . .	35
6.2.7	Kiểm định nhiều lần . . . . .	35
6.3	Kiểm định mô hình . . . . .	35
6.3.1	Kiểm định $\chi^2$ . . . . .	35
6.3.2	Kiểm định KS . . . . .	36
6.3.3	Kiểm định KL . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Bayesian</b>	<b>38</b>
7.1	Phương pháp . . . . .	38
7.2	Loại prior . . . . .	38
7.3	Jeffreys prior . . . . .	39
7.4	Bayesian estimation . . . . .	40
<b>Tham khảo</b>		<b>41</b>
	Giáo trình . . . . .	41
	MITx 18.6501x . . . . .	41
	Quy định . . . . .	41
	Unit 1 . . . . .	42
	Unit 2 . . . . .	42
	Unit 3 . . . . .	42
	Unit 4 . . . . .	43

# Lời nói đầu

Xác suất thống kê là nền tảng giúp ích cho việc phân tích dữ liệu, tổ chức thực hành thí nghiệm, chạy các mô hình giả lập, giải các bài toán tìm nghiệm tối ưu, nghiên cứu và ứng dụng học máy.

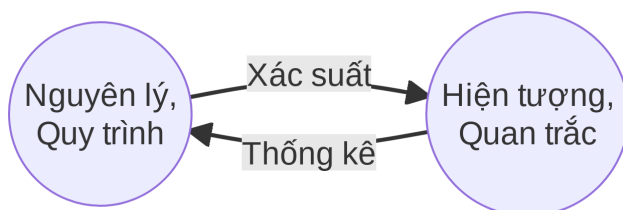
Môn “xác suất” tôi đã học những kiến thức cơ bản vài lần, tính ra là ở cấp 3, trong đại học, và gần đây là học trực tuyến. Môn “thống kê” tôi chưa học được cho ra bài bản lần nào, mấy tháng đầu năm 2022 có thử sức học trực tuyến nhưng đầu tư thời gian không đủ nên thi rất thảm hại.

Lần này nhất quyết học lại môn thống kê một cách nghiêm túc hơn, tôi tóm tắt lại kiến thức xác suất thống kê bằng tiếng Việt, mặc dù tài liệu học hầu hết là tiếng Anh, tiếng Nhật. Hy vọng tiếng mẹ đẻ sẽ giúp tôi hiểu rõ hơn các vấn đề, và trau dồi vốn từ vựng để chia sẻ kiến thức với các đồng nghiệp và bạn bè người Việt.

Động cơ của việc học xác suất thống kê của tôi là để hiểu rõ hơn các lý thuyết căn bản trong ngành học máy và trí tuệ nhân tạo và áp dụng vào thực tiễn một cách đúng đắn, an toàn và công bằng hơn.

Mục tiêu cụ thể trước mắt tôi đặt ra là học hiểu và lấy được chứng chỉ hoàn thành khoá học Fundamentals of Statistics của Philippe Rigollet (2022), giáo sư đại học MIT dạy trên nền tảng trực tuyến edX. Tài liệu tham khảo là quyển “All of Statistics” của Wasserman (2004), cũng chính là tài liệu tham khảo của khoá học nêu trên.

Môn xác suất nghiên cứu cách suy luận ra các đặc tính của tập dữ liệu sẽ được tạo ra từ một nguyên lý, quy trình sản sinh dữ liệu. Ngược lại, môn thống kê nghiên cứu cách dự đoán đặc tính của một quy trình sản sinh dữ liệu từ tập dữ liệu về hiện tượng đã phát sinh và được quan sát. H [0.1](#) minh hoạ quan hệ giữa “xác suất” và “thống kê”.



Hình 0.1: Xác suất và thống kê.

Phân tích, khai thác dữ liệu, học máy và khoa học dữ liệu là những tên gọi khác của thống kê, tùy theo bối cảnh và trào lưu. Một số ứng dụng cụ thể của thống kê là tính toán hồi quy, mật độ, phân loại và giả lập.

Tài liệu này không đi sâu vào các chứng minh chi tiết, nhưng sẽ cố gắng ghi rõ các công thức và định nghĩa. Thuật ngữ chuyên môn trong tài liệu này chắc chắn có nhiều chỗ không chuẩn chỉnh do vốn tiếng Việt và kiến thức hạn chế của tác giả. Xin vui lòng góp ý tại [GitHub issues](#).

Tài liệu này được viết bằng các công cụ là [Quarto](#) và [VSCode](#). Truy cập trực tuyến tại [xstk](#) .

# Ký hiệu

Ký hiệu	Ý nghĩa
$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực
$\mathbb{R}_+$	Tập hợp số thực dương
$f(\alpha) \propto g(\alpha)$	$f/g$ không phụ thuộc $\alpha$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	phân phối chuẩn tâm $\mu$ , lệch $ \sigma $

# **Phần I**

## **Xác suất**



# 1 Xác suất

## 1.1 Sự kiện

**Không gian**  $\Omega$  là tập hợp chứa tất cả những **hiện tượng**  $\omega$  có thể xảy ra từ một **thí nghiệm**. Các tập con của  $\Omega$  là các **sự kiện**.

Ví dụ xem xét thí nghiệm tung một đồng xu đúng hai lần, quan sát đồng xu rơi xuống nằm ngửa ( $H$ ) hay sấp ( $T$ ), ta có  $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$  bao gồm 4 kết quả có thể xảy ra. Sự kiện lần tung đầu tiên ra mặt ngửa của đồng xu là tập hợp  $\{HH, HT\}$ .

Cho một sự kiện  $A \subseteq \Omega$ , ta nói  $A$  **xảy ra**, hoặc  $A$  là **đúng**, nếu có một hiện tượng  $\omega \in A$  **xảy ra**. Sự kiện **ngược lại** với  $A$  là  $A^c := \Omega - A := \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ , tức là “không xảy ra  $A$ ”. Theo định nghĩa, rõ ràng  $\Omega$  luôn luôn đúng, còn sự kiện rỗng  $\emptyset \equiv \Omega^c$  luôn luôn sai. Cho thêm sự kiện  $B$ , ta có  $A \cup B$  là sự kiện “ $A$  **hoặc**  $B$  ít nhất một việc xảy ra”, còn  $AB := A \cap B$  là sự kiện “ $A$  **và**  $B$  đồng thời xảy ra”.

Chuỗi sự kiện  $A_1, A_2, \dots$  được gọi là **phân ly** nếu  $A_i A_j \equiv \emptyset$  với mọi  $i \neq j$ . Khi đó nếu  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \equiv C$  thì ta nói  $A_1, A_2, \dots$  là một cách **phân hoạch** sự kiện  $C$ .

## 1.2 Xác suất

Nếu một xạ ảnh  $\mathbb{P}$  từ không gian các sự kiện  $A \subseteq \Omega$  lên tập hợp số thực  $\mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện:

1.  $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A$
2.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Nếu chuỗi  $A_1, A_2, \dots$  phân hoạch  $C$  thì  $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots = \mathbb{P}(C)$

thì ta gọi  $\mathbb{P}$  là một **phân phối xác suất** hoặc **độ đo xác suất**.

Có hai cách cắt nghĩa khái niệm xác suất là tần suất và niềm tin. Theo cách hiểu tần suất thì  $\mathbb{P}(A)$  chính là tỷ lệ số lần sự kiện  $A$  xảy ra nếu ta thực hiện thí nghiệm vô số lần. Còn theo cách hiểu niềm tin thì  $\mathbb{P}(A)$  là thước đo mức độ mà một quan sát viên tin tưởng rằng hiện tượng  $A$  sẽ xảy ra.

## 1.3 Tham số

**Định nghĩa 1.1** (Biến ngẫu nhiên, random variable). là một quy tắc ánh xạ  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gán cho mỗi hiện tượng  $\omega$  trong không gian  $\Omega$  một số thực  $X(\omega)$ .

**Định nghĩa 1.2** (Hàm phân phối tích lũy, cumulative distribution function). là hàm tăng đơn điệu và liên tục bên phải  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,  $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$  với biến  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Định nghĩa 1.3** (Phân vị). Biến  $X$  tuân theo phân phối tích lũy  $F$  có phân vị mức  $1 - \alpha$  là  $q_\alpha := F^{-1}(1 - \alpha)$ .

**Định nghĩa 1.4** (Quartile, median, mode). Ta gọi  $q_{3/4}, q_{1/2}, q_{1/4}$  là tứ phân vị đầu tiên (first quartile), trung vị (median), và tứ phân vị thứ ba. Gọi mode là giá trị biến số có xác suất cao nhất.

**Định nghĩa 1.5** (Hàm khối xác suất, probability mass function). Với biến rời rạc  $X : \Omega \rightarrow D$ ,  $D = \{x_1, x_2, \dots\}$  đếm được, thì ta có thể gán xác suất  $\mathbb{P}(x_i) = p_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots$  sao cho  $\sum_i p_i \equiv 1$ .

**Định nghĩa 1.6** (Hàm mật độ xác suất, probability density function). là  $f(x) = F'(x)$  với  $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$  là phân phối tích lũy của biến  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Mật độ xác suất là không âm và có tích phân toàn phần bằng 1.

**Định lý 1.1** (Chuẩn hóa mật độ xác suất). Nếu có độ đo  $g(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$  khả tích toàn phần thì có mật độ xác suất

$$f(x) := \frac{g(x)}{\int_{\mathbb{R}} g(x) dx} \propto g(x).$$

**Định lý 1.2** (Biến đổi tham số). Giả sử  $X$  là tham số có mật độ xác suất  $f_X$ , hàm  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  có vi phân  $> 0$ . Khi đó tham số  $Y = g(X)$  có mật độ xác suất là

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} \quad \forall y \in g(\mathbb{R}).$$

*Chứng minh.* Xem “4.1.3 Functions of Continuous Random Variables”, Pishro-Nik (2014). □

## 1.4 Phụ thuộc

**Định nghĩa 1.7** (Xác suất hợp). Ký hiệu  $P(A, B)$  hoặc  $P(A \cap B)$  chỉ xác suất sự kiện  $A$  và sự kiện  $B$  đồng thời xảy ra.

**Định nghĩa 1.8** (Độc lập). Hai sự kiện  $A$  và  $B$  là độc lập nếu  $P(A, B) \equiv P(A)P(B)$ .

Hai biến  $X$  và  $Y$  là độc lập nếu hai sự kiện  $X \leq x$  và  $Y \leq y$  là độc lập đối với mọi  $x, y$ .

**Định nghĩa 1.9** (IID). Các biến ngẫu nhiên  $X_1, X_2, \dots$  được gọi là iid (“independent and identically distributed”, “độc lập và phân phối giống nhau”) nếu chúng cùng tuân theo duy nhất (identical) một phân phối xác suất, và từng cặp biến là độc lập (independent) với nhau. Dùng biến  $X$  để thể hiện phân phối xác suất chung đó, ta viết

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} X.$$

**Định nghĩa 1.10** (Xác suất có điều kiện). Ký hiệu  $P(A|B)$  hoặc  $P_B(A)$  chỉ xác suất của sự kiện  $A$ , khi biết sự kiện  $B$  đã xảy ra,

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}.$$

**Định lý 1.3** (Định lý Bayes).

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}.$$

## 1.5 Đặc trưng

**Định nghĩa 1.11** (Trung bình). **Trung bình**, hay **giá trị kỳ vọng** của biến  $X$  là

$$\mathbb{E}[X] := \int x dF(x) := \begin{cases} \sum_x x p(x) & \text{if } X \text{ is discrete} \\ \int x f(x) dx & \text{if } X \text{ is continuous.} \end{cases}$$

Nếu giá trị  $\int |x| dF(x) < \infty$  ta nói là  $\mathbb{E}[X]$  “tồn tại” (well-defined).

Ta có

$$\mathbb{E}[X + Y] \equiv \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

**Định nghĩa 1.12** (Hiệp phương sai).

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &:= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &\equiv \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

Nếu  $X$  và  $Y$  độc lập thì  $\text{Cov}[X, Y] = 0$ .

**Định nghĩa 1.13** (Phương sai). Phương sai, hay phân tán (variance) là

$$\mathbb{V}[X] := \text{Cov}[X, X] \equiv \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X].$$

Ta có

$$\mathbb{V}[X + Y] \equiv \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y].$$

## 1.6 Tích suất

**Định nghĩa 1.14** (Tích suất). Tích suất (moment) thể hiện trọng tâm, độ phân tán, hay độ lệch của phân phối. Tích suất bậc  $n$  của biến  $X$  với mật độ  $f(x)$  là:

$$\mathbb{E}[X^n] := \int x^n f(x) dx$$

**Định nghĩa 1.15** (Hàm tạo tích suất). “Moment generation function (MGF)” của biến  $X$  là

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}], t \in \mathbb{R}.$$

Nếu MGF “tồn tại” lân cận 0 thì đạo hàm cấp  $k$  của  $\psi$  tại 0 chính là:

$$\psi_X^{(k)}(0) \equiv \mathbb{E}[X^k].$$

**Định nghĩa 1.16** (Tích suất mẫu). Từ các quan sát  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ . Để ước lượng tích suất  $\mathbb{E}[X^k]$  ta có thể dùng các *sample moment*:

$$\hat{m}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

## 2 Phân phối

Có một số phân phối xác suất thông dụng.

### 2.1 Phân phối Bernoulli

**Định nghĩa 2.1** (Bernoulli distribution).  $X \sim \text{Ber}(p)$  có

$$\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$$

và  $\mathbb{E}[X] = p, \mathbb{V}[X] = p(1 - p)$ .

### 2.2 Phân phối nhị thức

**Định nghĩa 2.2** (Binomial distribution).  $K \sim \text{Binom}(n, p)$  với  $n \in \mathbb{Z}_+, p \in (0, 1)$  mô tả tổng số lần thành công của  $n$  thí nghiệm độc lập  $K_1, \dots, K_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$ . Ta có

$$\mathbb{P}(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

và  $\mathbb{E}[K] = np, \mathbb{V}[K] = np(1 - p)$ .

## 2.3 Phân phối Poisson

**Định nghĩa 2.3** (Phân phối Poisson).  $K \sim \text{Poiss}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$  cố định, có

$$\mathbb{P}(K = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

$k = 0, 1, 2, \dots$  là số lần phát sinh sự kiện trong một giới hạn cố định, các sự kiện phát sinh độc lập.

$$\mathbb{E}[K] = \mathbb{V}[K] = \lambda.$$

Khi  $n$  đủ lớn và  $p$  đủ nhỏ thì  $\text{Poiss}(np)$  gần với  $\text{Binom}(n, p)$ .

## 2.4 Phân phối hình học

**Định nghĩa 2.4** (Geometric distribution).  $K \sim \text{Geom}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$  có

$$\mathbb{P}(K = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

là xác suất thành công đầu tiên xảy ra sau đúng  $k$  lần thực nghiệm  $\text{Ber}(p)$ .

$$\mathbb{E}[K] = 1/p, \mathbb{V}[K] = (1 - p)/p^2.$$

## 2.5 Phân phối liên tục

## 2.6 Phân phối đều

**Định nghĩa 2.5** (Uniform distribution).  $X \sim \text{Unif}[a, b]$  có mật độ

$$f(x) := \frac{x - a}{b - a} \text{ for } x \in [a, b]$$

và

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a + b}{2}, \mathbb{V}[X] = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Nếu biến  $X$  có cdf  $F$  (ĐN 1.2) khả nghịch thì  $F(X) \sim \text{Unif}[0, 1]$ .

## 2.7 Phân phối mũ

**Định nghĩa 2.6** (Exponential distribution).  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  có

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \in \mathbb{R}_+,$$

$x$  ước lượng khoảng cách giữa hai lần phát sinh sự kiện trong quá trình Poiss( $\lambda$ ).

$$\mathbb{E}[X] = 1/\lambda, \mathbb{V}[X] = 1/\lambda^2.$$

## 2.8 Phân phối chuẩn

**Định nghĩa 2.7** (Gaussian Distribution).  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  có mật độ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R}$$

và  $\mathbb{E}[X] = \mu, \mathbb{V}[X] = \sigma^2$ .

**Định lý 2.1** (Tổng của các phân phối chuẩn). Nếu  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) thì

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

**Định nghĩa 2.8** (Vector phân phối chuẩn). Nếu mọi tổ hợp tuyến tính các yếu tố của vector  $\mathbf{v}$  đều thuộc phân phối chuẩn 1 biến thì  $\mathbf{v}$  được gọi là một vector phân phối chuẩn.



## 2.9 Phân phối $\chi^2$

**Định nghĩa 2.9** (Phân phối  $\chi^2$ ).  $X \sim \chi_k^2$  là tổng bình phương của  $X_1, \dots, X_k \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$

$$X := \sum_{i=1}^k X_i^2$$

và có  $\mathbb{E}[X] = k, \mathbb{V}[X] = 2k$ .

## 2.10 Phân phối Student

**Định nghĩa 2.10** (Student's T distribution). Nếu có  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1), V \sim \chi_k^2$  độc lập với nhau thì

$$X := \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$$

tuân theo phân phối Student's  $t_k$ .

## 2.11 Phân phối Beta

**Định nghĩa 2.11** (Beta distribution).  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ , tham số  $\alpha > 0, \beta > 0$  có mật độ trên  $x \in [0, 1]$  là

$$f(x) = Cx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

$C = C(\alpha, \beta)$  là hằng số chuẩn hóa.

Phân phối Beta có đồ thị rất linh hoạt trên khoảng  $[0, 1]$ , rất phù hợp để sử dụng làm xác suất tiên nghiệm (ĐN 7.1) cho một tham số xác suất  $p \in [0, 1]$ .

Ví dụ  $\text{Unif}[0, 1] = \text{Beta}(1, 1)$ .

## 2.12 Phân phối Gamma

**Định nghĩa 2.12** (Gamma distribution). với tham số  $q > 0, \lambda > 0$ , có mật độ là

$$f(x) := \frac{\lambda^q x^{q-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(q)} \quad \forall x \in (0, \infty),$$

$\Gamma$  là hàm Euler Gamma.

## 3 Hội tụ

Có một số kiểu hội tụ của biến ngẫu nhiên.

### 3.1 Hội tụ xác suất

Cho một chuỗi biến ngẫu nhiên  $X_1, X_2, \dots$  và một biến ngẫu nhiên  $X$ .

**Định nghĩa 3.1** (Hội tụ gần tuyệt đối).

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} X \iff \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

**Định nghĩa 3.2** (Hội tụ theo xác suất).

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X \iff \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

**Định nghĩa 3.3** (Hội tụ theo phân phối).

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} X \iff \mathbb{P}[X_n(x) \leq x] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}[X \leq x]$$

tại mọi điểm  $x$  mà cdf của  $X$  liên tục.

**Định nghĩa 3.4** (Hội tụ về chuẩn). (asymptotically normal) với phương sai  $\sigma^2$

$$\frac{\sqrt{n}}{|\sigma|} (X_n - X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(0, 1).$$

## 3.2 Độ mạnh

**Định lý 3.1.** *Xếp theo thứ tự từ mạnh đến yếu:*

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} X.$$

Nếu  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} X$ , và  $X$  có mật độ xác suất, thì  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ .

Nếu chuỗi  $X_n$  có  $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mu$  và  $\mathbb{V}[X_n] \rightarrow 0$  thì  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ .

Nếu  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$  thì  $\mathbb{P}(a \leq X_n \leq b) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$  với mọi khoảng  $[a, b]$ .

## 3.3 Tổng và tích

**Định lý 3.2.** *Nếu có hai chuỗi biến ngẫu nhiên  $X_n, Y_n$  hội tụ gần tuyệt đối hoặc hội tụ theo xác suất về  $X, Y$ , thì tổng  $X_n + Y_n$  và tích  $X_n Y_n$  cũng hội tụ tương tự (gần tuyệt đối, hoặc theo xác suất) về tổng  $X + Y$  và tích  $XY$ .*

## 3.4 Slutsky

**Định lý 3.3.** *Hơn nữa, ở DL 3.2 nếu  $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y$ ,  $y$  là một số thực cố định thì có thể nới lỏng điều kiện đối với  $X_n$  thành hội tụ theo phân phối.*

### 3.5 Ảnh xạ liên tục

**Định lý 3.4** (Continuous mapping). Nếu  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s./\mathbb{P}/(d)} X$  thì đối với mọi hàm  $f$  liên tục:

- $f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s./\mathbb{P}/(d)} f(X)$ .
- $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$  nếu  $f$  còn bị chặn.

### 3.6 Đại đa số

**Định lý 3.5** (Law of Large Numbers, LLN). Cho  $n$  biến iid  $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} X$  có  $\mathbb{E}[X] < \infty$ . Khi đó:

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}, a.s.} \mathbb{E}[X].$$

### 3.7 Hội tụ trung tâm

**Định lý 3.6** (Central Limit Theorem, CLT). Giả sử thêm là  $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2 < \infty$ . Khi đó

$$\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{|\sigma|} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(0, 1).$$

### 3.8 Bất đẳng thức Hoeffding

**Định lý 3.7.** Nếu có một khoảng cố định  $[a, b]$  gần như tuyệt đối (almost surely) chứa các biến  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  thì

$$\mathbb{P}[|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon] \leq 2e^{-\frac{2n\epsilon^2}{(b-a)^2}}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

### 3.9 Phương pháp Delta

**Định lý 3.8** (Phương pháp Delta). *Giả sử chuỗi  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  chuẩn tiến (ĐN 3.4) với phương sai  $\sigma^2$  về một điểm  $\theta \in \mathbb{R}$ . Giả sử  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  có vi phân  $g'$  liên tục,  $\neq 0$  tại  $\theta$ . Khi đó,*

$$\frac{\sqrt{n}}{|\sigma|} \left( \frac{g(\theta_n) - g(\theta)}{g'(\theta)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(0, 1)$$

**Định lý 3.9** (Phương pháp Delta nhiều biến). *Giả sử chuỗi  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  chuẩn tiến với phương sai  $\Sigma(\theta)$  về  $\theta \in \mathbb{R}^d$  :*

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(d)(\mathbf{0}, \Sigma).$$

*Giả sử  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  có vi phân  $\nabla g$  liên tục ( $k < d$ ). Khi đó,*

$$\sqrt{n}(g(\theta_n) - g(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(k)(\mathbf{0}, \Gamma),$$

*với  $\Gamma := \nabla g(\theta)^T \Sigma \nabla g(\theta)$ . Nếu  $\Sigma$  khả nghịch,  $\nabla g$  rank  $k$  thì  $\Gamma$  khả nghịch,*

$$\sqrt{n}\Gamma^{-1/2}(g(\theta_n) - g(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(k)(\mathbf{0}, I_k),$$

$$n\Gamma^{-1}(g(\theta_n) - g(\theta))^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \chi_k^2.$$

# **Phần II**

## **Thống kê**

## 4 Thống kê

### 4.1 Mô hình

Trên không gian đo được  $E \subseteq \mathbb{R}$  ta quan sát các mẫu  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} P$ . Với tập tham số  $\Theta$  ta xây dựng bộ độ đo xác suất  $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$  để mô phỏng  $P$ .

Nếu tồn tại  $\theta \in \Theta$  để  $P_\theta \equiv P$  thì ta nói mô hình “hợp lệ” (well specified).

Nếu từ tập  $\Theta$ , ánh xạ  $\theta \mapsto P_\theta$  là đơn ánh thì ta nói  $\theta$  (hoặc  $P_\theta$ ) là “có thể xác định” (identifiable).

Nếu  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$  thì mô hình được nói có số biến hữu hạn (parametric model).

### 4.2 Ước lượng

Thống kê lượng (statistic)  $\theta$  là bất cứ hàm số nào có thể đo được (measurable function) trên tập dữ liệu đối tượng  $X_i$ .

Đánh giá (estimator)  $\theta_n$  đối với mục tiêu thống kê  $\theta$  là một thống kê khác không phụ thuộc vào  $\theta$ .

Đánh giá được gọi là nhất quán (consistent) nếu nó hội tụ về mục tiêu (ĐN 3.2).

**Định nghĩa 4.1** (Pivotal statistic). Một phân phối hay một ước lượng được gọi là pivotal nếu nó không phụ thuộc vào phân phối chưa biết và giá trị cụ thể của dữ liệu.

### 4.3 Sai số

**Định nghĩa 4.2** (Độ lệch, bias). giữa đánh giá  $\theta_n$  với mục tiêu  $\theta$  là

$$\text{bias}_\theta(\theta_n) := \mathbb{E}[\theta_n] - \theta.$$



**Định nghĩa 4.3** (Sai số bậc 2, quadratic risk, mean squared error). giữa đánh giá  $\theta_n$  với mục tiêu  $\theta$  là

$$\text{MSE}(\theta_n) := \mathbb{E}[(\theta_n - \theta)^2] \equiv \text{bias}_\theta(\theta_n)^2 + \mathbb{V}[\theta_n]$$

bao hàm cả độ lệch và độ nhiễu của đánh giá.

## 4.4 Khoảng tin cậy

Với mô hình thống kê  $(E, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$  xây dựng dựa trên quan sát  $X_1, \dots, X_n$ , giả sử số  $\alpha \in (0, 1)$ . Khoảng tin cậy (confidence interval) cấp  $1 - \alpha$  đối với  $\theta$  là một khoảng ngẫu nhiên  $\mathcal{J}$  (phụ thuộc vào  $X_1, \dots, X_n$ , không phụ thuộc vào  $\theta$ ), mà xác suất  $\mathcal{J}$  có chứa  $\theta$  là đủ cao:

$$\mathbb{P}_\theta[\mathcal{J} \ni \theta] \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta[\mathcal{J} \ni \theta] \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta$$

thì ta gọi  $\mathcal{J}$  là khoảng tin cậy tiệm cận cấp  $1 - \alpha$  đối với  $\theta$ .

## 4.5 Định lý cơ bản

**Định nghĩa 4.4** (Empirical cdf). Với  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} X$ , ước lượng phân phối tích lũy (ĐN 1.2) của  $X$  là hàm tăng đơn điệu và liên tục bên phải

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], F_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i \leq t\},$$

tức là tỷ lệ số biến  $X_i \leq t$ .

Nếu xếp  $X_1 \leq \dots \leq X_n < X_{n+1} = \infty$  từ nhỏ đến lớn thì ta có

$$F(t) = \frac{i}{n} \text{ for } t \in [X_i, X_{i+1}) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Áp dụng LLN lên biến  $\mathbb{1}\{X < t\}$  ta có  $F_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} F(t) \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Định lý 4.1** (Glivenko-Cantelli, Fundamental Theorem of Statistics).  $F_n$  hội tụ đồng đều (converge uniformly) lên  $F$ .

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

Nói cách khác  $\forall \delta > 0, \forall \epsilon > 0 : \exists N :$

$$n > N \implies \mathbb{P} \left( \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| < \delta \right) \geq 1 - \epsilon.$$

**Định lý 4.2** (Donsker's theorem). Nếu cdf  $F$  thật là liên tục thì

$$\sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z \sim \sup_{0 \leq x \leq 1} |B(x)|,$$

với  $Z$  là phân phối của đỉnh giá trị tuyệt đối của **Brownian bridge**, và là phân phối pivotal (ĐN 4.1).

# 5 Ước lượng

Chiến lược ước lượng phân phối *thật* (true distribution)

- Định nghĩa khoảng cách giữa các phân phối (TV distance)
- Ước lượng khoảng cách nêu trên (KL divergence)
- Tìm điểm cực tiểu của ước lượng nêu trên (minimization).

Với mô hình thống kê  $(E, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$  xây dựng dựa trên quan sát iid rv  $X_1, \dots, X_n$  trên tập mẫu  $E$  và bộ tham số  $\Theta$ . Ngầm định tồn tại *tham số thật*  $\theta^* \in \Theta$  để  $X_1 \sim \mathbb{P}_{\theta^*}$ .

## 5.1 Tổng biến động

### 5.1.1 Khoảng cách

**Định nghĩa 5.1.** tổng biến động (total variation distance) giữa hai độ đo xác suất  $\mathbb{P}_\theta$  và  $\mathbb{P}_\eta$  là

$$TV(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta) = \max_{A \subseteq E} | \mathbb{P}_\theta(A) - \mathbb{P}_\eta(A) |.$$

**Định lý 5.1** (Công thức tính). Nếu tập mẫu  $E$  là rời rạc (*discrete: countable or finite*), xác suất  $\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta$  có hàm khối lần lượt là  $p_\theta, p_\eta$  thì

$$TV(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta) = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} | p_\theta(x) - p_\eta(x) |.$$

Nếu tập mẫu  $E$  là liên tục (*continuous*), xác suất  $\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta$  có mật độ lần lượt là  $f_\theta, f_\eta$  thì

$$TV(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta) = \frac{1}{2} \int_E | f_\theta(x) - f_\eta(x) | dx.$$

## 5.2 Phân kỳ KL

### 5.2.1 Phân kỳ KL

**Định nghĩa 5.2.** (KL divergence) Ký hiệu  $f$  là mật độ hoặc hàm khối xác suất:

$$\text{KL}(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta) := \mathbb{E}_\theta \left[ \ln \frac{f_\theta(x)}{f_\eta(x)} \right] = \mathbb{E}_\theta [\ln f_\theta(x)] - \mathbb{E}_\theta [\ln f_\eta(x)].$$

### 5.2.2 Đặc điểm

**Proposition 5.1.** *Phân kỳ KL thỏa mãn 2/4 đặc điểm của “khoảng cách”:*

1.  $\text{KL}(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta) \geq 0$
2.  $\text{KL}(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{P}_\eta) \equiv 0 \iff \mathbb{P}_\theta \equiv \mathbb{P}_\eta.$

## 5.3 Hợp lý cực đại

**Định nghĩa 5.3** (Hợp lý, Likelihood).

$$L_\theta(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i = x_i).$$

**Định nghĩa 5.4** (Log likelihood).

$$\ell_\theta(x_1, \dots, x_n) := \ln L_\theta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln p_\theta(X_i = x_i).$$

**Định nghĩa 5.5** (Maximum Likelihood Estimator, MLE).

$$\hat{\theta}_n := \operatorname{argmax}_{\theta} L_\theta(x_1, \dots, x_n) \equiv \operatorname{argmax}_{\theta} \ell_\theta(x_1, \dots, x_n).$$

## 5.4 Mix model

**Định nghĩa 5.6.** Cho các mô hình gốc  $X^{(k)}, k = 1, \dots, K$ , lấy biến tiềm ẩn  $Z$  trên  $\{1, \dots, K\}$  làm trọng số, ta có mô hình hỗn hợp

$$X = \sum_{k=1}^K \mathbb{P}(Z = k) X^{(k)}.$$

### 5.4.1 Giải thuật EM

**Định nghĩa 5.7.** (Estimation Maximization) có thể tìm được tham số  $\theta$  của mô hình hỗn hợp ĐN 5.6.

Giả sử ta quan sát được  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ . Gọi các trọng số tiềm ẩn tương ứng là  $Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n$ .

Sau khi khởi tạo  $\theta = \theta_0$  ngẫu nhiên, ta lặp lại 2 bước **E**, **M** như sau để cập nhật  $\theta_k, k = 1, 2, \dots$  cho đến khi hội tụ.

- **Estimate:** Ước lượng  $Z_i \approx \omega_i := \mathbb{E}[Z|X_i = x_i, \theta = \theta_{k-1}], i = 1, \dots, n$ .
- **Maximize:** Thay  $Z_i$  bởi  $\omega_i$  vào công thức likelihood để tối ưu MLE  $\theta = \theta_k$

## 5.5 Chuẩn tính của MLE

**Định nghĩa 5.8** (Thông tin Fisher, Fisher information). Giả sử log likelihood đối với một quan sát  $X$  theo mô hình  $\theta \in \mathbb{R}$  là  $\ell = \ell(\theta) := \ln L_1(X, \theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ . Giả sử  $\ell(\theta)$  có đạo hàm bậc hai. Dưới một số điều kiện chuẩn, **thông tin Fisher** của mô hình được định nghĩa là

$$I(\theta) := \mathbb{V}_X \left[ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right] = \mathbb{E}_X \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E}_X \left[ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right].$$

Trường hợp mô hình đa biến,  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$  :

$$H_{ij} := \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j},$$

$$I(\theta) := -\mathbb{E}_X \left[ \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k1} & \cdots & H_{kk} \end{pmatrix} \right].$$

**Định lý 5.2** (MLE hội tụ). Gọi  $\theta^* \in \Theta$  là tham số thật cần tìm. Giả sử

1. Các tham số là indentifiable
2. Support của  $\mathbb{P}_\theta$  không phụ thuộc vào  $\theta$  với mọi  $\theta \in \Theta$
3.  $\theta^*$  không nằm trên biên giới của  $\Theta$
4. Thông tin Fisher khả nghịch lân cận  $\theta^*$
5. Một số điều kiện kỹ thuật khác

Khi đó, chuỗi  $\hat{\theta}_n^{MLE}$  thỏa mãn:

$$\hat{\theta}_n^{MLE} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}_{\theta^*}} \theta^*$$

$$\sqrt{nI(\theta^*)} (\hat{\theta}_n^{MLE} - \theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d) \text{ w.r.t. } \mathbb{P}_{\theta^*}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Trường hợp mô hình đa biến,  $\theta \in \mathbb{R}^k$  :

$$n (\hat{\theta}_n^{MLE} - \theta^*)^T I(\theta^*) (\hat{\theta}_n^{MLE} - \theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d) \text{ w.r.t. } \mathbb{P}_{\theta^*}} \chi_k^2.$$

Chú ý là điều kiện số 2 dễ bị vi phạm, ví dụ  $X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Unif}[0, \theta]$  mà lại cần tìm tham số  $\theta$ .

## 5.6 M-estimation

**Định nghĩa 5.9** (M-estimator). Với mục tiêu ước lượng thuộc tính  $\mu^*$  của xác suất  $\mathbb{P}(X)$ , ta tìm một “hàm tổn thất”  $\rho(X, \mu)$  có giá trị kỳ vọng đạt cực tiểu tại  $\mu = \mu^*$  :

$$\mathcal{Q}(\mu) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\rho(X, \mu)].$$

Nếu quan sát được  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{P}(X)$ , ta ước lượng

$$\mathcal{Q}(\mu) \approx \mathcal{Q}_n(\mu) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho(X_i, \mu).$$

Khi đó  $\mu^* \approx \hat{\mu}$  với “M-estimator”  $\hat{\mu}$  là

$$\hat{\mu} := \underset{\mu}{\operatorname{argmin}} \mathcal{Q}_n(\mu).$$

*Remark.* Với  $\rho(x, \theta) = -\ln p_\theta(x)$  ta có MLE để ước lượng tham số  $\theta^*$  của mô hình  $\mathbb{P}$ .

**Ví dụ 5.1.** Với  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ , dùng  $\rho(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\|^2$  ta ước lượng được  $\boldsymbol{\mu}^* = \mathbb{E}[\mathbf{x}]$ .

## 5.7 Method of moments

**Định nghĩa 5.10** (Method of moments estimator). Để ước lượng  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$

1. Từ quan sát  $X_1, \dots, X_n$  tính tích suất mẫu (ĐN 1.16)  $\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_d$
2. Với  $m_i$  là tích suất bậc  $i$  (ĐN 1.14), tìm  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^d$  :

$$m_1(\hat{\theta}) = \hat{m}_1,$$

$$m_2(\hat{\theta}) = \hat{m}_2,$$

$$\vdots$$

$$m_d(\hat{\theta}) = \hat{m}_d.$$

## 5.8 Biến đổi tham số

Với mô hình thống kê  $(E, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ , giả sử MLE, method of moments hoặc M-estimation ước lượng được duy nhất một giá trị tham số tối ưu là  $\theta^* \in \Theta$ . Áp dụng biến đổi tham số  $\eta = \phi(\theta)$  (ĐL 1.2) lên các mô hình đó sẽ dẫn tới nghiệm tối ưu  $\eta^*$  thỏa mãn  $\eta^* \equiv \phi(\theta^*)$ .

# 6 Kiểm định

## Hypothesis testing

- Định nghĩa giả thuyết không và giả thuyết đối.
- Thiết kế kiểm định thống kê
- Phân loại lỗi Loại 1 và Loại 2
- Tính hàm công suất của kiểm định
- Định mức đối với kiểm định
- Tính toán và giải thích giá trị p

## 6.1 Giả thuyết

Với mô hình thống kê  $(E, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ , sử dụng bộ mẫu dữ liệu iid  $X_1, \dots, X_n$ , ta xem xét hai giả thuyết về tham số  $\theta$  như sau:

$$\begin{cases} H_0 : & \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

với  $\Theta_0, \Theta_1$  là phân mảnh (không giao nhau) của  $\Theta$ ,  $\Theta_0$  là “thường thức” (status quo), còn  $\Theta_1$  là “phát hiện” (discovery) mới. Ta gọi  $H_0$  là giả thuyết không, còn  $H_1$  là giả thuyết đối (thay thế).

### 6.1.1 Kiểm định

Ta sẽ **kiểm định**  $H_0$  đối với  $H_1$  bằng cách chọn và sử dụng một định lượng thống kê  $\psi(X_1, \dots, X_n) \in \{0, 1\}$ .

	$\psi = 0$ : chấp nhận $H_0$	$\psi = 1$ : phủ nhận $H_0$
$\theta \in \Theta_0$	Kiểm định đúng	Lỗi loại 1
$\theta \in \Theta_1$	Lỗi loại 2	Kiểm định đúng

Có thể viết  $\psi = \mathbb{1}\{R_\psi\}$  với sự kiện  $R_\psi$  là **vùng phủ nhận**, còn  $R_\psi^c$  là **vùng chấp nhận**.



Ta thiết kế kiểm định sao cho hàm **công suất** sau đây có giá trị nhỏ khi  $\theta \in \Theta_0$  và lớn khi  $\theta \in \Theta_1$  :

$$\beta_\psi(\theta) := \mathbb{P}_\theta(\psi = 1) \equiv \mathbb{P}_\theta(R_\psi) \in [0, 1]$$

Vùng phủ nhận thường có dạng

$$R_\psi = \{X_i : T(X_i) \geq c\}$$

với  $T$  là một lượng thống kê còn  $c$  là một giá trị biên.

### 6.1.2 Mức độ lỗi

Kiểm định  $\psi$  là ở mức (significance level)  $\alpha \in (0, 1)$  nếu có xác suất lỗi loại 1 không vượt quá  $\alpha$  :

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\psi(\theta) \leq \alpha.$$

Chuỗi kiểm định  $(\psi_n)_{n=1,2,\dots}$  được gọi là tiệm cận về mức  $\alpha$  nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\psi_n}(\theta) \leq \alpha.$$

Phương thức Neyman-Pearson chọn một mức  $\alpha$ , đảm bảo xác suất lỗi loại 1 không vượt quá  $\alpha$  rồi tối thiểu hóa xác suất lỗi loại 2. Nói cách khác là giữ cho công suất  $\beta_\psi(\theta)$  đủ nhỏ khi  $\psi \in \Theta_0$ , rồi tối đại hóa công suất khi  $\psi \in \Theta_1$ .

### 6.1.3 p-value

Từ quan sát  $X_1, \dots, X_n$  ta tính giá trị mức  $\alpha$  (tiệm cận) nhỏ nhất tại đó kiểm định  $\psi$  phủ nhận  $H_0$ , gọi nó là p-value (tiệm cận) của  $\psi$ . Nếu p-value càng nhỏ thì ta càng tự tin phủ nhận  $H_0$ .

$$\text{p-value} := \inf_{X_1, \dots, X_n; \theta \in H_0} \beta_\psi(\theta)$$

p-value	chứng cứ phủ nhận $H_0$
< 0.1%	vô cùng mạnh
0.1%—1%	rất mạnh
1%—5%	mạnh
5%—10%	yếu

p-value	chứng cứ phủ nhận $H_0$
> 10%	không có

### 6.1.4 Khoảng tin cậy

Thông thường ta có thể xây dựng được kiểm định từ khoảng tin cậy. Ví dụ, ta muốn kiểm định tham số  $\theta$ ,  $H_0 : \theta = \theta_0$ , đối  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . Giả sử ta có khoảng tin cậy  $\mathcal{I}$  ở mức  $1 - \alpha$ , tức là

$$\mathbb{P}_\theta(I \ni \theta) \geq 1 - \alpha.$$

Khi đó,  $\psi = 1\{\theta_0 \notin \mathcal{I}\}$  là kiểm định mức  $\alpha$

$$\beta_\psi(\theta_0) = \mathbb{P}_{\theta_0}(\theta_0 \notin I) \leq \alpha.$$

## 6.2 Kiểm định tham số

### 6.2.1 Wald Test

Giả sử  $\hat{\theta}$  là ước lượng của tham số  $\theta$ , và  $\hat{\mathbf{V}}[\hat{\theta}]$  là ước lượng phương sai của  $\hat{\theta}$ , sao cho

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\hat{\mathbf{V}}[\hat{\theta}]}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(0, 1).$$

Đặt

$$W := \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sqrt{\hat{\mathbf{V}}[\hat{\theta}]}}$$

ta có thể xây dựng các kiểm định Wald có mức tiệm cận là  $\alpha$ , tức là  $\mathbb{P}_{H_0}(\psi_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$ .

Giả thuyết	Kiểm định Wald	asympt. p-value
$H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0$	$\psi_\alpha = 1\{ W  > q_{\alpha/2}\}$	$\mathbb{P}( Z  >  W^{obs} )$
$H_0 : \theta \leq \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0$	$\psi_\alpha = 1\{W > q_\alpha\}$	$\mathbb{P}(Z > W^{obs})$
$H_0 : \theta \geq \theta_0, H_1 : \theta < \theta_0$	$\psi_\alpha = 1\{W < -q_\alpha\}$	$\mathbb{P}(Z < W^{obs})$

Trong bảng trên, p-value được tính từ  $W^{obs}$  là một quan sát đối với  $W$ .

## 6.2.2 Định lý Cochran

**Định lý 6.1.** Giả sử  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Đặt

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Khi đó  $\mathbb{E}[S_n^2] \equiv \sigma^2$ ,

$$\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1},$$

và  $\bar{X}_n, S_n^2$  độc lập với nhau.

## 6.2.3 Student's T test

Giả sử  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma$  chưa biết, và ta muốn kiểm định  $\mu$ . Theo DL 6.1,

$$T := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2/n}} \equiv \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma}{\sqrt{S_n^2/\sigma^2}} \sim t_{n-1}$$

tuân theo phân phối Student's T. Ta có thể xây dựng các kiểm định Student có mức  $\alpha$ , tức là  $\mathbb{P}_{H_0}(\psi_\alpha) \equiv \alpha$ .

Giả thuyết	Kiểm định Student	p-value
$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\psi_\alpha = \mathbb{1}\{ T  > q_{\alpha/2}^{t_{n-1}}\}$	$\mathbb{P}_{t_{n-1}}( Z  >  T^{obs} )$
$H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$	$\psi_\alpha = \mathbb{1}\{T > q_\alpha^{t_{n-1}}\}$	$\mathbb{P}_{t_{n-1}}(Z > T^{obs})$
$H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$	$\psi_\alpha = \mathbb{1}\{T < -q_\alpha^{t_{n-1}}\}$	$\mathbb{P}_{t_{n-1}}(Z < T^{obs})$

Trong bảng trên, p-value được tính từ  $T^{obs}$  là một quan sát đối với  $T$ .

## 6.2.4 Two-sample T-test

Giả sử  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ ,  $Y_1, \dots, Y_m \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ , với  $\mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y$  chưa biết, và ta muốn kiểm định  $\mu_x - \mu_y$ . Đặt

$$\hat{\mu}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_n)^2,$$

$$\hat{\mu}_m := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, \quad \hat{\sigma}_m^2 := \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{\mu}_m)^2.$$

Ta có gần đúng

$$\frac{(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_m) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n + \hat{\sigma}_m^2/m}} \sim t_N$$

là phân phối Student's T với độ tự do tuân theo công thức WS (Welch-Satterthwaite):

$$N = \frac{(\hat{\sigma}_n^2/n + \hat{\sigma}_m^2/m)^2}{\hat{\sigma}_n^4/(n^2(n-1)) + \hat{\sigma}_m^4/(m^2(m-1))} \geq \min(n, m)$$

Đặt

$$T = \frac{\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_m}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2/n + \hat{\sigma}_m^2/m}}.$$

Giả thuyết	Kiểm định 2 mẫu	p-value
$H_0 : \mu_x = \mu_y, H_1 : \mu_x \neq \mu_y$	$\psi_\alpha = \mathbb{1}\{ T  > q_{\alpha/2}^{t_N}\}$	$\mathbb{P}_{t_N}( Z  >  T^{obs} )$
$H_0 : \mu_x \leq \mu_y, H_1 : \mu_x > \mu_y$	$\psi_\alpha = \mathbb{1}\{T > q_\alpha^{t_N}\}$	$\mathbb{P}_{t_N}(Z > T^{obs})$
$H_0 : \mu_x \geq \mu_y, H_1 : \mu_x < \mu_y$	$\psi_\alpha = \mathbb{1}\{T < -q_\alpha^{t_N}\}$	$\mathbb{P}_{t_N}(Z < T^{obs})$

## 6.2.5 Kiểm định tỷ lệ hợp lý

*Likelihood ratio test*

Với dữ liệu  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{P}_\theta$ , để kiểm định  $H_0 : \theta \in \Theta_0, H_1 : \theta \notin \Theta_0$ , định lượng tỷ lệ hợp lý là

$$T_n = 2 \ln \frac{L_n(\hat{\theta})}{L_n(\hat{\theta}_0)}$$

với  $L(\hat{\theta})$  là hợp lý cực đại tổng quát, còn  $L(\hat{\theta}_0)$  là hợp lý cực đại khi  $H_0$  đúng.

## 6.2.6 Định lý Wilks

Giả sử  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{q+r}) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{q+r}$ ,

$$\Theta_0 = \left\{ \theta \in \Theta : (\theta_{q+1}, \dots, \theta_{q+r}) = (\theta_{q+1}^{(0)}, \dots, \theta_{q+r}^{(0)}) \right\}$$

với  $(\theta_{q+1}^{(0)}, \dots, \theta_{q+r}^{(0)}) \in \mathbb{R}^r$  là cố định. Nếu  $H_0$  đúng và các điều kiện hội tụ của MLE (ĐL 5.2) được thỏa mãn thì:

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \chi_r^2.$$

## 6.2.7 Kiểm định nhiều lần

Gọi số lần thực hiện và quan sát kết quả kiểm định là  $t$ , mức độ lỗi loại 1 cho phép là  $\alpha$ . Nếu  $H_0$  là đúng thì lỗi loại 1 sẽ xuất hiện khoảng  $\alpha t$  lần, số lần này sẽ càng lớn nếu  $t$  càng lớn.

Gọi tỷ lệ p-value không vượt quá ngưỡng  $\alpha$  là  $F(\alpha) := \mathbb{P}(\text{p-value} \leq \alpha)$ . Ta có  $F(\alpha) \leq \alpha$  với mọi loại kiểm định. Hơn nữa,  $F(\alpha) = \alpha$  với kiểm định Student's T.

## 6.3 Kiểm định mô hình

### 6.3.1 Kiểm định $\chi^2$

**Định lý 6.2** (Kiểm định  $\chi^2$ ). Cho mô hình phân loại

$$(\{a_1, \dots, a_K\}, \{\mathbb{P}_{\mathbf{p}}\}_{\mathbf{p} \in \Delta_K}),$$

với  $\Delta_K := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^K : \sum_{i=1}^K p_i = 1 \right\}$ . Đặt  $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = a_k\}$ . Cố định  $\mathbf{p}^0 \in \Delta_K$ , kiểm định  $H_0 : \mathbf{p} = \mathbf{p}^0$  vs  $H_1 : \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^0$ . Nếu  $H_0$  là đúng thì

$$T_n := n \sum_{i=1}^K \frac{\left( \frac{N_i}{n} - p_i^0 \right)^2}{p_i^0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \chi_{K-1}^2.$$

**Định lý 6.3** (Kiểm định  $\chi^2$  cho hệ phân phối). Xem xét hệ phân phối rời rạc  $\mathbb{P}_\theta$  có pmf  $f_\theta$  với  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ . Với dữ liệu  $X_1, \dots, X_n$ , gọi MLE của  $\theta$  là  $\hat{\theta}$ , ước lượng  $\hat{p}_i := f_{\hat{\theta}}(a_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Kiểm định  $H_0 : \theta \in \Theta$  vs  $H_1 : \theta \notin \Theta$ . Nếu  $H_0$  là đúng thì

$$T_n := n \sum_{i=1}^K \frac{\left(\frac{N_i}{n} - \hat{p}_i\right)^2}{\hat{p}_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \chi_{K-d-1}^2.$$

$T_n$  không phải pivotal.

**Hệ quả 6.1** (Kiểm định  $\chi^2$  cho phân phối liên tục). Đối với phân phối liên tục, ta có thể phân hoạch tập giá trị biến thành các khoảng (quantile) để chuyển thành phân phối rời rạc rồi áp dụng kiểm định  $\chi^2$ .

### 6.3.2 Kiểm định KS

**Định nghĩa 6.1** (Kiểm định Kolmogorov-Smirnov). Gọi  $F_n$  là cdf thực nghiệm (ĐN 4.4),  $F$  là cdf thật (ĐN 1.2) của  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} X$ . Cho cdf liên tục  $F^0$ , kiểm định giả thuyết  $H_0 : F = F^0$  v.s.  $H_1 : F \neq F^0$ . Định lượng kiểm định

$$T_n := \sup_{t \in \mathbb{R}} \sqrt{n} |F_n(t) - F^0(t)|$$

là pivotal.

Theo định lý Donsker (ĐL 4.2), nếu  $H_0$  là đúng thì  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z$ , với  $Z$  là phân bố của đỉnh tuyệt đối của Brownian bridge.

Vì các cdf đều tăng đơn điệu, cdf thực nghiệm có dạng bậc thang, ta có thể xếp  $X_1 \leq \dots \leq X_n$  từ nhỏ đến lớn để tính  $T_n$  dễ dàng hơn.

$$T_n \equiv \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \max \left\{ \left| \frac{i-1}{n} - F^0(X_i) \right|, \left| \frac{i}{n} - F^0(X_i) \right| \right\} \right\}.$$

### 6.3.3 Kiểm định KL

**Định nghĩa 6.2** (Kolmogorov-Lilliefors test). Trong tiền đề của ĐN 6.1, nếu bỏ điều kiện  $F_0$  cố định, thay vào đó là kiểm chứng phân phối  $\mathbb{P}$  thuộc hệ phân phối chuẩn  $\{\mathcal{N}((\mu), \sigma^2)\}$ . Gọi MLE là  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ , định lượng kiểm định

$$T_n := \sup_{t \in \mathbb{R}} \sqrt{n} |F_n(t) - \Phi_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2}(t)|$$

là pivotal.

# 7 Bayesian

## 7.1 Phương pháp

**Định nghĩa 7.1** (Bayesian method). Với dữ liệu  $X_1, \dots, X_n$ , ta ước lượng tham số  $\theta$  cho mô hình xác suất qua các bước:

1. Gán xác suất tiên nghiệm (prior)  $\pi(\theta)$  cho tham số  $\theta \in \Theta$ .
2. Chọn xác suất  $f(X|\theta)$  phụ thuộc vào  $\theta$ , gọi MLE (ĐN 5.5) là  $L_n$
3. Tính xác suất hậu nghiệm (posterior) theo Bayes ĐL 1.3:

$$\pi(\theta|X_1, \dots, X_n) \propto L_n(X_1, \dots, X_n|\theta)\pi(\theta), \quad \theta \in \Theta.$$

## 7.2 Loại prior

**Định nghĩa 7.2** (Conjugate prior). Nếu xác suất tiên nghiệm và xác suất hậu nghiệm thuộc cùng một hệ xác suất, ta nói xác suất tiên nghiệm là liên hợp đối với mô hình.

**Ví dụ 7.1.** Beta là xác suất tiên nghiệm liên hợp đối với mô hình Bernoulli Ber, nhị thức Binom và hình học Geom.

**Định nghĩa 7.3** (Non informative prior). Nếu ta không có thông tin tiên nghiệm gì về tham số  $\theta \in \Theta = [a, b]$  thì có thể dùng phân phối đồng đều  $\text{Unif}[a, b]$  làm xác suất tiên nghiệm.



**Định nghĩa 7.4** (Improper prior). Nếu hàm  $\pi : \Theta \rightarrow [0, +\infty)$  là đo được (measurable) nhưng không khả tích toàn phần trên  $\Theta$  thì ta nói  $\pi$  là improper prior.

## 7.3 Jeffreys prior

**Định nghĩa 7.5** (Jeffreys prior). Với mô hình thống kê dựa trên tham số  $\theta$  cho  $X$  có thông tin Fisher (ĐN 5.8) là  $I(\theta)$  thì Jeffreys prior

$$\pi_J(\theta) \propto \sqrt{\det I(\theta)},$$

là non informative.

**Ví dụ 7.2.**

- Thí nghiệm  $\text{Ber}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$  có

$$\pi_J(p) \propto \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \propto B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- Thí nghiệm  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  có  $\pi_J(\mu, \sigma^2) \propto \sigma^{-3}$  là improper prior.

**Định lý 7.1** (Jeffreys prior là invariant khi đổi tham số). Nếu đổi tham số  $\theta \mapsto \eta = \phi(\theta)$  (ĐL 1.2) thì mật độ của tham số mới  $\eta$  là

$$\tilde{\pi}(\eta) = \frac{\pi(\phi^{-1}(\eta))}{\phi'(\phi^{-1}(\eta))} \propto \sqrt{\det \tilde{I}(\eta)}$$

với  $\tilde{I}(\eta)$  là thông tin Fisher của mô hình dựa trên tham số  $\eta$  thay vì  $\theta$ .

*Remark.* Phân phối tích lũy

$$F_{\tilde{\pi}}(\eta) \equiv F_{\pi}(\phi^{-1}(\eta)).$$

## 7.4 Bayesian estimation

**Định nghĩa 7.6** (Posterior mean). Từ tiên nghiệm  $\pi(\theta)$ , sau khi tính hậu nghiệm  $\pi(\theta|X_1, \dots, X_n)$  ta ước lượng  $\theta$  bằng trung bình:

$$\hat{\theta}^{(\pi)} := \int_{\Theta} \theta \pi(\theta|X_1, \dots, X_n) d\theta.$$

**Định nghĩa 7.7** (MAP, maximum a posteriori). Chọn cực đại

$$\hat{\theta}^{\text{MAP}} := \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \pi(\theta|X_1, \dots, X_n).$$

**Định lý 7.2** (Asymptotic properties of the Bayes estimator). *Thông thường, tính hội tụ về chuẩn (ĐN 3.4) của Bayes estimator không phụ thuộc vào chọn lựa xác suất tiên nghiệm.*

*Remark.* Tính phương sai của hội tụ tương tự như MLE (ĐL 5.2).

# Tham khảo

## Giáo trình

- John Tsitsiklis, Dimitri Bertsekas, Partick Jaillet. 2022. “Probability - The Science of Uncertainty and Data”. MITx. <https://www.edx.org/course/probability-the-science-of-uncertainty-and-data>.
- Philippe Rigollet, Tyler Maunu, Jan Christian Huetter. 2022. “Fundamentals of Statistics”. MITx. <https://www.edx.org/course/fundamentals-of-statistics>.
- Pishro-Nik, H. 2014. *Introduction to probability, statistics, and random processes*. Kappa Research LLC. <https://www.probabilitycourse.com>.
- Wasserman, Larry. 2004. *All of statistics : a concise course in statistical inference*. New York: Springer. [https://archive.org/details/springer\\_10.1007-978-0-387-21736-9](https://archive.org/details/springer_10.1007-978-0-387-21736-9).

## MITx 18.6501x

“Fundamentals of Statistics” (MITx 18.6501x ) là khóa học của Philippe Rigollet (2022) đại học MIT dạy trên edX.

## Quy định

### Kỳ hạn

- Exercises and homework: [Wednesdays 11:59AM UTC \(Wed. 20:59 JST\)](#)
- Exams (48 hours): Tuesdays 11:59AM UTC (Tue. 20:59 JST)

## Thời gian cần thiết

Mỗi tuần khoảng hơn 12 tiếng

- 5-7 hours on exercises, including 3 hours of lecture clips
- 1-2 hours watching recitations
- 5-7 hours for weekly problem sets

## Tính điểm

Điểm thi đầu chúng chỉ là 60% **tổng số điểm** tối đa.

- 20% for the lecture exercises (divided equally among the 20 out of 23 lectures)
- 20% for the homeworks (divided equally among 10 (out of 12) homeworks)
- 18% for the first midterm exam (timed)
- 18% for the second midterm exam (timed)
- 24% for the final exam (timed)

## Unit 1

Ôn lại kiến thức về xác suất “Probability - The Science of Uncertainty and Data” by John Tsitsiklis (2022).

## Unit 2

Học về nền tảng của suy luận (Foundations of Inference).

- Lecture 3: Mô hình xác suất có số biến hữu hạn (Parametric Statistical Models)
- Lecture 4: Dự đoán với số biến hữu hạn và vùng tự tin (Parametric Estimation and Confidence Intervals)
- Lecture 5: Vùng tự tin và phương pháp Delta (Confidence Intervals and Delta Method)

## Unit 3

Phương pháp ước lượng tham số của mô hình xác suất

- Lecture 6: Khoảng cách giữa các phân phối xác suất
- Lecture 7: Maximum Likelihood Estimator
- Lecture 8: Ví dụ cho Maximum Likelihood Estimator
- Lecture 9: Các tính chất thống kê của Maximum Likelihood Estimator
- Lecture 10: Phương pháp tích suất và M-Estimation

# Unit 4

## Kiểm định thống kê

- Lecture 11: Introduction to Parametric Hypothesis Testing
- Lecture 12: The Wald Test and Likelihood Ratio Test
- Lecture 13: The T-test
- Lecture 14: Multiple Hypothesis Testing