ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

Chương 8
Quy hoạch tuyến tính

Vũ Văn Thiệu, Đinh Viết Sang, Nguyễn Khánh Phương

TÍNH TOÁN KHOA HỌC

Nội dung

1) Thuật toán đơn hình
   1. Bài toán QHTT dạng chính tắc và dạng chuẩn
   2. Phương án cơ sở chấp nhận được
   3. Công thức số gia hàm mục tiêu. Tiêu chuẩn tối ưu
   4. Thuật toán đơn hình dạng ma trận nghịch đảo
   5. Thuật toán đơn hình dạng bảng
   6. Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình
   7. Thuật toán đơn hình hai pha
2) Lý thuyết đối ngẫu
   1. Xây dựng bài toán đối ngẫu
   2. Các định lý đối ngẫu
   3. Một số ứng dụng của lý thuyết đối ngẫu

THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

Thuật toán đơn hình là thuật toán cơ bản giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

Nội dung

1. Bài toán QHTT dạng chính tắc và dạng chuẩn
2. Phương án cơ sở chấp nhận được
3. Công thức số gia hàm mục tiêu. Tiêu chuẩn tối ưu
4. Thuật toán đơn hình dạng ma trận nghịch đảo
5. Thuật toán đơn hình dạng bảng
6. Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình
7. Thuật toán đơn hình hai pha

Bài toán QHTT dạng chính tắc và dạng chuẩn

Bài toán QHTT tổng quát

- Bài toán QHTT tổng quát là bài toán tối ưu hoá mà trong đó chúng ta phải tìm cực đại (cực tiểu) của hàm mục tiêu tuyến tính với điều kiện biến số phải thoả mãn hệ thống phương trình và bất phương trình tuyến tính. Mô hình toán học của bài toán có thể phát biểu như sau

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max), \qquad (1)$$

với điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, ..., p \quad (p \le m) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = p+1, p+2, ..., m \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, ..., q \quad (q \le n) \qquad (4)$$

$$x_j <> 0, j = q+1, q+2, ..., n \qquad (5)$$

- Ký hiệu $x_j <> 0$ để chỉ ra rằng biến x_j không có đòi hỏi trực tiếp về dấu.

Bài toán QHTT tổng quát

- Ràng buộc:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,\dots,p$$

được gọi là ràng buộc cơ bản dạng đẳng thức.

- Ràng buộc:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, i = p+1,\dots,m$$

được gọi là ràng buộc cơ bản dạng bất đẳng thức.

- Ràng buộc:

$$x_j \geq 0, j = 1,\dots,q$$

được gọi là ràng buộc về dấu của biến số.

Bài toán QHTT dạng chính tắc

- Ta gọi bài toán QHTT dạng chính tắc là bài toán sau:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Bài toán QHTT dạng chuẩn

- Ta gọi bài toán QHTT dạng chuẩn là bài toán sau:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Đưa BT QHTT tổng quát về dạng chính tắc

- Rõ ràng Bài toán QHTT dạng chính tắc là trường hợp riêng của QHTT tổng quát.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max), \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, p \quad (p \le m) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = p+1, p+2, \ldots, m \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, q \quad (q \le n) \qquad (4)$$

$$x_j <> 0, j = q+1, q+2, \ldots, n \qquad (5)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

- Mặt khác, một bài toán QHTT bất kỳ luôn có thể đưa về dạng chính tắc nhờ các phép biến đổi sau:

Đưa BT QHTT tổng quát về dạng chính tắc

a) Đưa ràng buộc bất đẳng thức dạng "≤" về dạng "≥". Bất phương trình tuyến tính

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

là tương đương với bất phương trình tuyến tính sau

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge -b_i$$

Đưa BT QHTT tổng quát về dạng chính tắc

b) Đưa ràng buộc dạng "=" về dạng "≥". Phương trình tuyến tính

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

là tương đương với hệ gồm 2 bất phương trình tuyến tính sau

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i$$

Đưa BT QHTT tổng quát về dạng chính tắc

c) Đưa ràng buộc dạng "≥" về dạng "=". Bất phương trình tuyến tính

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

là "tương đương" với hệ gồm 1 phương trình tuyến tính và một điều kiện không âm đối với biến số sau đây

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i = b_i$$

$$y_i \geq 0$$

- Tương đương hiểu theo nghĩa: Nếu $(x_1, x_2, ..., x_n, y_i)$ là nghiệm của hệ thì $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của bất phương trình.
- Biến y_i được gọi là biến bù (hay biến phụ).

Đưa BT QHTT tổng quát về dạng chính tắc

d) Thay mỗi biến không có điều kiện dấu x_j bởi hiệu hai biến có điều kiện về dấu:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-,$$

$$x_j^+ \geq 0,\ x_j^- \geq 0.$$

e) Đưa bài toán tìm cực đại về bài toán tìm cực tiểu. Bài toán tối ưu hoá

$$\max \{ f(x): x \in D\}$$

là tương đương với bài toán tối ưu hoá

$$\min \{- f(x): x \in D\}$$

theo nghĩa: Lời giải của bài toán này cũng là lời giải của bài toán kia và ngược lại, đồng thời ta có đẳng thức:

$$\max \{ f(x): x \in D\} = - \min \{- f(x): x \in D\}$$

Đưa BT QHTT tổng quát về dạng chính tắc

f) Đưa ràng buộc dạng "≤" về dạng "=". Bất phương trình tuyến tính

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$$

là "tương đương" với hệ gồm 1 phương trình tuyến tính và một điều kiện không âm đối với biến số sau đây

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i$$

$$y_i \ge 0$$

- Tương đương hiểu theo nghĩa: Nếu $(x_1, x_2, ..., x_n, y_i)$ là nghiệm của hệ thì $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của bất phương trình.
- Biến y_i được gọi là biến bù (hay biến phụ).

Ví dụ:

- Bài toán QHTT

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \max,$$
$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 \le 15,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 9,$$
$$x_1 , x_2 , x_4 \ge 0, \; x_3 <> 0,$$

là tương đương với bài toán QHTT dạng chính tắc:

$$-x_1 - 2x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) - 4x_4 \to \min,$$
$$x_1 + 5x_2 + 4(x_3^+ - x_3^-) + 6x_4 + x_5 = 15,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3(x_3^+ - x_3^-) + 3x_4 \qquad = 9,$$
$$x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0,$$

.

tức là nếu $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3^+, \bar{x}_3^-, \bar{x}_4, \bar{x}_5)$ là phương án tối ưu của bài toán dạng chính tắc

thì $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ với $\bar{x}_3 = \bar{x}_3^+ - \bar{x}_3^-$ sẽ là phương án tối ưu của bài toán xuất phát.

Giải bài toán QHTT trong mặt phẳng

Giải bài toán QHTT trong mặt phẳng

- Bài toán QHTT dạng chuẩn 2 biến số

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min,$$

với điều kiện

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 \geq b_i,\ i = 1, 2, ..., m$$

- Ký hiệu

$$D = \{(x_1,x_2): a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 \geq b_i,\ i = 1, 2, ..., m\}$$

là miền ràng buộc.

Giải bài toán QHTT trong mặt phẳng

- Từ ý nghĩa hình học, mỗi bất phương trình tuyến tính

$$a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 \geq\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

xác định một nửa mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Miền ràng buộc *D* xác định như giao của *m* nửa mặt phẳng sẽ là một đa giác lồi trên mặt phẳng.

Giải bài toán QHTT trong mặt phẳng

- Phương trình

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$$

có vectơ pháp tuyến là (c_1, c_2)

khi α thay đổi sẽ xác định các đường thẳng song song với nhau mà ta sẽ gọi là các đường mức (với giá trị mức α).

Mỗi điểm $u=(u_1,u_2)\in D$ sẽ nằm trên đường mức với mức

$$\alpha_u = c_1u_1 + c_2u_2 = f(u_1,u_2)$$

Giải bài toán QHTT trong mặt phẳng

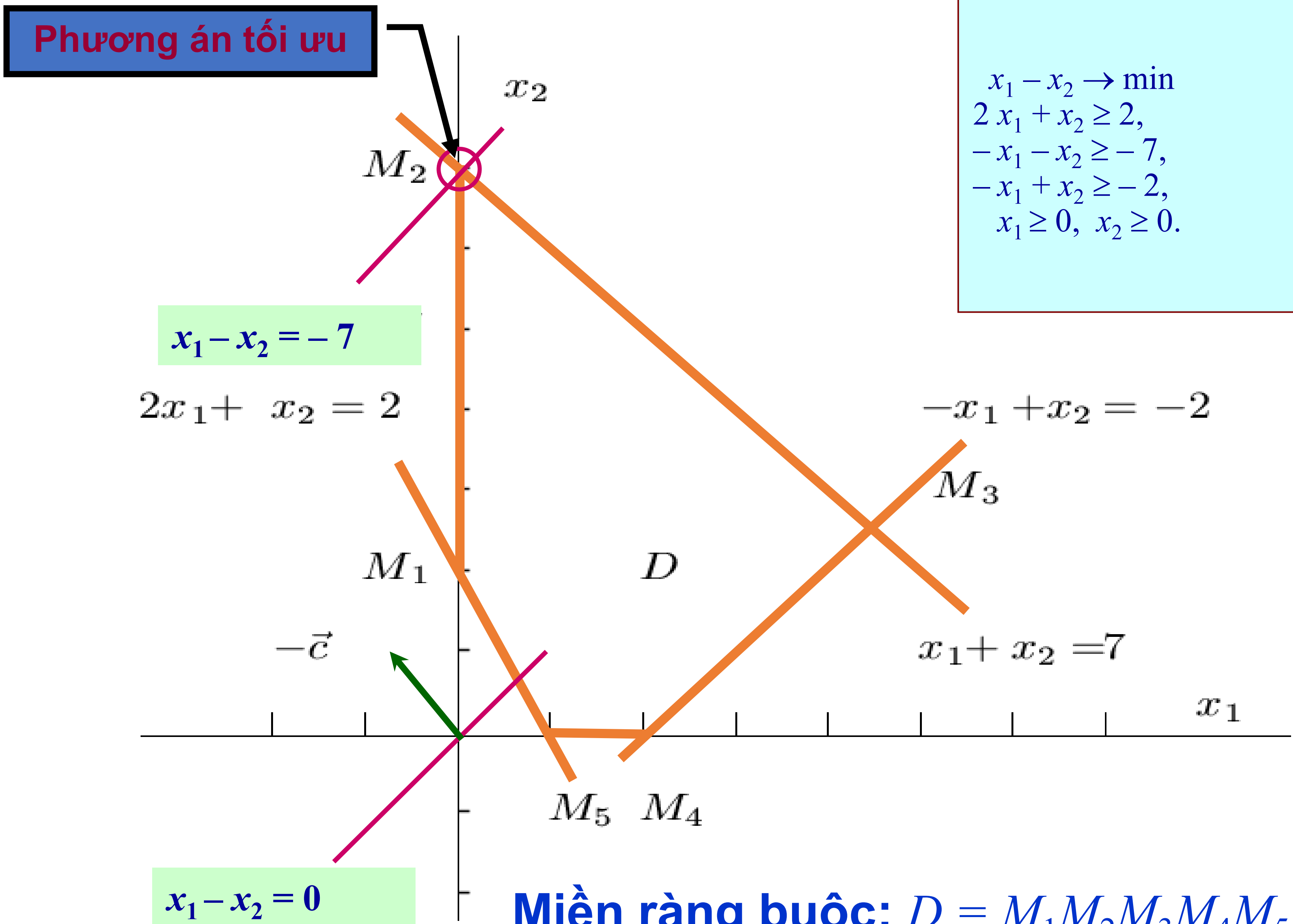
Bài toán đặt ra có thể phát biểu dưới ngôn ngữ hình học như sau: Trong số các đường mức cắt tập D, hãy tìm đường mức với giá trị mức nhỏ nhất.

Bây giờ, có thể nhận thấy là, nếu dịch chuyển song song các đường mức theo hướng vectơ pháp tuyến cuả chúng $c = (c_1, c_2)$ thì giá trị mức sẽ tăng, nếu dịch chuyển theo hướng ngược lại thì giá trị mức sẽ giảm. Vì vậy, để giải bài toán đặt ra ta có thể tiến hành như sau: Bắt đầu từ một đường mức cắt D ta dịch chuyển song song các đường mức theo hướng ngược với hướng vectơ $c = (c_1, c_2)$ cho đến khi nào việc dịch chuyển tiếp theo làm cho đường mức không còn cắt D nữa thì dừng. Các điểm cuả D nằm trên đường mức cuối cùng này sẽ là các lời giải cần tìm, còn giá trị cuả nó chính là giá trị tối ưu cuả bài toán.

Ví dụ 1

- Giải bài toán QHTT sau:

$$
\begin{aligned}
& x_1 - x_2 \to \min \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2, \\
& -x_1 - x_2 \geq -7, \\
& -x_1 + x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
& x_1 - x_2 \to \min \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2, \\
& -x_1 - x_2 \geq -7, \\
& -x_1 + x_2 \geq -2, \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

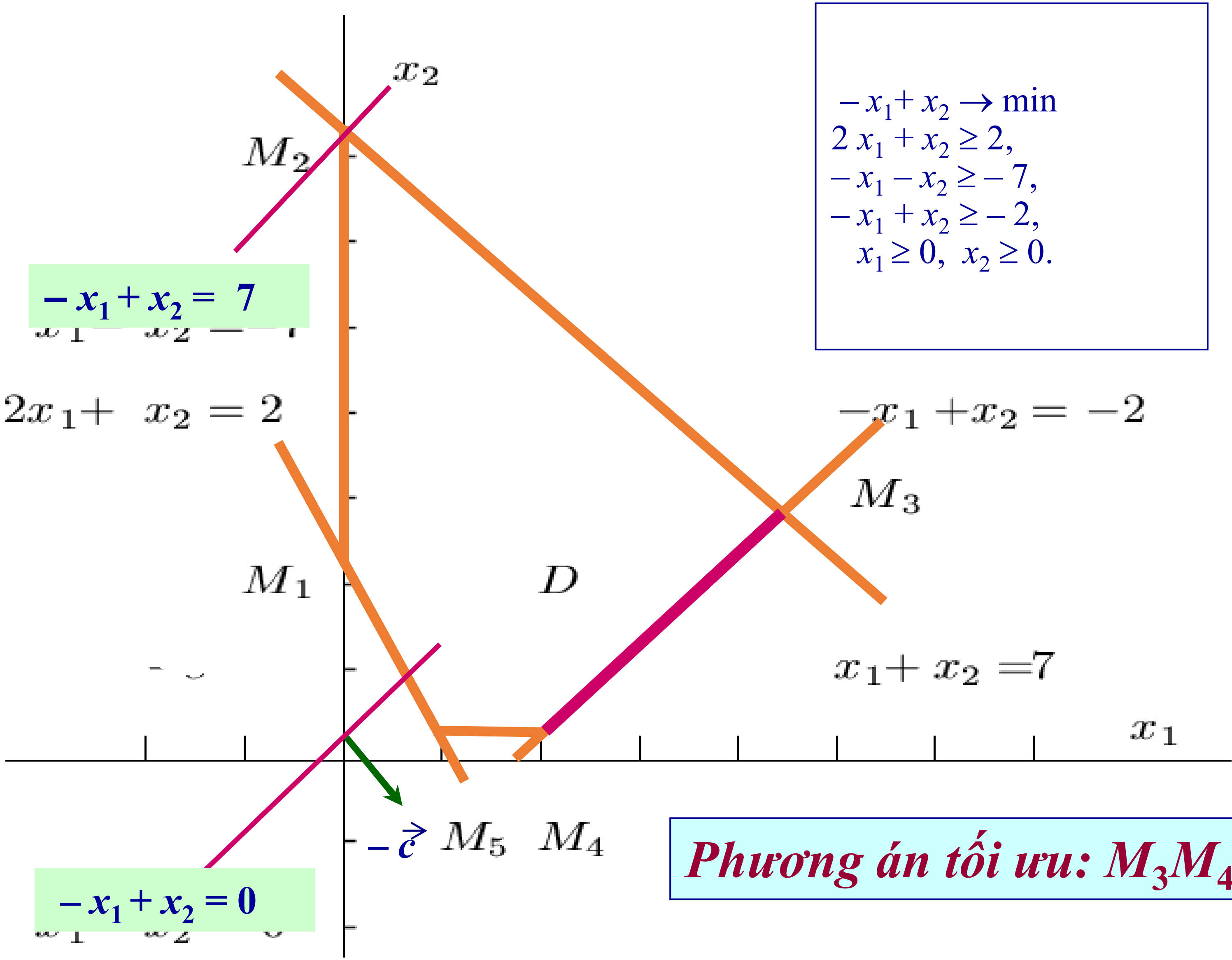
Miền ràng buộc: $D = M_1M_2M_3M_4M_5$

Ví dụ 1

- Giải theo phương pháp hình học vừa mô tả ta thu được lời giải tối ưu của bài toán tương ứng với điểm $M_2(0,7)$: $x^* = (0,7)$, với giá trị tối ưu là $f_* = -7$.
- Nếu thay hàm mục tiêu của bài toán bởi

$$-x_1+x_2 \rightarrow \min,$$

thì giá trị tối ưu sẽ là -2 và tất cả các điểm nằm trên đoạn M_3M_4 đều là phương án tối ưu của bài toán. Chẳng hạn, có thể lấy phương án tối ưu của bài toán là $x^*=(2,0)$ (tương ứng với điểm M_4).



$$
\begin{aligned}
&-x_1+x_2 \to \min\\
&2x_1+x_2 \ge 2,\\
&-x_1-x_2 \ge -7,\\
&-x_1+x_2 \ge -2,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Phương án tối ưu: M_3M_4

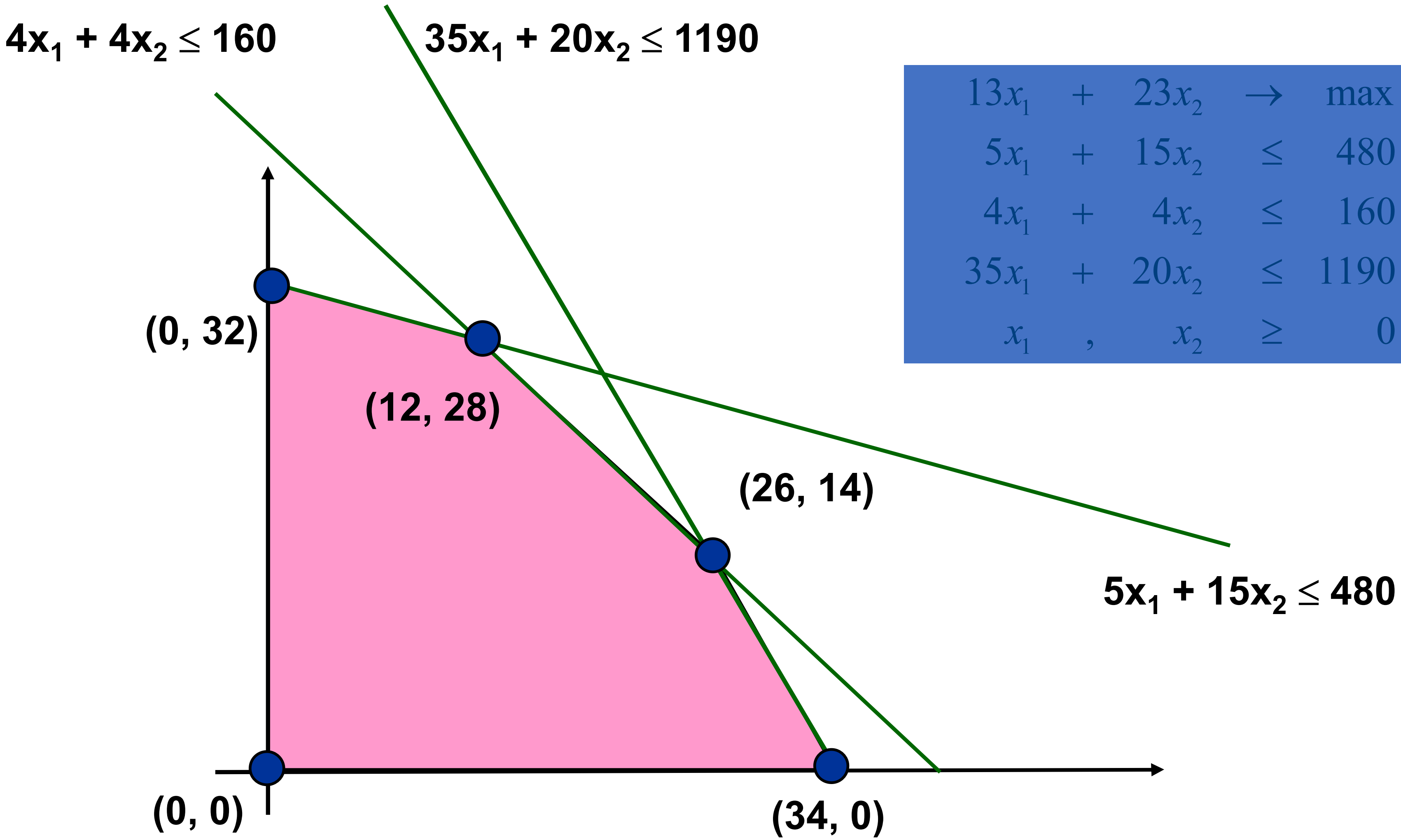
Nhận xét

- Trong cả hai trường hợp ta luôn tìm được phương án tối ưu là một đỉnh nào đó của miền ràng buộc.
- “Bài toán QHTT trong mặt phẳng luôn có phương án tối ưu là đỉnh của miền ràng buộc.”
- Nhận xét hình học quan trọng này đã dẫn tới việc đề xuất thuật toán đơn hình để giải bài toán QHTT.

Ví dụ 2

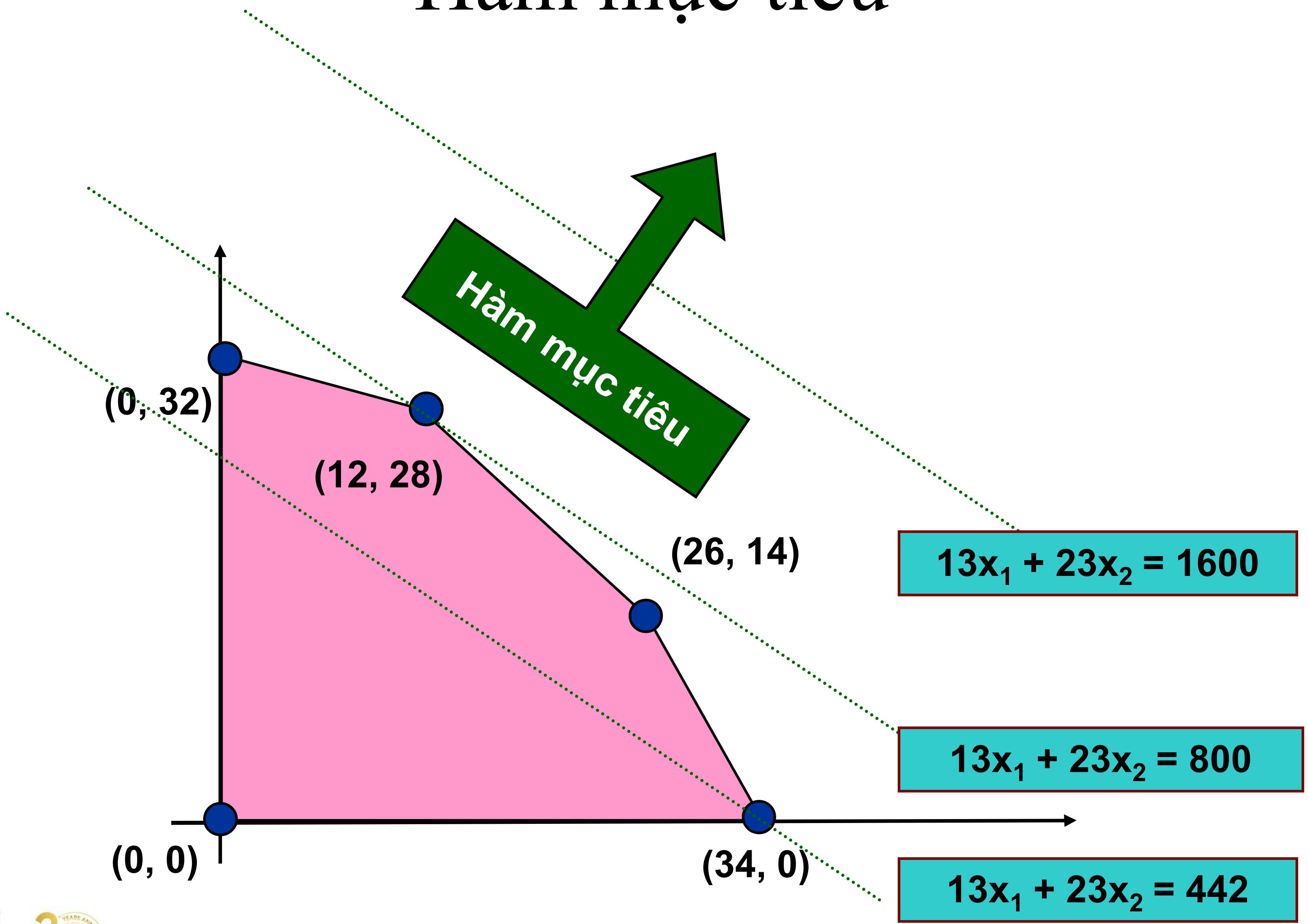
$$
\begin{array}{rcrcr}
13x_1 & + & 23x_2 & \rightarrow & \max \\
5x_1 & + & 15x_2 & \leq & 480 \\
4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 160 \\
35x_1 & + & 20x_2 & \leq & 1190 \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Miền ràng buộc



$$
\begin{array}{rcrcr}
13x_1 & + & 23x_2 & \rightarrow & \max \\
5x_1 & + & 15x_2 & \leq & 480 \\
4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 160 \\
35x_1 & + & 20x_2 & \leq & 1190 \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

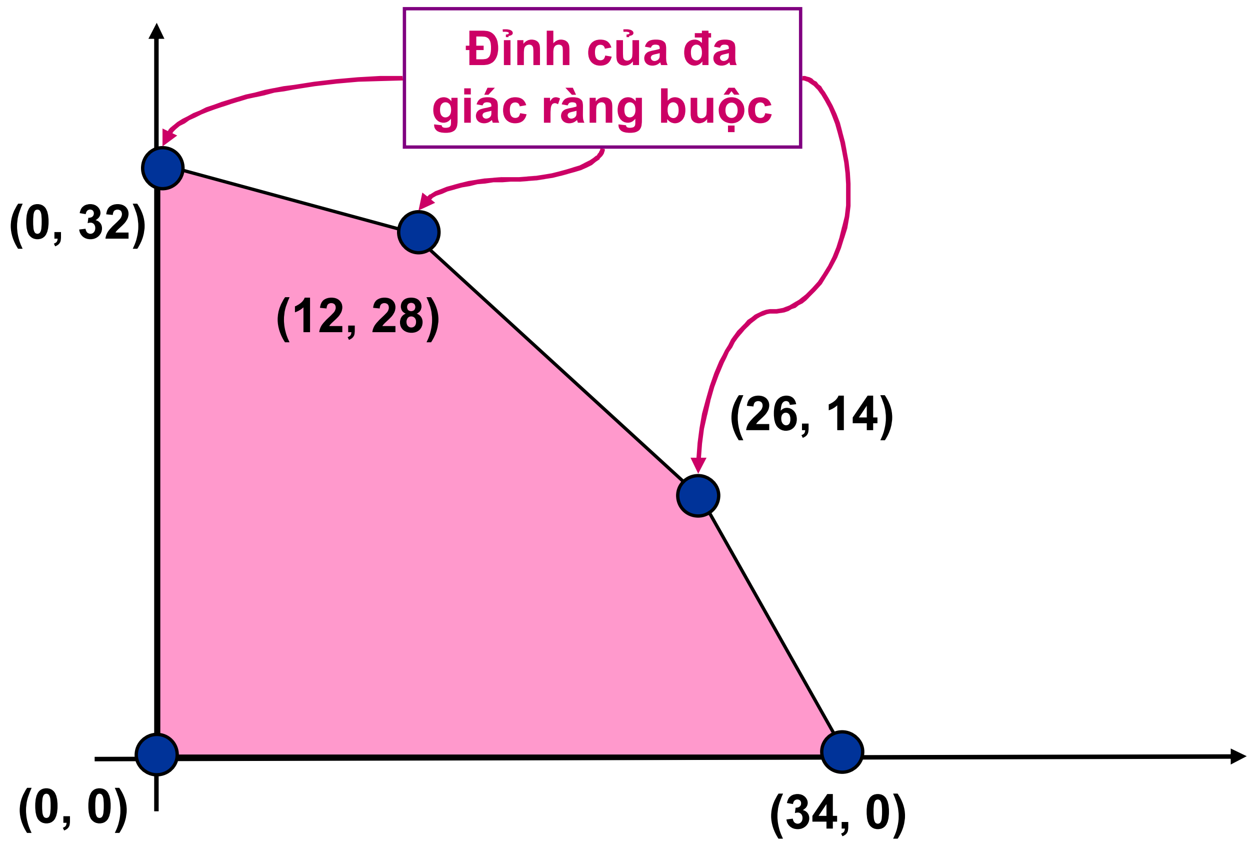
Hàm mục tiêu



Hàm mục tiêu
(0, 32)
(12, 28)
(26, 14)
(0, 0)
(34, 0)
$13x_1 + 23x_2 = 1600$
$13x_1 + 23x_2 = 800$
$13x_1 + 23x_2 = 442$

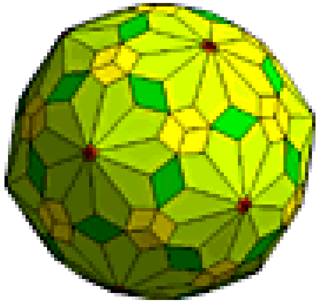
Ý nghĩa hình học

- Tồn tại lời giải tối ưu là đỉnh của đa giác ràng buộc

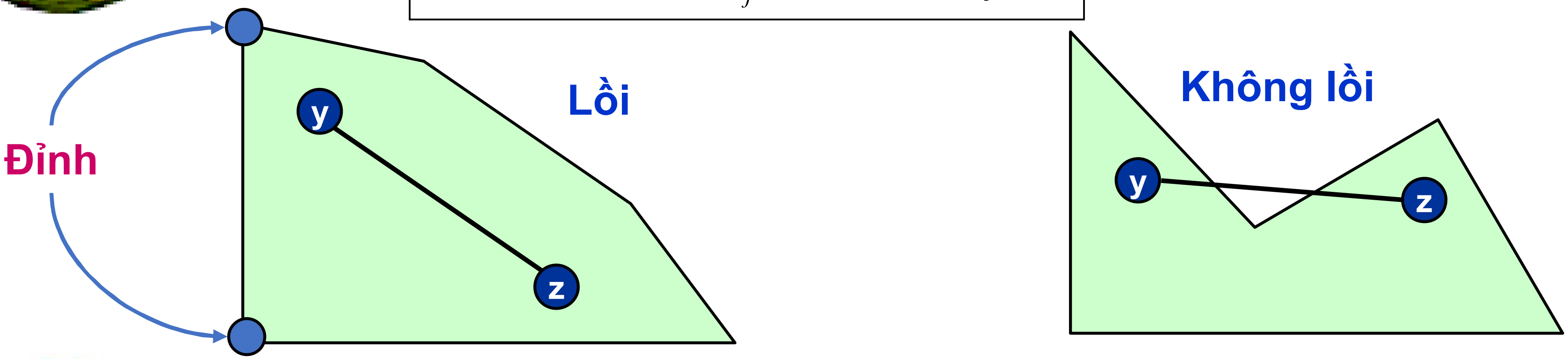


Ý nghĩa hình học của QHTT

- Miền ràng buộc là tập lồi đa diện.
  - Lồi: nếu y và z là pacnđ, thì $\alpha y + (1-\alpha)z$ cũng là pacnđ với mọi $0 \le \alpha \le 1$.
  - Đỉnh: pacnđ x mà không thể biểu diễn dưới dạng $\alpha y + (1-\alpha)z$, $0 < \alpha < 1$, với mọi cặp pacnđ phân biệt y và z.



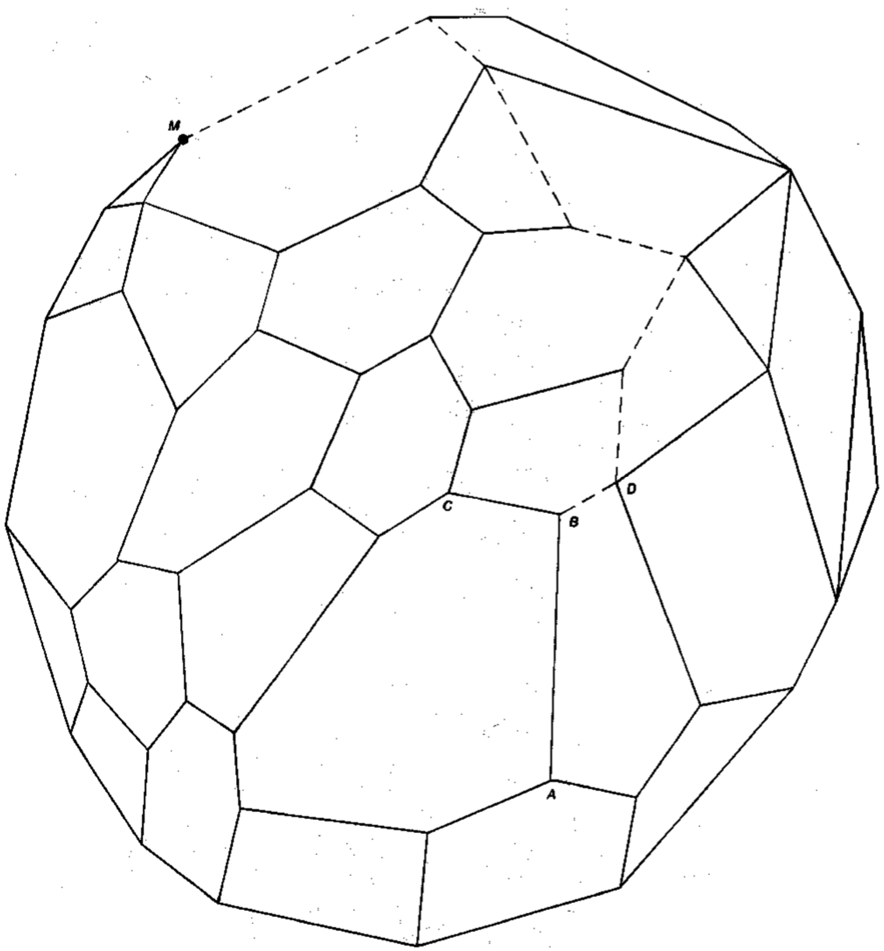
$$
\begin{array}{llrcll}
(P) & \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \le & b_i & 1 \le i \le m \\
 & & x_j & \ge & 0 & 1 \le j \le n
\end{array}
$$



Ý nghĩa hình học

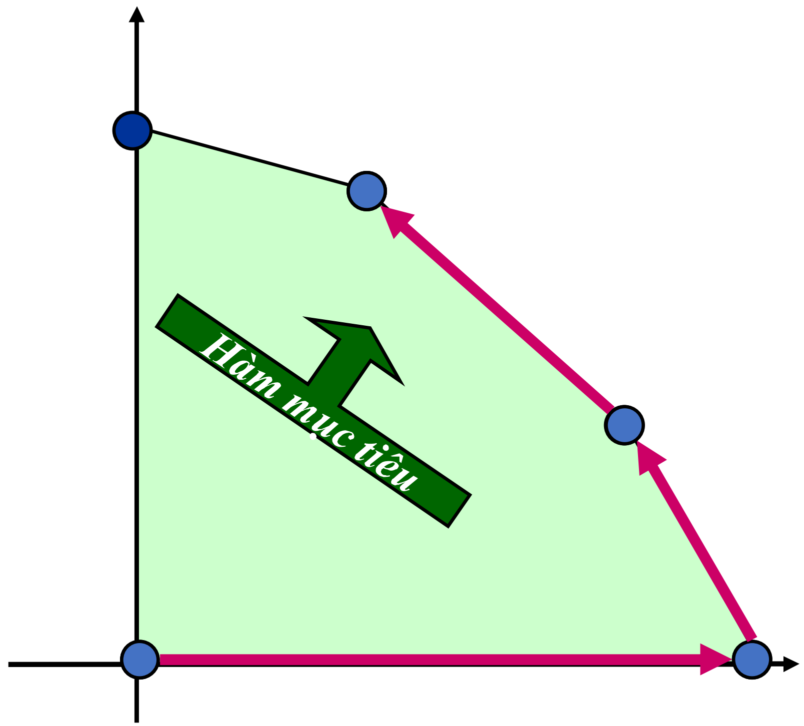
- Kết luận: Nếu bài toán có pa tối ưu thì nó luôn có pa tối ưu là đỉnh của miền ràng buộc vẫn đúng cho nhiều chiều.

⇒ Chỉ cần tìm pa tối ưu trong số hữu hạn phương án.



Thuật toán đơn hình

- Simplex Algorithm.
  (Dantzig 1947)
  - Thuật toán thực hiện dịch chuyển từ một đỉnh sang một đỉnh kề tốt hơn cho đến khi đến được đỉnh tối ưu.
  - Thuật toán là hữu hạn nhưng có độ phức tạp hàm mũ.



Một số ký hiệu và định nghĩa

- Trong các phần tiếp theo ta sẽ chỉ làm việc với bài toán QHTT dạng chính tắc:

Tìm cực tiểu:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma^n{}_{j=1}\, c_j x_j \to \min,$$

với điều kiện

$$\Sigma^n{}_{i=1}\, a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1,2,\ldots,n.$$

Ký hiệu và định nghĩa

- Đưa vào các ký hiệu:
  - $x=(x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – vectơ biến số
  - $c=(c_1, c_2, ..., c_n)^T$ – vectơ hệ số hàm mục tiêu
  - $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – ma trận ràng buộc
  - $b=(b_1,...,b_m)^T$- vectơ ràng buộc (vế phải)

Ký hiệu và định nghĩa

- Ta có thể viết lại bài toán dưới dạng ma trận:

$$f(x) = c^T x \to \min,$$
$$Ax = b,\ x \geq 0$$

hay

$$\min\{\, f(x) = c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

- Bất đẳng thức vectơ:

$$y = (y_1, y_2, ..., y_k) \geq 0$$

được hiểu theo nghĩa từng thành phần:

$$y_i \geq 0\ ,\ i = 1, 2, ..., k.$$

Ký hiệu và định nghĩa

- Ký hiệu các tập chỉ số:
  - $J = \{1,2,...,n\}$ tập chỉ số của các biến số
  - $I = \{1,2,...,m\}$ tập chỉ số của các ràng buộc

Khi đó ta sử dụng các ký hiệu sau

$x = x(J) = \{x_j: j\in J\}$ - vectơ biến số;

$c = c(J) = \{c_j: j\in J\}$ – vectơ hệ số hàm mục tiêu;

$A = A(I, J) = \{a_{ij}: i\in I, j\in J\}$ – ma trận ràng buộc

$A_j = (a_{ij}: i\in I)$ – vectơ cột thứ j của ma trận A.

Hệ phương trình ràng buộc cơ bản của bài toán QHTT dạng chính tắc còn có thể viết dưới dạng:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = b$$

Ký hiệu và định nghĩa

- Tập

$$D = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$$

được gọi là miền ràng buộc (miền chấp nhận được)

x được gọi là phương án chấp nhận được.

- Phương án chấp nhận được x^* đem lại giá trị nhỏ nhất cho hàm mục tiêu, tức là

$$c^T x^* \leq c^T x \quad \text{với mọi} \quad x \in D$$

được gọi là phương án tối ưu của bài toán và khi đó giá trị

$$f^* = c^T x^*$$

được gọi là giá trị tối ưu của bài toán

PHƯƠNG ÁN CƠ SỞ CHẤP NHẬN ĐƯỢC

Khái niệm phương án cơ sở chấp nhận được (pacscnđ) là khái niệm trung tâm trong thuật toán đơn hình

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Trước hết ta giả thiết rằng

$$\text{rank}\,(A) = m \qquad\qquad (*)$$

nghĩa là hệ phương trình ràng buộc cơ bản gồm m phương trình độc lập tuyến tính.

- Chú ý: Trên thực tế giả thiết (*) là tương đương với giả thiết hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ có nghiệm.
- Về sau ta sẽ gỡ bỏ các giả thiết này.

Phương án cơ sở chấp nhận được

Định nghiã 1. *Ta gọi* **cơ sở** *cuả ma trận A là một bộ gồm m vectơ cột độc lập tuyến tính* $B = \{A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_m}\}$ *cuả nó.*

Giả sử $B = A(I, J_B)$, trong đó $J_B = \{j_1, ..., j_m\}$ là một cơ sở cuả ma trận A.

Khi đó vectơ $x = (x_1, ..., x_n)$ thoả mãn:

$x_j = 0,\ j \in J_N = J \setminus J_B;$

x_{j_k} là thành phần thứ k của vectơ $B^{-1}b\ (k = 1, ..., m)$.

sẽ được gọi là *phương án cơ sở* tương ứng với cơ sở B.

Các biến $x_j,\ j \in J_B$ được gọi là *biến cơ sở*, còn $x_j,\ j \in J_N$ - *biến phi cơ sở*.

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Như vậy, nếu ký hiệu

  $x_B = x(J_B)$, $x_N = x(J_N)$

  thì phương án cơ sở x tương ứng với cơ sở B có thể xác định nhờ thủ tục sau:

  1. *Đặt* $x_N=0$.
  2. *Xác định* x_B *từ hệ phương trình* $Bx_B = b$.

- Từ giả thiết (*) suy ra bài toán luôn có phương án cơ sở.

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Giả sử $x = (x_B, x_N)$ là phương án cơ sở tương ứng với cơ sở B. Khi đó bài toán QHTT dạng chính tắc có thể viết lại như sau:

$$f(x_B, x_N) = c_B x_B + c_N x_N \to \min$$

$$B x_B + N x_N = b,$$

$$x_B,\ x_N \geq 0,$$

trong đó $N = (A_j: j \in J_N)$ được gọi là ma trận phi cơ sở.

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Xét bài toán QHTT

$$6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 - 3x_6 + 12x_7 \to \min$$

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & & & & = 4 \\
x_1 & & & & + x_5 & & & = 2 \\
 & & x_3 & & & + x_6 & & = 3 \\
 & 3x_2 + & x_3 & & & & + x_7 & = 6
\end{array}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7 \geq 0$$

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Dưới dạng ma trận:

  $c = (6, 2, -5, 1, 4, -3, 12)^T;$

  $b = (4, 2, 3, 6)^T;$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \end{Vmatrix}$$

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Xét cơ sở

$$B = \{A_4, A_5, A_6, A_7\} = E_4$$

- Phương án cơ sở $x = (x_1, x_2, ..., x_7)$ tương ứng với nó thu được bằng cách đặt:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

và các giá trị của $x_B= (x_4, x_5, x_6, x_7)$ thu được bằng việc giải hệ phương trình

$$Bx_B = b \text{ hay } E_4 x_B = b$$

Từ đó ta tìm được: $x_B = (4, 2, 3, 6)$.

- Vậy pacs tương ứng với cơ sở B là

$$x = (0, 0, 0, 4, 2, 3, 6)$$

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Xét cơ sở

$$B_1 = \{A_2, A_5, A_6, A_7\}$$

- Phương án cơ sở $y = (y_1, y_2, ..., y_7)$ tương ứng với nó thu được bằng cách đặt:

$$y_1 = 0;\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$$

và các giá trị của $y_B = (y_2, y_5, y_6, y_7)$ thu được bằng việc giải hệ

$$B_1 y_B = b$$

hay

$$\begin{aligned} y_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 4 \\ y_5 \qquad\qquad\qquad &= 2 \\ y_6 \qquad\quad &= 3 \\ 3y_2 \qquad\qquad\qquad + y_7 &= 6 \end{aligned}$$

Từ đó ta tìm được: $y_B = (4, 2, 3, -6)$.

- Vậy pacs tương ứng với cơ sở B_1 là

$$y = (0, 4, 0, 0, 2, 3, -6)$$

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Dễ thấy:
  - pacs tương ứng với cơ sở B

$$x = (0, 0, 0, 4, 2, 3, 6)$$

là phương án chấp nhận được

  - còn pacs tương ứng với cơ sở B_1

$$y = (0, 4, 0, 0, 2, 3, -6)$$

không là phương án chấp nhận được

Định nghĩa. *Phương án cơ sở được gọi là* ***phương án cơ sở chấp nhận được*** (***lời giải cơ sở chấp nhận được***) *nếu như nó là phương án chấp nhận được.*

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Bài toán QHTT có bao nhiêu pacscnd?

- Số pacscnd ≤ Số cơ sở ≤ $C(n,m)$

- Vậy một bài toán QHTT chỉ có thể có một số hữu hạn pacscnd

Phương án cơ sở chấp nhận được

- Bài toán QHTT luôn có pacscnd?
- Không đúng!
- Ví dụ: Nếu bài toán QHTT không có phương án chấp nhận được thì rõ ràng nó cũng không có pacscnd!
- Tuy nhiên ta có thể chứng minh kết quả sau:
- *Định lý 1. Nếu bài toán QHTT có pacnđ thì nó cũng có pacscnd*

Công thức số gia hàm mục tiêu

Công thức số gia hàm mục tiêu

- Giả sử x là pacscnd với cơ sở tương ứng là $B=(A_j: j\in J_B)$. Ký hiệu:

  $J_B=\{j_1,j_2, ..., j_m\}$ – tập chỉ số biến cơ sở;

  $J_N=J \setminus J_B$ – tập chỉ số biến phi cơ sở;

  $B=(A_j: j\in J_B)$ – ma trận cơ sở;

  $N=(A_j: j\in J_N)$ – ma trận phi cơ sở;

  $x_B = x(J_B) = \{x_j: j\in J_B\}, x_N = x(J_N) = \{x_j: j\in J_N\}$ – vectơ biến cơ sở và phi cơ sở;

  $c_B = c(J_B) = \{c_j: j\in J_B\}, c_N = c(J_N) = \{c_j: j\in J_N\}$ – vectơ hệ số hàm mục tiêu của biến cơ sở và phi cơ sở;

Công thức số gia hàm mục tiêu

- Xét pacnd $z=x+\Delta x$, trong đó $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_n)$ – vectơ gia số của biến số. Ta tìm công thức tính số gia của hàm mục tiêu:

$$\Delta f = c'z - c'x = c'\Delta x.$$

- Do x, z đều là pacnd nên $Ax=b$ và $Az=b$.Vì vậy gia số Δx phải thoả mãn điều kiện $A\Delta x = 0$, hay là:

$$B\Delta x_B + N\Delta x_N = 0,$$

trong đó $\Delta x_B = (\Delta x_j: j \in J_B)$, $\Delta x_N = (\Delta x_j: j \in J_N)$.

Công thức số gia hàm mục tiêu

- Suy ra

$$\Delta x_B = -B^{-1}N\Delta x_N. \qquad (1.10)$$

- Từ đó ta có

$$c'\Delta x = c'_B\Delta x_B + c'_N\Delta x_N = -(c'_B B^{-1}N - c'_N)\,\Delta x_N.$$

- Ký hiệu:

  $u = c'_B B^{-1}$ – vectơ thế vị

  $\Delta_N = (\Delta_j: j \in J_N) = uN - c'_N$ – vectơ ước lượng.

  ta thu được công thức:

$$\Delta f = c'z - c'x = -\Delta_N \Delta x_N = -\sum_{j \in J_N} \Delta_j \Delta x_j$$

- Công thức thu được gọi là **công thức số gia hàm mục tiêu**

Tiêu chuẩn tối ưu

Tiêu chuẩn tối ưu

- **Định nghĩa.** Pacscnd x được gọi là *không thoái hoá* nếu như tất cả các thành phần cơ sở của nó là khác không. Bài toán QHTT được gọi là không thoái hoá nếu như tất cả các pacscnd của nó là không thoái hoá

- **Định lý 2.** (Tiêu chuẩn tối ưu) Bất đẳng thức

$$\Delta_N \leq 0 \; (\Delta_j \leq 0, j \in J_N) \qquad (1.13)$$

là điều kiện đủ và trong trường hợp không thoái hoá cũng là điều kiện cần để pacscnd x là tối ưu.

Tiêu chuẩn tối ưu

Chứng minh. Điều kiện đủ. Theo định nghiã phương án cơ sở chấp nhận được ta có $x_N = 0$. Vì vậy, đối với mọi phương án chấp nhận được $\bar{x} = x + \Delta x$ ta có

$$\Delta x_N = \bar{x}_N - x_N = \bar{x}_N \geq 0. \tag{1.14}$$

Từ đó theo công thức số gia hàm mục tiêu suy ra

$$c'\bar{x} - c'x = -\Delta'_N \Delta x_N \geq 0$$

hay

$$c'\bar{x} \geq c'x.$$

Bất đẳng thức cuối cùng chứng tỏ x là phương án tối ưu.

Tiêu chuẩn tối ưu

Điều kiện cần. Giả sử x là phương án cơ sở chấp nhận được không thoái hóa tối ưu. Khi đó

$$x_B > 0. \tag{1.15}$$

Giả sử bất đẳng thức (1.13) không được thực hiện. Khi đó tìm được chỉ số $j_0 \in J_N$ sao cho

$$\Delta_{j_0} > 0. \tag{1.16}$$

Xây dựng vectơ $\bar{x} = x + \Delta x$, trong đó Δx được xác định như sau

$$\Delta x_{j_0} = \theta \geq 0, \quad \Delta x_j = 0, j \neq j_0, \ \ j \in J_N,$$

còn số gia của các biến cơ sở được xác định từ (1.10), tức là

$$\Delta x_B = -B^{-1} N \Delta x_N = -\theta B^{-1} A_{j_0}.$$

Tiêu chuẩn tối ưu

Rõ ràng khi đó vectơ $\bar{x}$ sẽ thoả mãn hệ ràng buộc cơ bản: $A\bar{x} = A(x + \Delta x) = Ax + A\Delta x = Ax = b$. Ngoài ra, ta có

$$\bar{x}_N = \bar{x}(J_N) = x_N + \Delta x_N = \Delta x_N \geq 0$$

với mọi $\theta \geq 0$. Còn các thành phần của vectơ $\bar{x}_B = \bar{x}(J_B)$ thỏa mãn

$$\bar{x}_B = x_B + \Delta x_B = x_B - \theta B^{-1} A_{j_0}. \tag{1.17}$$

Do (1.15) nên từ (1.17) suy ra là với $\theta > 0$ đủ nhỏ ta có $\bar{x}_B \geq 0$. Như vậy, với giá trị θ đó $\bar{x}$ sẽ là phương án chấp nhận được. Mặt khác, từ (1.15) và công thức số gia hàm mục tiêu ta có

$$c'\bar{x} - c'x = -\Delta'_N \Delta x_N = -\theta \Delta_{j_0} < 0$$

hay

$$c'\bar{x} < c'x.$$

Bất đẳng thức thu được là mâu thuẫn với tính tối ưu của x.
Định lý được chứng minh.

Điều kiện đủ để hàm mục tiêu không bị chặn dưới

Giả sử đối với phương án cơ sở chấp nhận được x tiêu chuẩn tối ưu không được thực hiện, tức là tìm được chỉ số $j_0 \in J_N$ sao cho $\Delta_{j_0} > 0$. Xét trường hợp khi các thành phần $x_{jj_0},\ j \in J_B$ của vectơ $B^{-1}A_{j_0}$ là không dương:

$$x_{jj_0} \leq 0,\ j \in J_B.$$

Trong trường hợp này $\bar{x}_B \geq 0\ \forall \theta > 0$, tức là vectơ $\bar{x} = (x_B, x_N)$ sẽ là phương án chấp nhận được với mọi $\theta > 0$. Đồng thời khi đó ta có $c'\bar{x} = c'x - \theta\Delta_{j_0}$. Từ đó suy ra là khi θ càng lớn thì giá trị hàm mục tiêu tại phương án chấp nhận được $\bar{x}$ càng nhỏ và $c'\bar{x} \longrightarrow -\infty$ khi $\theta \longrightarrow +\infty$. Vì vậy ta có

Định lý 1.3. (Điều kiện đủ để hàm mục tiêu không bị chặn dưới) *Nếu trong số các ước lượng của phương án cơ sở chấp nhận được x có ước lượng dương ($\Delta_{j_0} > 0$) mà ứng với nó các thành phần của vectơ $B^{-1}A_{j_0}$ là không dương ($B^{-1}A_{j_0} \leq 0$) thì hàm mục tiêu của bài toán là không bị chặn dưới.*

THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH DẠNG MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Bước lặp đơn hình

- Ta tiếp tục phân tích pacscnđ x với cơ sở tương ứng B. Xét trường hợp khi tiêu chuẩn tối ưu và cả điều kiện đủ để hàm mục tiêu không bị chặn dưới không được thực hiện. Khi đó phải tìm được chỉ số j_0 sao cho $\Delta_{jo}>0$.
- Từ phần chứng minh điều kiện cần của tiêu chuẩn tối ưu ta thấy rằng có thể xây dựng được phương án chấp nhận được $\bar{x}$ với giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn. Ta nhắc lại công thức xây dựng $\bar{x}$:

$$\bar{x} = x + \Delta x,$$

trong đó vectơ gia số Δx được xác định như sau

$$\Delta x_{jo} = \theta,\ \Delta x_j = 0,\ j \neq j_0,\ j \in J_N,$$

$$\Delta x_B = -\ \theta B^{-1} A_{jo}$$

Bước lặp đơn hình

- Khi đó ta thu được

$$\bar{x}_N = \Delta x_N, \quad \bar{x}_B = x_B - \theta B^{-1} A_{jo},$$

và giá trị hàm mục tiêu tại $\bar{x}$ sẽ là

$$c\bar{x} = cx - \theta \Delta_{j_0}$$

- Rõ ràng: θ càng lớn thì giá trị hàm mục tiêu giảm được càng nhiều. Ta quan tâm đến giá trị θ lớn nhất có thể được. Do θ cần chọn sao cho $\bar{x}$ là phương án chấp nhận được nên nó phải thoả mãn hệ bất phương trình tuyến tính sau:

$$\bar{x}_B = x_B - \theta B^{-1} A_{jo} \geq 0, \ \theta \geq 0.$$

- Ký hiệu $B^{-1}A_{jo} = \{x_{i,jo}: i \in J_B\}$, ta viết lại hệ bất phương trình trên dưới dạng

$$x_i - \theta x_{i,jo} \geq 0, \ i \in J_B,$$

$$\theta \geq 0.$$

Bước lặp đơn hình

- Ký hiệu

$$\theta_i = \begin{cases} x_i / x_{ij_0}, \text{khi } x_{ij_0} > 0 \\ +\infty, \quad\quad \text{khi } x_{ij_0} \le 0 \end{cases}, \ i \in J_B$$

$$\theta_0 = \theta_{i_0} = x_{i_0} / x_{i_0 j_0} = \min \ \{ \theta_i : i \in J_B \}$$

- Ta có nghiệm của hệ bất phương trình là

$$0 \le \theta \le \theta_0 .$$

- Từ đó suy ra giá trị θ lớn nhất có thể chọn là θ_0. Khi đó nếu thay x bởi phương án $\bar{x}(\theta_0) = x + \Delta x$, trong đó vectơ gia số được xây dựng với $\theta = \theta_0$, giá trị hàm mục tiêu giảm đi được một lượng là $\theta_{io}\, \Delta_{jo} > 0$.

Bước lặp đơn hình

Ta sẽ chỉ ra là $\bar{x}$ xây dựng như vậy cũng là phương án cơ sở chấp nhận được. Rõ ràng $\bar{x}_j = 0$ với $j \in \bar{J}_N = J_N \backslash j_0 \cup i_0$. Gọi $\bar{J}_B = J_B \backslash i_0 \cup j_0$, $\bar{B} = \{ A_j : j \in \bar{J}_B \}$. ($\bar{B}$ thu được từ B bằng cách thay cột A_{j_0} bởi cột A_{i_0}). Ta có

$$B^{-1}\bar{B} = (B^{-1}A_{j_1}, \dots, B^{-1}A_{j_0}, \dots, B^{-1}A_{j_m}),$$

suy ra

$$B^{-1}\bar{B} = V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_{j_1 j_0} & \dots & 0 \\ & & \dots\dots & & \\ 0 & \dots & x_{i_0 j_0} & \dots & 0 \\ & & \dots\dots & & \\ 0 & \dots & x_{j_m j_0} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Do đó det(B^{-1} $\bar{B}$) = det $V = x_{io,jo} \neq 0$, suy ra det $\bar{B} \neq 0$ hay $\bar{B}$ là cơ sở của bài toán. Vì vậy $\bar{x}$ là pacscnđ.

Ta gọi việc chuyển từ pacscnđ *x* sang pacscnđ $\bar{x}$ theo thủ tục mô tả ở trên là một bước lặp đơn hình thực hiện đối với pacscnđ *x*.

Thuật toán đơn hình dạng ma trận nghịch đảo

- Trong các tính toán của một bước lặp đơn hình, ma trận B^{-1} giữ một vai trò quan trọng. Thuật toán dưới đây sẽ được mô tả trong ngôn ngữ của ma trận nghịch đảo B^{-1}.
- Bước khởi tạo.

  Tìm một pacscnd x với cơ sở tương ứng là B.

  Tính B^{-1}.

Thuật toán đơn hình dạng ma trận nghịch đảo

Bước $k = 1, 2, \ldots$ Ở đầu bước lặp ta đã có ma trận B_k^{-1} ($B_1^{-1} = B^{-1}$), tập chỉ số biến cơ sở J_B^k, $J_N^k = J \backslash J_B^k$, phương án cơ sở chấp nhận được $x^k = (x_B^k, x_N^k) = (B_k^{-1} b, 0)$.

1) Tính $u = c'_{B_k} B_k^{-1}$ (tương đương với giải hệ phương trình $u' B_k = c_{B_k}$).

2) Tính $\Delta_j = u' A_j - c_j, \ j \in J_N^k$.

3) Nếu $\Delta_j \leq 0 \ \forall j \in J_N^k$ thì thuật toán kết thúc và x^k là phương án tối ưu cần tìm.

4) Nếu trong số các $\Delta_j, \ j \in J_N^k$ còn ước lượng dương, thì chọn $\Delta_{j_0} > 0 (j_0 = j_0(k))$.

5) Tính $x_{jj_0}, \ j \in J_B^k$ là các thành phần của vecto $y = B_k^{-1} A_{j_0}$ (tương đương với giải hệ phương trình $B_k y = A_{j_0}$).

6) Nếu $x_{jj_0} \leq 0 \ \forall j \in J_B^k$ thì hàm mục tiêu của bài toán là không bị chặn dưới. Thuật toán kết thúc.

Thuật toán đơn hình dạng ma trận nghịch đảo

7) Tính

$$\theta_i = \begin{cases} x_i/x_{ij_0}, & \text{nếu } x_{ij_0} > 0,\ i \in J_B^k, \\ +\infty, & \text{nếu } x_{ij_0} \leq 0,\ i \in J_B^k. \end{cases}$$

$$\theta_0 = \theta_{i_0} = x_{i_0}/x_{i_0 j_0} = min\{\theta_i :\ i \in J_B^k\}.$$

$(i_0 = i_0(k))$.

8) Đặt

$$J_B^{k+1} = J_B^k \backslash i_0 \cup j_0;\ J_N^{k+1} = J_N^k \backslash j_0 \cup i_0,$$

$$B_{k+1} = \{A_j :\ j \in J_B^{k+1}\}.$$

Tính ma trận nghịch đảo B_{k+1}^{-1} của B_{k+1}, chuyển sang bước $k+1$.

Thuật toán đơn hình dạng ma trận nghịch đảo

Chú ý. Trong 4) Δ_{j_0} là ước lượng dương tuỳ ý. Tuy nhiên, trong trường hợp $|J_N^k|$ là không quá lớn ta có thể chọn nó theo quy tắc sau

$$\Delta_{j_0} = \max \{ \Delta_j : \ j \in J_N^k \}.$$

Để tính ma trận nghịch đảo B_{k+1}^{-1} của $\bar{B} = B_{k+1}$, từ ma trận nghịch đảo B_k^{-1} của $B = B_k$, để ý đến mối quan hệ của chúng trong công thức (1.21): $B^{-1}\bar{B} = V$, suy ra

$$\bar{B}^{-1} = V^{-1}B^{-1}. \tag{1.22}$$

Do

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & -x_{j_1 j_0}/x_{i_0 j_0} & \dots & 0 \\ & & \dots. & & \\ 0 & \dots & 1/x_{i_0 j_0} & \dots & 0 \\ & & \dots. & & \\ 0 & \dots & -x_{j_m j_0}/x_{i_0 j_0} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

Thuật toán đơn hình dạng ma trận nghịch đảo

Do

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & -x_{j_1 j_0}/x_{i_0 j_0} & \dots & 0 \\ & & \dots\dots & & \\ 0 & \dots & 1/x_{i_0 j_0} & \dots & 0 \\ & & \dots\dots & & \\ 0 & \dots & -x_{j_m j_0}/x_{i_0 j_0} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.23)$$

nên nếu ký hiệu $B_{k+1}^{-1} = \{\, \bar{u}_{ij} : i \in J_B^{k+1},\ j \in I\}$, $B_k^{-1} = \{\, u_{ij} : i \in J_B^k,\ j \in I\}$ thì từ (1.22), (1.23) ta suy ra công thức sau đây để tính các phần tử của B_{k+1}^{-1}

$$\bar{u}_{i_0 j} = u_{i_0 j}/x_{i_0 j_0},\ j \in I,$$

$$\bar{u}_{ij} = u_{ij} - x_{ij_0} u_{i_0 j}/x_{i_0 j_0},\ i \neq i_0,\ i \in J_B^{k+1}\ ,\ j \in I.$$

Thuật toán đơn hình dạng bảng

Thuật toán đơn hình dạng bảng

- Để thuận tiện cho những tính toán bằng tay ta sẽ mô tả một dạng khác của thuật toán đơn hình đó là thuật toán đơn hình dạng bảng.
- Giả sử ta có pacscnd x với cơ sở tương ứng là B. Các ký hiệu vẫn giữ nguyên như trước.
- Ta gọi ***bảng đơn hình tương ứng với pacscnd x*** là bảng sau đây

Bảng đơn hình

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	c_1	...	c_j	...	c_n	θ
			A_1	...	A_j	...	A_n	
c_{j_1}	A_{j_1}	x_{j_1}			$x_{j_1 j}$			θ_{j_1}
...	...	...			...			...
c_i	A_i	x_i			x_{ij}			θ_i
...	...	...			...			...
c_{j_m}	A_{j_m}	x_{j_m}			$x_{j_m j}$			θ_{j_m}
Δ			Δ_1	...	Δ_j	...	Δ_n	

Bảng đơn hình

- Cột đầu tiên ghi hệ số hàm mục tiêu của các biến cơ sở.
- Cột thứ hai dành để ghi tên của các cột cơ sở.
- Cột thứ ba ghi các giá trị của các biến cơ sở (các thành phần của vectơ $x_B = \{x_j : j \in J_B\} = B^{-1}b$).
- Các phần tử x_{ij}, $i \in J_B$ trong các cột tiếp theo được tính theo công thức:

$$\{x_{ij}, i \in J_B\} = B^{-1}A_j, j=1,2,\ldots,n.$$

- Cột cuối cùng để ghi các tỷ số θ_i.
- Dòng đầu tiên của bảng ghi hệ số hàm mục tiêu của các biến (c_j).
- Dòng tiếp theo ghi tên của các cột $A_1, \ldots, A_n$.
- Dòng cuối cùng gọi là dòng ước lượng:

$$\Delta_j = \sum_{i \in J_B} c_i x_{ij} - c_j, j=1,2,\ldots,n.$$

- Có thể thấy rằng $\Delta_j = 0, j \in J_B$.

Thuật toán đơn hình dạng bảng

Với bảng đơn hình xây dựng được ta có thể tiến hành thực hiện một bước lặp đơn hình đối với phương án cơ sở chấp nhận được x như sau.

1. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Nếu các phần tử của dòng ước lượng là không dương ($\Delta_j \le 0,\ j = 1, ..., n$) thì phương án cơ sở chấp nhận được đang xét là tối ưu, thuật toán kết thúc.

2. Kiểm tra điều kiện đủ để hàm mục tiêu không bị chặn dưới: Nếu có ước lượng $\Delta_{j_0} > 0$ mà các phần tử trong bảng đơn hình trên cột ứng với nó đều không dương ($x_{jj_0} \le 0,\ j \in J_B$), thì hàm mục tiêu của bài toán là không bị chặn dưới, thuật toán kết thúc.

3. Tìm cột xoay: Tìm $\Delta_{j_0} = max\ \{\ \Delta_j :\ j = 1, ..., n\} > 0.$

Cột A_{j_0} gọi là cột xoay (cột đưa vào cơ sở), còn biến x_{j_0} gọi là biến đưa vào.

Tìm cột xoay

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	c_1	…	c_{j_0}	…	c_n	θ
			A_1	…	A_{j_0}	…	A_n	
c_{j_1}	A_{j_1}	x_{j_1}			$x_{j_1 j_0}$			θ_{j_1}
…	…	…			…			…
c_i	A_i	x_i			$x_{i j_0}$			θ_i
…	…	…			…			…
c_{j_m}	A_{j_m}	x_{j_m}			$x_{j_m j_0}$			θ_{j_m}
Δ			Δ_1	…	Δ_{j_0}	…	Δ_n	

Thuật toán đơn hình dạng bảng

4. Tìm dòng xoay: Tính

$$\theta_i = \begin{cases} x_i/x_{ij_0}, & \text{nếu } x_{ij_0} > 0, \\ +\infty, & \text{nếu } x_{ij_0} \le 0, \; i \in J_B, \end{cases}$$

$$\theta_0 = \theta_{i_0} = x_{i_0}/x_{i_0 j_0} = min\{\theta_i : \; i \in J_B\}.$$

Dòng A_{i_0} gọi là dòng xoay (A_{i_0} - cột đưa ra cơ sở), còn biến x_{i_0} gọi là biến đưa ra. Phần tử nằm trên giao của dòng xoay và cột xoay của bảng đơn hình được gọi là *phần tử xoay.*

5. Thực hiện phép biến đổi đơn hình chuyển từ phương án cơ sở chấp nhận được x sang phương án cơ sở chấp nhận được $\bar{x}$: Bảng đơn hình tương ứng với $\bar{x}$ (gọi tắt là bảng mới) có thể thu được từ bảng đơn hình tương ứng với x (gọi tắt là bảng cũ) theo các quy tắc biến đổi sau đây (suy trực tiếp từ các công thức (1.22), (1.23)):

Tìm dòng xoay

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	c_1	…	c_{j_0}	…	c_n	θ
			A_1	…	A_{j_0}	…	A_n	
c_{j_1}	A_{j_1}	x_{j_1}			$x_{j_1 j_0}$			θ_{j_1}
…	…	…			…			…
c_{i_0}	A_{i_0}	x_{i_0}			$x_{i_0 j_0}$			θ_{i_0}
…	…	…			…			…
c_{j_m}	A_{j_m}	x_{j_m}			$x_{j_m j_0}$			θ_{j_m}
Δ			Δ_1	…	Δ_{j_0}	…	Δ_n	

Phép biến đổi đơn hình

i) Các phần tử ở vị trí dòng xoay trong bảng mới ($\bar{x}_{i_0 j}$) *bằng các phần tử tương ứng trong bảng cũ chia cho phần tử xoay:* $\bar{x}_{i_0 j} = x_{i_0 j}/x_{i_0 j_0}$, $j \in J$.

ii) Các phần tử ở vị trí cột xoay trong bảng mới, ngoại trừ phần tử nằm trên vị trí phần tử xoay bằng 1, còn tất cả là bằng 0.

iii) Các phần tử cần tính còn lại trong bảng mới ($\bar{x}_{ij}$, $\bar{\Delta}_j$) *được tính từ các phần tử tương ứng trong bảng cũ theo công thức sau:*

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} - x_{i_0 j} x_{i j_0}/x_{i_0 j_0},\ i \in J_B\ (i \neq i_0),\ j \in J\ (j \neq j_0),$$

$$\bar{\Delta}_j = \Delta_j - x_{i_0 j}\Delta_{j_0}/x_{i_0 j_0},\ j \in J\ (j \neq j_0).$$

Thuật toán đơn hình dạng bảng

Các công thức trên dễ dàng ghi nhớ nhờ các hình chữ nhật sau

$$
\begin{array}{ccc}
x_{ij} & \text{———————} & x_{ij_0} \\
| & & | \\
x_{i_0 j} & \text{———————} & x_{i_0 j_0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
x_{i_0 j} & \text{———————} & x_{i_0 j_0} \\
| & & | \\
\Delta_j & \text{———————} & \Delta_{j_0}
\end{array}
$$

Chính vì vậy các công thức biến đổi vừa nêu còn được gọi là *quy tắc hình chữ nhật.*

Chú ý. Các phép biến đổi *i), ii), iii)* sẽ hoàn toàn được xác định nếu ta chỉ ra phần tử xoay $x_{i_0 j_0}$. Ta sẽ gọi chúng là phép biến đổi đơn hình với phần tử xoay được chọn là $x_{i_0 j_0}$.

Qui tắc hình chữ nhật

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	c_1	…	c_{j_0}	…	c_n	θ
			A_1	…	A_{j_0}	…	A_n	
c_{j_1}	A_{j_1}	x_{j_1}	$x_{j_1 1}$		$x_{j_1 j_0}$		$x_{j_1 n}$	θ_{j_1}
…	…	…			…			…
c_{i_0}	A_{i_0}	x_{i_0}	$x_{i_0 1}$		$x_{i_0 j_0}$		$x_{i_0 n}$	θ_{i_0}
…	…	…			…			…
c_{j_m}	A_{j_m}	x_{j_m}	$x_{j_m 1}$		$x_{j_m j_0}$		$x_{j_m n}$	θ_{j_m}
Δ			Δ_1	…	Δ_{j_0}	…	Δ_n	

Ví dụ

Ví dụ. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng thuật toán đơn hình:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & -6x_2 & +32x_3 & +x_4 & +x_5 & +10x_6 & +100x_7 & \longrightarrow min, \\
x_1 & & & +x_4 & & +6x_6 & & = 9, \\
3x_1 & +x_2 & -4x_3 & & & +2x_6 & +x_7 & = 2, \\
x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & +2x_6 & & = 6,
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 7.$$

Bắt đầu từ phương án cơ sở chấp nhận được $x' = (0, 0, 0, 9, 6, 0, 2)$ với cơ sở tương ứng là $B = (A_4, A_7, A_5)$. Do cơ sở B là ma trận đơn vị nên dễ dàng xây dựng bảng đơn hình ứng với phương án cơ sở chấp nhận được x.

Bảng đơn hình

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	1	-6	32	1	1	10	100	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4	9	1	0	0	1	0	6	0	9
100	A_7	2	3	1	-4	0	0	2	1	2/3
1	A_5	6	1	2	0	0	1	2	0	6
Δ			301	108	-432	0	0	198	0	

Tìm cột xoay: Cột xoay là Cột có ước lượng lớn nhất

Bảng đơn hình

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	1	-6	32	1	1	10	100	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4	9	1	0	0	1	0	6	0	9
100	A_7	2	3	1	-4	0	0	2	1	2/3
1	A_5	6	1	2	0	0	1	2	0	6
Δ			301	108	-432	0	0	198	0	

Tìm dòng xoay: Tính các tỷ số θ_i . Dòng xoay là dòng có tỷ số nhỏ nhất

Biến đổi bảng đơn hình

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	1	-6	32	1	1	10	100	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4									
1	A_1	2/3	1	1/3	-4/3	0	0	2/3	1/3	2
1	A_5									
Δ										

Biến đổi bảng: Các phần tử trên dòng xoay ở bảng mới = Các phần tử tương ứng trong bảng cũ chia cho phần tử xoay.

Biến đổi bảng đơn hình

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	1	-6	32	1	1	10	100	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4									
1	A_1	2/3	1	1/3	-4/3	0	0	2/3	1/3	2
1	A_5									
Δ										

Biến đổi bảng: Các phần tử trên các cột cơ sở là các vectơ đơn vị.

Biến đổi bảng đơn hình

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	1	-6	32	1	1	10	100	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4		0			1	0			
1	A_1	2/3	1	1/3	-4/3	0	0	2/3	1/3	
1	A_5		0			0	1			
Δ			0			0	0			

Biến đổi bảng: Các phần tử trên các cột cơ sở là các vectơ đơn vị.

Bảng đơn hình ở bước 2

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	1	-6	32	1	1	10	100	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4	25/3	0	-1/3	4/3	1	0	16/3	-1/3	-
1	A_1	2/3	1	1/3	-4/3	0	0	2/3	1/3	2
1	A_5	16/3	0	5/3	4/3	0	1	4/3	-1/3	16/5
Δ			0	23/3	-92/3	0	0	-8/3	**-301/3**	

Biến đổi bảng: Các phần tử còn lại tính theo qui tắc hình chữ nhật.

Bảng đơn hình ở bước 3

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	1	-6	32	1	1	10	100	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4	9	1	0	0	1	0	6	0	
-6	A_2	2	3	1	-4	0	0	2	1	
1	A_5	2	-5	0	8	0	1	-2	-2	
Δ			-23	0	0	0	0	-18	-108	

Tiêu chuẩn tối ưu được thoả mãn. Thuật toán kết thúc.

Phương án tối ưu: $x^* = (0, 2, 0, 9, 2, 0, 0)$. Giá trị tối ưu: $f_* = -1$

TÍNH HỮU HẠN CỦA THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình

Định nghiã. *Thuật toán giải bài toán tối ưu hoá được gọi là hữu hạn nếu như nó cho phép sau một số hữu hạn phép tính tìm được phương án tối ưu của bài toán.*

Do mỗi bước lặp của thuật toán đơn hình có thể thực hiện xong sau một số hữu hạn phép tính. Vì vậy, để chứng minh tính hữu hạn của thuật toán đơn hình ta sẽ chứng minh rằng nó phải kết thúc sau hữu hạn bước lặp.

Định nghiã. *Bài toán QHTT được gọi là không thoái hoá nếu như tất cả các phương án cơ sở chấp nhận được của nó là không thoái hoá, trong trường hợp ngược lại bài toán được gọi là thoái hoá.*

Định lý 1.4. *Giả sử bài toán QHTT là không thoái hoá và có phương án tối ưu. Khi đó với mọi phương án cơ sở chấp nhận được xuất phát thuật toán đơn hình là hữu hạn.*

Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình

Chứng minh. Giả sử x^1 là phương án cơ sở chấp nhận được xuất phát. Trong quá trình thực hiện thuật toán đơn hình ta sẽ xây dựng được dãy x^k, B_k, $k = 1, 2, \ldots$ các phương án cơ sở chấp nhận được và cơ sở tương ứng với chúng của bài toán. Do bài toán là không thoái hoá nên mỗi phương án cơ sở chấp nhận được x^k là không thoái hoá, do đó ở mỗi bước lặp, khi chuyển từ phương án cơ sở chấp nhận được x^k sang phương án cơ sở chấp nhận được x^{k+1} hàm mục tiêu sẽ giảm thực sự (xem công thức (1.19)). Do

$$c'x^k = c'_{B_k} x_{B_k} = c'_{B_k} B_k{}^{-1} b$$

nên trong quá trình thực hiện thuật toán không có cơ sở nào bị lặp lại. Mặt khác, ma trận A chỉ có một số hữu hạn cơ sở (số cơ sở của A không vượt quá C_n^m), vì thế, sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ xây dựng được phương án cơ sở chấp nhận được x^{k_0}, $k_0 < +\infty$, mà tại nó tiêu chuẩn tối ưu được thực hiện.

Định lý được chứng minh.

THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH HAI PHA

Thuật toán đơn hình hai pha

Thuật toán đơn hình mô tả trong các mục trước để giải bài toán QHTT

$$min\ \{c'x:\ Ax = b,\ x \geq 0\} \tag{1.25}$$

được xây dựng dựa trên các giả thiết sau đây

i) $rank\ A = m$;

ii) $D = \{x:\ Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$;

iii) Biết một phương án cơ sở chấp nhận được.

Trong mục này ta sẽ xây dựng thuật toán giải bài toán đặt ra mà không cần sử dụng các giả thiết vừa nêu.

Bài toán phụ

- Bài toán xuất phát

$$\min\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,2,\dots,m, x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,n\} \qquad (1.25)$$

- Không giảm tổng quát ta giả thiết là

$$b_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, m,$$

bởi vì: nếu có $b_i < 0$ thì chỉ cần nhân hai vế phương trình tương ứng với -1.

- Theo các thông số của bài toán đã cho ta xây dựng bài toán phụ sau đây

$$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \quad \to \quad \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,2,\dots,m, \qquad (1.27)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,n,n+1,\dots,n+m.$$

- Vectơ $x_u = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ được gọi là vectơ biến giả.

Bài toán phụ

Bổ đề sau đây cho thấy mối liên hệ giữa bài toán (1.25) và bài toán (1.27).

Bổ đề 1. *Bài toán (1.25) có phương án chấp nhận được khi và chỉ khi thành phần x_u^* trong phương án tối ưu (x^*, x_u^*) của bài toán (1.27) là bằng không.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử x^* là phương án chấp nhận được của bài toán (1.25). Khi đó rõ ràng $(x^*, x_u^* = 0)$ là phương án chấp nhận được của bài toán (1.27). Mặt khác, do $e' x_u^* = 0 \leq e' x_u$, với mọi (x, x_u) là phương án chấp nhận được của bài toán (1.27) nên (x^*, x_u^*) là phương án tối ưu của nó.

Điều kiện đủ. Rõ ràng nếu $(x^*, x_u^* = 0)$ là phương án tối ưu của bài toán (1.27) thì x^* là phương án chấp nhận được của bài toán (1.25).

Pha thứ 1: Giải bài toán phụ

- Đối với bài toán phụ ta có ngay một pacscnđ là

$$(x=0, x_u=b)$$

với cơ sở tương ứng là

$$B = \{A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}\} = E_m$$

trong đó A_{n+i} là vectơ cột tương ứng với biến giả x_{n+i}, i=1, 2, ..., m.

- Vì vậy ta có thể áp dụng thuật toán đơn hình để giải bài toán phụ. Việc giải bài toán phụ bằng thuật toán đơn hình được gọi là **pha thứ nhất** của thuật toán đơn hình hai pha giải bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc (1.25), và bài toán phụ còn được gọi là bài toán ở pha thứ nhất

Pha thứ 1: Giải bài toán phụ

Kết thúc pha thứ nhất ta sẽ xây dựng được phương án cơ sở chấp nhận được tối ưu (x^*, x_u^*) với cơ sở tương ứng là $B^* = \{A_j : j \in J_B^*\}$ của bài toán (1.27). Có thể xảy ra một trong 3 khả năng sau:

i) $x_u^* \neq 0$;

ii) $x_u^* = 0$ và ma trận B^* không chứa các cột ứng với biến giả, tức là nó chứa toàn cột của ma trận ràng buộc của bài toán (1.25):

$$B^* = \{A_j : j \in J_B^*\}, J_B^* \cap J_u = \emptyset.$$

iii) $x_u^* = 0$ và ma trận B^* có chứa cột ứng với biến giả, tức là

$$B^* = \{A_j : j \in J_B^*\}, J_B^* \cap J_u \neq \emptyset.$$

Pha thứ 1: Giải bài toán phụ

Ta sẽ xét từng trường hợp một.

i) Nếu $x_u^* \neq 0$, thì theo bổ đề 1, bài toán (1.25) là không có phương án chấp nhận được, thuật toán kết thúc.

ii) Trong trường hợp này x^* là phương án cơ sở chấp nhận được của bài toán (1.25) với cơ sở tương ứng là B^*. Bắt đầu từ nó ta có thể tiến hành thuật toán đơn hình để giải bài toán (1.25). Giai đoạn này gọi là pha thứ hai của thuật toán đơn hình hai pha và toàn bộ thủ tục vừa trình bày được gọi là thuật toán đơn hình hai pha để giải bài toán QHTT (1.25).

iii) Ký hiệu x_{i_*}, $i_* \in J_B^* \cap J_u$ là một thành phần biến giả trong phương án cơ sở chấp nhận được tối ưu (x^*, x_u^*) của bài toán (1.27).

Ký hiệu $x_{i_* j}$, $j \in J \cup J_u$ là các phần tử của dòng i_* trong bảng đơn hình tương ứng với phương án tối ưu (x^*, x_u^*) của bài toán (1.27).

Bảng đơn hình

c_j cơ sở	Cơ sở	Phương án	c^*_1	…	c^*_j	…	c^*_{n+m}	θ
			A_1	…	A_j	…	A_{n+m}	
$c^*_{j(1)}$	$A_{j(1)}$	$x_{j(1)}$			$x_{j(1)j}$			
…	…	…			…			
$c^*_{i^*}$	A_{i^*}	x_{i^*}			x_{i^*j}			
…	…	…			…			
$c^*_{j(m)}$	$A_{j(m)}$	$x_{j(m)}$			$x_{j(m)j}$			
Δ			Δ_1	…	Δ_j	…	Δ_{n+m}	

Pha thứ 1: Giải bài toán phụ

Nếu tìm được chỉ số $j_* \in J \backslash J_B^*$ sao cho $x_{i_* j_*} \neq 0$ thì thực hiện một phép biến đổi bảng đơn hình với phần tử xoay được chọn là $x_{i_* j_*}$ ta sẽ đưa được thành phần biến giả x_{i_*} ra khỏi cơ sở và thay vào chỗ của nó là biến x_{j_*}.

Nếu $x_{i_* j} = 0,\ \forall j \in J \backslash J_B^*$, thì điều đó có nghiã là phương trình tương ứng với nó trong hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ là hệ quả của các phương trình còn lại. Khi đó từ bảng đơn hình tương ứng với phương án tối ưu (x^*, x_u^*) của bài toán (1.27) ta có thể xoá bỏ dòng nói trên và đồng thời xoá bỏ luôn cột ứng với biến giả x_{i_*}.

Trong cả hai trường hợp vừa nêu ta đều loại bỏ được biến giả x_{i_*} khỏi cơ sở .

Thuật toán đơn hình hai pha

- Lần lượt điểm diện tất cả các thành phần biến giả trong cơ sở theo thủ tục vừa làm đối với x_{i*} ta sẽ đi đến bảng đơn hình mới mà trong đó không còn thành phần biến giả trong cơ sở, tức là đến được trường hợp ii), đồng thời trong quá trình này ta cũng loại bỏ được tất cả các ràng buộc phụ thuộc tuyến tính trong hệ $Ax=b$.
- Từ bảng thu được ta có thể bắt đầu thực hiện pha thứ hai của thuật toán đơn hình hai pha.

Thuật toán đơn hình hai pha

- Như vậy thuật toán đơn hình hai pha áp dụng đối với một QHTT bất kỳ chỉ có thể kết thúc ở một trong ba tình huống sau đây:

  1) Bài toán không có pacnd.
  2) Bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn.
  3) Tìm được phương án cơ sở tối ưu cho bài toán.

- Đồng thời trong quá trình thực hiện thuật toán ta cũng phát hiện và loại bỏ được tất cả các ràng buộc phụ thuộc tuyến tính trong hệ ràng buộc cơ bản $Ax=b$.

Một số kết quả lý thuyết

- **Định lý 1.** *Hễ bài toán QHTT có pacnđ thì nó cũng có pacscnđ.*
- **Chứng minh.**

Áp dụng thuật toán đơn hình hai pha đối với bài toán đặt ra, kết thúc pha thứ nhất ta thu được phương án cơ sở chấp nhận được cho bài toán.

Một số kết quả lý thuyết

- **Định lý 1.6.** *Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu thì nó cũng có phương án cơ sở tối ưu.*
- **Chứng minh.**

Giả sử bài toán có phương án tối ưu. Khi đó, thuật toán đơn hình hai pha áp dụng để giải bài toán đặt ra chỉ có thể kết thúc ở tình huống 3), tức là thu được phương án cơ sở tối ưu cho nó.

Một số kết quả lý thuyết

- **Định lý 1.7.** *Điều kiện cần và đủ để bài toán QHTT có phương án tối ưu là hàm mục tiêu của nó bị chặn dưới trên miền ràng buộc khác rỗng.*
- **Chứng minh.**
- **Điều kiện cần.** Giả sử x^* là phương án tối ưu của bài toán. Khi đó, $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in D$, tức là hàm mục tiêu bị chặn dưới.
- **Điều kiện đủ.** Nếu bài toán có hàm mục tiêu bị chặn dưới trên miền ràng buộc khác rỗng, thì áp dụng thuật toán đơn hình hai pha để giải nó ta chỉ có thể kết thúc ở tình huống 3), tức là tìm được phương án cơ sở tối ưu cho nó.

Ví dụ

Ví dụ. Giải bài toán QHTT sau đây bằng thuật toán đơn hình hai pha:

$$
\begin{array}{llllll}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & \longrightarrow min, \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 5, \\
x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = 8, \\
x_1 & +x_2 & & & & = 2, \\
 & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = 3,
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,5.$$

Ví dụ

Bài toán phụ tương ứng có dạng:

$$\begin{array}{llllllllll}
 & & & & & x_6 & +x_7 & +x_8 & +x_9 & \rightarrow min \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & & & = 5 \\
x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & & +x_7 & & & = 8, \\
x_1 & +x_2 & & & & & & +x_8 & & = 2, \\
 & & x_3 & +x_4 & +x_5 & & & & +x_9 & = 3,
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., 9.$$

Phương án cơ sở chấp nhận được của bài toán phụ là

$$(x, x_u) = (0, 0, 0, 0, 0, 5, 8, 2, 3),$$

Ví dụ: Pha thứ nhất

c_j cơ sở	Cơ sở	Ph/ án	0	0	0	0	0	1	1	1	1	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	
1	A_6	5	1	1	1	1	1	1	0	0	0	5
1	A_7	8	1	1	2	2	2	0	1	0	0	4
1	A_8	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	–
1	A_9	3	0	0	1*	1	1	1	0	0	1	3
Δ			3	3	4	4	4	0	0	0	0	

1	A_6	2	1*	1	0	0	0	1	0	0	−1	2
1	A_7	2	1	1	0	0	0	0	1	0	−2	2
1	A_8	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	2
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	−
Δ			3	3	0	0	0	0	0	0	−4	
0	A_1	2	1	1	0	0	0	1	0	0	−1	
1	A_7	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	−1	
1	A_8	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	1	
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	
Δ			0	0	0	0	0	−3	0	0	−1	

1	A_6	2	1*	1	0	0	0	1	0	0	−1	2
1	A_7	2	1	1	0	0	0	0	1	0	−2	2
1	A_8	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	2
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	–
Δ			3	3	0	0	0	0	0	0	−4	
0	A_1	2	1	1	0	0	0	1	0	0	−1	
1	A_8	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	1	
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	
Δ			0	0	0	0	0	−3	0	0	−1	

1	A_6	2	$1*$	1	0	0	0	1	0	0	-1	2
1	A_7	2	1	1	0	0	0	0	1	0	-2	2
1	A_8	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	2
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	$-$
Δ			3	3	0	0	0	0	0	0	-4	
0	A_1	2	1	1	0	0	0	1	0	0	-1	
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	
Δ			0	0	0	0	0	-3	0	0	-1	

Ví dụ: Pha thứ hai

c_j cơ sở	Cơ sở	Ph/ án	2	1	1	0	0	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
2	A_1	2	1	1*	0	0	0	2
1	A_3	3	0	0	1	1	1	—
Δ			0	1	0	1	1	
1	A_2	2	1	1	0	0	0	—
1	A_3	3	0	0	1	1*	1	3
Δ			−1	0	0	1	1	
1	A_2	2	1	1	0	0	0	
0	A_4	3	0	0	1	1	1	
Δ			−1	0	−1	0	0	

Kết quả

- Phương án tối ưu:

$$x^* = (0, 2, 0, 3, 0);$$

- Giá trị tối ưu:

$$f^* = 2.$$

Hiệu quả của thuật toán đơn hình

- Một điểm yếu của TTĐH là về lý thuyết, nó có thời gian tính hàm mũ. Điều này được Klee-Minty chỉ ra bằng ví dụ sau:

$$\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \to \max,$$

$$2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \le 100^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

- Để giải bài toán này, Thuật toán đơn hình đòi hỏi 2^n -1 bước lặp.

Hiệu quả của thuật toán đơn hình

- Ví dụ Klee-Minty với n=3:

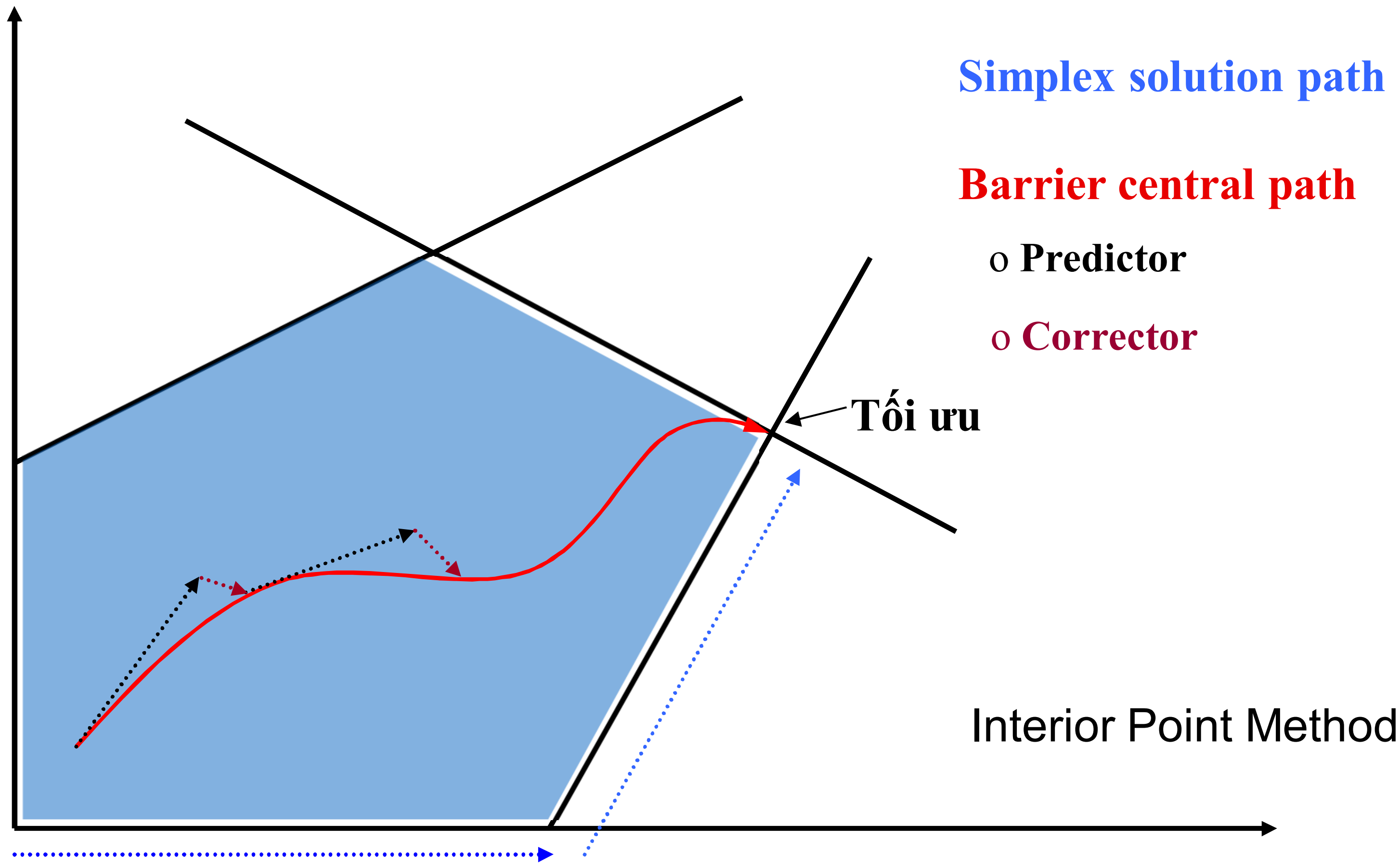
$$
\begin{array}{ccccccccc}
100x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & \to & \max \\
x_1 & & & & & \le & 1 \\
20x_1 & + & x_2 & & & \le & 100 \\
200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & \le & 10000 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{array}
$$

- Trên thực tế: Thuật toán đơn hình có thời gian tính $O(m^3)$

Thuật toán thời gian tính đa thức giải QHTT
Polynomial Algorithms

- Ellipsoid. (Khachian 1979, 1980)
  - đòi hỏi thời gian: $O(n^4 L)$.
    - $n =$ số biến số
    - $L =$ số bít cần thiết để biểu diễn dữ liệu vào
  - Đây là kết quả mang tính đột phá về mặt lý thuyết.
  - Chưa có hiệu quả thực tế.
- Karmarkar's algorithm. (Karmarkar 1984)
  - $O(n^{3.5} L)$.
  - Có thời gian đa thức và có thể cài đặt hiệu quả.
- Các thuật toán điểm trong (Interior point algorithms).
  - $O(n^3 L)$.
  - Có thể sánh với thuật toán đơn hình!
    - Vượt trội so với tt đơn hình khi giải các bài toán kích thước lớn.
  - Phương pháp này được mở rộng để giải các bài toán tổng quát hơn.

Thuật toán hàm rào
(Barrier Function Algorithms)



Interior Point Methods

LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

Lý thuyết đối ngẫu của QHTT là lĩnh vực nghiên cứu trong đó bài toán QHTT được khảo sát thông qua một bài toán QHTT bổ trợ liên hệ chặt chẽ với nó gọi là bài toán đối ngẫu

Nội dung

1. Bài toán đối ngẫu của QHTT tổng quát.
2. Định lý đối ngẫu.
3. Giải qui hoạch tuyến tính trên MATLAB

Bài toán đối ngẫu

Bài toán QHTT tổng quát

- Xét bài toán QHTT tổng quát

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, p \quad (p \le m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = p+1, p+2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, n_1 \quad (n_1 \le n)$$

$$x_j <> 0, j = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$$

Bài toán QHTT tổng quát

- Đưa vào các ký hiệu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- ma trận ràng buộc,

Bài toán QHTT tổng quát

$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ - dòng thứ i của ma trận A,

$A_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})'$ - cột thứ j của ma trận A,

$M = \{1, 2, ..., p\}$, $\bar{M} = \{p+1, p+2, ..., m\}$ - các tập chỉ số ràng buộc,

$N = \{1, 2, ..., n_1\}$, $\bar{N} = \{n_1+1, n_1+2, ..., n\}$ - các tập chỉ số biến,

$b = (b_1, b_2, ..., b_m)'$ - vectơ vế phải,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ - vectơ biến số,

$c = (c_1, c_2, ..., c_n)'$ vectơ hệ số hàm mục tiêu.

Xây dựng bài toán đối ngẫu

- Khi đó bài toán QHTT tổng quát có thể viết lại dưới dạng sau đây

$$
\begin{aligned}
& f(x) = c'x \rightarrow \min, \\
& a_i x = b_i,\ i \in M, \\
& a_i x \geq b_i,\ i \in \overline{M}, \\
& x_j \geq 0,\ j \in N, \\
& x_j <> 0,\ j \in \overline{N}.
\end{aligned}
$$

Bài toán QHTT tổng quát

- Biến đổi bài toán QHTT tổng quát về dạng chính tắc bằng cách:
  - đưa vào các biến phụ x_i^s chuyển ràng buộc dạng bất đẳng thức về dạng đẳng thức,
  - thay mỗi biến không có điều kiện dấu bởi hiệu hai biến có điều kiện dấu: $x_j = x_j^+ - x_j^-$, khi đó mỗi cột A_j sẽ thay bởi hai cột A_j và $-A_j$,

ta thu được bài toán dạng chính tắc sau đây:

Xây dựng bài toán đối ngẫu

- Bài toán (2.3):

$$\hat{c}\hat{x} \to \min,$$
$$\hat{A}\hat{x} = b, \qquad (2.3)$$
$$\hat{x} \geq 0,$$

trong đó

$$\hat{c} = (c_j : j \in N;\ (c_j, -c_j) \ : \ j \in \bar{N};\ \ 0 : i \in \bar{M})',$$

$$\hat{x} = (x_j : j \in N;\ (x_j^+, x_j^-) \ : \ j \in \bar{N};\ x_i^s : i \in \overline{M}\ )',$$

$$\hat{A} = [A_j : j \in N;\ (A_j, -A_j) : j \in \bar{N};\ e_i : i \in \bar{M}],$$

$e_i = (0, 0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)'$, $(i \in \bar{M})$ - vectơ có thành phần thứ i là bằng -1 còn tất cả các thành phần còn lại đều bằng không.

Xây dựng bài toán đối ngẫu

Từ tiêu chuẩn tối ưu của thuật toán đơn hình suy ra rằng nếu bài toán (2.3) có phương án tối ưu $\hat{x}^0$ và cơ sở tương ứng với nó là $\hat{B}$ thì ta phải có

$$(\hat{c}'_B \hat{B}^{-1})'\hat{A} - \hat{c} \leq 0.$$

Do đó vectơ $y^0 = \hat{c}'_B \hat{B}^{-1}$ là phương án chấp nhận được của hệ bất phương trình tuyến tính sau:

$$y'\hat{A} \leq \hat{c}, \tag{2.4}$$

trong đó $y \in R^m$ - m-vectơ. Các bất phương trình trong (2.4) được phân làm ba nhóm phụ thuộc vào việc những vectơ cột nào của ma trận $\hat{A}$ tham gia vào nó.

Xây dựng bài toán đối ngẫu

Nhóm ràng buộc đầu tiên là:

$$y'A_j \leq c_j,\ j \in N. \tag{2.5}$$

Nhóm tiếp theo tương ứng các biến không có ràng buộc dấu $x_j,\ j \in \bar{N}$, các ràng buộc sẽ đi với nhau từng cặp một:

$$y'A_j \leq c_j,\ \ -y'A_j \leq\ -c_j,\ j \in \bar{N}$$

hay là chúng tương đương với hệ phương trình tuyến tính sau

$$y'A_j = c_j,\ j \in \bar{N}. \tag{2.6}$$

Xây dựng bài toán đối ngẫu

Nhóm ràng buộc cuối cùng tương ứng với các biến phụ x_i^s, $i \in \bar{M}$

$$-y_i \leq 0,\ i \in \bar{M}$$

hay là

$$y_i \geq 0,\ i \in \bar{M}. \tag{2.7}$$

Các điều kiện (2.5)-(2.7) xác định miền ràng buộc của một bài toán quy hoạch tuyến tính mới gọi là *bài toán đối ngẫu* của bài toán xuất phát (2.1). Khi đó, bài toán xuất phát (2.1) sẽ được gọi là *bài toán gốc.*

Xây dựng bài toán đối ngẫu

- Khi đó vectơ

$$y^0 = \hat{c}_B B^{-1}$$

là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu. Nếu bây giờ ta định nghiã hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu là:

$$y'b \rightarrow \max,$$

thì y^0 không những là pacnđ mà còn là phương án tối ưu cho bài toán đối ngẫu.

- Các kết quả vừa nêu sẽ được phát biểu chính xác trong các định nghĩa và định lý dưới đây.

Bài toán đối ngẫu

- **Định nghĩa.** *Giả sử cho bài toán QHTT tổng quát (được gọi là bài toán gốc). Khi đó bài toán đối ngẫu của nó là bài toán QHTT sau đây*

Bài toán gốc (Primal Prob)		Bài toán đối ngẫu (Dual Prob)
$f(x) = c'x \to \min,$		$g(y) = y'b \to \max,$
$a_i x = b_i,$	$i \in M,$	$y_i <> 0,$
$a_i x \geq b_i,$	$i \in \overline{M},$	$y_i \geq 0,$
$x_j \geq 0,$	$j \in N,$	$yA_j \leq c_j,$
$x_j <> 0,$	$j \in \overline{N}$	$yA_j = c_j,$

Định lý đối ngẫu

Định lý đối ngẫu

- Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:
- **Bổ đề 2.1** (Định lý đối ngẫu yếu). Giả sử $\{x, y\}$ là cặp pacnđ của bài toán gốc-đối ngẫu. Khi đó

$$f(x) = c'x \geq y'b = g(y).$$

$$\begin{array}{llll}
f(x) = c'x \to \min, & & g(y) = y'b \to \max, & \\
a_i x = b_i, & i \in M, & y_i <> 0, & \\
a_i x \geq b_i, & i \in \overline{M}, & y_i \geq 0, & \\
x_j \geq 0, & j \in N, & yA_j \leq c_j, & \\
x_j <> 0, & j \in \overline{N} & yA_j = c_j, &
\end{array}$$

Chứng minh. Do y là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu nên

$$c_j \geq y' A_j,\ \ j \in N,\ \ c_j = y' A_j,\ \ j \in \bar{N}.$$

Mặt khác, ta có $x_j \geq 0,\ j \in N$ (do x là phương án chấp nhận được của bài toán gốc), suy ra

$$c_j x_j \geq y' A_j x_j,\ \ j \in N,\ \ c_j x_j = y' A_j x_j,\ \ j \in \bar{N}$$

Do đó

$$c' x \geq y' A x.$$

Định lý đối ngẫu

Chứng minh tương tự ta thu được

$$y'Ax \geq y'b.$$

Vì vậy $c'x \geq y'Ax \geq y'b$. Bổ đề được chứng minh.

Hệ quả 2.1. *Giả sử $\{\bar{x},\ \bar{y}\}$ là cặp phương án chấp nhận được của bài toán gốc và đối ngẫu thoả mãn*

$$c'\bar{x} = \bar{y}'b.$$

Khi đó $\{\bar{x},\ \bar{y}\}$ là cặp phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu.

Chứng minh. Thực vậy, từ bổ đề 2.1 ta suy ra

$$c'x \geq \bar{y}'b = c'\bar{x} \geq y'b,$$

đối với mọi cặp phương án chấp nhận được $\{x,\ y\}$ của bài toán gốc và đối ngẫu. Bất đẳng thức cuối cùng chứng tỏ tính tối ưu của cặp phương án chấp nhận được $\{\bar{x},\ \bar{y}\}$.

Định lý đối ngẫu

Định lý 2.1. *Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính (2.1) có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu của nó cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của chúng là bằng nhau.*

Chứng minh. Giả sử bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu. Do đó bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tương ứng với nó (2.3) cũng có phương án tối ưu cơ sở $\hat{x}^0$ với cơ sở tương ứng là $\hat{B}$. Khi đó, như đã thấy ở trên, vectơ $y^0 = \hat{c}'_B \hat{B}^{-1}$ là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu. Gọi x^0 là phương án tối ưu của bài toán (2.1) thu được từ $\hat{x}^0$, ta có

$$(y^0)'b = \hat{c}'_B \hat{B}^{-1} b = \hat{c}'_B \hat{x}^0_B = c' x^0. \tag{2.9}$$

Từ hệ quả 2.1 suy ra y^0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu, đồng thời từ (2.9) suy ra là giá trị tối ưu của hai bài toán là bằng nhau.
Định lý được chứng minh.

Định lý đối ngẫu

Một trong những nét đặc trưng của đối ngẫu là tính đối xứng thể hiện trong định lý dưới đây.

Định lý 2.2. *Bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu là trùng với bài toán gốc.*

Chứng minh. Viết lại bài toán đối ngẫu dưới dạng

$$\begin{aligned}
&-y'b \;\to\; min,\\
&-A'_j y \geq -c_j,\; j \in N,\\
&-A'_j y = -c_j,\; j \in \bar{N},\\
&y_i \geq 0,\; i \in \bar{M},\\
&y_i <> 0,\; i \in M,
\end{aligned}$$

và xét nó như bài toán gốc. Theo định nghiã, bài toán đối ngẫu của nó có dạng:

$$\begin{aligned}
&-c'x \;\to\; max,\\
&x_j \geq 0,\; j \in N,\\
&x_j <> 0,\; j \in \bar{N},\\
&-a_i x \leq -b_i,\; i \in \bar{M},\\
&-a_i x = -b_i,\; i \in M,
\end{aligned}$$

$f(x) = c'x \to \min,$		$g(y) = y'b \to \max,$
$a_i x = b_i,$	$i \in M,$	$y_i <> 0,$
$a_i x \geq b_i,$	$i \in \overline{M},$	$y_i \geq 0,$
$x_j \geq 0,$	$j \in N,$	$yA_j \leq c_j,$
$x_j <> 0,$	$j \in \overline{N}$	$yA_j = c_j,$

mà dễ thấy là trùng với bài toán gốc.

Định lý đối ngẫu

- Đối với một bài toán QHTT bất kỳ có thể xảy ra ba khả năng:

  1) Bài toán có phương án tối ưu;

  2) Bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn;

  3) Bài toán không có phương án chấp nhận được.

- Vì vậy, đối với cặp bài toán QHTT gốc-đối ngẫu có thể xảy ra 9 tình huống mô tả trong bảng 2.1 sau đây:

Định lý đối ngẫu

Đối ngẫu Gốc	Có p/án tối ưu	Không bị chặn	Không có phương án
Có p/án tối ưu	1)	√	√
Không bị chặn	√	√	3)
Không có phương án	√	3)	2)

Bảng 2.1.

Định lý đối ngẫu

Định lý 2.1 và 2.2 đã loại khỏi cột thứ nhất và dòng thứ nhất của bảng tất cả các ô, ngoại trừ ô đầu tiên ứng với trường hợp cả hai bài toán đều có phương án tối ưu. Các ô bị loại được đánh dấu bởi dấu $\surd$. Phần còn lại của bảng sẽ được điền theo định lý sau đây.

Định lý 2.3 (Định lý đối ngẫu). *Đối với cặp bài toán gốc đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính chỉ có thể xảy ra một trong 3 tình huống sau đây*

1) Cả hai đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của chúng là bằng nhau;

2) Cả hai đều không có phương án chấp nhận được;

3) Bài toán này có hàm mục tiêu không bị chặn còn bài toán kia không có phương án chấp nhận được.

Định lý đối ngẫu

Chứng minh. Từ bất đẳng thức (2.8) suy ra là nếu bài toán gốc (đối ngẫu) có hàm mục tiêu không bị chặn thì bài toán đối ngẫu (gốc) không thể có phương án chấp nhận được, tức là ta loại được ô (2,2) của bảng. Vì vậy chỉ còn 2 khả năng mà ta đánh dấu trên bảng là 2) và 3). Bằng các ví dụ ta sẽ chỉ ra rằng cả hai tình huống này đều có thể xảy ra.

Định lý đối ngẫu

Ví dụ 1. Cả hai bài toán đều không có phương án chấp nhận được.

Bài toán gốc

$$x_1 \rightarrow min,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 - x_2 \geq 1,$$

$$x_1 <> 0,\ x_2 <> 0.$$

Bài toán đối ngẫu

$$y_1 + y_2 \rightarrow max,$$

$$y_1 - y_2 = 1,$$

$$y_1 - y_2 = 0,$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Định lý đối ngẫu

Ví dụ 2. Bài toán gốc không có phương án chấp nhận được còn bài toán đối ngẫu có hàm mục tiêu không bị chặn.

Bài toán gốc

$$x_1 \to min,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 - x_2 \geq 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Bài toán đối ngẫu

$$y_1 + y_2 \to max,$$

$$y_1 - y_2 \leq 1,$$

$$y_1 - y_2 \leq 0,$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Định lý về độ lệch bù

Nếu xem xét kỹ định nghiã cặp bài toán gốc đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính thì có thể cảm thấy có sự đối kháng giữa bài toán gốc và đối ngẫu: Ràng buộc càng đòi hỏi chặt ở bài toán này (ví dụ, $a_i x = b_i,\ i \in M$), thì để cân bằng lại, sang bài toán kia ràng buộc tương ứng lại được nới lỏng hơn ($y_i <> 0,\ i \in M$). Để diễn tả chính xác sự cân bằng này ta phát biểu điều kiện (gọi là điều kiện về độ lệch bù) cần và đủ để cặp phương án chấp nhận được x và y của bài toán gốc và đối ngẫu là tối ưu.

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = c'x \to \min, & & g(y) = y'b \to \max, \\
a_i x = b_i, & i \in M, & y_i <> 0, \\
a_i x \geq b_i, & i \in \overline{M}, & y_i \geq 0, \\
x_j \geq 0, & j \in N, & yA_j \leq c_j, \\
x_j <> 0, & j \in \overline{N} & yA_j = c_j,
\end{array}
$$

Định lý về độ lệch bù

- **Định lý 2.4.** Cặp phương án chấp nhận được của bài toán gốc-đối ngẫu $\{x, y\}$ là tối ưu khi và chỉ khi thực hiện các điều kiện sau đây:

$$(a_i x - b_i)y_i = 0, \; i = 1,2,\ldots,m;$$
$$x_j(c_j - yA_j) = 0, \; j = 1,2,\ldots,n.$$

$f(x) = c'x \to \min,$		$g(y) = y'b \to \max,$
$a_i x = b_i,$	$i \in M,$	$y_i <> 0,$
$a_i x \geq b_i,$	$i \in \overline{M},$	$y_i \geq 0,$
$x_j \geq 0,$	$j \in N,$	$yA_j \leq c_j,$
$x_j <> 0,$	$j \in \overline{N}$	$yA_j = c_j,$

- **Chứng minh.** Đặt

$$u_i = (a_i x - b_i)y_i \, , \; i = 1,2,\ldots,m;$$
$$v_j = x_j(c_j - yA_j) \, , \; j = 1,2,\ldots,n.$$

Do $\{x, y\}$ là cặp pacnđ, nên

$$u_i \geq 0, \; i = 1,2,\ldots,m; \quad v_j \geq 0 \, , \; j = 1,2,\ldots,n.$$

Định lý về độ lệch bù

Đặt

$$\alpha = \sum_i u_i \geq 0, \quad \beta = \sum_j v_j \geq 0.$$

Khi đó $\alpha = 0$ khi và chỉ khi thực hiện (2.10), và $\beta = 0$ khi và chỉ khi thực hiện (2.11). Suy ra, các điều kiện (2.10), (2.11) được thực hiện khi và chỉ khi $\alpha + \beta = 0$.

Bây giờ do

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \textstyle\sum_i y_i(a_i x - b_i) + \sum_j (c_j - y' A_j) x_j \\ &= -\textstyle\sum_i y_i b_i + \sum_j c_j x_j \\ &= c' x - y' b.\end{aligned}$$

nên $\alpha + \beta = 0$ khi và chỉ khi $c'x = y'b$. Điều kiện $c'x = y'b$, theo hệ quả 2.1 và định lý đối ngẫu, là điều kiện cần và đủ để cặp phương án chấp nhận được gốc và đối ngẫu x và y là tối ưu. Định lý được chứng minh.

Hệ quả

- **Hệ quả.** Phương án chấp nhận được x^* là phương án tối ưu của bài toán QHTT khi và chỉ khi hệ phương trình và bất phương trình tuyến tính sau đây là có nghiệm:

$$(a_i x^* - b_i) y_i = 0, \forall i \in \overline{M},$$
$$(c_j - yA_j) x_j^* = 0, \forall j \in N,$$
$$y_i \geq 0, i \in \overline{M},$$
$$yA_j \leq c_j, j \in N,$$
$$yA_j = c_j, j \in \overline{N} .$$

$f(x) = c'x \to \min,$		$g(y) = y'b \to \max,$	
$a_i x = b_i,$	$i \in M,$	$y_i <> 0,$	
$a_i x \geq b_i,$	$i \in \overline{M},$	$y_i \geq 0,$	
$x_j \geq 0,$	$j \in N,$	$yA_j \leq c_j,$	
$x_j <> 0,$	$j \in \overline{N}$	$yA_j = c_j,$	

Ví dụ

- Xét bài toán QHTT

$$\begin{array}{cccccc} -2x_1 & -6x_2 & +5x_3 & -x_4 & -4x_5 & \rightarrow max \\ x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -5x_4 & +9x_5 & = 3 \\ & x_2 & -3x_3 & +4x_4 & -5x_5 & = 6 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = 1 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

- Kiểm tra tính tối ưu của vectơ

  $x^* = (0, 0, 16, 31, 14)$

  đối với bài toán QHTT đã cho

Ví dụ

- Dễ dàng kiểm tra được rằng x^* là phương án chấp nhận được của bài toán đã cho:

```
A=[1 -4 2 -5 9; 0 1 -3 4 -5; 0 1 -1 1 -1];
 x=[0;0;16;31;14]; A*x
ans =
     3
     6
     1
```

- Theo hệ quả, x^* là phương án tối ưu khi và chỉ khi hệ phương trình và bất phương trình sau đây là có nghiệm

Ví dụ

$(y_1 + 2)\, x^*_1 = 0$

$(-4y_1 + y_2 + y_3 + 6)\, x^*_2 = 0$

$(2y_1 - 3y_2 - y_3 - 5)\, x^*_3 = 0$

$(-5y_1 + 4y_2 + y_3 + 1)\, x^*_4 = 0$

$(9y_1 - 5y_2 - y_3 + 4)\, x^*_5 = 0$

$y_1 \geq -2$

$-4y_1 + y_2 + y_3 \geq -6$

$2y_1 - 3y_2 - y_3 \geq 5$

$-5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq -1$

$9y_1 - 5y_2 - y_3 \geq -4$

$x^*_1 = 0$

$x^*_2 = 0$

$x^*_3 = 16$

$x^*_4 = 31$

$x^*_5 = 14$

Bài toán đối ngẫu

$3y_1 + 6y_2 + y_3 \to \min$

$y_1 \geq -2$

$-4y_1 + y_2 + y_3 \geq -6$

$2y_1 - 3y_2 - y_3 \geq 5$

$-5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq -1$

$9y_1 - 5y_2 - y_3 \geq -4$

Ví dụ

- Hệ cuối cùng là tương đương với hệ sau:

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad\quad\quad\quad &\geq -2 \\ -4y_1 + y_2 + y_3 &\geq -6 \\ 2y_1 - 3y_2 - y_3 &= 5 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 &= -1 \\ 9y_1 - 5y_2 - y_3 &= -4 \end{aligned}$$

- Hệ ba phương trình cuối cùng có nghiệm duy nhất $y^* = (-1, 1, -10)$.

```
(A=[2 -3 -1;-5 4 1; 9 -5 -1]; b=[5;-1;-4]; y=A\b)
```

- Dễ dàng kiểm tra được rằng y^* thoả mãn hai bất phương trình đầu. Do đó y^* là nghiệm của hệ phương trình và bất phương trình ở trên. Theo hệ quả, điều đó chứng tỏ x^* là phương án tối ưu của bài toán QHTT đặt ra.

Giải qui hoạch tuyến tính trên MATLAB

Hàm LINPROG

- MATLAB cung cấp hàm **`linprog`** để giải bài toán QHTT.
- Dưới đây là một số cách sử dụng hàm này
  - **`X=LINPROG(f,A,b)`**
  - **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq)`**
  - **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)`**
  - **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0)`**
  - **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0,OPTIONS)`**
  - **`[X,FVAL]=LINPROG(...)`**
  - **`[X,FVAL,EXITFLAG] = LINPROG(...)`**
  - **`[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = LINPROG(...)`**
  - **`[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA]=LINPROG(...)`**

Hàm LINPROG

- Lệnh **`X=LINPROG(f,A,b)`** giải bài toán QHTT:

  min { f 'x : A x <= b }

- Lệnh **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq)`** giải bài toán có thêm ràng buộc cơ bản dạng đẳng thức **`Aeq*x = beq`**.
- Lệnh **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)`** xác định cận dưới và cận trên cho các biến số **`LB <= X <= UB.`**
  - Gán **`Aeq=[]`** (**`A=[]`**) và **`beq=[]`** (**`b=[]`**) nếu không có ràng buộc này
  - Gán **`LB`** và **`UB`** là ma trận rỗng ([]) nếu không có các cận này.
  - Gán **`LB(i)=-Inf`** nếu **`X(i)`** không bị chặn dưới và gán **`UB(i)=Inf`** nếu **`X(i)`** không bị chặn trên.

Hàm LINPROG

- Lệnh **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0)`** để xác định thêm phương án xuất phát **`X0`**.
    - **Chú ý:** Lựa chọn này chỉ được chấp nhận nếu sử dụng *thuật toán tập tích cực*. Phương pháp ngầm định để giải là *thuật toán điểm trong* sẽ không chấp nhận điểm xuất phát.
- Lệnh **`X=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0,OPTIONS)`** thực hiện giải với các thông số tối ưu được xác định bởi biến có cấu trúc **`OPTIONS`**, được tạo bởi hàm **`OPTIMSET`**.
    - Gán **`option=optimset('LargeScale','off', 'Simplex','on')`** để chọn thuật toán đơn hình để giải bài toán.
    - Hãy gõ **`help OPTIMSET`** để biết chi tiết.

Hàm LINPROG

- Lệnh **[X,FVAL]=LINPROG(...)** trả lại thêm giá trị hàm mục tiêu tại phương án **X: FVAL = f'*X.**
- Lệnh **[X,FVAL,EXITFLAG]=LINPROG(...)** **trả lại** **EXITFLAG** mô tả điều kiện kết thúc của **LINPROG.** Các giá trị của **EXITFLAG** có ý nghĩa sau
  - 1 LINPROG hội tụ đến lời giải X.
  - 0 Đạt đến giới hạn số bước lặp.
  - -2 Không tìm được pacnd.
  - -3 Bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn.
  - -4 giá trị **NaN** xuất hiện trong quá trình thực hiện thuật toán.
  - -5 Cả hai bài toán gốc và đối ngẫu đều không tương thích.
  - -7 Hướng tìm kiếm quá nhỏ, không thể cải thiện được nữa.

Hàm LINPROG

- Lệnh **[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = LINPROG(...)** trả lại biến cấu trúc **OUTPUT** với
  - **OUTPUT.iterations** - số bước lặp phải thực hiện
  - **OUTPUT.algorithm** - thuật toán được sử dụng
  - **OUTPUT.message** – thông báo
- Lệnh **[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA]=LINPROG(...)**

  trả lại nhân tử Lagrangian LAMBDA , tương ứng với lời giải tối ưu:
  - **LAMBDA.ineqlin** – tương ứng với ràng buộc bất đẳng thứcA,
  - **LAMBDA.eqlin** – tương ứng với ràng buộc đẳng thức Aeq,
  - **LAMBDA.lower** – tương ứng với LB,
  - **LAMBDA.upper** – tương ứng với UB.

Ví dụ

- Giải bài toán qui hoạch tuyến tính:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 3x_3 && \to \min \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 && = 5 \\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 && = 8 \\
&x_1 + x_2 && = 2 \\
&x_3 + x_4 + x_5 && = 3 \\
&x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 && \geq 0
\end{aligned}
$$

- `f=[2 1 3 0 0]; beq=[5; 8; 2; 3];`
- `Aeq=[1 1 1 1 1; 1 1 2 2 2;1 1 0 0 0;0 0 1 1 1];`
- `A=[]; b=[]; LB=[0 0 0 0 0]; UB=[];X0=[];`
- `[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0)`

Kết quả

- X =

    0.0000

    2.0000

    0.0000

    1.5000

    1.5000

- FVAL =

    2.0000

- EXITFLAG =

    1

- OUTPUT =

    iterations: 5

    algorithm: 'large-scale: interior point'

    cgiterations: 0

    message: 'Optimization terminated.'

- LAMBDA =

    ineqlin: [0x1 double]

    eqlin: [4x1 double]

    upper: [5x1 double]

    lower: [5x1 double]

Ví dụ

- **Sử dụng thuật toán đơn hình:**

```
opt=optimset('LargeScale','off','Simplex','on')
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0,opt)
```

ta thu được kết quả:

- `X = [0 2 0 3 0]`
- `FVAL =  2`
- `EXITFLAG = 1`
- `OUTPUT =`

```
        iterations: 1
        algorithm: 'medium scale: simplex'
        cgiterations: []
        message: 'Optimization terminated.'
```