ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

CHƯƠNG 3:
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

Vũ Văn Thiệu, Đinh Viết Sang, Nguyễn Khánh Phương

TÍNH TOÁN KHOA HỌC

Giới thiệu

Giải phương trình phi tuyến

Bài toán

Cho hàm phi tuyến (non-linear) $f(x)$, ta cần tìm x thỏa mãn

$$f(x) = 0.$$

Lời giải x là nghiệm của phương trình và cũng gọi là nghiệm (không điểm) của hàm $f(x)$.
Bài toán tìm x, được gọi là bài toán tìm nghiệm (root finding).

Giải phương trình phi tuyến

Các ví dụ về bài toán tìm nghiệm của các phương trình phi tuyến

1. $1 + 4x - 16x^2 + 3x^3 - 3x^4 = 0$
2. $\frac{x\sqrt{(2.1-0.5x)}}{(1-x)\sqrt{(1.1-0.5x)}} - 369 = 0$ với $(0 < x < 1)$
3. $tg(x) - tanh(x) = 0$ trong đó $tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Giải phương trình phi tuyến

Đặt vấn đề

Nếu các phương trình $f(x)$ là phi tuyến thì

- thường không có lời giải dưới dạng công thức tường minh
- các phương pháp số cho phép ta tìm nghiệm dựa trên *thủ tục lặp*

Giải phương trình phi tuyến

Khoảng phân ly nghiệm

Đối với hàm $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ đoạn $[a, b]$ được gọi là **khoảng phân ly nghiệm** nếu hàm f có giá trị trái dấu ở hai đầu mút a, b, tức là $f(a)f(b) < 0$.

Sự tồn tại nghiệm trong khoảng phân ly nghiệm

Nếu f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)(f(b) < 0$ thì tồn tại $x^* \in [a, b]$ sao cho $f(x^*) = 0$.

Giải phương trình phi tuyến

Các ví dụ về số nghiệm của các phương trình phi tuyến

1. $e^x + 1 = 0$ không có nghiệm
2. $e^{-x} - x = 0$ có một nghiệm
3. $x^2 - 4sin(x) = 0$ có hai nghiệm
4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ có ba nghiệm
5. $cos(x) = 0$ có vô số nghiệm

Giải phương trình phi tuyến

Điều kiện của bài toán giải phương trình

- Giá trị tuyệt đối của số điều kiện bài toán tìm nhiệm x^* của hàm $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ là $\frac{1}{|f'(x^*)|}$.
- Nghiệm x^* đc gọi là có *điều kiện tồi* (tốt) nếu đường tiếp tuyến nó với đồ thị tại điểm có hoành độ x^* gần như nằm ngang (thẳng đứng).

Giải phương trình phi tuyến

Thủ tục lặp

Các phương trình phi tuyến thường không có lời giải tường minh. Vì vậy để tìm nghiệm của chúng ta thường phải dùng phương pháp số dựa trên thủ tục lặp.

- **Điều kiện dừng**: $|f(x_k)| < \epsilon$ hay $|x^* - x_k| < \epsilon$ với ϵ là *độ chính xác* cho trước còn x_k là lời giải xấp xỉ thu được ở bước k
- **Tốc độ hội tụ**: Ta ký hiệu *sai số* bước lặp k là: $e_k = x_k - x^*$. Dãy $\{e_k\}$ được gọi là hội tụ với cấp độ r nếu

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C$$

trong đó C là hằng số khác không

Giải phương trình phi tuyến

Thủ tục lặp

Các phương trình phi tuyến thường không có lời giải tường minh. Vì vậy để tìm nghiệm của chúng ta thường phải dùng phương pháp số dựa trên thủ tục lặp.

- **Điều kiện dừng**: $|f(x_k)| < \epsilon$ hay $|x^* - x_k| < \epsilon$ với ϵ là *độ chính xác* cho trước còn x_k là lời giải xấp xỉ thu được ở bước k
- **Tốc độ hội tụ**: Ta ký hiệu *sai số* bước lặp k là: $e_k = x_k - x^*$. Dãy $\{e_k\}$ được gọi là hội tụ với cấp độ r nếu

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C$$

trong đó C là hằng số khác không

Tên gọi của tốc độ hội tụ trong một số trường hợp

- $r = 1$ - tốc độ hội tụ tuyến tính
- $r > 1$ - tốc độ hội tụ trên tuyến tính
- $r = 2$ - tốc độ hội tụ bình phương

Câu hỏi

Phương pháp chia đôi

Thủ tục lặp

Giả thiết khoảng phân li nghiệm $[a, c]$ chỉ có một nghiệm

1. Thu nhỏ dần khoảng phân li nghiệm thông qua phép chia nhỏ
2. Phép chia đc thực hiện là phép chia đôi $b = \frac{(a+c)}{2}$
   Nếu $f(b) = 0$ thì b là nghiệm đúng cần tìm, ngược lại nếu $f(b) \neq 0$ thì ta có
    - $f(a)f(b) < 0$ thì khoảng phân li nghiệm mới là $[a, b]$
    - Ngược lại khoảng phân li nghiệm mới là $[b, c]$

Hai bước 1-2 được lặp lại cho đến khi $[a, c] < \epsilon$ cho trước

Phương pháp chia đôi

Thủ tục lặp

Giả thiết khoảng phân li nghiệm $[a, c]$ chỉ có một nghiệm

1. Thu nhỏ dần khoảng phân li nghiệm thông qua phép chia nhỏ
2. Phép chia đc thực hiện là phép chia đôi $b = \frac{(a+c)}{2}$
   Nếu $f(b) = 0$ thì b là nghiệm đúng cần tìm, ngược lại nếu $f(b) \neq 0$ thì ta có
   - $f(a)f(b) < 0$ thì khoảng phân li nghiệm mới là $[a, b]$
   - Ngược lại khoảng phân li nghiệm mới là $[b, c]$

Hai bước 1-2 được lặp lại cho đến khi $[a, c] < \epsilon$ cho trước

Nếu cho trước độ chính xác ϵ thì số bước lặp là số nguyên n thỏa mãn

$$n \geq \log_2 \frac{c - a}{\epsilon}$$

bởi vì

$$\frac{c - a}{2^n} < \epsilon$$

Phương pháp chia đôi

Ví dụ 1:

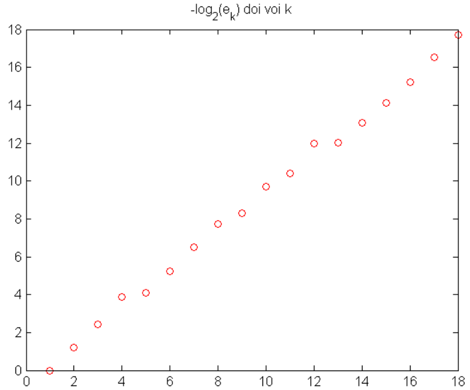
Tìm nghiệm của phương trình $e^x - 2 = 0$ có khoảng phân li nghiệm $[0, 2]$ với độ chính xác $\epsilon = 0.01$

Lần lặp	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	sai số
1	0.0000	1.0000	2.0000	-1.0000	0.7183	5.0389	2.0000
2	0.0000	0.5000	1.0000	-1.0000	-0.3513	0.7183	1.0000
3	0.5000	0.7500	1.0000	-0.3513	0.1170	0.7183	0.5000
4	0.5000	0.6250	0.7500	-0.3513	-0.1318	0.1170	0.2500
5	0.6250	0.6875	0.7500	-0.1318	-0.0113	0.1170	0.1250
6	0.6875	0.7188	0.7500	-0.0113	0.0519	0.1170	0.0625
7	0.6875	0.7031	0.7188	-0.0113	0.0201	0.0519	0.0313
8	0.6875	0.6953	0.7031	-0.0113	0.0043	0.0201	0.0156
9	0.6875	0.6914	0.6953	-0.0113	-0.00349	0.0043	0.0078

Phương pháp chia đôi

Ví dụ 2

Xét lời giải của phương trình $f(x) = 1/(x - e^{-x})$ có khoảng phân li nghiệm $[0, 1]$ với độ chính xác $\epsilon = 0.00001$



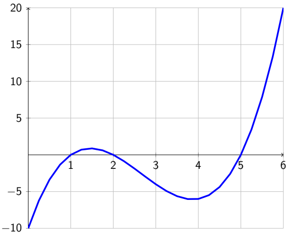
Sai số:
$e_k = \max\{x^* - a_k, c_k - x^*\}$
Trục hoành: số lần lặp k
Trục tung: $-\log_2(e_k)$
Rõ ràng $e_k \approx 2^{-k}$

Phương pháp chia đôi

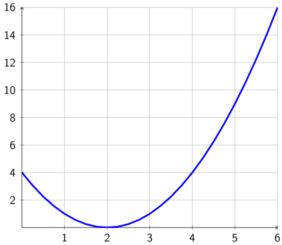
Nhận xét về phương pháp chia đôi

- Điểm mạnh: Làm việc ngay cả với hàm không cho dưới dạng giải tích.
- Điểm yếu:
  - Cần xác định khoảng phân li nghiệm và chỉ tìm được một nghiệm.
  - Không tìm được nghiệm kép.
  - Khi hàm f có những điểm kỳ dị, phương pháp chia đôi có thể coi chúng là nghiệm.

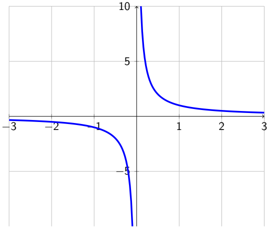
Phương pháp chia đôi



a) Nhiều nghiệm



b) Nghiệm kép



c) Điểm kỳ dị

Phương pháp chia đôi

Phương pháp dây cung

Thủ tục lặp

Giả thiết khoảng phân li nghiệm $[a, c]$ chỉ có một nghiệm

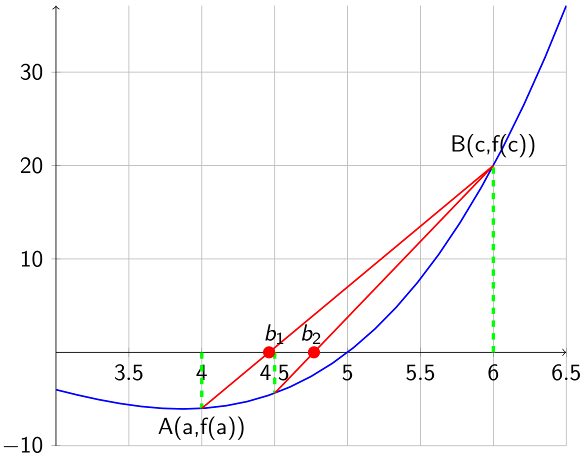
1. Thu nhỏ dần khoảng phân li nghiệm thông qua phép chia nhỏ
2. Phép chia đc thực hiện là $b = a - \frac{c-a}{f(c)-f(a)} f(a) = \frac{af(c)-cf(a)}{f(c)-f(a)}$

   Nếu $f(b) = 0$ thì b là nghiệm cần tìm. Ngược lại nếu $f(b) \neq 0$, ta có:

   - Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì khoảng phân li nghiệm mới là $[a, b]$
   - Ngược lại khoảng phân li nghiệm mới là $[b, c]$

Hai bước 1-2 được lặp lại cho đến khi $[a, c] < \epsilon$ cho trước.
Vậy b là giao trục hoành với đoạn thẳng nối A(a,f(a)) với B(c,f(c))

Phương pháp dây cung



Phương pháp dây cung

Nhận xét

- Ưu điểm: cũng như phương pháp chia đôi (bisection), ta không cần dạng giải tích của phương trình f
- Nhược điểm:
  - Cần biết khoảng phân li nghiệm
  - Hội tụ một phía nên chậm, đặc biệt chậm khi đoạn chứa nghiệm lớn
  - Có thể cải tiến bằng cách sử dụng cùng phương pháp chia đôi

Phương pháp dây cung

Phương pháp Newton

Mô tả

Ý tưởng cơ bản của phương pháp là thay phương trình $f(x) = 0$ phi tuyến bằng một phương trình gần đúng,tuyến tính đối với x. Được xây dựng dựa trên nền tảng khai triển Taylor.
Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục đến bậc $n+1$ thì tồn tại $\xi \in (a, b)$

$$f(b) = f(a) + \cancel{f}(b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Phương pháp Newton

Mô tả (tiếp)

Khai triển Taylor của $f(x)$ tại lân cận nghiệm xấp xỉ ban đầu x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O(h^2)$$

trong đó $h = x - x_0$.
Giải phương trình xấp xỉ đối với x:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Thu được: $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
x là nghiệm không chính xác, nhưng lời giải này sẽ gần với nghiệm đúng hơn giá trị khởi tạo x_0.

Phương pháp Newton

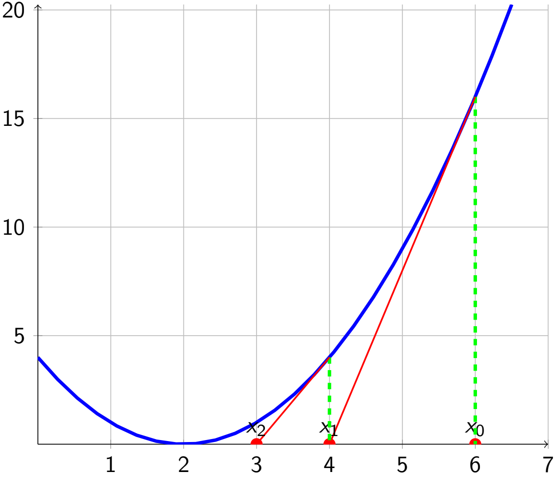
Thủ tục lặp

1. Khởi tạo với x_0
2. Tính với $k > 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

3. Lặp lại bước 2 đến khi $|f(x_k)| < \epsilon$ với ϵ là độ chính xác cho trước

Phương pháp Newton



Phương pháp Newton

Nhận xét

- Ưu điểm:
  - Đối với hàm đủ trơn và ta bắt đầu từ điểm gần nghiệm thì tốc độ hội tụ của phương pháp là bình phương hay $r = 2$
  - Không cần biết khoảng phân ly nghiệm chỉ cần điểm ban đầu x_0
- Nhược điểm:
  - Cần tính đạo hàm bậc một $f'(x_k)$, ta cũng có thể tính gần đúng bằng công thức $f'(x_k) = \frac{f(x_k+h)-f(x_k-h)}{2h}$ với h là giá trị rất nhỏ e.g. $h = 0.001$
  - Không phải lúc nào thủ tục lặp cũng hội tụ

Phương pháp Newton

Ví dụ 1

Sử dụng phương pháp Newton để tìm nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^2 - 4\sin(x) = 0$$

Đạo hàm bậc một của $f(x)$

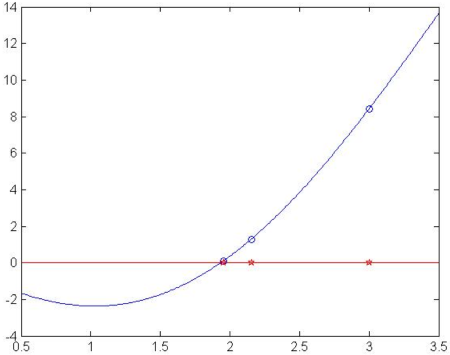
$$f'(x) = 2x - 4\cos(x)$$

Công thức lặp của phương pháp Newton là

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 4\sin(x_k)}{2x_k - 4\cos(x_k)}$$

Điểm sấp xỉ xuất phát $x_0 = 3$

Phương pháp Newton



k	x_k	$f(x_k)$
0	3.000000	8.435520
1	2.153058	1.294773
2	1.954039	0.108439

Phương pháp Newton

Ví dụ 2

Giải phương trình $f(x) = x^2 - 2 = 0$ vì $f'(x) = 2x$ nên công thức lặp sẽ là $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2-2}{2x_k}$ sai số $e_k = x_k - x^* = x_k - \sqrt{2}$

k	x_k	e_k
0	4.000000000	2.5857864376
1	2.250000000	0.8357864376
2	1.569444444	0.1552308821
3	1.421890364	0.0076768014
4	1.414234286	0.0000207236
5	1.414213563	0.0000000002

Phương pháp Newton

Ví dụ 3

Giải phương trình

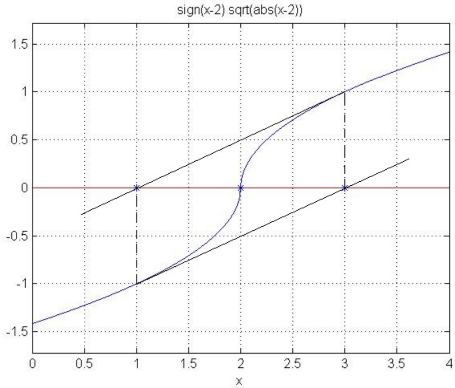
$$f(x) = \operatorname{sign}(x-a)\sqrt{|x-a|}$$

Phương trình này thỏa mãn:

$$x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} = -(x-a)$$

Không điểm của hàm là $x^* = a$.
Nếu ta vẽ tiếp tuyến đồ thị tại điểm bất kì thì nó luôn cắt trục hoành tại điểm đối xứng với đường thẳng $x = a$.
Phương pháp Newton lặp vô hạn, không hội tụ và cũng không phân kì.

Phương pháp Newton



Phương pháp Newton

Phương pháp cát tuyến

Thủ tục lặp

Cải tiến của phương pháp Newton, thay vì ta dùng tiếp tuyến $f'(x)$ thì ta dùng sai phân xấp xỉ dựa trên hai bước lặp liên tiếp.

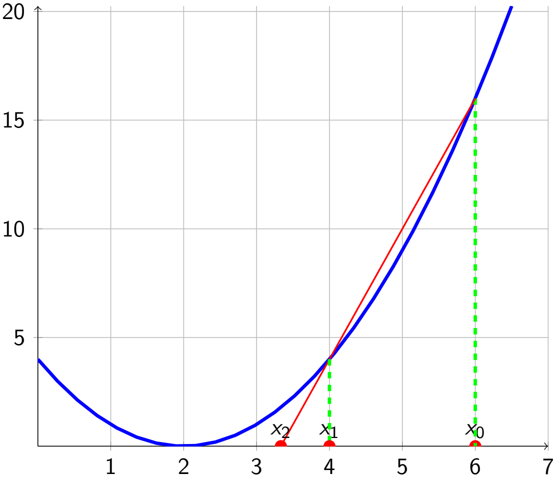
1. Bắt đầu với hai điểm xuất phát x_0 và x_1
2. Với $k \geq 2$, ta lặp theo công thức

$$s_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{s_k}$$

3. Lặp lại bước 2 đến khi $|f(x_k)| < \epsilon$ dương nhỏ cho trước.

Phương pháp cát tuyến



Phương pháp cát tuyến

Nhận xét

- Ưu điểm:
  - Không cần biết khoảng phân ly nghiệm chỉ cần hai điểm ban đầu x_0 và x_1
  - Không cần tính đạo hàm bậc một $f'(x_k)$
- Nhược điểm:
  - Cần có hai điểm khởi tạo
  - Tốc độ hội tụ của phương pháp trên tuyến tính $1 < r < 2$, cụ thể tỉ lệ vàng $r \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$

Phương pháp cát tuyến

Ví dụ 1

Giải lại phương trình

$$f(x) = \operatorname{sign}(x-2)\sqrt{|x-2|} = 0$$

Với hai điểm xuất phát là $x_0 = 4,\ x_1 = 3$ với $\epsilon = 0.001$

$$s_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$
$$= \frac{\operatorname{sign}(x_k - 2)\sqrt{|x_k - 2|} - \operatorname{sign}(x_{k-1} - 2)\sqrt{|x_{k-1} - 2|}}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_n)}{s_n} = x_k - \frac{\operatorname{sign}(x_k - 2)\sqrt{|x_k - 2|}}{s_k}$$

Phương pháp cát tuyến

k	x_k	e_k
0	4.000000000	2.0000000000
1	3.000000000	1.0000000000
2	0.585786438	1.4142135624
3	1.897220119	0.1027798813
⋮	⋮	⋮
26	1.999989913	0.0000100868
27	1.999998528	0.0000014716
28	2.000003853	0.0000038528
29	2.000000562	0.0000005621

Phương pháp cát tuyến

Ví dụ 2

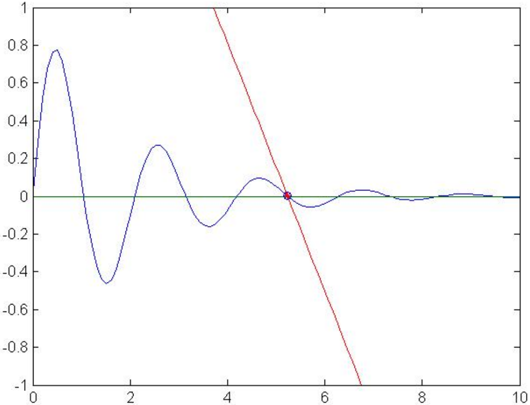
Giải phương trình

$$f(x) = e^{-x/2}\sin(3x) = 0$$

Với hai điểm xuất phát là x_0, x_1 với độ chính xác ϵ được nhập từ bàn phím

$$s_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$
$$= \frac{e^{-x_k/2}\sin(3x_k) - e^{-x_{k-1}/2}\sin(3x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_n)}{s_n} = x_k - \frac{e^{-x_k/2}\sin(3x_k)}{s_k}$$

Phương pháp cát tuyến



Lap k=14 x_k= 5.233374 f_k= 5.727e-04

Hai điểm xuất phát
$x_0 = 4$
$x_1 = 5$
Độ chính xác
$\epsilon = 0.001$

Phương pháp cát tuyến

Phương pháp lặp

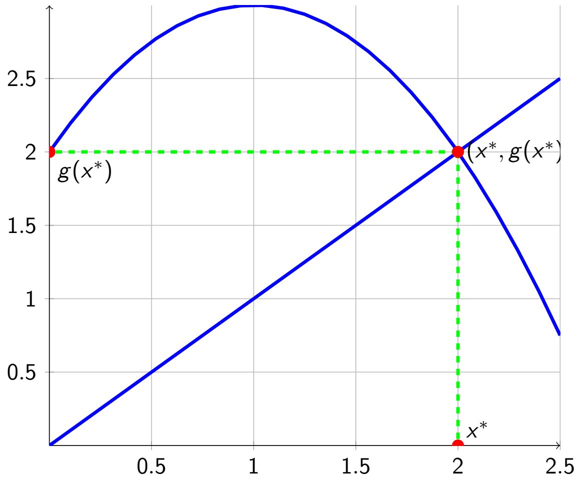
Điểm bất động

Thay vì viết phương trình dưới dạng $f(x) = 0$, ta viết lại dưới dạng bài toán

$$\text{Tìm x thỏa mãn } x = g(x)$$

Điểm x^* gọi là *điểm bất động* của hàm $g(x)$ nếu $x^* = g(x^*)$, nghĩa là điểm x^* không bị biến đổi bởi ánh xạ g

Phương pháp lặp



Phương pháp lặp

Các ví dụ

- Phương pháp Newton, theo công thức $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, hàm g mà ta cần tìm điểm bất động x^* sẽ là $g(x) = x - f(x)/f'(x)$
- Tìm nghiệm $f(x) = x - e^{-x} \Rightarrow g(x) = e^{-x}$
- Tìm nghiệm $f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+2}$ hoặc $g(x) = x^2 - 2$
- Tìm nghiệm $f(x) = 2x^2 - x - 1 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - 1$

Phương pháp lặp

Thủ tục lặp

Cách tiếp cận để giải bài toán

$$x_{k+1} = g(x_k) \text{ với } k = 1, 2, \cdots$$

Thủ tục lặp trên thường được gọi là thủ tục lặp **tìm điểm bất động** với điểm xuất phát x_1 cho trước

Phương pháp lặp

Nhận xét

- Ưu điểm:
  - Không cần biết khoảng phân li nghiệm
- Nhược điểm:
  - Không phải lúc nào cũng hội tụ

Phương pháp lặp

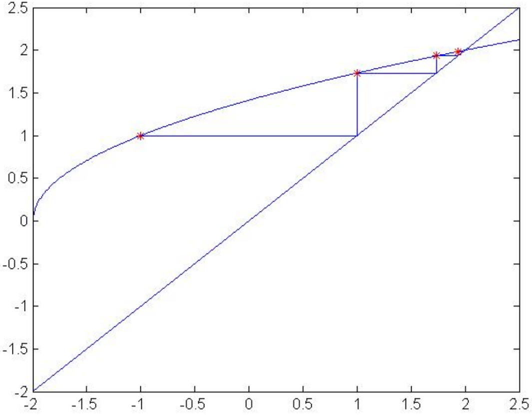
Ví dụ 1

Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ có thể dẫn về tìm điểm bất động

$$g(x) = \sqrt{x+2}$$

Điểm xấp xỉ xuất phát $x_1 = -1$

Phương pháp lặp



Điểm xuất phát
$x_1 = -1$
Số bước lặp
$n = 3$

Phương pháp lặp

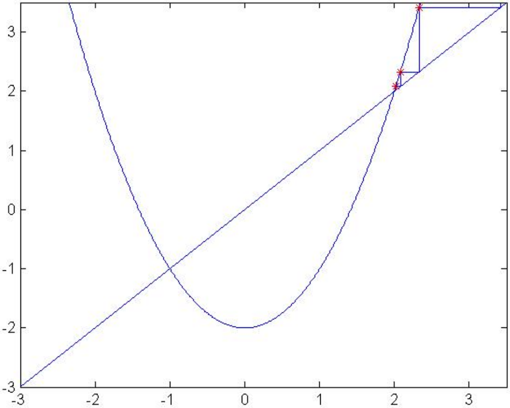
Ví dụ 2

Tìm nghiệm phương trình $f(x) = x^2 - x - 2$ nhờ tìm điểm bất đồng của hàm

$$g(x) = x^2 - 2$$

Điểm xuất phát $x_1 = 2.02$ rất gần nghiệm

Phương pháp lặp



Điểm xuất phát
$x_1 = 2.02$
Số bước lặp
$n = 50$

Phương pháp lặp

Định lý về sự hội tụ của phương pháp lặp

Định lý 1: Giả sử hàm $g(x)$ là liên tục và dãy lặp

$$x_{k+1} = g(x_k), k = 1, 2, \cdots$$

khi đó nếu $x_k \to x^*$ khi $k \to \infty$ thì x^* là điểm bất động của g.
Định lý 2: Giả sử $g \in C^1$ và $|g'(x)| < 1$ trong một khoảng nào đó chứa điểm bất động x^*. Nếu x_0 cũng thuộc khoảng này thì dãy lặp $\{x_k\}$ hội tụ tới x^*.
Định lý 3: Nếu g là một **hàm co** thì nó có duy nhất một điểm bất động và dãy lặp $\{x_k\}$ hội tụ tới x^* với mọi điểm xuất phát x_0.
Lưu ý: Hàm g được gọi là hàm co nếu tồn tại hằng số $L < 1$ sao cho với mọi x, y ta có: $|g(x) - g(y)| < L(x - y)$.

Phương pháp lặp

Phương pháp Bairstow

Mô tả

Đây là phương pháp dùng để tìm nghiệm của đa thức,:

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x_N$$

Có thể viết nó lại dưới dạng nhân tử bậc hai cộng một phần dư

$$y = (x^2 + px + q)G(x) + R(x)$$

trong đó,

- p và q là các giá trị tùy ý.
- $G(x)$ là đa thức bậc $N - 2$
- $R(x)$ là phần dư, thường là đa thức bậc nhất.

Phương pháp Bairstow

Mô tả (tiếp)

Vậy đa thức $G(x)$ và phần dư $R(x)$ có dạng

$$G(x) = b_2 + b_3 x + b_4 x^2 + \cdots + b_N x^{N-2}$$
$$R(x) = b_0 + b_1 x$$

Giá trị của b_0 và b_1 phụ thuộc lựa chọn p và q, mục đích là ta tìm $p = p^*$ và $q = q^*$ sao cho

- $b_0(p^*, q^*) = b_1(p^*, q^*) = 0 \Rightarrow R(x) = 0$
- $(x^2 + p^* x + q^*) \Rightarrow$ nhân tử bậc hai của y

Phương pháp Bairstow

Thủ tục lặp

1. Khởi tạo giá trị p và q và tính b_0 và b_1 (xem ct trong sách)
2. Tính các giá trị $(b_0)_p, (b_1)_p$ và $(b_0)_q, (b_1)_q$ (xem ct trong sách)
3. Tìm Δp và Δq khi giải phương trình (9)
4. Thu được p^* và q^* theo công thức $p^* = p + \Delta p$ và $q^* = q + \Delta q$

Phương pháp Bairstow

Nhận xét

- Ưu điểm:
  - phương pháp hội tụ đến nhân tử bậc hai $(x^2 + px + q)$ bất kể giá trị khởi tạo p, q
  - các hệ số của đa thức $G(x)$ cũng tự động thu được
- Nhược điểm:
  - độ chính xác của nghiệm thu được không cao
  - để cải thiện có thể dùng thêm phương pháp Newton để tính chính xác lại từng nghiệm

Tổng kết

Phương pháp	Biết khoảng phân ly nghiệm	Đòi hỏi liên tục của đạo hàm bậc 1	Kiểu phương trình	Tính năng đặc biệt
Chia đôi	Có	Không	Bất kỳ	Áp dụng đc với hàm không có dạng giải tích
Dây cung	Có	Có	Bất kỳ	Hội tụ chậm khi khoảng phân ly lớn
Newton	Không	Có	Bất kỳ	Hội tụ nhanh Cần tính $f'(x)$
Cát tuyến	Không	Có	Bất kỳ	nt
Lặp	Không	Có	Bất kỳ	Có thể ko hội tụ
Bairstow	Không	Có	Đa thức	Nhân tử bậc 2 Có thể tìm nghiệm phức

Tổng kết

Phương pháp	Biết khoảng phân ly nghiệm	Đòi hỏi liên tục của đạo hàm bậc 1	Kiểu phương trình	Tính năng đặc biệt
Chia đôi	Có	Không	Bất kỳ	Áp dụng đc với hàm không có dạng giải tích
Dây cung	Có	Có	Bất kỳ	Hội tụ chậm khi khoảng phân ly lớn
Newton	Không	Có	Bất kỳ	Hội tụ nhanh Cần tính $f'(x)$
Cát tuyến	Không	Có	Bất kỳ	nt
Lặp	Không	Có	Bất kỳ	Có thể ko hội tụ
Bairstow	Không	Có	Đa thức	Nhân tử bậc 2 Có thể tìm nghiệm phức

Hai phương pháp đầu (chia đôi, dây cung) đều đòi hỏi khoảng phân ly nghiệm. Phương pháp Newton và cát tuyến cần có giá trị phỏng đoán ban đầu. Phương pháp lặp có trở ngại là không phải lúc nào cũng hội tụ. Phương pháp Bairstow hạn chế giải phương trình đa thức, cũng có thể không hội tụ.

Đọc thêm

Các hàm tìm nghiệm trong Matlab

- **X = roots(C)** tìm nghiệm đa thức
- **X = fzero(FUN,X0)** tìm nghiệm phương trình phi tuyến

abcasdasd

VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

Thank you for your attentions!

soict.hust.edu.vn/ fb.com/groups/soict