



## SECTION-I : (Maximum Marks: 80)

This section contains **20 questions**. Each question has 4 options for correct answer. Multiple-Choice Questions (MCQs) **Only one option is correct**. For each question, marks will be awarded as follows:

**Full Marks** : +4 If correct answer is selected.

**Zero Marks** : 0 If none of the option is selected.

**Negative Marks** : -1 If wrong option is selected.

## खण्ड-I : (अधिकतम अंक: 80)

इस खंड में **20 प्रश्न हैं**। प्रत्येक प्रश्न में सही उत्तर के लिए 4 विकल्प हैं। बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs) केवल एक विकल्प सही है। प्रत्येक प्रश्न के लिए, अंक निम्नानुसार दिए जाएंगे:

**पूर्ण अंक** : +4 यदि सही उत्तर चुना गया है।

**शून्य अंक** : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है।

**ऋणात्मक अंक** : -1 यदि गलत विकल्प चुना गया है।

1. Which of the following is dimensionally correct for "pressure" :-

- (A) Momentum per unit volume
- (B) Momentum per unit volume and per unit energy
- (C) Energy per unit volume
- (D) Force per unit length

दाब के लिये निम्न में से कौनसी राशियाँ विमीय रूप से सही हैं?

- (A) प्रति एकांक आयतन में संवेग
- (B) प्रति एकांक आयतन में संवेग तथा प्रति एकांक ऊर्जा
- (C) प्रति एकांक आयतन में ऊर्जा
- (D) प्रति एकांक लम्बाई में बल

**Ans. C**

**Sol.** Pressure =  $\left[ \frac{\text{Force}}{\text{Area}} \right] = \left[ \frac{\text{Force} \times \text{m}}{\text{Area} \times \text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{Energy}}{\text{Volume}} \right]$

2. The angle which a vector  $\hat{i} - \hat{j} + \sqrt{2} \hat{k}$  makes with y-axis is

सदिश  $\hat{i} - \hat{j} + \sqrt{2} \hat{k}$  द्वारा y-अक्ष के साथ बनाया गया कोण है :-

- (A)  $60^\circ$
- (B)  $120^\circ$
- (C)  $150^\circ$
- (D)  $\tan^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right)$

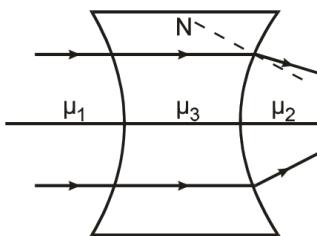
**Ans. B**

**Sol.**  $\cos \beta = \frac{A_y}{A} = \frac{-1}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \beta = 120^\circ$$

3. From the figure shown establish a relation between,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  :-

चित्र के आधार पर  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  के मध्य सम्बन्ध होगा :-



- (A)  $\mu_3 > \mu_2 > \mu_1$       (B)  $\mu_3 < \mu_2 < \mu_1$   
 (C)  $\mu_2 > \mu_3 ; \mu_3 = \mu_1$       (D)  $\mu_2 > \mu_1 ; \mu_3 = \mu_2$

**Ans. C**

**Sol.**  $\mu_1 = \mu_3$  since there is no bending at first surface.  $\mu_3 < \mu_2$  since the ray bends towards normal as it passes from  $\mu_3$  to  $\mu_2$  medium.

4. A rod of length  $L$  lies along the axis of a concave mirror of focal length  $f$ . The near end of the rod is at a distance  $L > f$  from the mirror. Its image will have a length :

लम्बाई  $L$  वाली एक छड़ फोकस दूरी  $f$  वाले अवतल दर्पण की अक्ष के अनुदिश स्थित है। छड़ का निकटतम सिरा दर्पण से  $L > f$  दूरी पर स्थित है। इसके प्रतिबिम्ब की लम्बाई होगी:-

- (A)  $\frac{Lf^2}{(L-f)(2L-f)}$

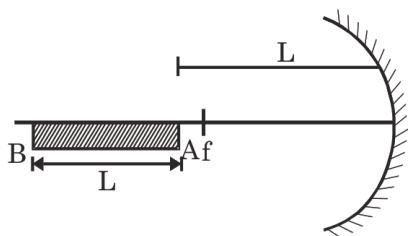
(B)  $\frac{L^2f}{(L-f)(2L-f)}$

(C)  $\frac{2Lf^2}{(L-f)(2L-f)}$

(D)  $\frac{2L^2f}{(L-f)(2L-f)}$

**Ans. A**

Sol.



m is magnification of point A distance of image from pole =  $m_1 x$

$$\left[ m_1 = \frac{f}{L-f} \right] = \frac{fL}{L-f}$$

Distance of image of point B from pole

$$= m_2 \times 2\lambda$$

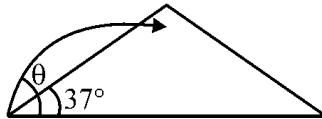
$$\left[ m_2 = \frac{f}{2L_f - f} \right] = \frac{2Lf}{2L_f - f}$$

$$\text{image length} = -\frac{2Lf}{2l-f} + \frac{Lf}{l-f}$$

$$= Lf \left[ \frac{-2(L-f) + (2L-f)}{(2L-f)(L-f)} \right] = \frac{Lf \times f}{(2L-f)(L-f)}$$

5. A shot is fired at an angle  $\theta$  to the horizontal such that it strikes the hill while moving horizontally. Find initial angle of projection  $\theta$ .

एक गोली को क्षैतिज से  $\theta$  कोण पर इस प्रकार दागा जाता है कि यह क्षैतिज रूप से गति करते हुये पहाड़ी से टकराती है। प्रारम्भिक प्रक्षेपण कोण  $\theta$  का मान होगा:-



(A)  $\tan \theta = \frac{2}{5}$

(B)  $\tan \theta = \frac{3}{8}$

(C)  $\tan \theta = \frac{3}{2}$

(D) None of these / इनमें से कोई नहीं

**Ans. C**

**Sol.**  $\tan 37 = \frac{2H}{R} = 2 \left[ \frac{u_y^2}{2g} \right] \left[ \frac{g}{2u_x u_y} \right]$

$$2 \tan 37 = \frac{u_y}{u_x} = \tan \theta$$

$$2 \times \frac{3}{4} = \tan \theta$$

6. A particle moves along a straight line in such a way that its acceleration is increasing at the rate of  $2 \text{ m/s}^3$ . Its initial acceleration and velocity were zero. Then, the distance which it will cover in the 3<sup>rd</sup> second is :

(A)  $\frac{19}{3} \text{ m}$

(B)  $\frac{12}{5} \text{ m}$

(C)  $\frac{17}{5} \text{ m}$

(D)  $\frac{19}{4} \text{ m}$

एक कण सरल रेखा में इस प्रकार गति करता है कि इसका त्वरण  $2 \text{ m/s}^3$  की दर से बढ़ रहा है। इसका प्रारम्भिक त्वरण तथा वेग शून्य है। कण द्वारा 3<sup>rd</sup> सैकण्ड में तय दूरी होगी :-

(A)  $\frac{19}{3} \text{ m}$

(B)  $\frac{12}{5} \text{ m}$

(C)  $\frac{17}{5} \text{ m}$

(D)  $\frac{19}{4} \text{ m}$

**Ans. A**

**Sol.**  $\frac{da}{dt} = a$

$$a = 2t$$

$$v = t^2$$

$$x = \frac{t^3}{3}$$

Distance travelled in 3<sup>rd</sup> sec

$$= x_3 - x_2 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

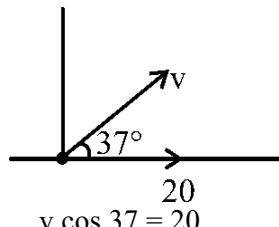
7. A ship is travelling due east at 20 km/h. Find the speed of second ship heading  $37^\circ$  north of east, if it is always due north of the first ship.

एक जहाज पूर्व की ओर 20 km/h से गति कर रहा है। एक द्वितीय जहाज जिसकी दिशा पूर्व से  $37^\circ$  उत्तर की ओर है, की चाल क्या होगी, यदि यह सदैव प्रथम जहाज के उत्तर की ओर रहता है?



**Ans. A**

**Sol.** x component of velocity of both the ships are same.



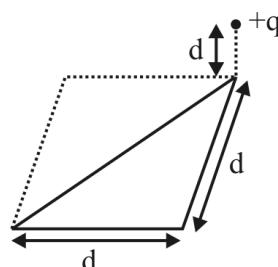
$$v \cos 37^\circ = 20$$

$$v \times \frac{4}{5} = 20$$

$$v = 25$$

8. An isosceles right angle triangle of side  $d$  is placed in a horizontal plane. A point charge  $q$  is placed at a distance  $d$  vertically above from one of the corner as shown in the figure. Flux of electric field passing through the triangle is:-

भुजा d वाला एक समद्विबाहु समकोणिक त्रिभुज क्षैतिज तल में रखा है। एक बिन्दु आवेश q को चित्रानुसार किसी एक कोने से ऊर्ध्वाधर d दूरी ऊपर रखा जाता है। त्रिभुज से निर्गत विद्युत क्षेत्र का फलक्स होगा :-



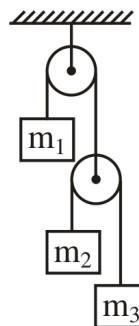
- (A)  $\frac{q}{6\varepsilon_0}$       (B)  $\frac{q}{18\varepsilon_0}$       (C)  $\frac{q}{24\varepsilon_0}$       (D)  $\frac{q}{48\varepsilon_0}$

**Ans. D**

$$\text{Sol. } \text{flux} = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{24\epsilon_0} \right)$$

9. The block of mass  $m_1$  remains stationary if :-

चित्रानुसार  $m_1$  द्रव्यमान का ब्लॉक स्थिर बना रहेगा यदि :-



$$(A) \frac{1}{m_1} = \frac{4}{m_2} + \frac{1}{m_3}$$

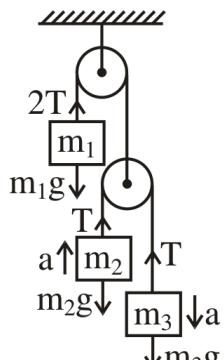
$$(C) \frac{1}{m_1} = \frac{2}{m_2} + \frac{2}{m_3}$$

$$(B) \frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}$$

$$(D) \frac{4}{m_1} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}$$

**Ans. D**

**Sol.**



$$T = \frac{2m_2m_3g}{m_2 + m_3} \quad \dots(i)$$

$$2T = m_1 g \quad \dots(ii)$$

10. A box of mass  $m$  is initially at rest on a horizontal surface. A constant horizontal force of  $\frac{mg}{2}$  is applied to the box, directed to the right. The coefficient of friction changes with the distance pushed as  $\mu = \mu_0 x$ , where  $x$  is the distance from initial location. For what distance is the box pushed until it comes to rest again?

द्रव्यमान  $m$  वाला एक बॉक्स प्रारम्भ में क्षैतिज सतह पर विरामावस्था में रखा है। इस बॉक्स पर एक नियत क्षैतिज बल  $\frac{mg}{2}$  दांयी ओर लगाया जाता है। घर्षण गुणांक का मान तथा दूरी के साथ  $\mu = \mu_0 x$  के अनुसार परिवर्तित होता है, जहाँ  $x$  प्रारम्भिक स्थिति से दूरी है। बॉक्स को कितनी दूर धकेला जाए ताकि यह पुनः विरामावस्था में आ जाए?

$$(A) \frac{2}{\mu_0} \quad (B) \frac{1}{\mu_0} \quad (C) \frac{1}{2\mu_0} \quad (D) \frac{1}{4\mu_0}$$

**Ans. B**

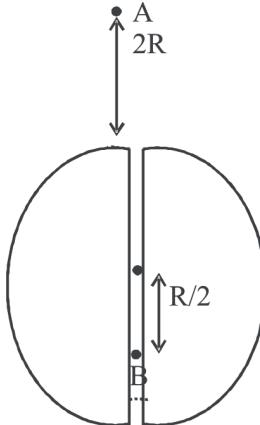
**Sol.** Applying WET

$$\frac{mg}{2}x - \int_0^x (\mu_0 x)mgdx = 0$$

$$\text{We get } x = \frac{1}{\mu_0}$$

11. Suppose, if a tunnel is dug along the diameter of the earth and a body of mass  $m$  is released from a point 'A' at a distance  $2R$  above earth along the line of tunnel. If  $M$  is the mass of the earth &  $R$  is the radius of the earth. The velocity of the body during its fall when it crosses the point B at a distance  $\frac{R}{2}$  below the earth centre as shown.

माना पृथ्वी के व्यास के अनुदिश खोदी गयी एक सुरंग में द्रव्यमान  $m$  वाले एक पिण्ड को सुरंग की रेखा के अनुदिश पृथ्वी से  $2R$  दूरी ऊपर स्थित बिन्दु 'A' से विरामावस्था से छोड़ा जाता है। पृथ्वी का द्रव्यमान  $M$  तथा त्रिज्या  $R$  है। इसके गिरने के दौरान पृथ्वी के केन्द्र से  $\frac{R}{2}$  दूरी नीचे स्थित बिन्दु B को पार करते समय पिण्ड का वेग क्या होगा?



- (A)  $\frac{5}{2} \sqrt{\frac{GM}{3R}}$       (B)  $\sqrt{\frac{GM}{3R}}$       (C)  $2\sqrt{\frac{GM}{3R}}$       (D)  $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{3R}}$

**Ans. A**

$$\text{Sol. } V_A = \frac{-GM}{3R}; V_B = \frac{-GM}{2R^3} \left( 3R^2 - \frac{R^2}{4} \right) \\ = \frac{-11GM}{8R}$$

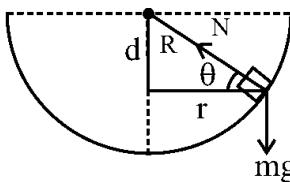
By conservation of energy

$$mV_A = mV_B + \frac{1}{2}mv^2 \\ \Rightarrow \frac{-GMm}{3R} = \frac{-11GMm}{8R} + \frac{1}{2}mv^2 \\ \Rightarrow v = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

12. A particle moves in a horizontal circle on the smooth inner surface of a hemispherical bowl of radius  $R$ . The plane of motion is at a depth  $d$  below the centre of the hemisphere. The speed of the particle is :-

एक कण त्रिज्या  $R$  वाले एक अर्धगोलाकार प्याले की चिकनी आंतरिक सतह पर एक क्षैतिज वृत्त में गति करता है। गति का तल अर्ध गोले के केन्द्र से  $d$  गइराई नीचे है। कण की चाल है :-

- (A)  $\sqrt{\frac{g(R^2 - d^2)}{R}}$       (B)  $\sqrt{\frac{g(R^2 - d^2)}{d}}$       (C)  $\sqrt{\frac{gR}{R^2 - d^2}}$       (D)  $\sqrt{\frac{gd^2}{R^2 - d^2}}$

**Ans. B****Sol.**

Centripetal Force = mass × centripetal acceleration

$$N \cos \theta = m \frac{V^2}{r} \quad \dots \text{(i)}$$

$$N \sin \theta = mg \quad \dots \text{(ii)}$$

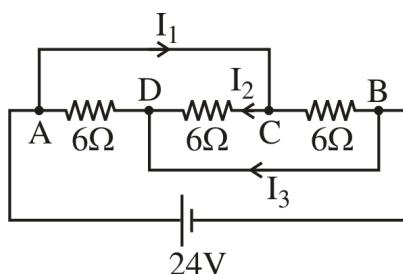
$$\text{(ii)/(i), } \tan \theta = \frac{rg}{V^2}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{rg}{\tan \theta}}$$

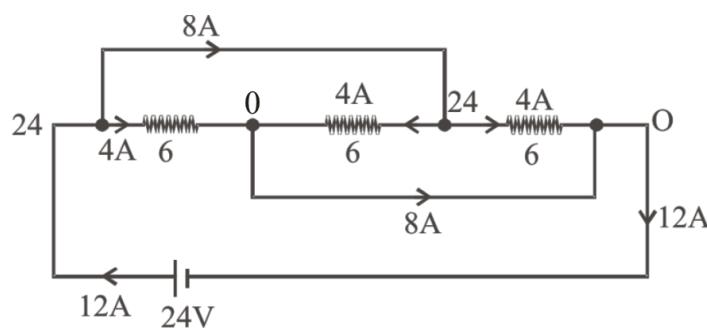
$$V = \sqrt{\frac{g(R^2 - d^2)}{d}} \quad \left[ \begin{array}{l} r = \sqrt{R^2 - d^2} \\ \tan \theta = d/r \end{array} \right]$$

- 13.** Which of the following options is incorrect regarding the below diagram ?

दिये गये परिपथ के लिये कौनसा विकल्प गलत है ?



- (A)  $I_1 = 8 \text{ Amp.}$       (B)  $I_2 = 4 \text{ Amp.}$       (C)  $I_1 = 0$       (D)  $I_3 = 8 \text{ Amp.}$

**Ans. C****Sol.**

$$R_{eq} = 2\Omega$$

[All 3 resistances are in parallel]

$$\text{So total current} = \frac{24}{2} = 12 \text{ Amp.}$$

14. If  $n$ ,  $e$ ,  $\tau$ ,  $m$  are representing electron density, charge, relaxation time and mass of an electron respectively then the resistance of wire of length  $\ell$  and cross sectional area  $A$  is given by :-

(A)  $\frac{m\ell}{ne^2\tau A}$

(B)  $\frac{2mA}{ne^2\tau}$

(C)  $ne^2\tau A$

(D)  $\frac{ne^2\tau A}{2m}$

यदि  $n$ ,  $e$ ,  $\tau$ ,  $m$  किसी इलेक्ट्रॉन के लिये क्रमशः इलेक्ट्रॉन घनत्व, आवेश, विश्रांति काल तथा द्रव्यमान हो तो लम्बाई  $\ell$  व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल  $A$  वाले तार का प्रतिरोध होगा :-

(A)  $\frac{m\ell}{ne^2\tau A}$

(B)  $\frac{2mA}{ne^2\tau}$

(C)  $ne^2\tau A$

(D)  $\frac{ne^2\tau A}{2m}$

**Ans. A**

**Sol.**  $R = \frac{\rho \ell}{A} = \left( \frac{m}{ne^2\tau} \right) \frac{\ell}{A}$

15. The potential energy for a force field  $\vec{F}$  is given by  $U(x, y) = \cos(x + y)$ . The force acting on a particle at position given by coordination  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  is :-

एक बल क्षेत्र  $\vec{F}$  के लिये स्थितिज ऊर्जा  $U(x, y) = \cos(x + y)$  द्वारा दी जाती है। निर्देशांक  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  वाली स्थिति पर कण पर कार्यरत बल होगा :-

(A)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$

(B)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$

(C)  $\left(\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right)$

(D)  $\left(\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right)$

**Ans. B**

**Sol.**  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \sin(x + y)$

$F_y = -\frac{\partial v}{\partial y} = \sin(x + y)$

$F_x = \sin(x + y)]_{(0, \pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$F_y = \sin(x + y)]_{(0, \pi/4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{i} + \hat{j}]$

16. The power output from the motor on a 2 kg body depends on the velocity of body as  $P = v(5 - v)$ . The work done on the body for first 2 second is :- (The particle starts from rest)

2kg की वस्तु पर मोटर से निर्गत शक्ति, वस्तु के वेग पर  $P = v(5-v)$  के अनुसार निर्भर करती है। प्रथम 2 सेकण्ड के लिये वस्तु पर किया गया कार्य होगा :- (कण विरामावस्था से प्रारंभ होता है।)

(A)  $25(e - 1)$

(B)  $5 \left( \frac{e - 1}{e} \right)$

(C)  $25 \left( \frac{e - 1}{e} \right)^2$

(D)  $25 \left( \frac{e^2 - 1}{e^2} \right)^2$

**Ans. C**

**Sol.**  $P = Fv = v(5-v) \Rightarrow F = 5-v$

$$m \frac{dv}{dt} = 5 - v \int_0^v \frac{m}{5-v} dv = \int_0^2 dt$$

$$[-m \ln(5-v)]_0^v = 2$$

$$\Rightarrow -2 \ln \left( \frac{5-v}{5} \right) = 2 \Rightarrow 1 - \frac{v}{5} = e^{-1}$$

$$v = 5(1 - e^{-1})$$

Now  $W = \Delta KE$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 25(1 - e^{-1})^2 \\ &= 25 \left( \frac{e - 1}{e} \right)^2 \end{aligned}$$

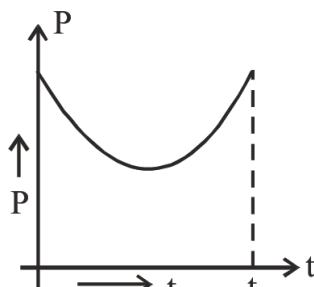
17. Power versus time graph for a given force is given below. Work done by the force upto time  $t$  ( $\leq t_0$ ) :-

(A) First decreases then increases.

(B) First increases then decreases.

(C) Always increases.

(D) Always decreases.



किसी बल के लिये शक्ति तथा समय के मध्य आरेख चित्र में दर्शाया गया है। बल द्वारा समय  $t$  ( $\leq t_0$ ) तक किया गया कार्य :-

(A) पहले घटता है, फिर बढ़ता है।

(B) पहले बढ़ता है, फिर घटता है।

(C) सदैव बढ़ता है।

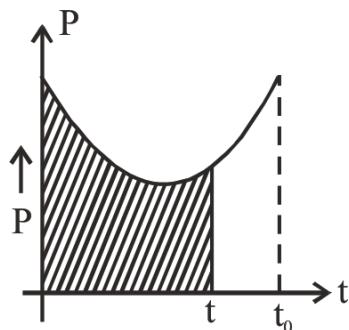
(D) सदैव घटता है।

**Ans. C**

Sol.

The work done by force from time  $t = 0$  to  $t = t$  sec. is given by shaded area in graph below.

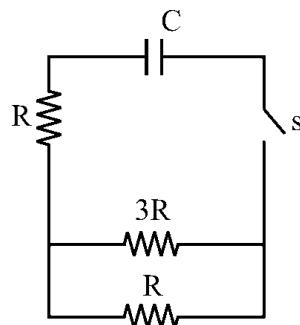
Hence as  $t$  increases, this area increases.



∴ Work done by force keeps on increasing,

18. In the figure, capacitor is completely charged and switch is closed at  $t = 0$ . The time after which the current from the capacitor becomes  $1/4^{\text{th}}$  of its maximum value will be :-

प्रदर्शित चित्र में संधारित पूर्णतया आवेशित है तथा  $t = 0$  पर स्विच बंद कर दिया जाता है। कितने समय पश्चात् संधारित्र से प्रवाहित धारा इसके अधिकतम मान की  $1/4^{\text{th}}$  गुना हो जायेगी ?



- (A)  $2 RC \ln 2$       (B)  $\frac{7RC}{4} \ln 2$   
 (C)  $RC \ln 2$       (D)  $\frac{7RC}{2} \ln 2$

**Ans. D**

**Sol.** Here  $R_{eq} = R' = \frac{7R}{4}$

$$\text{Now } i = \frac{q_0}{R'C} e^{-\frac{t}{R'C}}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \frac{q_0}{R'C} = \frac{q_0}{R'C} e^{-\frac{t}{R'C}}$$

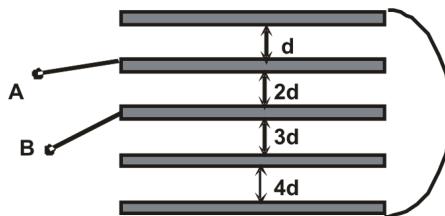
$$\therefore \frac{1}{4} \frac{q_0}{R'C} = \frac{q_0}{R'C} e^{-\frac{t}{R'C}}$$

$$\text{or } \ell n 4 = \frac{t}{R'C}$$

$$\therefore t = \frac{7RC}{4} \ln 4 = \frac{7RC}{2} \ln 2$$

19. Five conducting plates each having area A are arranged as shown in the figure. The outer plates are connected by a wire. Find out equivalent capacitance between A and B is :-

प्रत्येक A क्षेत्रफल वाली पाँच चालक प्लेटों को चित्रानुसार व्यवस्थित किया गया है। बाहरी प्लेटों को एक तार द्वारा जोड़ दिया जाता है। A व B के मध्य तुल्य धारिता होगी :-



- (A)  $\frac{5\epsilon_0 A}{8d}$       (B)  $\frac{3\epsilon_0 A}{8d}$       (C)  $\frac{\epsilon_0 A}{4d}$       (D)  $\frac{7\epsilon_0 A}{8d}$

**Ans. A**

**Sol.**  $C = \epsilon_0 A/d$

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{4}{C} + \frac{3}{C} = \frac{8}{C} \Rightarrow C' = \frac{C}{8}$$

$$C_{eq} = \frac{C}{2} + \frac{C}{8} = \frac{4C + C}{8} = \frac{5}{8}C$$

20. Two persons A and B are sitting in two cars 1 and 2 such that the velocity of the cars is given by  $\vec{v}_1 = 3t^2\hat{i} - \frac{4}{3}t^6\hat{j}$  and  $\vec{v}_2 = 3(t^2 - 5t)\hat{i}$  respectively. The pseudo force on B as observed by A at  $t = 1$  sec will be : ( $m_A = 70$  kg,  $m_B = 50$ kg)

दो व्यक्ति A तथा B दो कारों 1 तथा 2 में बैठे हुये हैं तथा कारों के वेग क्रमशः  $\vec{v}_1 = 3t^2\hat{i} - \frac{4}{3}t^6\hat{j}$  व  $\vec{v}_2 = 3(t^2 - 5t)\hat{i}$  द्वारा दिये गये हैं।  $t = 1$  sec पर A द्वारा प्रेक्षित B पर लगने वाला आभासी बल होगा : ( $m_A = 70$  kg,  $m_B = 50$ kg)

- (A)  $70 [4\hat{j} - 3\hat{i}]$       (B)  $100 [4\hat{j} - 3\hat{i}]$   
 (C)  $50 [8\hat{j} - 15\hat{i}]$       (D)  $70 [8\hat{j} - 15\hat{i}]$

**Ans. B**

**Sol.**  $\vec{a}_A = 6t\hat{i} - 8t^5\hat{j}$

$$\text{at } t = 1 \text{ sec ; } \vec{a}_A = 6\hat{i} - 8\hat{j}$$

$$a_1 = 6\hat{i} - \frac{4}{3} \times 6(t)^5\hat{j} = 6\hat{i} - 8\hat{j}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \text{Pseudo force on B} \\ \text{w.r.t. A} \end{array} \right\} = -m_B \times \vec{a}_A$$

$$= -50 [6\hat{i} - 8\hat{j}]$$

$$= 50 [8\hat{j} - 6\hat{i}]$$

$$= 100 [4\hat{j} - 3\hat{i}]$$

## SECTION-II : (Maximum Marks: 20)

This section contains 10 questions Candidates have to attempt any 5 questions out of 10. If more than 5 questions are attempted, then only first 5 attempted questions will be evaluated.

The answer to each question is a Numerical Value.

For each question, enter the correct integer value (In case of non-integer value, the answer should be rounded off to the nearest Integer).

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

*Full Marks* : +4 If correct answer is entered.

*Zero Marks* : 0 If the question is unanswered.

*Negative Marks* : -1 If wrong answer is entered.

## खण्ड-II : (अधिकतम अंक: 20)

इस खण्ड में 10 प्रश्न हैं। उम्मीदवारों को 10 में से किसी भी 5 प्रश्न का प्रयास करना है। यदि 5 से अधिक प्रश्नों का प्रयास किया जाता है, तो केवल पहले 5 प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान (Numerical Value) है।

प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही पूर्णांक मान दर्ज करें (दशमलव संकेतन में), उत्तर को निकटतम पूर्णांक में लिखा जाना चाहिए।

प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

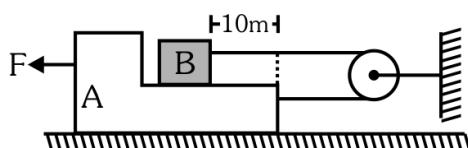
पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी उत्तर दर्ज नहीं किया गया है।

ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत उत्तर दर्ज किया गया है।

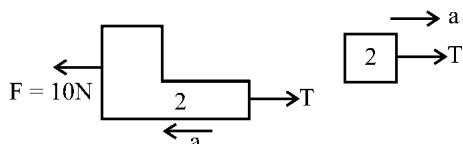
- A 2 kg block 'B' rests as shown on a frictionless bracket 'A' of same mass. Constant force  $F = 10\text{N}$  starts to act at time  $t = 0$ , when the distance of block B from the end of bracket is 10m. Find time (in sec), when block B falls off the bracket.

2 kg द्रव्यमान का एक ब्लॉक B चित्रानुसार समान द्रव्यमान के एक घर्षण रहित ब्रेकेट A पर स्थित है। जब ब्लॉक B की ब्रेकेट के सिरे से दूरी 10m है तो समय  $t = 0$  पर एक नियत बल  $F = 10\text{N}$  लगाना प्रारम्भ होता है। वह समय (सेकण्ड में) ज्ञात कीजिये जब ब्लॉक B ब्रेकेट से गिर जायेगा।



**Ans. 2**

**Sol.**



$$10 - T = 2a \quad \dots (i)$$

$$T = 2a \quad \dots (ii)$$

From equation (i) and (ii)

$$a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

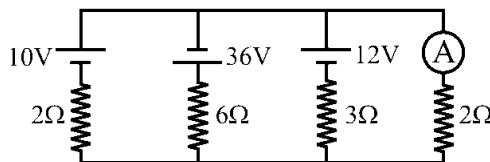
$$a_{\text{relative}} = 5$$

$$10 = \frac{1}{2}(5)t^2$$

$$t = 2$$

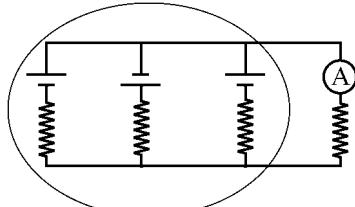
2. Find the current shown by ammeter (ideal) in ampere.

प्रदर्शित परिपथ में आदर्श अमीटर द्वारा दर्शायी गयी धारा एम्पियर में ज्ञात कीजिये।



**Ans. 1**

**Sol.**



Find equivalent

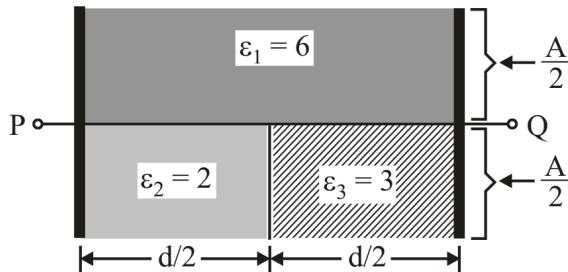
$$E = \frac{\frac{10}{2} - \frac{36}{3} + \frac{12}{3}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)} = 3 \text{ V volt}$$

$$\Rightarrow i = \frac{3}{2+1}$$

$$r = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = 1\Omega$$

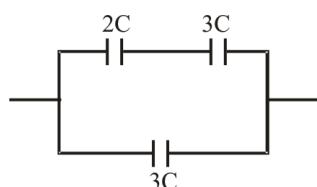
3. Three dielectric of relative permitivities  $\epsilon_{r_1} = 6$ ,  $\epsilon_{r_2} = 2$  and  $\epsilon_{r_3} = 3$  are introduced in a parallel plate capacitor of plate area A and separation d. The effective capacitance between P and Q is  $\frac{x\epsilon_0 A}{d}$ . Then  $\frac{5}{7}x$  will be :-

सापेक्षिक विद्युतशीलता  $\epsilon_{r_1} = 6$ ,  $\epsilon_{r_2} = 2$  तथा  $\epsilon_{r_3} = 3$  वाले तीन परावैद्युतों को एक समान्तर पट्ट संधारित्र में प्रविष्ट कराया जाता है। इस संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल A तथा इनके मध्य दूरी d है। चित्र में प्रदर्शित बिन्दु P तथा Q के मध्य यदि प्रभावी धारिता  $\frac{x\epsilon_0 A}{d}$  हो तो  $\frac{5}{7}x$  का मान ज्ञात कीजिये।



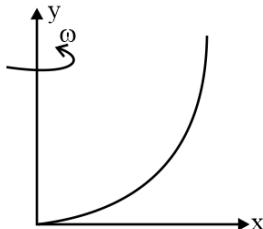
**Ans. 3**

**Sol.**  $C_{eq} = \frac{21}{5} \times \frac{\epsilon_0 A}{d}$



4. Y-axis is vertical. A wire shown in the diagram is frictionless. This wire is rotated about y-axis with constant angular velocity  $\omega$ . A particle placed anywhere on wire remains stationary w.r.t. wire. If equation of wire is given by  $y = \frac{\omega^2}{2g} x^n$ . Then find n :-

Y-अक्ष ऊर्ध्वाधर है। चित्र में प्रदर्शित तार घर्षणरहित है। इस तार को y-अक्ष के सापेक्ष नियत कोणीय वेग  $\omega$  से घुमाया जाता है। इस तार पर कहीं पर भी रखा हुआ कण तार के सापेक्ष स्थिर बना रहता है। यदि तार की समीकरण  $y = \frac{\omega^2}{2g} x^n$  हो तो n ज्ञात कीजिए।



**Ans. 2**

Sol.  $N \sin\theta = mx\omega^2$

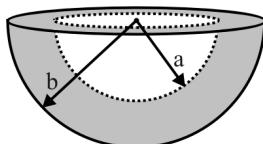
$$N \cos\theta = mg$$

$$\tan\theta = \frac{\omega^2}{g} x$$

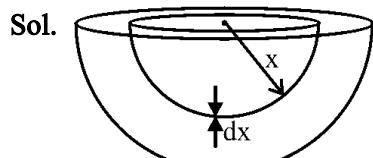
$$dy = \frac{\omega^2}{g} x dx \Rightarrow y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

5. A uniformly charged hemisphere of radius b and charge density  $\rho$  has a hemispherical cavity of radius  $a$  ( $a = \frac{b}{2}$ ) cut from its centre. If the potential at the centre of the cavity is  $\frac{n\rho b^2}{16\epsilon_0}$  then n = ?

त्रिज्या b तथा आवेश घनत्व  $\rho$  वाले एक समरूप आवेशित अर्धगोले के केन्द्र से त्रिज्या a ( $a = \frac{b}{2}$ ) वाली अर्ध गोलाकार गुहिका काटी जाती है। यदि गुहिका के केन्द्र पर विभव  $\frac{n\rho b^2}{16\epsilon_0}$  हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।



**Ans. 3**



$$V = \int_a^b K (2\pi x^2 dx) \rho$$

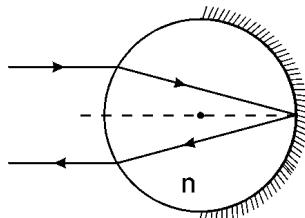
$$V = 2\pi k \rho \left[ \frac{b^2 - a^2}{2} \right] = \pi \rho k (b^2 - a^2)$$

$$b = 2a$$

$$V = 3\pi k \rho b^2$$

6. A transparent cylinder has its right half polished so as to act as a mirror. A paraxial light ray is incident from left, that is parallel to principal axis, exits parallel to the incident ray as shown. The refractive index  $n$  of the material of the cylinder is :-

एक पारदर्शी बेलन के दाँये आधे भाग को पॉलिश किया गया है, जिससे यह दर्पण की भाँति व्यवहार करता है। मुख्य अक्ष के समान्तर एक उपाक्षीय प्रकाश किरण इस पर बायीं ओर से आपतित होती है तथा आपतित किरण के समान्तर ही बाहर निकलती है। बेलन के पदार्थ के अपवर्तनांक  $n$  का मान ज्ञात कीजिये।



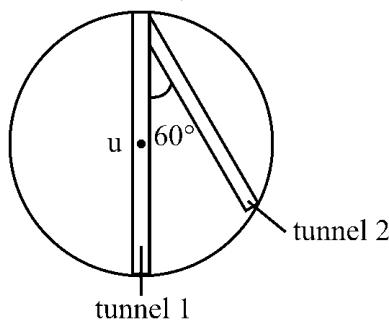
**Ans. 2**

**Sol.** For spherical surface

$$\begin{aligned} \text{using } \frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} &= \frac{n_2 - n_1}{R} \\ \Rightarrow \frac{n}{2R} - \frac{1}{\infty} &= \frac{n-1}{R} \\ \Rightarrow n &= 2n - 2 \\ \Rightarrow n &= 2 \end{aligned}$$

7. Two particles are allowed to execute SHM along tunnels, inside earth. Time period is  $T_1$  for the tunnel, passing through centre of earth, and  $T_2$  when tunnel makes an angle  $60^\circ$  with previous tunnel. Find  $\frac{T_1}{T_2}$ . (Assume there are zero dissipation forces acting on particles inside tunnel, and mass distribution of earth is uniform)

दो कण पृथ्वी के अन्दर सुरंगों के अनुदिश सरल आवर्त गति करते हैं। पृथ्वी के केन्द्र से गुजरने वाली सुरंग के लिए आवर्तकाल  $T_1$  है तथा इस सुरंग से  $60^\circ$  कोण पर स्थित सुरंग के लिये आवर्तकाल  $T_2$  है।  $\frac{T_1}{T_2}$  का मान ज्ञात कीजिये। (माना सुरंग के अन्दर कणों पर शून्य क्षयकारी बल लगते हैं तथा पृथ्वी का द्रव्यमान वितरण एकसमान है)



**Ans. 1**

**Sol.** Time period is same for both tunnels i.e because its not depend on angle.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

8. Given that  $\vec{P} = (5\hat{i} + 4\hat{j} + \alpha\hat{k})$  and  $\vec{Q} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ . Find the value of  $\alpha$  so that  $\vec{P} \perp \vec{Q}$ .

दिया है  $\vec{P} = (5\hat{i} + 4\hat{j} + \alpha\hat{k})$  तथा  $\vec{Q} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ .  $\alpha$  का मान ज्ञात करो ताकि  $\vec{P} \perp \vec{Q}$  हो।

**Ans. 9**

Sol.  $\vec{P} \perp \vec{Q} \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$

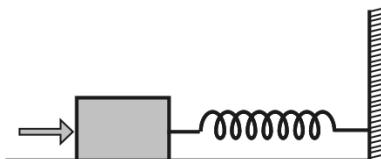
$$\therefore (5\hat{i} + 4\hat{j} + \alpha\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$$

$$\text{or } 5 + 4 - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 9$$

9. A block of mass 0.18 kg is attached to a spring of force-constant 2 N/m. The coefficient of friction between the block and the floor is 0.1. Initially the block is at rest and the spring is un-stretched. An impulse is given to the block as shown in the figure. The block slides a distance of 0.06 m and comes to rest for the first time. The initial velocity of the block in m/s is  $V = N/10$ . Then  $N$  is (Take :  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

द्रव्यमान 0.18 kg वाले ब्लॉक को 2 N/m बल नियतांक वाली स्प्रिंग से जोड़ा जाता है। ब्लॉक तथा फर्श के मध्य घर्षण गुणांक 0.1 है। प्रारम्भ में ब्लॉक विरामावस्था में है तथा स्प्रिंग अतनित है। इस ब्लॉक को एक आवेग चित्रानुसार दिया जाता है। ब्लॉक 0.06 m दूरी तक गति करने के पश्चात् प्रथम बार विरामावस्था में आ जाता है। यदि ब्लॉक का प्रारम्भिक वेग m/s में  $V = N/10$  हो तो  $N$  ज्ञात कीजिए ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



**Ans. 4**

Sol.  $-\mu mgx - \frac{1}{2}kx^2 = 0 - \frac{1}{2}mv^2$

$$v^2 = \frac{1.44}{9} = \frac{4}{10} \Rightarrow N = 4$$

10. A force  $\vec{F} = (3\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k})$  N acts on an object and displaces it from (1, 2, 3)m to (4, -5, -6)m. The work done by force will be  $\alpha J$ . The value of  $\alpha$  is :-

एक बल  $\vec{F} = (3\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k})$  N किसी पिण्ड पर लगाने पर यह इसे (1, 2, 3) से (4, -5, -6) तक विस्थापित करता है। यदि बल द्वारा किया गया कार्य  $\alpha J$  हो तो  $\alpha$  का मान ज्ञात कीजिये।

**Ans. 5**

Sol. Displacement =  $(3\hat{i} - 7\hat{j} - 9\hat{k})$

$$w = \vec{F} \cdot \vec{x}$$

$$w = 9 - 49 + 45 = 5 \text{ Joule}$$

**ALLEN®**  
**PART-2 : CHEMISTRY**  
**भाग-2 : रसायन विज्ञान**

**SECTION-I : (Maximum Marks: 80)**

This section contains **20 questions**. Each question has 4 options for correct answer. Multiple-Choice Questions (MCQs) **Only one option is correct**. For each question, marks will be awarded as follows:

**Full Marks** : +4 If correct answer is selected.

**Zero Marks** : 0 If none of the option is selected.

**Negative Marks** : -1 If wrong option is selected.

**खण्ड-I : (अधिकतम अंक: 80)**

इस खण्ड में **20 प्रश्न हैं**। प्रत्येक प्रश्न में सही उत्तर के लिए 4 विकल्प हैं। बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs) केवल एक विकल्प सही है। प्रत्येक प्रश्न के लिए, अंक निम्नानुसार दिए जाएंगे:

**पूर्ण अंक** : +4 यदि सही उत्तर चुना गया है।

**शून्य अंक** : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है।

**ऋणात्मक अंक** : -1 यदि गलत विकल्प चुना गया है।

1. An elements has three isotopes  $X^{20}$ ,  $X^{21}$  and  $X^{22}$ . Percentage abundance (mole %) of  $X^{20}$  is 90 and average atomic mass of X is 20.18. Select correct option(s) -

- (A) Percent abundance of  $X^{21} = 8\%$
- (B) Percent abundance of  $X^{21} = 3\%$
- (C) Percent abundance of  $X^{22} = 8\%$
- (D) Percent abundance of  $X^{22} = 2\%$

एक तत्व के तीन समस्थानिक  $X^{20}$ ,  $X^{21}$  एवं  $X^{22}$  हैं।  $X^{20}$  की प्रतिशत प्रचुरता (मोल %) 90 है। एवं X का औसत परमाणिक द्रव्यमान 20.18 है, तो सही विकल्प चुनिये -

- (A)  $X^{21}$  की प्रतिशत प्रचुरता = 8%
- (B)  $X^{21}$  की प्रतिशत प्रचुरता = 3%
- (C)  $X^{22}$  की प्रतिशत प्रचुरता = 8%
- (D)  $X^{22}$  की प्रतिशत प्रचुरता = 2%

**Ans. C**

2. The most abundant elements by mass in the body of a healthy human adult are : Oxygen (61.4%) ; Carbon (22.9%), Hydrogen (10.0%) ; and Nitrogen (2.6%). The weight which a 75 kg person would gain if all  $^1H_1$  atoms are replaced by  $^2H_1$  atoms is :-

एक स्वस्थ मनुष्य के शरीर में मात्रा की दृष्टि से बहुतायत में मिलने वाले तत्व हैं : ऑक्सीजन (61.4%); कार्बन (22.9%), हाइड्रोजन (10.0%) ; तथा नाइट्रोजन (2.6%)। 75 kg वजन वाले एक व्यक्ति के शरीर से सभी  $^1H$  परमाणुओं को  $^2H$  परमाणुओं से बदल दिया जाये तो उसके भार में जो वृद्धि होगी, वह है :-

- |            |             |
|------------|-------------|
| (A) 15 kg  | (B) 37.5 kg |
| (C) 7.5 kg | (D) 10 kg   |

**Ans. C**

3. "X" mL of a 60% alcohol by weight ( $d = 0.6$  gm/mL) must be completely used to prepare 200 mL of 12% alcohol by weight ( $d = 0.9$  gm/mL). Then the value of "X" will be :

"X" mL ऐल्कोहॉल जो कि भार द्वारा 60% ( $d = 0.6 \text{ gm/mL}$ ) है, उससे 200 mL , ऐल्कोहॉल जो कि भार द्वारा 12% ( $d = 0.6 \text{ gm/mL}$ ) बनाते हैं, तो "X" का मान होगा :



**Ans. C**

$$\text{Sol. } X \times 0.6 \times \frac{60}{100} = 200 \times 0.9 \times \frac{12}{100}$$

$$X = 60 \text{ mL}$$

4. 300 gm, 30% (w/w) NaOH solution is mixed with 500 gm 40% (w/w) NaOH solution. What is % (w/v) NaOH if density of final solution is 2 gm /mL :-

300 gm, 30% (w/w) NaOH विलयन को 500 gm 40% (w/w) NaOH विलयन के साथ मिश्रित किया गया है। यदि अन्तिम विलयन का घनत्व 2 gm /mL है तो % (w/v) NaOH क्या है :–



**Ans. A**

$$\text{Sol. } W_{\text{NaOH}} = \frac{30}{100} \times 300 = 90\text{g}$$

$$W_{2\text{NaOH}} = \frac{40}{100} \times 500 = 200$$

$$W_{t(NaOH)} = 200 + 90 = 290$$

$$W_{t(\text{Soln})} = 300 + 500 = 800$$

$$D = 2 \frac{800}{V}$$

V = 400

$$\frac{W}{V} = \frac{290}{400} \times 100$$

= 72.5

5. Correct sequence of the coordination number in SC, FCC & BCC is-

SC, FCC एवं BCC मे समन्वय संख्या का सही क्रम है-



**Ans. B**

6. For which of the following system  $a = b = c$  &  $\alpha = \beta = \gamma$  ?

- (A) Rhombohedral      (B) Orthorhombic      (C) Tetragonal      (D) None of these

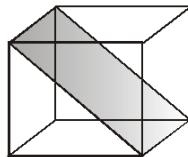
कौनसे तंत्र के लिये  $a = b = c$  एवं  $\alpha = \beta = \gamma$  ?

- (A) रोम्बोहेडल      (B) ऑर्थोरोम्बिक      (C) चतुष्कोणिय      (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. A

7. Solid AB having NaCl structure, in which B atoms are at the corners. If all the atoms present in the plane shown are removed then formula of the compound left is-

ठोस AB की NaCl संरचना है। जिसमें B परमाणु कोनों पर उपस्थित है। दिखाये गये तल में उपस्थित सभी परमाणुओं को हटा दिया जाये तो शेष बचे यौगिक का सूत्र है -



- (A)  $A_4B_3$       (B)  $A_3B_4$       (C)  $AB$       (D)  $A_3B_2$

**Ans. C**

**Sol.** B removed =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

$$A \text{ removed} = 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

8. Solution showing positive deviation from Raoult's law is-



राउल्ट के नियम से धनात्मक विचलन प्रदर्शित करने वाला विलयन है -

- (A) ऐथेनॉल एवं ऐसिटोन  
(B) ऐथेनॉल एवं मेथेनॉल  
(C)  $\text{HNO}_3$  एवं  $\text{H}_2\text{O}$   
(D) ब्रोमोऐथेन एवं क्लोरोऐथेन

Ans. A

**Sol.** B,D : ideal solution

C : Negative deviation

9. An ideal solution is obtained by dissolving  $n$  moles of non-volatile, non-electrolyte solute in  $N$  moles of solvent. If the vapour pressure of solution is  $P$  and the vapour pressure of pure solvent is ' $P^\circ$ ', then

एक आदर्श विलयन को  $N$  मोल विलायक में  $n$  मोल अवाष्पशील, अनवैद्युतअपघट्ट्य विलेय को घोलकर बनाया गया है। यदि विलयन का वाष्प दाब  $P$  हैं एवं शद्ध विलायक का वाष्प दाब ' $P^o$ ' है, तो -

$$(A) \frac{P^\circ - P}{P} = \frac{n}{N}$$

$$(B) \frac{P^\circ - P}{P^\circ} = \frac{n}{N}$$

$$(C) \quad \frac{P^{\circ} - P}{P^{\circ}} = \frac{N}{n}$$

$$(D) \frac{P^{\circ} - P}{P} = \frac{N}{n}$$

**Ans. A**

$$\text{Sol. } \frac{n}{N} = \frac{P^o - P}{P}$$

10. Which condition is not satisfied by an ideal solution?

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (A) $\Delta_{\text{mix}}V = 0$ | (B) $\Delta_{\text{mix}}S = 0$ |
| (C) Obeyance to Raoult's Law   | (D) $\Delta_{\text{mix}}H = 0$ |

कौनसी परिस्थिति को आदर्श विलयन द्वारा संतुष्ट नहीं किया जा सकता है ?

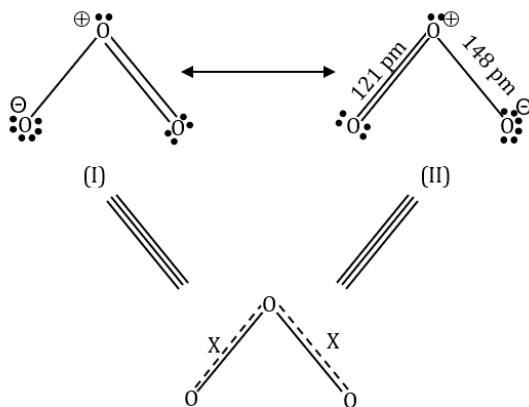
- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (A) $\Delta_{\text{mix}}V = 0$ | (B) $\Delta_{\text{mix}}S = 0$ |
| (C) राउल्ट के नियम का पालन     | (D) $\Delta_{\text{mix}}H = 0$ |

**Ans. B**

**Sol.** For ideal solution is  $\Delta S_{\text{mix}} \neq 0$ .

Due to mixing of gases randomness increases.

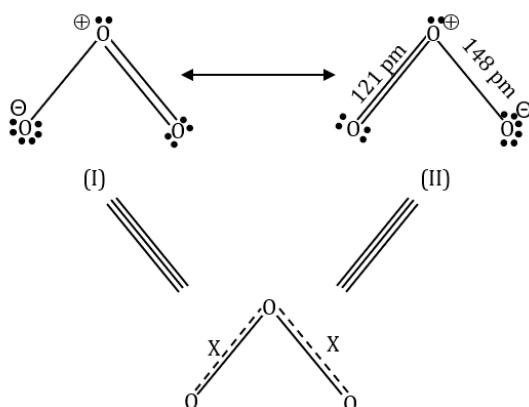
11.  $O_3$ (ozone) molecule can be equally represented by the structures I and II shown below :



Which of the following value of x is correct ?

- |                               |                      |
|-------------------------------|----------------------|
| (A) 148 pm                    | (B) 121 pm           |
| (C) between 121 pm and 148 pm | (D) more than 148 pm |

$O_3$ (ओजोन) अणु को नीचे प्रदर्शित संरचना I एवं II द्वारा समान रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है :



x का निम्न में से कौनसा मान सही है ?

- |                               |                    |
|-------------------------------|--------------------|
| (A) 148 pm                    | (B) 121 pm         |
| (C) 121 pm एवं 148 pm के मध्य | (D) 148 pm से अधिक |

**Ans. C**

**Sol.** Due to resonance, Bond order of  $O_3$  is 1.5, so x will be between 121 pm and 148 pm.

12. Which of the set of orbitals can form ' $\delta$ ' bond between two atoms ?

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (A) $d_{yz} + d_{yz}$ along y – axis  | (B) $d_{yz} + d_{yz}$ along z – axis. |
| (C) $d_{yz} + d_{yz}$ along x – axis. | (D) $d_{xz} + d_{xz}$ along x – axis. |

निम्न में से कक्षकों का कौनसा समुच्चय, दो परमाणुओं के मध्य ' $\delta$ ' बंध बना सकता है ?

- |   |   |
|---|---|
| (A) $d_{yz} + d_{yz}$ , y – अक्ष के सापेक्ष | (B) $d_{yz} + d_{yz}$ , z – अक्ष के सापेक्ष |
| (C) $d_{yz} + d_{yz}$ , x – अक्ष के सापेक्ष | (D) $d_{xz} + d_{xz}$ , x – अक्ष के सापेक्ष |

**Ans. C**

**Sol.**  $d_{yz} + d_{yz}$  along y – axis, forms  $\pi$ –bond.

$d_{yz} + d_{yz}$  along z – axis, forms  $\pi$ –bond.

$d_{yz} + d_{yz}$  along x – axis, forms  $\delta$ –bond.

$d_{xz} + d_{xz}$  along x – axis, forms  $\pi$ –bond.

13. Polarization is the distortion of the shape of an anion by an adjacently placed cation. Which of the following statements is correct

- |  |
|--|
| (A) Maximum polarization is brought about by a cation of high charge       |
| (B) Minimum polarization is brought about by a cation of low radius        |
| (C) A large cation is likely to bring about a large degree of polarization |
| (D) A small anion is likely to undergo a large degree of polarization      |

ध्रुवीयकरण, निकटवर्ती स्थित धनायन द्वारा एक ऋणायन की आकृति में विकृति है। निम्न में से कौनसे कथन सत्य हैं :

- |  |
|--|
| (A) उच्च आवेशित धनायन द्वारा अधिकतम ध्रुवीयकरण कराया जाता है।        |
| (B) निम्न त्रिज्या के धनायन द्वारा न्यूनतम ध्रुवीयकरण कराया जाता है। |
| (C) बड़े धनायन में ध्रुवीयकरण लाने की क्षमता ज्यादा होती है।         |
| (D) छोटे ऋणायन में ध्रुवीयकरण लाने की क्षमता ज्यादा होती है।         |

**Ans. A**

**Sol.** According to Fajan's rule, polarisation of anion is influenced by charge and size of cation, more is the charge on cation, more is polarisation of anion.

14. Which of the following element does not show variable covalency?

- |                  |                    |
|------------------|--------------------|
| (A) Fluorine (F) | (B) Sulphur (S)    |
| (C) Iodine (I)   | (D) Phosphorus (P) |

निम्न में से कौन सा तत्व परिवर्तनशील सहसंयोजकता प्रदर्शित नहीं करता है?

- |                 |                  |
|-----------------|------------------|
| (A) फ्लोरीन (F) | (B) सल्फर (S)    |
| (C) आयोडीन (I)  | (D) फॉस्फोरस (P) |

**Ans. A**

15. Select the **CORRECT** order against the stated property.

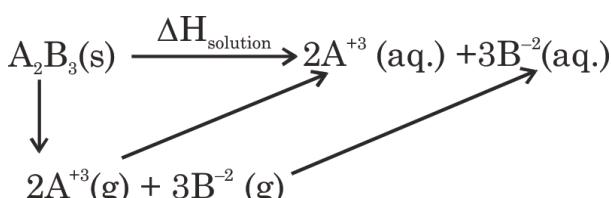
- (A) H–F < H–Cl < H–Br < H–I : Bond strength
- (B) A–O–H < B–O–H < C–O–H < D–O–H : Acidic character (A, B, C & D have EN in increasing order)
- (C) NaF > MgO > AlN > TiC : Lattice energy
- (D)  $\text{Li}_{(\text{aq})}^+ < \text{Na}_{(\text{aq})}^+ < \text{K}_{(\text{aq})}^+ < \text{Rb}_{(\text{aq})}^+$  : Extent of hydration

प्रदर्शित गुण के सन्दर्भ में सही क्रम चुनिए-

- (A) H–F < H–Cl < H–Br < H–I : बंध सामर्थ्य
- (B) A–O–H < B–O–H < C–O–H < D–O–H : अम्लीय लक्षण (A, B, C तथा D की EN बढ़ते हुए क्रम में हैं)
- (C) NaF > MgO > AlN > TiC : जालक ऊर्जा
- (D)  $\text{Li}_{(\text{aq})}^+ < \text{Na}_{(\text{aq})}^+ < \text{K}_{(\text{aq})}^+ < \text{Rb}_{(\text{aq})}^+$  : जलयोजन की मात्रा

**Ans. B**

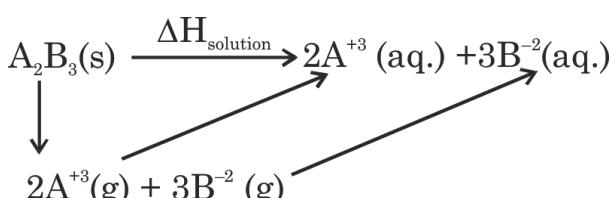
16. In given cycle



Calculate H.E. of  $\text{B}^{-2}(\text{g})$ , if HE[ $\text{A}^{+3}(\text{g})$ ] = -50 J/mole,

Lattice energy  $\text{A}_2\text{B}_3(\text{s}) = 90 \text{ J/mole}$ ,  $\Delta H_{\text{solution}} [\text{A}_2\text{B}_3(\text{s})] = -100 \text{ J/mole}$

दिये गये चक्र में



$\text{B}^{-2}(\text{g})$  की H.E. की गणना कीजिए यदि HE[ $\text{A}^{+3}(\text{g})$ ] = -50 J/mole,

$\text{A}_2\text{B}_3(\text{s})$  की जालक ऊर्जा = 90 J/mole,  $\Delta H_{\text{विलयन}} [\text{A}_2\text{B}_3(\text{s})] = -100 \text{ J/mole}$

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| (A) +30 J/mole  | (B) -30 J/mole  |
| (C) -140 J/mole | (D) +140 J/mole |

**Ans. B**

17. Which of the following is **CORRECT** set up quantum number for the last electron enters in 'Fe'.

'Fe' में प्रवेशित अन्तिम इलेक्ट्रॉन के लिए, क्वाण्टम संख्याओं का, निम्न में से कौन सा समुच्चय सही है ?

- (A)  $n = 4 ; \ell = 0 ; m = 0 ; s = +\frac{1}{2}$
- (B)  $n = 3 ; \ell = 1 ; m = 0 ; s = +\frac{1}{2}$
- (C)  $n = 3 ; \ell = 2 ; m = -1 ; s = +\frac{1}{2}$
- (D)  $n = 3 ; \ell = 2 ; m = -3 ; s = +\frac{1}{2}$

**Ans. C**

18. Which of the following pair of elements show diagonal relationship ?

तत्वों का कौनसा युग्म विकर्ण सम्बंध दर्शाता है ?

- (A) (B, Al)
- (B) (Li, Al)
- (C) (Be, Mg)
- (D) (Li, Mg)

**Ans. D**

19. The reaction  $A(s) \rightarrow 2 B(g) + C(g)$  is first order. The pressure after 20 min and after very long time are 150 mm Hg and 225 mm Hg. The value of rate constant and pressure after 40 min are :

अभिक्रिया  $A(s) \rightarrow 2 B(g) + C(g)$  प्रथम कोटि की है 20 min पश्चात एवं बहुत लम्बे समय पश्चात दाब 150 mm Hg एवं 225 mm Hg है, तो दर नियतांक का मान एवं 40 min पश्चात दाब है :

- (A)  $0.05 \ln 1.5 \text{ min}^{-1}, 200 \text{ mm}$
- (B)  $0.5 \ln 2 \text{ min}^{-1}, 300 \text{ mm}$
- (C)  $0.05 \ln 3 \text{ min}^{-1}, 300 \text{ mm}$
- (D)  $0.05 \ln 3 \text{ min}^{-1}, 200 \text{ mm}$

**Ans. D**

$$\text{Sol. } A_{(s)} \rightleftharpoons 2B_{(s)} = C_{(g)}$$

$$k = \frac{\ln}{t} \frac{P^{\infty} - P^0}{P^{\infty} - Pt}$$

$$k = \frac{\ln}{20} \frac{225 - 0}{225 - 150}$$

$$k = \frac{\ln}{20} \frac{225}{75}$$

$$k = 0.05 \ln 3 \text{ min}^{-1}$$

20. Which is not true for a second order reaction?

- (A) It can have rate constant  $1 \times 10^{-2} \text{ L mol}^{-1} \text{ s}^{-1}$   
(B) Its half-life is inversely proportional to its initial concentration  
(C) Time to complete 75% reaction is twice of half-life

(D)  $T_{50\%} = \frac{1}{K \times \text{Initial conc.}}$

द्वितीय कोटि अभिक्रिया के लिये कौनसा सही नहीं हैं ?

- (A) इसका दर नियतांक  $1 \times 10^{-2} \text{ L mol}^{-1} \text{ s}^{-1}$  हो सकता है।  
(B) इसकी अर्धआयु इसकी प्रारम्भिक सांदर्भता के व्युत्क्रमानुपाति होती है।  
(C) 75% अभिक्रिया पूरी होने में लिया गया समय इसकी अर्धआयु का दोगुना है।  
(D)  $T_{50\%} = \frac{1}{K \times \text{Initial conc.}}$

**Ans. C**

## SECTION-II : (Maximum Marks: 20)

This section contains 10 questions Candidates have to attempt any 5 questions out of 10. If more than 5 questions are attempted, then only first 5 attempted questions will be evaluated.

The answer to each question is a Numerical Value.

For each question, enter the correct integer value (In case of non-integer value, the answer should be rounded off to the nearest Integer).

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

*Full Marks* : +4 If correct answer is entered.

*Zero Marks* : 0 If the question is unanswered.

*Negative Marks* : -1 If wrong answer is entered.

## खण्ड-II : (अधिकतम अंक: 20)

इस खण्ड में 10 प्रश्न हैं। उम्मीदवारों को 10 में से किसी भी 5 प्रश्न का प्रयास करना है। यदि 5 से अधिक प्रश्नों का प्रयास किया जाता है, तो केवल पहले 5 प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान (Numerical Value) है।

प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही पूर्णांक मान दर्ज करें (दशमलव संकेतन में, उत्तर को निकटतम पूर्णांक में लिखा जाना चाहिए।)

प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी उत्तर दर्ज नहीं किया गया है।

ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत उत्तर दर्ज किया गया है।

- Find (O – O) bond enthalpy in H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> (kJ/mol)

Given : ΔH<sub>f</sub>(H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, l) = - 200 kJ/mol

$$\Delta H_f(H_2O, l) = - 285 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_{vap.}(H_2O_2, l) = 60 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_{vap.}(H_2O, l) = 40 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_{\text{atomisation}}(O_2, g) = 300 \text{ kJ/mol}$$

H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> में (O – O) बन्ध ऐन्थेल्पी (kJ/mol) ज्ञात कीजिये।

दिया है : ΔH<sub>f</sub>(H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, l) = - 200 kJ/mol

$$\Delta H_f(H_2O, l) = - 285 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_{vap.}(H_2O_2, l) = 60 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_{vap.}(H_2O, l) = 40 \text{ kJ/mol}$$

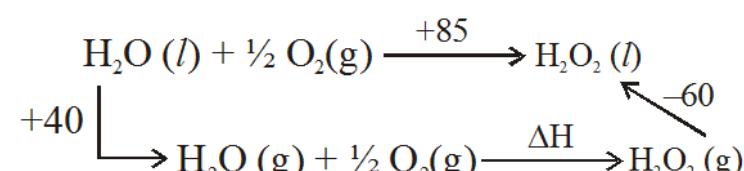
$$\Delta H_{\text{atomisation}}(O_2, g) = 300 \text{ kJ/mol}$$

**Ans. 45**

**Sol.** H<sub>2</sub>(g) + O<sub>2</sub>(g) → H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>(l) ; ΔH = - 200 .....(A)

H<sub>2</sub>(g) +  $\frac{1}{2}$ O<sub>2</sub>(g) → H<sub>2</sub>O(l) ; ΔH = - 285 .....(B)

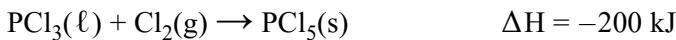
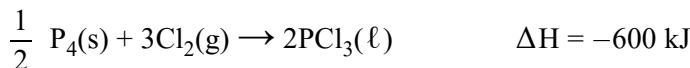
Eq. (A) & Eq (B)



$$85 = 40 + (2 \times \Delta H_{O-H} + \frac{1}{2} \times \Delta H_{O=O} - 2 \times \Delta H_{O-H} - \Delta H_{O=O}) - 60$$

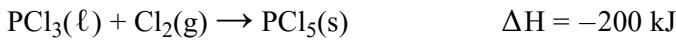
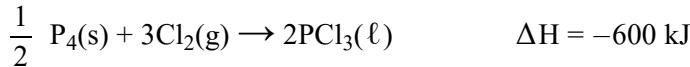
$$\Delta H_{O-O} = 45 \text{ kJ/mol}$$

2. Given that



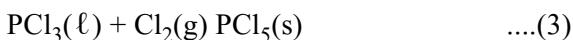
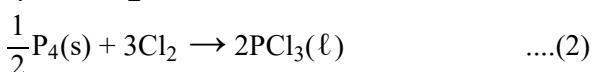
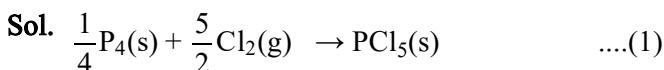
Heat of formation of  $\text{PCl}_5(\text{s})$  is  $(-x \times 10^2 \text{ kJ})$ , value of x is :

दिया है -



$\text{PCl}_5(\text{s})$  के निर्माण की ऊष्मा  $(-x \times 10^2 \text{ kJ})$  है, तो x का मान क्या होगा :-

**Ans. 5**



$$\text{On applying thermodynamic operation } (1) = (3) + \frac{1}{2} (2)$$

$$= -200 + \frac{1}{2} (-600)$$

$$= -500 \text{ kJ} = -5 \times 10^2 \text{ kJ}$$

3. How many of the following have standard heat of formation is zero.

- (i)  $\text{Br}_2(\text{l})$
- (ii)  $\text{CO}_2(\text{g})$
- (iii)  $\text{C}_{(\text{graphite})}$
- (iv)  $\text{Cl}_2(\text{l})$
- (v)  $\text{Cl}_2(\text{g})$
- (vi)  $\text{F}_2(\text{g})$
- (vii)  $\text{F}(\text{g})$
- (viii)  $\text{I}_2(\text{g})$
- (ix)  $\text{S}_{(\text{monoclinic})}$
- (x)  $\text{N}_2(\text{g})$
- (xi)  $\text{P}_{(\text{Black})}$
- (xii)  $\text{P}_{(\text{red})}$
- (xiii)  $\text{CH}_4$

निम्न में से कितने विकल्पों के निर्माण की मानक ऊष्मा शून्य हैं :

- (i)  $\text{Br}_2(\text{l})$
- (ii)  $\text{CO}_2(\text{g})$
- (iii)  $\text{C}_{(\text{graphite})}$
- (iv)  $\text{Cl}_2(\text{l})$
- (v)  $\text{Cl}_2(\text{g})$
- (vi)  $\text{F}_2(\text{g})$
- (vii)  $\text{F}(\text{g})$
- (viii)  $\text{I}_2(\text{g})$
- (ix)  $\text{S}_{(\text{monoclinic})}$
- (x)  $\text{N}_2(\text{g})$
- (xi)  $\text{P}_{(\text{Black})}$
- (xii)  $\text{P}_{(\text{red})}$
- (xiii)  $\text{CH}_4$

**Ans. 5**

4. Lattice energy of  $\text{NaCl}_{(\text{s})}$  is  $788 \text{ kJ mol}^{-1}$  and enthalpy of hydration is  $-784 \text{ kJ mol}^{-1}$ . Calculate the enthalpy of solution of  $\text{NaCl}_{(\text{s})}$

$\text{NaCl}_{(\text{s})}$  की जालक ऊर्जा  $788 \text{ kJ mol}^{-1}$  एवं जलयोजन की ऐन्थेल्पी  $-784 \text{ kJ mol}^{-1}$  है, तो  $\text{NaCl}_{(\text{s})}$  के विलयन की ऐन्थेल्पी की गणना कीजिये :

**Ans. 4**

Sol.  $\Delta H$  solution is Lattice energy + Hydration energy.

$$788 - 784 = 4$$

5. Calculate heat released (in kJ) when 2 moles of gaseous methane undergoes combustion in a rigid vessel of volume 50 litres causing a change in pressure from 10 bar to 2 bar.

[Given :  $\Delta H_f(H_2O) = -280 \text{ kJ/mole}$ ,  $\Delta H_f(CO_2) = -390 \text{ kJ/mole}$

$$\Delta H_f(CH_4) = 70 \text{ kJ/mole}]$$

*Fill your answer as sum of digits (excluding decimal places) till you get the single digit answer.*

जब 2 मोल गैसीय मेथेन का, 50 लीटर आयतन के एक दृढ़ पात्र में दहन कराया जाता है जिससे दाब में 10 bar से 2 bar तक का परिवर्तन हो जाता है तो उत्सर्जित ऊष्मा (kJ में) की गणना कीजिए।

[दिया है :  $\Delta H_f(H_2O) = -280 \text{ kJ/mole}$ ,  $\Delta H_f(CO_2) = -390 \text{ kJ/mole}$

$$\Delta H_f(CH_4) = 70 \text{ kJ/mole}]$$

अपने उत्तर के अंकों को (दशमलव स्थान को छोड़कर) तब तक योग कीजिए जब तक आपको इकाई अंक प्राप्त न हो जाए।

**Ans. 2**

6. For two mole of an ideal gas  $C_P - C_V = x R$ . The value of x is-

आदर्श गैस के दो मोल के लिये  $C_P - C_V = x R$  हैं, तो x का मान हैं ?

**Ans. 2**

7. Calculate the magnitude of work done by 2mole ideal gas in kJ, when expansion is taking place from 2 litre to 22 litre against constant external pressure of 1 atm? [Given : 1 litre-atm = 100 J]

दो मोल आदर्श गैस का नियत बाह्य दाब 1 atm के विरुद्ध 2 litre से 22 litre तक प्रसार होता है, तो गैस द्वारा किये गये कार्य के परिमाण की गणना kJ में कीजिए।

[दिया गया है। : 1 litre-atm = 100 J]

**Ans. 2**

Sol.  $w = -p_{ext} \Delta V = -1 \text{ atm} \times (22 - 2) \text{ litre} = -20 \text{ lit-atm} = -2000 \text{ J} = -2 \text{ kJ.}$

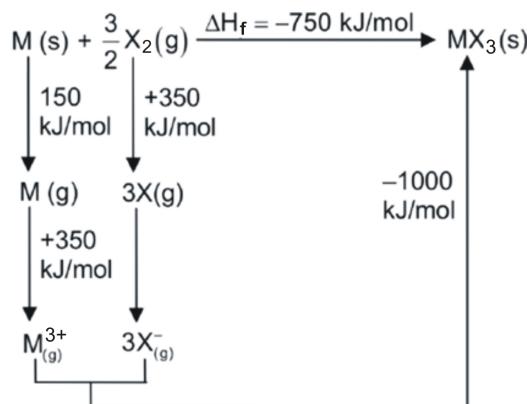
$$|w| = 2 \text{ kJ}$$

8. Bond order of  $Be_2$  is :

$Be_2$  का बंध क्रम है :

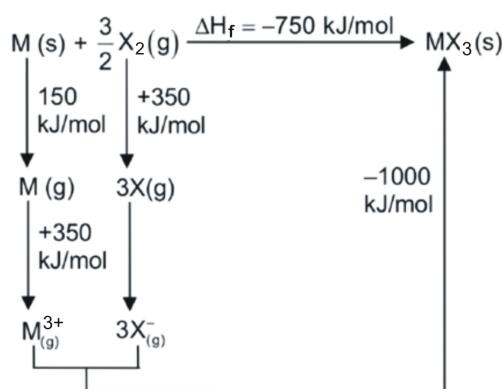
**Ans. 0**

9. Consider the following Born-Haber's cycle for formation of  $\text{MX}_3(\text{s})$ .



Then calculate value  $\frac{q_1}{50}$ , here  $q_1$  is electron affinity of  $\text{X}(\text{g})$  in kJ/mol.

$\text{MX}_3(\text{s})$  के निर्माण के लिये निम्न बोर्न हेबर चक्र पर विचार कीजिये :



$\frac{q_1}{50}$  के मान की गणना कीजिये। यहाँ  $q_1$ ,  $\text{X}(\text{g})$  की इलेक्ट्रॉनबंधुता (kJ/mol में) है :

**Ans. 4**

$$\text{Sol. } \Delta H_f = 150 + 350 + 350 + q - 1000$$

$$-750 = -150 + q$$

$$q = -600$$

$$3\text{X}(\text{g}) \rightleftharpoons 3\text{X}^\ominus(\text{g}) q = -600$$

$$\text{Electron Affinity } \text{X}(\text{g}) \rightleftharpoons \text{X}^\ominus(\text{g}) q_1 = -\frac{600}{3} = -200$$

$$\text{So } \frac{q_1}{50} = -\frac{200}{50} = 4$$

10. The number of antibonding electron pairs in  $\text{O}_2$  molecule on the basis of molecular orbital theory is \_\_\_\_\_. (Atomic Number O = 8)

आण्विक कक्षक सिद्धांत के अनुसार  $\text{O}_2$  अणु में प्रतिबंधी इलेक्ट्रॉन युग्मो की संख्या है \_\_\_\_\_. (परमाणु क्रमांक O = 8)

**Ans. 2**

$$\text{Sol. } \text{O}_2 : (\sigma 1s^2) (\sigma^* 1s^2) (\sigma 2s^2) (\sigma^* 2s^2) (\sigma 2p_z^2) (\pi 2p_x^2 = \pi 2p_y^2) (\pi^* 2p_x^1 = \pi^* 2p_y^2)$$

**ALLEN®**  
**PART-3 : MATHEMATICS**  
**भाग-3 : गणित**

**SECTION-I : (Maximum Marks: 80)**

This section contains **20 questions**. Each question has 4 options for correct answer. Multiple-Choice Questions (MCQs) **Only one option is correct**. For each question, marks will be awarded as follows:

**Full Marks** : +4 If correct answer is selected.

**Zero Marks** : 0 If none of the option is selected.

**Negative Marks** : -1 If wrong option is selected.

**खण्ड-I : (अधिकतम अंक: 80)**

इस खण्ड में **20 प्रश्न** हैं। प्रत्येक प्रश्न में सही उत्तर के लिए 4 विकल्प हैं। बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs) केवल एक विकल्प सही है। प्रत्येक प्रश्न के लिए, अंक निम्नानुसार दिए जाएंगे:

**पूर्ण अंक** : +4 यदि सही उत्तर चुना गया है।

**शून्य अंक** : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है।

**ऋणात्मक अंक** : -1 यदि गलत विकल्प चुना गया है।

1. The value of  $\sum_{r=181^\circ}^{269^\circ} \log_{10}(\tan r)$  is
- |                            |                        |
|----------------------------|------------------------|
| (A) a natural number       | (B) a negative integer |
| (C) a positive real number | (D) a rational number  |

$$\sum_{r=181^\circ}^{269^\circ} \log_{10}(\tan r) \text{ का मान होगा}$$

|                             |                      |
|-----------------------------|----------------------|
| (A) प्राकृत संख्या          | (B) ऋणात्मक पूर्णांक |
| (C) धनात्मक वास्तविक संख्या | (D) परिमेय संख्या    |

**Ans. D**

**Sol.**  $\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1^\circ}^{89^\circ} \log(\tan k) \\ &= \log\{(\tan 1^\circ)(\tan 89^\circ) \dots (\tan 44^\circ) \\ &\quad (\tan 46^\circ), \tan 45^\circ\} \\ &= \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

2. If  $f(x) = x^{11} + \sin^3(35x) + 111x$ , then the value of  $f^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) + f^{-1}\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) + f^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{7}\right) + f^{-1}\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right)$  is equal to -

यदि  $f(x) = x^{11} + \sin^3(35x) + 111x$  है, तो  $f^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) + f^{-1}\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) + f^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{7}\right) + f^{-1}\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right)$  का मान होगा -

|                   |  |  |            |
|-------------------|--|--|------------|
| (A) $f(\pi^{11})$ | (B) $f\left(\frac{\pi}{7}\right)^{11}$ | (C) $f\left(\frac{\pi}{5}\right)^{11}$ | (D) $f(0)$ |
|-------------------|--|--|------------|

**Ans. D**

**Sol.** ∵ 'f' is odd  $f^{-1}$  is also odd

$$\Rightarrow \text{sum} = 0$$

3. Let  $f(x)$  be a polynomial of degree 6 divisible by  $x^3$ , and having a point of extremum at  $x = 2$ .

If  $f'(x)$  is divisible by  $1 + x^2$ , then find the value of  $\frac{3f(2)}{f(1)}$ .

(A) 14

(B) 15

(C) 16

(D) None of these

माना  $f(x)$ , 6 घात का बहुपद है जो  $x^3$  से विभाजित है तथा  $x = 2$  पर चरम का बिन्दु रखता है। यदि  $f'(x)$ ,  $1 + x^2$  से विभाजित है, तो  $\frac{3f(2)}{f(1)}$  का मान है

(A) 14

(B) 15

(C) 16

(D) इनमें से कोई नहीं

**Ans. C**

**Sol.** Clearly, let

$$\begin{aligned} f'(x) &= kx^2(x - 2)(1 + x^2), \quad k \neq 0 \\ &= k(x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2) \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{kx^3}{60} (10x^3 - 24x^2 + 15x - 40) \\ \therefore \frac{3f(2)}{f(1)} &= \frac{3 \times 8(-26)}{-39} = 16 \end{aligned}$$

4. The slope of the tangent to the curve represented by  $x = t^2 + 3t - 8$  and  $y = 2t^2 - 2t - 5$  at the point  $M(2, -1)$  is  $\left(\frac{\lambda}{7}\right)$ , then the value of  $\lambda$  is ?

वक्र  $x = t^2 + 3t - 8$  तथा  $y = 2t^2 - 2t - 5$  के बिन्दु  $M(2, -1)$  के बिन्दु  $\left(\frac{\lambda}{7}\right)$ , है, तब  $\lambda$  का मान होगा?

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

**Ans. C**

**Sol.**  $t^2 + 3t - 8 = 2 \Rightarrow t = 2, -5$

$$2t^2 - 2t - 5 = -1 \Rightarrow t = 2, -1$$

So, at  $t = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)_{t=2} = \frac{6}{7}$$

5. Water is leaking at the rate of  $2\text{m}^3/\text{sec}$  from bottom of an inverted cone of semi-vertical angle  $45^\circ$ . If the rate at which periphery of water surface changes when the height of the water in the cone is 2 metres is  $d \text{ m/sec}$ , then  $|5d|$  is equal to :

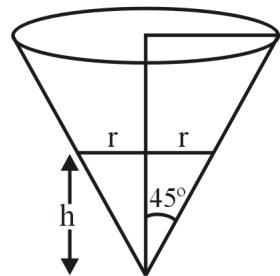
अर्द्धसीर्ष कोण  $45^\circ$  के उल्टे शंकु के शीर्ष से  $2\text{m}^3/\text{sec}$  की दर से पानी निकल रहा है। जब शंकु में पानी की ऊँचाई 2 मीटर हो तब पानी के पृष्ठ की परिधि के परिवर्तन के दर  $d \text{ m/sec}$  हो, तो  $|5d|$  होगा:

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

**Ans. B****Sol.**

$$\therefore \frac{h}{r} = \tan 45^\circ$$

$$\frac{dv}{dt} = -2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} \pi r^2 h \right) = -2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} \pi r^3 \right) = -2$$

$$\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -2 \dots (i)$$

$$\text{Also } \frac{d}{dt} (2\pi r) = 2\pi \frac{dr}{dt} = 2\pi \left( \frac{-2}{\pi r^2} \right) = \frac{-4}{r^2}.$$

$$\text{At } r = 2, \frac{d}{dt} (2\pi r) = \frac{-4}{4} = -1 \Rightarrow d = -1$$

6. For the curve  $by^2 = (x + a)^3$  the square of subtangent is proportional to

(A) (Subnormal) $^{1/2}$ 

(B) Subnormal

(C) (Subnormal) $^{3/2}$ 

(D) None of these

वक्र  $by^2 = (x + a)^3$  के लिए अधोस्पर्शी का वर्ग निम्न के आनुपातिक (Proportional)

(A) (अधोलम्ब) $^{1/2}$ 

(B) अधोलम्ब

(C) (अधोलम्ब) $^{3/2}$ 

(D) इनमें से कोई नहीं

**Ans. B**

**Sol.**

$$by^2 = (x + a)^3 \Rightarrow 2by \cdot \frac{dy}{dx} = 3(x + a)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2by}(x + a)^2$$

$$\therefore \text{Subnormal} = y \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2b}(x + a)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{Sub tangent} &= \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{y}{\frac{3(x+a)^2}{2by}} = \frac{2by^2}{3(x+a)^2} \\ &= \frac{2b \frac{(x+a)^3}{b}}{3(x+a)^2} = \frac{2}{3}(x + a)\end{aligned}$$

$$\therefore (\text{Subtangent})^2 = \frac{4}{9}(x + a)^2$$

$$\text{and } \frac{(\text{Subtangent})^2}{\text{subnormal}} = \frac{\frac{4}{9}(x + a)^2}{\frac{3}{2b}(x + a)^2} = \frac{8b}{27}$$

$$\Rightarrow (\text{Subtangent})^2 = \text{constant} \times (\text{subnormal})$$

$$\therefore (\text{Subtangent})^2 \propto (\text{Subnormal}).$$

7. If the equation  $x^4 - (12K + 5)x^2 + 16K^2 = 0$  ( $K > 0$ ) has four real solutions which are in A.P. then the value of  $K = \frac{a}{b}$  where  $a$  and  $b$  are co-prime, then find the value  $(a - 3b)$ ?

यदि समीकरण  $x^4 - (12K + 5)x^2 + 16K^2 = 0$  ( $K > 0$ ) के चार वास्तविक हल हैं, जो समान्तर श्रेणी में हैं, तो  $K$  का मान  $K = \frac{a}{b}$  है जहाँ  $a$  तथा  $b$  सहअभाज्य हैं, तो  $(a - 3b)$  का मान होगा

(A) 3

(B) 4

(C) 6

(D) 7

**Ans. A**

**Sol.** Let the roots be  $A - 3d, A - d, A + d, A + 3d$

$$\text{sum of roots} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{P.O.R} = 9d^4 = 16K^2 \Rightarrow d^2 = \frac{4K}{3} \quad \dots(1)$$

$$\text{Sum of roots taken two at a time i.e. } \sum x_1 x_2 = -10d^2 = -(12K + 5)$$

$$10 \left( \frac{4K}{3} \right) = 12K + 5 \Rightarrow K = \frac{15}{4} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore (a - 3b) = 3$$

8. If  $x, y, z$  are non-zero real numbers, then the minimum value of the expression

$$\frac{(x^8 + x^4 + 1)(y^8 - y^4 + 1) \left( z^8 + \frac{1}{3}z^4 + 1 \right)}{x^4 y^4 z^4} \text{ is}$$

$$(x^8 + x^4 + 1)(y^8 - y^4 + 1) \left( z^8 + \frac{1}{3}z^4 + 1 \right)$$

यदि  $x, y, z$  अशून्य वास्तविक संख्याएँ हैं, तो व्यंजक  $\frac{(x^8 + x^4 + 1)(y^8 - y^4 + 1) \left( z^8 + \frac{1}{3}z^4 + 1 \right)}{x^4 y^4 z^4}$  का न्यूनतम मान होगा

(A) 5

(B) 4

(C) 7

(D) 2

**Ans. C**

Sol.

$$\begin{aligned} & \left( x^4 + \frac{1}{x^4} + 1 \right) \left( y^4 + \frac{1}{y^4} - 1 \right) \left( z^4 + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3} \right) \\ \therefore & x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2 \\ \Rightarrow & 3 \times (1) \times \left( 2 + \frac{1}{3} \right) = 7 \end{aligned}$$

9. If sum of first  $n$  terms of an A.P. is given by  $S_n = 3n^2 - 2n \forall n \in N$ , then the value of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{21}{(S_n S_{n+2} + S_{n-1} S_{n+1}) - (S_n S_{n+1} + S_{n-1} S_{n+2})} \text{ is}$$

यदि समान्तर श्रेणी के प्रथम  $n$  पदों का योगफल  $S_n = 3n^2 - 2n \quad \forall n \in N$  हो, तो

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{21}{(S_n S_{n+2} + S_{n-1} S_{n+1}) - (S_n S_{n+1} + S_{n-1} S_{n+2})} \text{ का मान होगा}$$



Ans. B

$$\begin{aligned}
 \text{Sol.} & \Rightarrow S_{n+2}(S_n - S_{n-1}) - S_{n+1}(S_n - S_{n-1}) \\
 & \Rightarrow S_{n+2} T_n - S_{n+1} T_n \\
 & \Rightarrow T_n(S_{n+2} - S_{n+1}) \\
 & \Rightarrow T_n(T_{n+2}) \\
 & \Rightarrow \frac{21}{(6n-5)(6n+7)} \\
 \text{sum} & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4} \left[ \frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n+7} \right] \\
 \therefore \text{sum} & = 2
 \end{aligned}$$

- 10.** Number of integral values of  $p$  for which the cubic equation  $2x^3 - 3x^2 + p = 0$  has 3 real roots, is

$p$  के पर्णांक मानों की संख्या, जिसके लिये घनीय समीकरण  $2x^3 - 3x^2 + p = 0$  के तीन वास्तविक मल हो, होगी



Ans. B

**Sol.** Let  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + n$

$$f'(x) = 6x(x - 1)$$

$f(0) f(1) \leq 0$  (Not necessarily distinct)

$$p \in [0, 1]$$

11. If  $f(n, \theta) = \sin \theta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta \sin^2 \theta}{2} + \frac{\sin 4\theta \sin^2 2\theta}{4} + \dots + \frac{\sin(2^n \theta) \sin^2(2^{n-1} \theta)}{2^n}$ ;  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , then

(A)  $f\left(5, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{64 - \sqrt{3}}{128}$

(B)  $f\left(5, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{64 - \sqrt{3}}{256}$

(C)  $f\left(2, \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{21}}$

(D)  $f\left(2, \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

यदि  $f(n, \theta) = \sin \theta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta \sin^2 \theta}{2} + \frac{\sin 4\theta \sin^2 2\theta}{4} + \dots + \frac{\sin(2^n \theta) \sin^2(2^{n-1} \theta)}{2^n}$ ;  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  हो, तो

(A)  $f\left(5, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{64 - \sqrt{3}}{128}$

(B)  $f\left(5, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{64 - \sqrt{3}}{256}$

(C)  $f\left(2, \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin(\pi/8)}{\sqrt{21}}$

(D)  $f\left(2, \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

**Ans. B**

Sol.  $t_r = \frac{\sin(2^r \theta) \sin^2(2^{r-1} \theta)}{2^r}$ ;  $r = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow t_r = \frac{\sin(2^r \theta) [1 - \cos(2^r \theta)]}{2^{(r+1)}}$$

$$= \frac{2\sin(2^r \theta) - \sin(2^{r+1} \theta)}{2^{(r+2)}}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{\sin(2^r \theta)}{2^{(r+1)}} - \frac{\sin(2^{r+1} \theta)}{2^{(r+2)}}$$

$$\Rightarrow f(n, \theta) = \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\sin(2^{n+1} \theta)}{2^{(n+2)}}$$

12. Value of

$$\frac{\cos 20^\circ}{\sin 50^\circ \sin 110^\circ} + \frac{\cos 50^\circ}{\sin 110^\circ \cdot \sin 20^\circ} + \frac{\cos 110^\circ}{\sin 20^\circ \sin 50^\circ}$$
 is -

$$\frac{\cos 20^\circ}{\sin 50^\circ \sin 110^\circ} + \frac{\cos 50^\circ}{\sin 110^\circ \cdot \sin 20^\circ} + \frac{\cos 110^\circ}{\sin 20^\circ \sin 50^\circ}$$
 का मान होगा -

(A) 2 (B) 4

(C) 1 (D) 8

**Ans. A**

Sol.  $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 50^\circ \sin 110^\circ} + \frac{\cos 50^\circ}{\sin 110^\circ \cdot \sin 20^\circ} + \frac{\cos 110^\circ}{\sin 20^\circ \sin 50^\circ}$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 40^\circ + \sin 100^\circ + \sin 220^\circ}{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 110^\circ} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{4 \sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 110^\circ}{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 110^\circ} \right] = 2$$

13. For the equation  $\cos^{-1}|x| + \cos^{-1}|2x| = \pi$ , the number of real solution(s) is

समीकरण  $\cos^{-1}|x| + \cos^{-1}|2x| = \pi$  के लिए वास्तविक हलों की संख्या होगी

**Ans. C**

**Sol.**  $x \geq 0$

$$\cos^{-1}x + \cos^{-1}2x = \pi$$

$$2x = \cos(\pi - \cos^{-1} x)$$

$$= -\cos(\cos^{-1} x)$$

$$\equiv -x \Rightarrow x \equiv 0$$

$$\underline{x} < 0$$

$$\cos^{-1}(-x) + \cos^{-1}(-2x) = \pi$$

$$\pi - \cos^{-1} x + \pi - \cos^{-1}(2x) = \pi$$

$$\cos^{-1}x + \cos^{-1}(2x) = \pi$$

14. If  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - 1}{n^\alpha}$ , exists and is equal to  $\ell$  ( $\ell \neq 0$ ), then the value of  $12(\ell - \alpha)$  is :

यदि  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - 1}{n^\alpha}$ , विद्यमान है तथा  $\ell$  के बराबर है ( $\ell \neq 0$ ), तब  $12(\ell - \alpha)$  का मान होगा-

**Ans. C**

**Sol.**

$$\begin{aligned}
 \text{Sol. } & \text{Let } n = \frac{1}{x} \\
 & \ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1-x)^{1/x} - 1}{(1/x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot e^{\frac{-x}{x}} - 1}{x^{-\alpha}} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{\ell n(1-x)}{x} + 1}{x^{-\alpha}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} \dots \dots}{x^{-\alpha}} \right)
 \end{aligned}$$

for limit to exist  $\alpha = -1$

$$\ell = -\frac{1}{2}$$

यदि त्रिभुज के कोण A, B, C इस प्रकार हैं कि  $\cot \frac{A}{2} = 3 \tan \frac{C}{2}$  हो, तो sinA, sinB, sinC निम्न श्रेणी में होंगे



**Ans. A**

**Sol.** Given  $\cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} = 3$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} = 3 \Rightarrow \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{A+C}{2}} = 2$$

(using componendo and dividendo)

$$\Rightarrow \frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A+C}{2}} = 2$$

$$= 2\sin B = \sin A + \sin C$$



**Ans. B**

$$\text{Sol. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + 2^2 f'(2x) + 3^2 f'(3x)}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) + 8f''(2x) + 27f''(3x)}{2} = 36$$

**Ans. D**

**Sol.** Putting  $x = 0$  in the given equation,

We have  $f(0) = f'''(3)$  and putting  $x = 1$ , we get  $f(1) = 1 + f'(1) + f''(2) + f'''(3)$ .

Thus,  $f(1) - f(0) = 1 + f'(1) + f''(2)$ .

Also differentiating the given equation, we have

$$f'(x) = 3x^2 + 2x \quad f'(1) + f''(2) \quad \dots \quad (i)$$

$$f''(x) = 6x + 2f'(1), f'''(x) = 6$$

Thus  $f'''(3) = 6$  and  $f''(2) = 12 + 2f'(1)$

Putting  $x = 1$  in (i), we have

$$f'(1) = 3 + 2f'(1) + f''(2) = 3 + 2f'(1) + 12 + 2f'(1)$$

$$= 15 + 4f'(1)$$

$$f'(1) = -5 \text{ and so } f''(2) = 12 - 10 = 2.$$

$$\Rightarrow f(2) = -2$$

18. The minimum value of  $k \in I$  for the equation  $e^x = kx^2$  to have maximum number of solutions, is

$k \in I$  के न्यूनतम मान जिसके लिये समीकरण  $e^x = kx^2$  के हलों की संख्या अधिकतम हो, होगा-

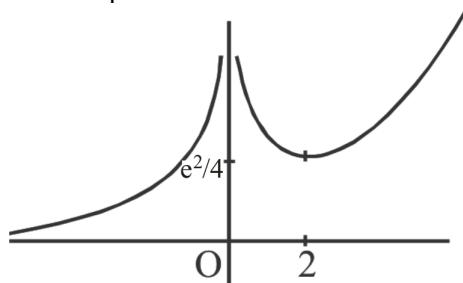


**Ans. B**

**Sol.** Let  $f(x) = e^x x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^3} (x - 2)$$

$$f(2) = \frac{e^2}{4}$$



Clearly from graph,  $k > \frac{e^2}{4}$

$$\Rightarrow k_{\min} = 2.$$

19. Shortest distance between  $y^2 = x^3$  and curve  $9x^2 + 9y^2 - 30y + 16 = 0$

$y^2 = x^3$  तथा वक्र  $9x^2 + 9y^2 - 30y + 16 = 0$  के मध्य न्यूनतम दूरी होगी-

(A)  $\frac{\sqrt{13}}{3} - 1$

(B)  $\frac{2\sqrt{13}}{3} - 1$

(C)  $\frac{\sqrt{17}}{3} - 2$

(D)  $\frac{2\sqrt{17}}{3} - 2$

**Ans. A**

**Sol.**  $x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = 1$

$y^2 = x^3$ , P( $t^2, t^3$ )

Normal at point P is

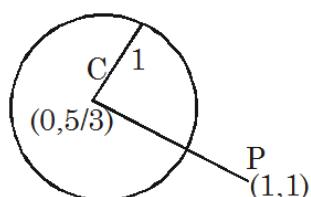
$$y - t^3 = -\frac{2}{3t}(x - t^2)$$

it passes through  $\left(0, \frac{5}{3}\right)$

$$3t^3 + 2t - 5 = 0$$

$$(t - 1)(3t^2 + 3t + 5) = 0$$

$$D < 0$$



$$\text{shortest distance} = CP - 1$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{3} - 1$$

20. Consider  $f(x) = \begin{cases} (\sin x)[\sin x]^2 \log_{(1+\sin x)} 2; & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \frac{\ell n(e^{\tan^2 x} + 2\sqrt{\{\tan x\}})}{\tan(\sqrt{\tan x})}; & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$  (where  $[.]$  and  $\{.\}$  are greatest integer and fractional part function respectively), then-

- (A)  $f(0) = \ell n 2 \Rightarrow f(x)$  is continuous at  $x = 0$
- (B)  $f(0) = 2 \Rightarrow f(x)$  is continuous at  $x = 0$
- (C)  $f(0) = e^2 \Rightarrow f(x)$  is continuous at  $x = 0$
- (D)  $f(x)$  has irremovable discontinuity at  $x = 0$

माना  $f(x) = \begin{cases} (\sin x)[\sin x]^2 \log_{(1+\sin x)} 2; & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \frac{\ell n(e^{\tan^2 x} + 2\sqrt{\{\tan x\}})}{\tan(\sqrt{\tan x})}; & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$  (जहाँ  $[.]$  तथा  $\{.\}$  क्रमशः महत्तम पूर्णांक फलन तथा भिन्नात्मक भाग फलन हैं) है, तो

- (A)  $f(0) = \ell n 2 \Rightarrow f(x), x = 0$  पर संतत होगा।
- (B)  $f(0) = 2 \Rightarrow f(x), x = 0$  पर संतत होगा।
- (C)  $f(0) = e^2 \Rightarrow f(x), x = 0$  पर संतत होगा।
- (D)  $f(x), x = 0$  पर अविस्थापनीय प्रकार की असंतत होगी।

**Ans. D**

**Sol.** For  $f(0^-)$ , let  $\sin x = h$

$$\Rightarrow f(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-1)^2 \ell n 2}{\ell n(1+h)} = \ell n 2$$

for  $f(0^+)$  let  $\tan x = h$

$$\Rightarrow f(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell n(e^{h^2} + 2\sqrt{h})}{\tan \sqrt{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1 + 2\sqrt{h}}{\tan \sqrt{h}} \Rightarrow f(0^+) = 2$$

## SECTION-II : (Maximum Marks: 20)

This section contains 10 questions Candidates have to attempt any 5 questions out of 10. If more than 5 questions are attempted, then only first 5 attempted questions will be evaluated.

The answer to each question is a Numerical Value.

For each question, enter the correct integer value (In case of non-integer value, the answer should be rounded off to the nearest Integer).

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

*Full Marks* : +4 If correct answer is entered.

*Zero Marks* : 0 If the question is unanswered.

*Negative Marks* : -1 If wrong answer is entered.

## खण्ड-II : (अधिकतम अंक: 20)

इस खण्ड में 10 प्रश्न हैं। उम्मीदवारों को 10 में से किसी भी 5 प्रश्न का प्रयास करना है। यदि 5 से अधिक प्रश्नों का प्रयास किया जाता है, तो केवल पहले 5 प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान (Numerical Value) है।

प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही पूर्णांक मान दर्ज करें (दशमलव संकेतन में, उत्तर को निकटतम पूर्णांक में लिखा जाना चाहिए )

प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी उत्तर दर्ज नहीं किया गया है।

ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत उत्तर दर्ज किया गया है।

1. Let ABC be a triangle right angled at C. The value of arithmetic mean of  $\frac{1}{\log_{c-b}a}$  and  $\frac{1}{\log_{c+b}a}$  is  
(where a, b, c denotes length of sides BC, AC, AB respectively and  $b + c \neq 1$ ,  $c - b \neq 1$  and  $a > 1$ )

माना C पर समकोणीय त्रिभुज ABC है।  $\frac{1}{\log_{c-b}a}$  तथा  $\frac{1}{\log_{c+b}a}$  का समान्तर माध्य होगा

(जहाँ a, b, c क्रमशः भुजा BC, AC, AB की लम्बाईयाँ तथा  $b + c \neq 1$ ,  $c - b \neq 1$  व  $a > 1$  हैं)

**Ans. 1**

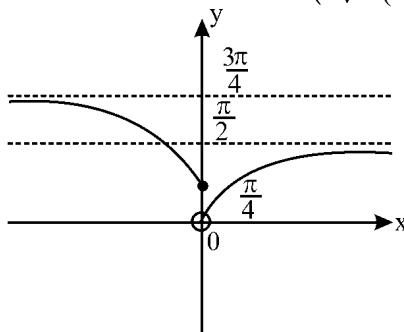
$$\text{Sol. } A.M. = \frac{\log_a(c-b) + \log_a(c+b)}{2} = 1$$

2. Let  $f(x) = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right) & ; \quad x \leq 0 \\ \tan^{-1}x & ; \quad x > 0 \end{cases}$ . If the range of value of  $k$  for which the equation  $f(x) = k$  has exactly two solutions is  $[m, n]$  then find the value of  $\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + 2\right)$  ?

माना  $f(x) = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right) & ; \quad x \leq 0 \\ \tan^{-1}x & ; \quad x > 0 \end{cases}$  है। यदि  $k$  के मान का परिसर, जिसके लिये समीकरण  $f(x) = k$  के ठीक दो हल हैं,  $[m, n]$  हो, तो  $\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + 2\right)$  का मान होगा ?

**Ans. 5**

**Sol.** For  $x \leq 0$ ,  $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)$



$$\text{Put } x = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}x ; \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ = \cos^{-1} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x.$$

3. If the roots of the equation  $ax^2 + bx + c = 0$ , are of the form  $\frac{\alpha}{\alpha-1}$  &  $\frac{\alpha+1}{\alpha}$  then the value of  $\frac{(a+b+c)^2 + 4ac}{b^2}$  is equal to

यदि समीकरण  $ax^2 + bx + c = 0$  के मूल  $\frac{\alpha}{\alpha-1}$  तथा  $\frac{\alpha+1}{\alpha}$  के रूप में हैं, तो  $\frac{(a+b+c)^2 + 4ac}{b^2}$  का मान है

**Ans. 1**

**Sol.**  $\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\alpha+1}{\alpha} = -\frac{b}{a} \quad \dots(i)$   
 $\& \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha = \frac{c+a}{c-a}$

Put the value of  $\alpha$  in equation (i) & simplify

$$\Rightarrow (c+a)^2 + 4ac = -2b(c+a)$$

$$(c+a)^2 + 2b(c+a) + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(a+b+c)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2 + 4ac}{b^2} = 1$$

4. Let  $f : R \rightarrow R$  be defined as  $f(x) = x + \cos x + 2$  and  $g(x)$  be the inverse function of  $f(x)$ . Find  $(g'(3) + g''(3))$

माना  $f : R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x + \cos x + 2$  द्वारा परिभाषित है तथा  $g(x)$ ,  $f(x)$  का प्रतिलोम फलन है तब  $(g'(3) + g''(3))$  का मान ज्ञात कीजिए

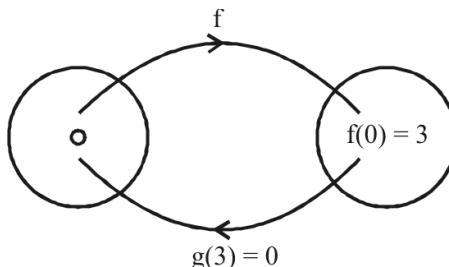
**Ans. 2**

**Sol.**  $f(x) = x + \cos x + 2$

$$f'(x) = 1 - \sin x \text{ and } f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\cos x \text{ and } f''(0) = -1$$

$$\text{Now, } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$



When  $y = 3$  then  $x = 0$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(0)} = 1 \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{Again } \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\left( \frac{dy}{dx} \right)^3} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow g''(y) = \frac{-f(x)}{(f(x))^2} \text{ or } g''(3) = \frac{-f(0)}{(f(0))^3} = \frac{1}{1}$$

$$g''(3) = 1 \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{Hence, } g'(3) + g''(3) = 1 + 1 = 2. \text{ Ans.}]$$

Alternatively: Clearly,  $f$  is a bijective mapping.

$$\text{Also, } f(0) = 3$$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(0)} \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{and } g''(3) = \frac{-f(0)}{(f'(0))^3} \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{As, } f(x) = x + \cos x + 2 \Rightarrow f'(x) = 1 - \sin x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\text{and } f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$\therefore \text{From (1) and (2), we get } g'(3) = \frac{1}{1} = 1 \text{ and } g''(3) = \frac{-(-1)}{(1)^3} = 1.$$

$$\text{Hence, } (g'(3) + g''(3)) = 1 + 1 = 2. \text{ Ans.}$$

5. If  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 17x + 66}$ , then  $f\left(\frac{2}{x-2}\right)$  has a removable discontinuity at how many points?

यदि  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 17x + 66}$  हो, तो  $f\left(\frac{2}{x-2}\right)$  की कितने बिन्दुओं पर विस्थापनीय असततता होगी

**Ans. 1**

$$\begin{aligned} \text{Sol. } f\left(\frac{2}{x-2}\right) &= \frac{1}{\frac{4}{(x-2)^2} - \frac{34}{(x-2)} + 66} \\ &= \frac{(x-2)^2}{4 - 34(x-2) + 66(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2)^2}{2(3x-7)(11x-24)} \\ \Rightarrow f\left(\frac{2}{x-2}\right) &\text{ is discontinuous at } x = 2, \frac{7}{3}, \frac{24}{11} \end{aligned}$$

But removable discontinuity at  $x = 2$  only.

6. If a function  $f(x)$  is defined by  $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  and let the value of the sum

$$f\left(\frac{1}{209}\right) + f\left(\frac{2}{209}\right) + f\left(\frac{3}{209}\right) + \dots + f\left(\frac{208}{209}\right) \text{ is } N, \text{ then } \frac{N}{13} \text{ is equal to}$$

यदि एक फलन  $f(x)$ ,  $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  द्वारा परिभाषित है तथा माना

$$f\left(\frac{1}{209}\right) + f\left(\frac{2}{209}\right) + f\left(\frac{3}{209}\right) + \dots + f\left(\frac{208}{209}\right) \text{ का योगफल } N \text{ हो, तो } \frac{N}{13} \text{ का मान होगा}$$

**Ans. 8**

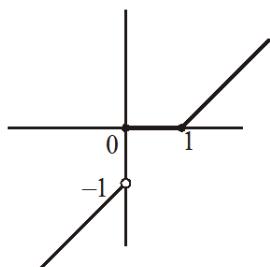
$$\text{Sol. } f(x) + f(1-x) = 1$$

7. Let  $f(x) = (x-1)|\operatorname{sgn}(x)|$  and  $g(x) = \max.(f(t))$ ,  $-\infty < t \leq x$ ,  $-\infty < x < \infty$ , then the number of points where  $g(x)$  is non-differentiable is ( $\operatorname{sgn}(x)$  represents signum function of  $x$ )

माना  $f(x) = (x-1)|\operatorname{sgn}(x)|$  तथा  $g(x) = \max.(f(t))$ ,  $-\infty < t \leq x$ ,  $-\infty < x < \infty$  हो, तो उन बिन्दुओं की संख्या, जहाँ  $g(x)$  अवकलनीय नहीं है, होगी ( $\operatorname{sgn}(x)$ ,  $x$  के सिग्नम फलन को दर्शाता है)

**Ans. 2**

**Sol.**



Not differentiable at  $x = 0, 1$

8. If a derivable function  $y = f(x)$  satisfies the condition  $f(x) + f(y) = f(x)f(y) + f(xy) \forall x, y \in \mathbb{R}$  where  $f(1) = 0$  and  $f'(1) = -2$ , then the number of solution(s) of the equation  $f(x) = 2^x$  is :-

यदि एक अवकलनीय फलन  $y = f(x)$  है जो संबंध  $f(x) + f(y) = f(x)f(y) + f(xy) \forall x, y \in \mathbb{R}$  को संतुष्ट करता है, जहाँ  $f(1) = 0$  तथा  $f'(1) = -2$  हो, तो समीकरण  $f(x) = 2^x$  के हलों की संख्या होंगी :-

**Ans. 2**

**Sol.**  $f(x) + f(y) = f(x)f(y) + f(xy)$   
 partial differentiation wrt x  
 $f'(x) = f'(x)f(y) + f'(xy).(y)$   
 put  $x = 1$   
 $-2 = -2f(y) + f'(y)y$   
 get  $f(y) = 1 - y^2$   
 $\Rightarrow f(x) = 1 - x^2$

9. If tangent to the curve  $f(x) = x^3 - \alpha x^2 - x + \beta$  at point  $(1,3)$  on the curve, cuts equal non zero intercepts on co-ordinate axes, then the value of  $\alpha + \beta = ?$

यदि वक्र  $f(x) = x^3 - \alpha x^2 - x + \beta$  के बिन्दु  $(1,3)$  पर खींची गई स्पर्शरेखा निर्देशी अक्षों पर समान अशून्य अन्तःखण्ड काटती है, तो  $\alpha + \beta = ?$

**Ans. 6**

**Sol.**  $f(1) = 3 \Rightarrow \beta - \alpha = 3$   
 $f'(1) = -1 \Rightarrow 2\alpha = 3$   
 $\Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \text{ & } \beta = \frac{9}{2}$

10. If  $A > 0, B > 0$  and  $A + B = \frac{\pi}{3}$ , then maximum value of  $3\tan A \cdot \tan B$  is

यदि  $A > 0, B > 0$  तथा  $A + B = \frac{\pi}{3}$  हो, तो  $3\tan A \cdot \tan B$  का अधिकतम मान होगा

**Ans. 1**

**Sol.**  $y = 3 \tan A \tan\left(\frac{\pi}{3} - A\right)$   
 $y = 3 \tan A \left( \frac{\sqrt{3} - \tan A}{1 + \sqrt{3} \tan A} \right)$   
 $y = 3 \frac{(\sqrt{3}t - t^2)}{1 + \sqrt{3}t}, t > 0$   
 $y' = 3 \left[ \frac{(1 + \sqrt{3}t)(\sqrt{3} - 2t) - (\sqrt{3}t - t^2)(+\sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3}t)^2} \right]$   
 $y' = \frac{3(t + \sqrt{3})(-\sqrt{3}t + 1)}{(1 - \sqrt{3}t)^2}$   
 $y' > 0 \Rightarrow (t + \sqrt{3})(\sqrt{3}t - 1) < 0$   
 $-\sqrt{3} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$   
 $y' < 0 \Rightarrow t < -\sqrt{3}, t > \frac{1}{\sqrt{3}}$

