Xử lý ảnh số
Các phép biến đổi ảnh

Chương trình dành cho kỹ sư CNTT

Nguyễn Linh Giang

Các phép biến đổi ảnh

- Biến đổi đơn nguyên (unitary)
- Biến đổi Fourier
- Biến đổi sin, cosin
- Biến đổi Hadamar
- Biến đổi Haar
- Biến đổi K-L

Phép biến đổi cosine DCT

- Ma trận biến đổi DCT:

$$c(k,l) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} & \mathrm{k = 0, 0 \le n \le N - 1} \\ \dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{N}}} \cos\left(\dfrac{\pi(2n+1)k}{2N}\right) & 1 \le k \le N-1; 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

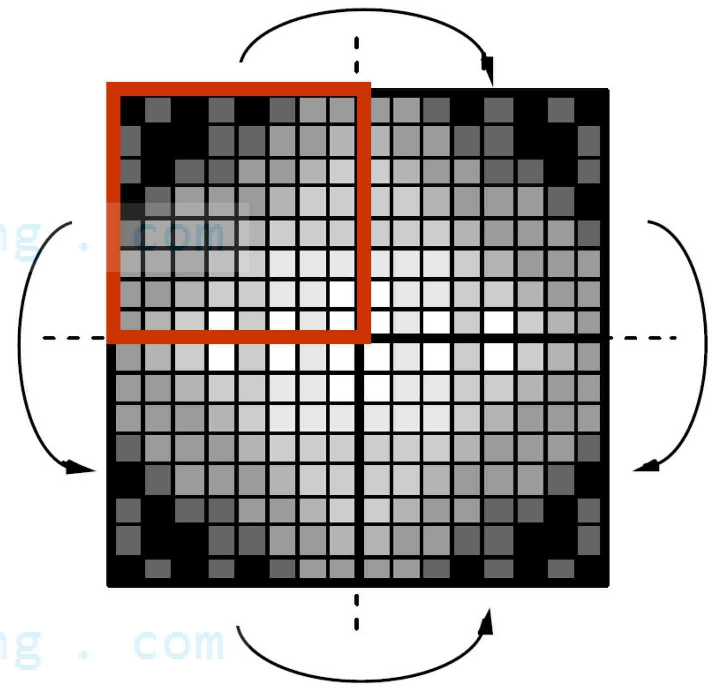
  - $C = \|c(k,l)\|_{NxN}$
  - $C = C^*;\ C^{-1} = C^T$
  - Phép biến đổi:

$$V = CSC^T;$$

$$S = C^T VC$$

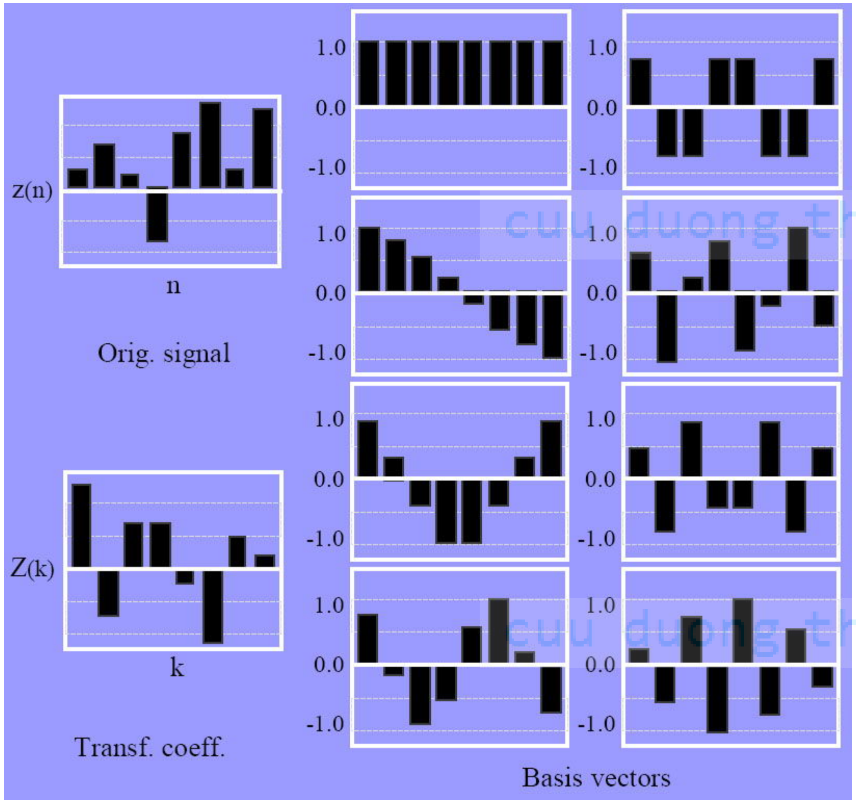
Phép biến đổi cosine DCT

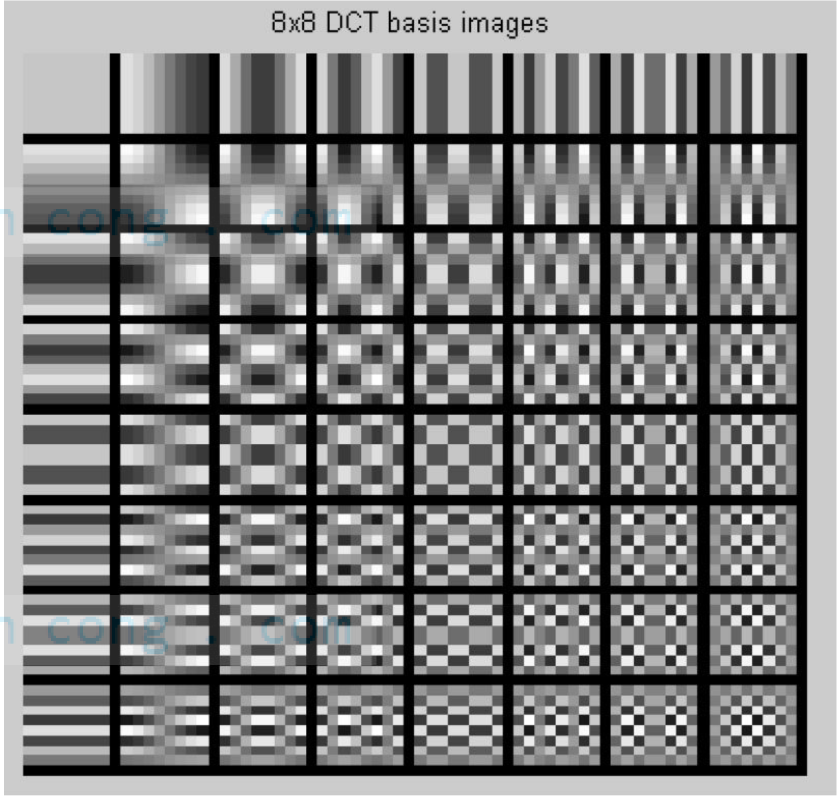
- Tính chất phép biến đổi DCT
  - Ma trận C là ma trận thực;
  - Ma trận C không đối xứng;
  - Là phép biến đổi đơn nguyên và trực giao;
  - DCT không phải là phần thực của UDFT
    - Liên hệ với DFT qua phép đối xứng tín hiệu: mở rộng tín hiệu bằng cách đối xứng qua gốc tọa độ.
  - Là phép biến đổi nhanh



Phép biến đổi cosine DCT

– Ảnh cơ sở của DCT:





Phép biến đổi sine

- Ma trận biến đổi

$$\psi(k,n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} Sin \frac{\pi(k+1)(n+1)}{N+1}, \quad 0 \le k, n \le N - 1$$

- $\Psi = \|\psi(k,n)\|_{NxN}$
- $\Psi = \Psi^* = \Psi^T = \Psi^{*T}$
- Biến đổi sine: $V = \Psi S \Psi$; $S = \Psi V \Psi$

Biến đổi Hadamar

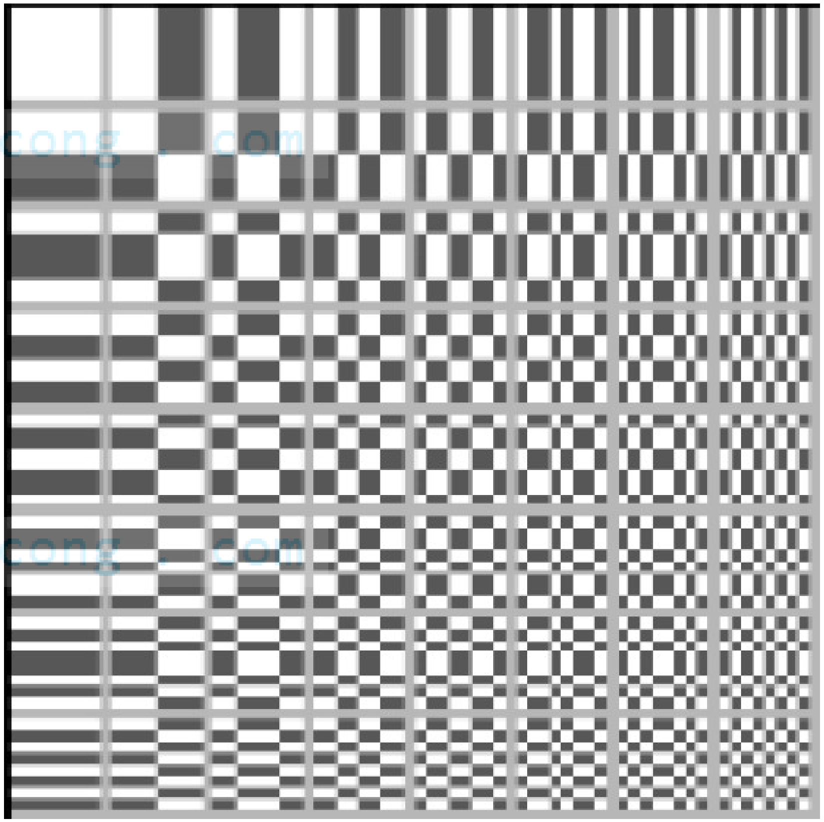
- Các vector cơ sở có thành phần bằng 1 hoặc -1
- $N = 2^n$
- Hệ thức truy hồi xây dựng ma trận H:

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} H_N & H_N \\ H_N & H_{-N} \end{vmatrix}$$

  – Ví dụ

$$H_4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$



Biến đổi Hadamar

- Khai triển biến đổi Hadamar

$$V = HS$$

$$S = HV$$

  – Khai triển:

$$v(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)(-1)^{b(k,n)}$$

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k)(-1)^{b(k,n)}$$

$$b(k,n) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i n_i$$

  – Trong đó $\{k_i\}$, $\{n_i\}$ là biểu diễn nhị phân của k và n

$$k = k_0 + 2k_1 + \ldots + 2^{m-1}k_{m-1}$$

$$n = n_0 + 2n_1 + \ldots + 2^{m-1}n_{m-1}$$

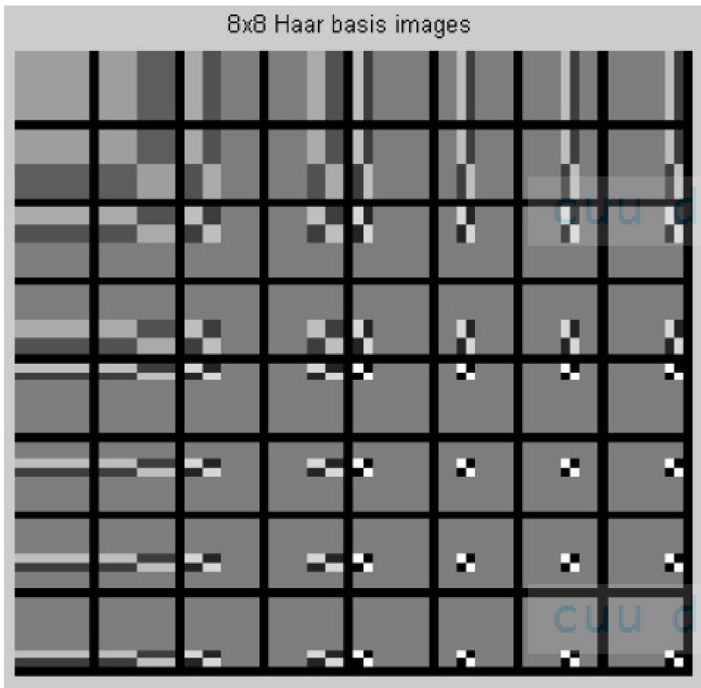
Biến đổi Hadamar

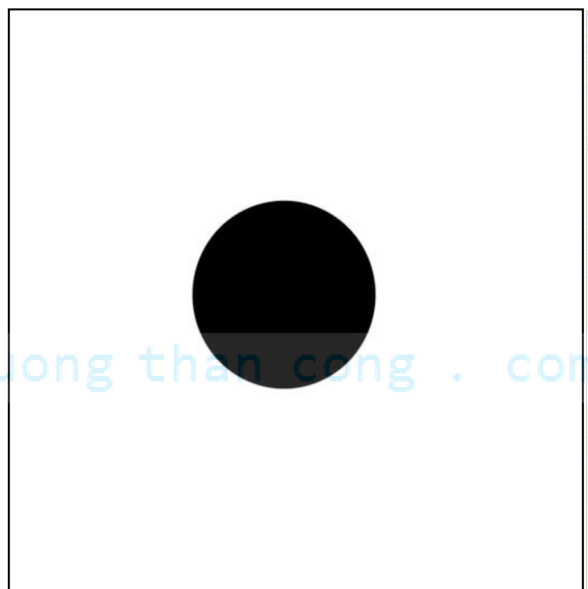
- Tính chất:
  - Là phép biến đổi đối xứng;
  - Là phép biến đổi đơn nguyên;
  - Là phép phân tích ảnh thành tổ hợp tuyến tính các xung vuông
  - Là phép biến đổi nhanh;
  - Nén năng lượng đối với những tín hiệu ảnh có độ tương quan cao.

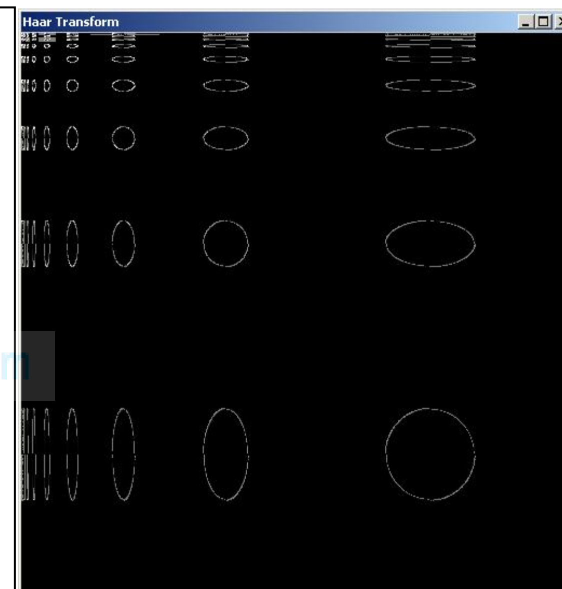
Phép biến đổi Haar

- Ma trận biến đổi:

$$Hr = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$







Phép biến đổi Haar

- Cơ sở phép biến đổi

Construction of Haar functions

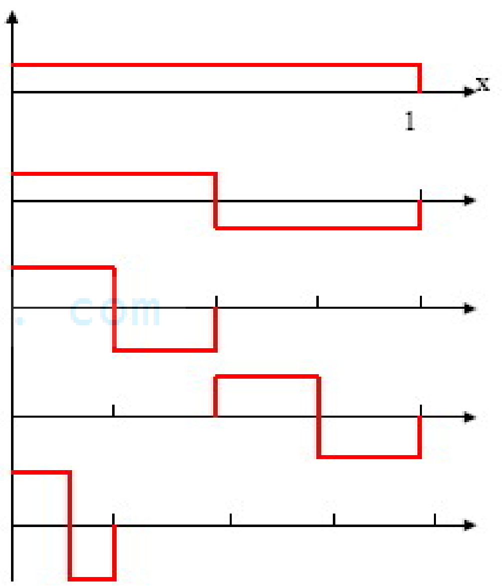
$$k = \overbrace{2^p}^{\text{power of 2}} + \underbrace{q - 1}_{\text{"reminder"}}$$

- Unique decomposition of integer $k \Leftrightarrow (p, q)$
  - $k = 0, \ldots, N\text{-}1$ with $N = 2^n$, $0 <= p <= n\text{-}1$
  - $q = 0, 1$ (for $p=0$); $1 <= q <= 2^p$ (for $p>0$)
  - e.g., $k=0 \Leftrightarrow (0,0)$, $k=1 \Leftrightarrow (0,1)$; $k=2 \Leftrightarrow (1,1)$, $k=3 \Leftrightarrow (1,2)$

- $h_k(x) = h_{p,q}(x)$ for $x \in [0,1]$

$$h_0(x) = h_{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{for } x \in [0,1]$$

$$h_k(x) = h_{p,q}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2} & \text{for } \frac{q-1}{2^p} \le x < \frac{q-\frac{1}{2}}{2^p} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} 2^{p/2} & \text{for } \frac{q-\frac{1}{2}}{2^p} \le x < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{for other } x \in [0,1] \end{cases}$$



Phép biến đổi Haar

- Tính chất của phép biến đổi Haar
  - Phép biến đổi Haar là thực và trực giao:

$$Hr = Hr^*$$

$$Hr^{-1} = Hr^T$$

  - Phép biến đổi Haar là phép biến đổi nhanh. Các véctơ cơ sở của ma trận Haar được sắp xếp liên tục

  - Phép biến đổi Haar có khả năng nén năng lượng kém nhất trong các phép biến đổi đơn nguyên.