

---

# **Triaxiale Schwarzschild-Modelle für elliptische Galaxien und ihre Anwendung auf NGC 4365**

Pharath Palesuvaran

---

Bachelorarbeit



München 2018

---

# **Triaxiale Schwarzschild-Modelle für elliptische Galaxien und ihre Anwendung auf NGC 4365**

**Pharath Palesuvaran**

---

Bachelorarbeit  
an der Fakultät für Physik  
der Ludwig–Maximilians–Universität  
München

vorgelegt von  
Pharath Palesuvaran  
aus Bielefeld

München, den 05.03.2018

Gutachter: Dr. Roberto Philip Saglia  
Tag der mündlichen Prüfung: 13.03.2018

# Abstract

IN DER VORLIEGENDEN ARBEIT WIRD EINE IMPLEMENTIERUNG EINES TRIAXIALEN SCHWARZSCHILD-MODELLS BESCHRIEBEN, DIE VON R. C. E. VAN DEN BOSCH ET ALII (2008, IN [11]) ENTWICKELT WURDE. MIT DIESEM MODELL LASSEN SICH EINE VIELZAHL VERSCHIEDENER ELLIPTISCHER GALAXIEN BESCHREIBEN. ES GIBT AUFSCHLUSS ÜBER DIE INTERNE DYNAMIK DER GALAXIE UND ÜBER DEREN RÄUMLICHE ORIENTIERUNG UND FORM. AUCH VIELE ANDERE EIGENSCHAFTEN (U. A. DIE MASSE EINES ZENTRALEN SUPERMASSIVEN SCHWARZEN LOCHS UND DIE VERTEILUNG DER DUNKLEN MATERIE IN DER GALAXIE) LASSEN SICH MIT DIESEM MODELL UNTERSUCHEN. FÜR DIE KONSTRUKTION DIESES MODELLS FITTET MAN DIE BEOBACHTETE FLÄCHENHELLIGKEIT DER GALAXIE (Z.B. VOM HUBBLE-WELTRAUMTELESKOP) UND KINEMATISCHE DATEN (Z.B. VON EINEM INTEGRAL-FELD-SPEKTROGRAPHEN). UM DAS MODELL ZU TESTEN, WERDEN VORHERSAGEN EINES THEORETISCHEN TEST-ABEL-MODELLS ALS 'SIMULIERTE' BEOBACHTUNGEN GENUTZT. ES WIRD GEZEIGT, DASS DAS SCHWARZSCHILD-MODELL DIE THEORETISCHEN VORHERSAGEN REPRODUZIEREN KANN. ZUDEM WIRD EINE (VON VAN DEN BOSCH ET ALII DURCHGEFÜHRTE) ANWENDUNG DES MODELLS ANHAND DER GALAXIE NGC 4365 PRÄSENTIERT.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Ziel und Aufbau . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Elliptische Galaxien . . . . .	3
2.2	Kinematische Beobachtungen in Galaxien . . . . .	4
2.3	Dynamik elliptischer Galaxien . . . . .	5
2.3.1	DFs und die kollisionslose Boltzmann-Gleichung . . . . .	5
2.3.2	Potentialtheorie . . . . .	6
2.3.3	Integrale der Bewegung und Jeans'sches Theorem . . . . .	7
2.3.4	Orbits in elliptischen Galaxien . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Schwarzschild Methode</b>	<b>11</b>
3.1	Massendichteverteilung . . . . .	12
3.1.1	Deprojektionseffekte . . . . .	14
3.2	Gravitationspotential . . . . .	15
3.3	Orbits . . . . .	17
3.3.1	Sampling der Anfangsbedingungen . . . . .	18
3.3.2	Orbitberechnung und Dithering . . . . .	18
3.4	Superposition der Orbits . . . . .	21
3.4.1	Regularisierung . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Tests mit triaxialen Abel-Modellen</b>	<b>23</b>
4.1	Abel-Modelle . . . . .	23
4.2	Van de Ven's triaxiales Test-Abel-Modell . . . . .	24
4.3	Ergebnisse des Test-Abel-Modells . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Anwendung der Schwarzschild Methode auf NGC 4365</b>	<b>29</b>
5.1	NGC 4365 . . . . .	29
5.1.1	Der kinematisch entkoppelte Kern (KDC) von NGC 4365 . . . . .	29
5.1.2	Beobachtungsdaten . . . . .	30
5.2	Schwarzschild-Modell . . . . .	32

5.2.1	SB-Fit und Massendichteverteilung . . . . .	32
5.2.2	Orbits, Schwarzes Loch und intrinsische Formparameter . . . . .	34
5.2.3	Best-Fit-Parameter . . . . .	35
5.3	Diskussion zum NGC 4365-Modell . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>43</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Untersuchung der stellaren Dynamik in elliptischen Galaxien ist in den letzten Jahren ein aktives Forschungsfeld geworden. In den letzten 30 Jahren stellte man nach und nach fest, dass viele der bis dahin gemachten Annahmen bzgl. der Form und Struktur elliptischer Galaxien revidiert werden mussten. U.a. nahm man bis dahin an, dass elliptische Galaxien gut durch oblate Sphäroide beschrieben werden können, die durch ihre Rotation abgeplattet werden. Allerdings zeigten Beobachtungen und Simulationen zunehmend, dass dies nicht richtig sein konnte. So ging man dazu über, die Galaxien mit triaxialen Formen, wie z.B. Ellipsoiden, zu beschreiben. Hier sind auch heute noch viele Fragen offen.

Die Beschäftigung mit der Dynamik in elliptischen Galaxien ist auch deshalb wichtig, weil sie Aufschluss über ansonsten schwer zugängliche Eigenschaften der Galaxien gibt. Beispielsweise lassen sich so Informationen über die Verteilung nicht sichtbarer Materie oder auch über die Masse eines Schwarzen Lochs im Zentrum der elliptischen Galaxie gewinnen. Als Werkzeuge für die Analyse der stellaren Dynamik haben sich verschiedene Methoden etabliert. Haben Galaxien einen hohen Symmetriegrad, so lassen sich explizite sogenannte DFs<sup>1</sup> für sie finden, die die Verteilung der Sterne in der Galaxie beschreiben. Bei einem niedrigeren Symmetriegrad aber, wie z.B. bei einigen axialsymmetrischen, zeitabhängigen oder triaxialen Galaxien, ist die DF nicht mehr analytisch, sodass man auf numerische Verfahren angewiesen ist.

In dieser Arbeit geht es um eine solche numerische Methode, nämlich die sogenannte Schwarzschild-Methode. Es existieren verschiedene Implementierungen dieser Methode. Sie alle haben gemeinsam, dass sie Orbits miteinander kombinieren, um das stellare System zu erzeugen und werden deshalb auch *orbit-basierte* Modelle genannt. Die Schwarzschild-Methode zielt darauf ab, den finalen stationären Gleichgewichtszustand der Galaxien zu beschreiben. Sie kann daher keine Aussagen über den Entstehungsprozess der Galaxie machen.

Martin Schwarzschild (1979, s. [7]) selbst entwickelte die Methode dazu eine gegebene

---

<sup>1</sup>s. Definitionen hierzu Kap. 2

triaxiale Dichteverteilung zu reproduzieren. Daraufhin wurde die Methode auf eine Vielzahl verschiedener Dichteverteilungen angewendet. Untersucht wurden z.B. kugel- und axialsymmetrische Dichteverteilungen, aber auch triaxiale Formen. Auch die Massen Schwarzer Löcher lassen sich mit der Methode bestimmen. Dies zeigt die hohe Flexibilität der Schwarzschild-Methode.

## 1.2 Ziel und Aufbau

Ziel dieser Arbeit ist es, die Schwarzschild-Methode zu beschreiben, mit dessen Hilfe sich Modelle für stellare Systeme berechnen lassen, für die die Auswirkungen von Kollisionen zwischen Sternen vernachlässigbar sind.

Um einen kurzen Überblick über den derzeitigen Kenntnisstand bzgl. elliptischer Galaxien zu geben, wird in Kapitel 2 zunächst erläutert, welche Arten elliptischer Galaxien es gibt und welche Eigenschaften diese besitzen. Außerdem werden kurz die Grundgleichungen der Galaxiendynamik beschrieben, insofern sie für ein Verständnis des Themas der vorliegenden Arbeit relevant sind. Anschließend folgt eine kurze Erläuterung diverser Potentiale, die letztendlich bestimmen, welche Gestalt die stellaren Orbits haben. Insbesondere werden die Orbits, die man in elliptischen Galaxien vorfindet, analysiert.

In Kapitel 3 folgt dann die Behandlung des Schwarzschild-Modells. Hier soll es darum gehen, weniger die genaue numerische Implementierung des Schwarzschild-Modells, sondern viel eher die theoretischen Kerngedanken hinter dem Modell darzustellen. Der mathematische Formalismus wird soweit reduziert, dass klar wird, welche physikalischen Ideen dem Modell zugrunde liegen. Die Aussagekraft berechneter Modelle soll in Kapitel 4 analysiert werden.

Als spezielles Anwendungsbeispiel des Schwarzschild-Modells wird schließlich in Kapitel 5 die elliptische Galaxie NGC 4365 untersucht.

Ferner sollen im abschließenden Fazit 6 Erweiterungen und einige Anwendungsmöglichkeiten, die das Modell bietet, genannt werden.



# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

### 2.1 Elliptische Galaxien

Elliptische Galaxien haben, wie der Name schon sagt, näherungsweise konzentrische Ellipsen als Isophoten<sup>1</sup>. Ihre Achsenverhältnisse  $b/a$  reichen von 1 bis ca. 0,3. Die Elliptizität ist definiert als  $\epsilon \equiv 1 - b/a$ . Sie werden nach ihren Achsenverhältnissen klassifiziert. Eine Galaxie mit einem Achsenverhältnis von  $b/a = 1 - n/10$  heißt  $En$  Galaxie. So gibt es z.B. E0-, E1- oder E2-Galaxien. Dabei sind E7 die länglichsten elliptischen Galaxien.

Es ist grundsätzlich unmöglich festzustellen, ob eine elliptische Galaxie axialsymmetrisch oder triaxial ist, da sich nur die projizierte Flächenhelligkeit beobachten lässt. Die Flächenhelligkeit nimmt mit dem Radius so lange ab, bis der äußere Rand und die Hintergrundhelligkeit ununterscheidbar werden.

Als Maß für die Größe der Galaxie nimmt man den effektiven Radius  $R_e$ , den Radius (bzw. bei elliptischen Galaxien das geometrische Mittel der Haupt- und Nebenachse) derjenigen Isophote, die die halbe Leuchtkraft der Galaxie enthält ([2], 1.1.3). Der effektive Radius nimmt Werte zwischen  $20kpc$  für Riesenellipsen und  $0,2kpc$  für Zwergellipsen an. Hierbei sollte man beachten, dass der effektive Radius in der Himmelsebene gemessen wird. Es ist hier *nicht* der Radius der Kugel gemeint, die die halbe Leuchtkraft enthält!

Die Isophoten einer elliptischen Galaxie können unterschiedliche Achsenverhältnisse aufweisen. Daher bezieht sich die Einteilung in  $En$ -Galaxien auf die Achsenverhältnisse nahe des effektiven Radius. Bei vielen Galaxien werden die Isophoten weiter außen elliptischer. Die meisten hellen elliptischen Galaxien, auch die mit hoher Elliptizität, rotieren nicht oder nur sehr wenig. Dies ist außergewöhnlich, da Sterne oder andere gasförmige Systeme rotieren, sofern sie nicht kugelförmig sind. Bei hellen elliptischen Galaxien entsteht die Abflachung hingegen nicht durch Rotation. Allerdings gibt es Hinweise auf einen Zusammenhang zwischen Abflachung und Rotation bei dunkleren elliptischen Galaxien.

Die Leuchtkraft, der effektive Radius und die Flächenhelligkeit einer elliptischen Galaxie sind korreliert. Als Faustregel gilt: Je höher die Leuchtkraft einer elliptischen Galaxie ist, desto größer ist sie und desto geringer ist ihre Flächenhelligkeit.

---

<sup>1</sup>Linien konstanter Flächenhelligkeit

Der Großteil der Sterne in elliptischen Galaxien gehört der Population II (d.h. hohe Metallizität und meist älter als 6 Milliarden Jahre) an und ist also sehr alt. Deshalb haben sie auch meist eine rötliche Färbung. Man nimmt an, dass in elliptischen Galaxien nur sehr wenige Sterne entstehen oder sterben, da die meisten von ihnen kaum hinreichend kaltes Gas enthalten.<sup>2</sup>

## 2.2 Kinematische Beobachtungen in Galaxien

In weiter entfernten Galaxien ist eine direkte Messung einzelner Sterngeschwindigkeiten nicht möglich. Es stellt sich also die Frage, wie man dennoch kinematische Daten aus entfernten Galaxien gewinnen kann.

Das Spektrum einer entfernten Galaxie ist die Summe der Spektren ihrer Milliarden Sterne<sup>3</sup>, die jeweils ihre eigene Geschwindigkeit entlang der Sichtlinie haben. Diese Geschwindigkeitsverteilung (LOSVD, engl. line-of-sight velocity distribution) der Sterne kann durch einen Mittelwert und eine Standardabweichung (**Dispersion**) charakterisiert werden. Beide Größen können aus dem Absorptionslinienprofil bestimmt werden.

Falls es möglich ist, verschiedene räumliche Regionen der Galaxie spektral aufzulösen, kann man diese LOSVD als Funktion des Ortes innerhalb der Galaxie messen. D.h. jedem (spektral auflösbaren) Punkt der Galaxie kann dann eine mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  und eine Dispersion  $\sigma$  zugeordnet werden.

Zur Messung dieser kinematischen Daten werden Integral-Feld-Spektrographen eingesetzt. Die Galaxie NGC 4365, auf die die Schwarzschild-Methode später in der Arbeit angewendet wird, wurde mit dem Integral-Feld-Spektrographen SAURON vermessen.

---

<sup>2</sup>In den letzten Jahren hat man zwar Hinweise dafür gefunden, dass etwa ein Viertel der elliptischen Galaxien Gas enthalten. Aber diese haben ebenfalls eine geringe Sternentstehungsrate, sodass die CBE (s. Abschnitt 2.3.1) auf sie anwendbar bleibt.

<sup>3</sup>eine genaue Behandlung der photometrischen Eigenschaften bisher beobachteter elliptischer Galaxien findet sich in [1], §4.3

## 2.3 Dynamik elliptischer Galaxien

Für die mathematische Modellierung von Galaxien lassen sich Konzepte aus der Fluidmechanik anwenden. Allerdings besteht ein grundlegender Unterschied zwischen Fluiden und Galaxien: Während die Geschwindigkeitsverteilung von Fluidpartikeln primär durch gegenseitige (kurzreichweitige) Stöße die Form einer Maxwell'schen Verteilung hat, wirken auf Sterne größtenteils langreichweitige gravitative Kräfte. Stöße kommen hier nur sehr selten vor und sind für die Galaxiendynamik unerheblich<sup>4</sup>, wie in [2], 1.2.1 gezeigt wird. Man darf also näherungsweise annehmen, dass Galaxien **kollisionslos** sind. D.h., die Sterne bewegen sich unter dem Einfluss eines gravitativen Potentials, das nicht durch eine Anhäufung diskreter Massenpunkte, sondern durch eine kontinuierliche Massenverteilung im Raum erzeugt wird.

Gravitative Potentiale  $\Phi(\vec{x})$  lassen sich bei einer gegebenen Massenverteilung  $\varrho(\vec{x})$  über die **Poisson-Gleichung**

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \varrho \quad (2.1)$$

bestimmen, sofern entsprechende Randbedingungen gegeben sind.

### 2.3.1 DFs und die kollisionslose Boltzmann-Gleichung

Als eine effiziente Methode für die mathematische Beschreibung der stellaren Dynamik nutzt man sogenannte **Distribution Functions** (DFs), die die Wahrscheinlichkeit angeben, einen Stern (alle  $N$  Sterne werden als gleichartig angenommen) im sechsdimensionalen Phasenraumvolumen  $d^3\vec{x}d^3\vec{v}$  an der Position  $\vec{x}$  und mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  vorzufinden. Genauer definiert man die DF  $f$  so, dass  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v}$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein beliebiger Stern zur Zeit  $t$  Phasenraumkoordinaten in einem gegebenen Intervall hat. Es gilt die Normierungsbedingung  $\int f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v} = 1$ , wobei über den gesamten Phasenraum integriert wird. Die Schwarzschild-Methode, um die es später in der Arbeit gehen wird, zielt darauf ab, eine numerische Darstellung dieser DF zu finden.

Die bestimmende Gleichung für die DF  $f$  ist die sogenannte **kollisionslose Boltzmann-Gleichung** (CBE)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{q}} \times \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} + \dot{\vec{p}} \times \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0. \quad (2.2)$$

Sie lässt sich analog zur Kontinuitätsgleichung in der Fluidmechanik herleiten, nur dass hier nicht die Fluidmasse, sondern die Wahrscheinlichkeit im Phasenraum erhalten bleibt. Die CBE berücksichtigt dabei nicht, dass Sterne geboren werden und sterben. Allerdings lässt sich diese Tatsache in elliptischen Galaxien vernachlässigen, da in ihnen praktisch keine Sterne sterben oder entstehen. Die Größe  $\dot{\vec{p}}$  in der CBE ist beispielsweise in kartesischen Koordinaten gleich  $-\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}}$ . Um mit der CBE eine DF zu bestimmen, muss also zunächst das Potential bestimmt werden.

Ein System wird **selbst-konsistent** genannt, wenn die Massenverteilung  $\varrho$ , die das Potential erzeugt, proportional zu  $\int d^3\vec{v} f$  ist. In diesem Fall wird das Potential also nur durch

<sup>4</sup>es sei denn man ist sehr nahe am Kern der Galaxie

die Sterne in der Galaxie erzeugt und nicht durch andere Quellen. Es gilt also

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \varrho = 4\pi G m \int d^3 \vec{v} f, \quad (2.3)$$

wobei  $m$  hier die typische Masse eines Sterns ist. Bei selbst-konsistenten Systemen bestimmt die Massenverteilung  $\varrho$  das Potential über die Poisson-Gleichung 2.1 und umgekehrt das Potential die Massenverteilung  $\varrho$  über die CBE 2.2.

### 2.3.2 Potentialtheorie

Potentiale lassen sich i. Allg. bei einer gegebenen Massenverteilung über die Poisson-Gleichung 2.1 bestimmen. Hier werden ein paar einfache Potentiale vorgestellt, die für das Verständnis der Schwarzschild-Methode später wichtig sind.

**Kepler-Potential** Der einfachste Fall ist das Potential einer Punktmasse. Eine Punktmasse der Masse  $M$  erzeugt ein sogenanntes **Kepler-Potential**

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (2.4)$$

**Plummer-Potential** Kepler-Potentiale haben den Nachteil, dass sie an der Stelle  $r = 0$  eine Singularität besitzen. Plummer (1911) führte daher im Rahmen seiner Untersuchungen von Kugelsternhaufen das **Plummer-Potential**

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (2.5)$$

ein. Dabei ist  $b$  die **Plummer Skalenlänge** und  $M$  die Gesamtmasse des Systems. Dieses Potential ist im Nullpunkt stetig und differenzierbar und deshalb für analytische Berechnungen interessanter als das Kepler-Potential. Die Dichte, die das Potential erzeugt, ist nach der Poisson-Gleichung 2.1 über

$$\varrho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-5/2} \quad (2.6)$$

gegeben.

Die Implementierung der Schwarzschild-Methode, um die es in der Arbeit geht, nutzt ein Plummer-Potential, um das Potential des Schwarzen Loches in einer elliptischen Galaxie zu modellieren. Äußere Bereiche der Galaxie hingegen werden über ein Kepler-Potential genähert.

### 2.3.3 Integrale der Bewegung und Jeans'sches Theorem

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Klassifizierung von Orbits sind sogenannte Integrale der Bewegung. Ein **Integral der Bewegung**  $I(\vec{x}, \vec{v})$  ist eine beliebige Funktion, die nur von den Phasenraumkoordinaten abhängig ist und entlang des Orbits konstant ist:

$$I(\vec{x}(t_1), \vec{v}(t_1)) = I(\vec{x}(t_2), \vec{v}(t_2)), \quad (2.7)$$

sodass

$$\frac{d}{dt} I[\vec{x}, \vec{v}] = 0. \quad (2.8)$$

Orbits können bis zu fünf Integrale der Bewegung haben. Hier folgt eine kurze Auflistung der Integrale, die von verschiedenen Potentialen zugelassen werden:

- In **stationären** Potentialen  $\phi(\vec{x})$  ist stets die Hamiltonfunktion  $H = \frac{1}{2}v^2 + \phi$  ein Integral der Bewegung.
- In **stationären axialsymmetrischen** Potentialen sind die Hamiltonfunktion und die Drehimpulskomponente bzgl. der Symmetrieachse  $L_z$  Integrale der Bewegung. Zudem kann man zeigen, dass ein sogenanntes **drittes Integral**  $I_3$  existieren muss<sup>5</sup>, das nur für bestimmte Potentiale<sup>6</sup> eine analytische Form hat. Im folgenden Abschnitt wird hierauf näher eingegangen.
- In **kugelsymmetrischen** Potentialen sind alle drei Drehimpulskomponenten jeweils ein Integral der Bewegung. In ([2], 3.1.1) wird gezeigt, dass sich für kugelsymmetrische Potentiale fünf analytische Integrale der Bewegung finden lassen.

Häufig existieren allerdings keine analytischen Ausdrücke für die Integrale der Bewegung. Es stellt sich die Frage, wie sich die Integrale der Bewegung eines Systems nutzen lassen, um dessen DF zu finden. Hierzu macht das Jeans'sche Theorem eine Aussage:

---

**Jeans'sches Theorem** Jede stationäre Lösung der CBE hängt von den Phasenraumkoordinaten nur durch Integrale der Bewegung im gegebenen Potential ab. Jede Funktion der Integrale liefert eine stationäre Lösung der CBE.

---

Wichtig ist hier die zweite Aussage: Die DF, welche die CBE löst, muss eine Funktion der Integrale sein. Eine analytische Behandlung der DF eines Systems ist nur dann möglich, wenn die Integrale der Bewegung analytisch sind. Bei stationären axialsymmetrischen Potentialen beispielsweise sind lediglich die DFs  $f(H, L_z)$ , die nur von den beiden klassischen Integralen abhängen, analytisch untersuchbar. Zwar existieren in bestimmten Potentialen analytische Lösungen für das dritte Integral  $I_3$ . Ihre Form ist aber so komplex, dass DFs  $f(H, L_z, I_3)$ , die von allen drei Integralen abhängen, eine analytische Behandlung stark erschweren.

---

<sup>5</sup>s. Binney, Tremaine [2], §3.2.2

<sup>6</sup>z.B. sog. Stäckel-Potentiale s. [2], 3.5.3

### 2.3.4 Orbits in elliptischen Galaxien

Die Massenverteilung elliptischer Galaxien wird meist als triaxial angenommen. In triaxialen Potentialen bleiben drei Integrale der Bewegung erhalten, die Energie  $E$ , sowie zwei nicht-klassische Integrale  $I_2$  und  $I_3$ , die beide nicht explizit bekannt sind ([10]). Nun ist nach dem Jeans'schen Theorem die DF, welche die Orbits bestimmt, eine Funktion dieser zum Teil unbekannten Integrale. Die Schwarzschild-Methode umgeht eine Berechnung der Integrale  $I_2$  und  $I_3$  und ermöglicht es trotzdem eine (numerische) Darstellung der DF zu finden.

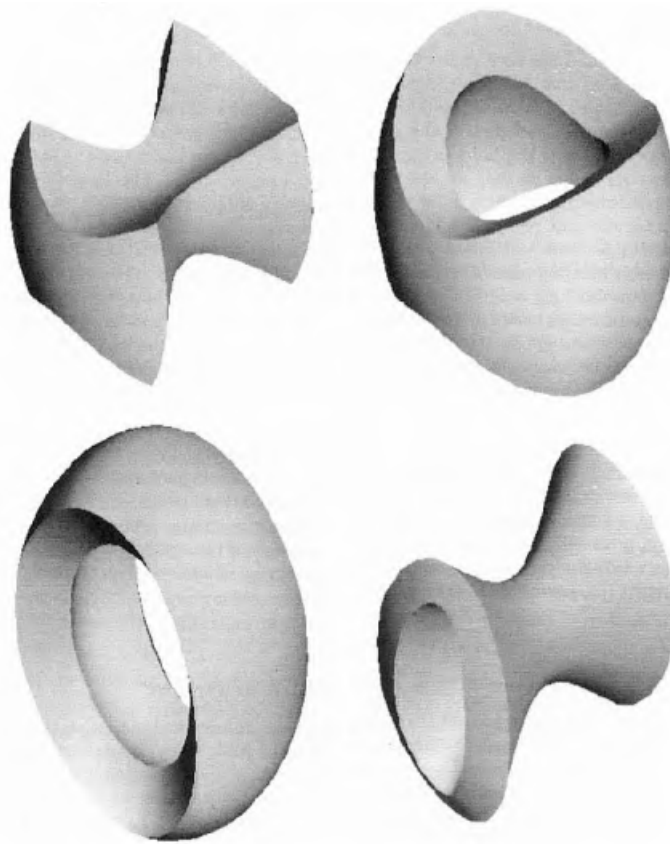


Abbildung 2.1: [**Hüllen der Orbits in einem triaxialen Potential**] Von oben links im Uhrzeigersinn: (a) Box-Orbits, (b) Kurzachsantube, (c) innerer Langachsantube, (d) äußerer Langachsantube. [Aus [2], Abb. 3.46]

Analysen anhand vereinfachter triaxialer Modelle (wie z.B. dem perfekten Ellipsoid, vgl. [2], 3.8.1) zeigen, dass es eine Vielzahl verschiedener Orbits in triaxialen elliptischen Galaxien gibt. I. Allg. lässt sich sagen, dass die Orbits nicht geschlossen sind und die Sterne durch die Galaxie 'taumeln'. Eine genauere Analyse triaxialer Potentiale zeigt, dass diese vier Orbits zulassen (s. Abb. 2.1). Sterne auf **Box-Orbits** haben die Eigenschaft,

dass sie alle acht Ecken der ihrer Energie entsprechenden Isopotentialflächen berühren, wo sie momentan zur Ruhe kommen. Ein Teststern, der von einer Äquipotentialfläche des triaxialen Potentials aus der Ruhe losgelassen wird, wird sich auf einem Box-Orbit bewegen. Die anderen drei Orbits typen nennt man **Tubes**. Sterne, die sich auf Tubes bewegen, kommen nie zur Ruhe und drehen sich auf eine bestimmte Weise um den Hohlraum im Orbitzentrum. Da sie das Zentrum der Galaxie meiden, werden sie auch *zentrophob* genannt. Sie werden bzgl. ihrer zentralen Achse unterschieden. Die **Kurzachs tubes** zirkulieren um die kürzeste Hauptachse des Potentials, während **Langachs tubes** um die längste Hauptachse zirkulieren. Tubes, die um die mittlere Hauptachse zirkulieren, existieren nicht, da sie nicht stabil sind.

Box-Orbits können dem galaktischen Zentrum sehr nahe kommen. Befindet sich dort eine zentral erhöhte Massenkonzentration, können je nach Dichtegradient aus den Box-Orbits sogenannte irreguläre Orbits werden. Als irregulär (oder auch chaotisch) bezeichnet man einen Orbit, der sich bei kleinsten Veränderungen der Anfangsbedingungen stark von seiner ursprünglichen Form unterscheidet. Bei Existenz eines Schwarzen Lochs im Zentrum kann es sogar passieren, dass Box-Orbits verschwinden. Generell kann sich die Dynamik in der Nähe des galaktischen Zentrums stark von der Dynamik außerhalb unterscheiden. Das Verhalten irregulärer Orbits ist noch nicht hinreichend erforscht und soll hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden.<sup>7</sup>

Bei der Anwendung der Schwarzschild-Methode muss eine Orbit-Library erstellt werden, die für das jeweilige galaktische Potential repräsentativ ist. Deshalb ist es an dieser Stelle wichtig zu verstehen, welche Orbits typen in triaxialen Galaxien existieren.

---

<sup>7</sup>eine genauere Betrachtung findet sich in [2], 3.8.2, 3.8.3





# Kapitel 3

## Schwarzschild Methode

Das Schwarzschild-Modell, das in dieser Arbeit präsentiert werden soll, wurde von R. C. E. van den Bosch, G. van de Ven, E. K. Verolme, M. Cappellari und P. T. de Zeeuw entwickelt und 2007 in [11] veröffentlicht. Deren Notation wird hier verwendet.

Die Konstruktion dieses Schwarzschild-Modells gliedert sich grob in folgende Schritte:

- (a) Fit der beobachteten Flächenhelligkeit (nachfolgend: SB)
- (b) Massendichteverteilung, die der bestimmten SB entspricht, bestimmen
- (c) Gravitationspotential der bestimmten Massendichteverteilung berechnen
- (d) repräsentative Orbit Library in diesem Potential berechnen
- (e) gewichtete Superposition der Orbits so ermitteln, dass die beobachtete SB und die Kinematik bestmöglich reproduziert werden

Wie die einzelnen Schritte genau realisiert werden, wird im Folgenden beschrieben. Eine Übersicht über die hier eingeführten Symbole findet sich in Tabelle 3.1.

### 3.1 Massendichteverteilung

Die dreidimensionale Massendichteverteilung der Galaxie wird aus der beobachteten SB bestimmt. Diese SB wird in der Himmelsebene gemessen und ist damit zweidimensional. Zur Beschreibung der SB und der Massendichteverteilung ist es zweckmäßig ein projiziertes und ein intrinsisches Koordinatensystem einzuführen.

Die intrinsischen Koordinaten  $(x, y, z)$  haben ihren Ursprung im Zentrum der Galaxie und seien entlang der drei Hauptachsen der Galaxie orientiert. Die projizierten Koordinaten  $(x', y', z')$  seien so definiert, dass  $z'$  entlang der Sichtlinie orientiert ist und  $x'$  in der intrinsischen  $(x, y)$ -Ebene liegt. Die  $(x', y')$ -Ebene ist also in der Himmelsebene.

Die gegenseitige Lage der beiden Koordinatensysteme beschreiben wir mit drei Winkeln  $(\vartheta, \varphi, \psi)$ . Das Winkelpaar  $(\vartheta, \varphi)$  gibt die Orientierung der Sichtlinie bzgl. der Hauptachsen des Objekts an (z.B. wären  $(90^\circ, 0^\circ)$ ,  $(90^\circ, 90^\circ)$  und  $(0^\circ, 0^\circ)$  die Sicht entlang der langen, mittleren und kurzen Hauptachse).  $\psi$  gibt die Verdrehung des Objekts um die Sichtlinie so an, dass die große Hauptachse der projizierten Ellipse mit der  $x'$ -Achse zusammenfällt. Nun ist die Form der intrinsischen Massendichteverteilung grundsätzlich unbekannt. Van den Bosch et alii haben entschieden, die Massenverteilung in Form einer sogenannten **Multi-Gaussian Expansion** (MGE) zu parametrisieren. Sie haben erkannt, dass man zwar auch annehmen könnte, dass die Massendichte auf ähnlichen coaxialen Ellipsoiden geschichtet ist. Aber reale Galaxien weichen von dieser Annahme ab, da sie u.a. Variationen der Elliptizität oder Verdrehungen der Lagewinkel vorweisen. Einfache Ellipsoid-Modelle können diese Abweichungen nicht berücksichtigen.

MGE-Modelle sind flexibler und spiegeln reale Galaxien besser wieder. Man nimmt hier an, dass die intrinsische Dichte als eine Summe coaxialer, triaxialer Gaußfunktionen<sup>1</sup> beschrieben werden kann.

Die SB, die dieser MGE-Massendichte (s.u.) entspricht, hat die Form

$$SB(R', \theta') = \sum_{j=1}^N \frac{L_j}{2\pi\sigma_j'^2 q_j'} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_j'^2} \left( x_j'^2 + \frac{y_j'^2}{q_j'^2} \right) \right] \quad (3.1)$$

wobei

$$x_j' = R' \sin(\theta' - \psi_j') \quad \text{und} \quad y_j' = R' \cos(\theta' - \psi_j') \quad (3.2)$$

gilt und  $(R', \theta')$  die Polarkoordinaten in der Himmelsebene sind.  $0 \leq q_j' \leq 1$  ist das beobachtete elliptische Achsenverhältnis und  $\sigma_j'$  die Dispersion der  $N$  Gaußfunktionen entlang der Hauptachse.  $\psi_j'$  ist der entgegen dem Uhrzeigersinn von der  $y'$ -Achse zur Hauptachse jeder Gaußfunktion gemessene Lagewinkel der Gaußfunktionen. Da  $\psi_j'$  nicht direkt messbar ist, wird

$$\psi_j' = \psi + \Delta\psi_j' \quad \text{mit} \quad \Delta\psi_1' \equiv 0 \quad (3.3)$$

definiert. Dabei ist  $\Delta\psi_j'$  die isophotale Verdrehung der  $j$ -ten Gaußfunktion und ist direkt messbar.

---

<sup>1</sup>Da Gaußfunktionen keine vollständige Funktionsbasis bilden, können diese nicht jede beliebige positive Dichteverteilung reproduzieren! Dennoch können MGE Modelle eine Vielzahl realer Dichten gut beschreiben. Für weitere Details s. [11] Abschnitt 3.1

Zunächst wird die SB 3.1 an die beobachtete SB gefittet. Der Fit liefert die Dispersion und die Formparameter der Gaußfunktionen  $(\sigma'_j, q'_j, \psi'_j)$ .

Um nun die entsprechenden intrinsischen Parameter herauszufinden, muss die SB deprojiziert werden. Im triaxialen Fall ist diese Deprojektion nie eindeutig. Denn man weiß nicht, von welcher Seite die Galaxie beobachtet wird. Deshalb muss die räumliche Ausrichtung  $(\vartheta, \varphi, \psi)$  der Galaxie 'erraten' werden. Auf welche Art die Winkel 'erraten' werden, wird später gezeigt. Die intrinsischen Größen  $(\sigma_j, p_j, q_j)$  können dann über die Gleichungen

$$1 - q_j^2 = \frac{\delta'_j [2 \cos(2\psi'_j) + \sin(2\psi'_j)(\sec \vartheta \cot \varphi - \cos \vartheta \tan \varphi)]}{2 \sin^2 \vartheta [\delta'_j \cos \psi'_j (\cos \psi'_j + \cot \varphi \sec \vartheta \sin \psi'_j) - 1]} \quad (3.4)$$

$$p_j^2 - q_j^2 = \frac{\delta'_j [2 \cos(2\psi'_j) + \sin(2\psi'_j)(\cos \vartheta \cot \varphi - \sec \vartheta \tan \varphi)]}{2 \sin^2 \vartheta [\delta'_j \cos \psi'_j (\cos \psi'_j + \cot \varphi \sec \vartheta \sin \psi'_j) - 1]} \quad (3.5)$$

$$u_j^2 = \frac{1}{q_j^2} \sqrt{p_j^2 \cos^2 \vartheta + q_j^2 \sin^2 \vartheta (p_j^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \quad (3.6)$$

berechnet werden. Dabei ist  $\delta'_j = 1 - q_j'^2$  und  $u_j \equiv \sigma'_j / \sigma_j$  (die durch die Projektion verursachte **Skalenlängenkompression**). Die mathematischen Nebenbedingungen  $p_j > 0$  und  $q_j > 0$  (bzw. strenger und physikalischer:  $p_j > 0,4$  und  $q_j > 0,2$  für elliptische Galaxien<sup>2</sup>) implizieren, dass jede Gaußfunktion nur für einen beschränkten Bereich räumlicher Ausrichtungen deprojizierbar ist. Die räumlichen Ausrichtungen, für die das gesamte MGE-Modell deprojiziert werden kann, sind über den Schnitt der deprojizierbaren Bereiche der einzelnen Gaußfunktionen gegeben.

Sind die intrinsischen Parameter bestimmt, lässt sich die triaxiale MGE-Massendichteverteilung schließlich schreiben als

$$\rho(x, y, z) = \sum_{j=1}^N (M/L) \frac{L_j}{(\sigma_j \sqrt{2\pi})^3 p_j q_j} \times \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \left( x^2 + \frac{y^2}{p_j^2} + \frac{z^2}{q_j^2} \right) \right] \quad (3.7)$$

wobei  $N$  die Anzahl der benötigten Gaußkomponenten und  $L_j$  die Leuchtkraft der  $j$ -ten Gaußfunktion ist. Die Achsen sind so orientiert, dass die längste Achse der Gaußfunktionen mit der  $x$ -Achse und die kürzeste Achse mit der  $z$ -Achse zusammenfällt.  $p_j$  und  $q_j$  sind die elliptischen Achsenverhältnisse, wobei  $0 \leq q_j \leq p_j \leq 1$  gilt (vgl. [3]). D.h. anschaulich gesprochen, dass  $p$  jeweils  $\frac{b}{a}$  und  $q$  das Verhältnis  $\frac{c}{a}$  angibt, wenn ein Ellipsoid mit den Hauptachsen  $a \geq b \geq c$  betrachtet wird.  $\sigma_j$  ist die Dispersion<sup>3</sup> entlang der  $x$ -Achse und  $\frac{M}{L}$  das Masse-Leuchtkraft-Verhältnis.

<sup>2</sup>laut einem Paper von Binney und de Vaucouleurs (1981)

<sup>3</sup>Achtung: Nicht zu verwechseln mit der Dispersion der LOSVD!  $\sigma_j$  gibt die Breite der  $j$ -ten Gaußfunktion an.

### 3.1.1 Deprojektionseffekte

I. Allg. haben die Gaußfunktionen unterschiedliche  $q'_j$  und  $\psi'_j$ . Die insgesamt deprojizierbare Region der MGE bestimmt sich aus der Schnittregion der deprojizierbaren Bereiche der einzelnen Gaußfunktionen.

Man kann zeigen, dass der deprojizierbare Bereich genau dann am größten ist, wenn der kleinste  $q'_j$  Wert aller Gaußfunktionen in der MGE  $\min q'_j$  maximiert und der größte  $|\Delta\psi'_j|$  Wert aller Gaußfunktionen  $\max |\Delta\psi'_j|$  minimiert wird. Diese Optimierung führt zu einem möglichst kugelförmigen Massenmodell.

Die Orbits und die Kinematik werden durch die intrinsischen Formparameter  $(p, q, u)$  direkter beeinflusst als durch die Sichtwinkel  $(\vartheta, \varphi, \psi)$ . Deshalb untersucht man die Deprojektionseffekte, indem man die Größen  $(p, q, u)$  samplet. Über

$$\cos^2 \vartheta = \frac{(u^2 - q^2)(q'^2 u^2 - q^2)}{(1 - q^2)(p^2 - q^2)} \quad (3.8)$$

$$\tan^2 \varphi = \frac{(u^2 - p^2)(p^2 - q'^2 u^2)(1 - q^2)}{(1 - u^2)(1 - q'^2 u^2)(p^2 - q^2)} \quad (3.9)$$

$$\tan^2 \psi = \frac{(1 - q'^2 u^2)(p^2 - q'^2 u^2)(u^2 - q^2)}{(1 - u^2)(u^2 - p^2)(q'^2 u^2 - q^2)} \quad (3.10)$$

lassen sich die Formparameter wieder in die Sichtwinkel umrechnen. Dieses Vorgehen verkürzt die Rechenzeit, da so die Berechnung ähnlicher Modelle vermieden wird.

Tabelle 3.1: Symbole aus Kapitel 3

Symbol	Definition
$(x, y, z)$	Intrinsisches Koordinatensystem
$(x', y', z')$	Projiziertes Koordinatensystem
$(\vartheta, \varphi, \psi)$	Sichtwinkel
$(p, q, u)$	Intrinsische Formparameter
$q'$	Durchschnittliche projizierte Abflachung
$L_j, \sigma'_j, q'_j$	Projizierte Leuchtkraft, Dispersion, Abflachung der einzelnen Gaußfunktionen
$(p_j, q_j, u_j)$	Formparameter der einzelnen Gaußfunktionen
$\sigma_j$	Intrinsische Dispersion der einzelnen Gaußfunktionen
$\psi'_j$	Lagewinkel der einzelnen Gaußfunktionen
$\Delta\psi'_j$	Isophotale Verdrehung der einzelnen Gaußfunktionen

## 3.2 Gravitationspotential

Nachdem die Massendichte 3.7 bestimmt ist, muss das zugehörige Potential bestimmt werden. Wir berücksichtigen den Beitrag der **dunklen Materie** zum Gravitationspotential, indem wir 2 MGE-Modelle erstellen: ein Modell für die gravitierende Materie (für die Berechnung des Potentials) und ein Modell für das sichtbare Licht (um die intrinsische und beobachtete Lichtverteilung zu reproduzieren).

Aufgrund der dunklen Materie in der Galaxie wird das  $(M/L)$ -Profil radial variieren. Deshalb ersetzen wir bei der Berechnung des Modells für die gravitierende Materie das für alle Gaußfunktionen konstante Verhältnis  $(M/L)$  in Gleichung 3.7 durch ein für jede Gaußfunktion individuelles Verhältnis  $(M/L)_j$ .

Das zur Dichte 3.7 gehörige Potential lässt sich nun über die Chandrasekhar Formel<sup>4</sup> herleiten:

$$V(x, y, z) = - \sum_{j=1}^N V_{0,j} \int_0^1 d\tau F(x, y, z, \tau) \quad (3.11)$$

mit

$$V_{0,j} = (M/L) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{GL_j}{\sigma_j} \quad (3.12)$$

und

$$F(x, y, z, \tau) = \frac{\exp \left[ -\frac{\tau^2}{2\sigma_j^2} \left( x^2 + \frac{y^2}{1-\delta_j\tau^2} + \frac{z^2}{1-\epsilon_j\tau^2} \right) \right]}{\sqrt{(1-\delta_j\tau^2)(1-\epsilon_j\tau^2)}} \quad (3.13)$$

wobei

$$\delta_j = 1 - p_j^2 \quad \text{und} \quad \epsilon_j = 1 - q_j^2 \quad (3.14)$$

Gleichung 3.11 hat keine einfache analytische Lösung, sodass eine numerische Auswertung erforderlich ist. Für die Auswertung der zentralen und äußersten Regionen werden analytische Näherungen verwendet (s. [11] Abschnitt 3.8, Gl. (18), (19)). Auf diese Weise muss nur für  $0, 1\sigma_j < r < 45\sigma_j$  numerisch integriert werden, was die Orbitintegration beschleunigt. Der Beitrag eines Schwarzen Loches lässt sich mittels eines Plummer-Potentials<sup>5</sup>

$$V_{\bullet}(x, y, z) = - \frac{GM_{\bullet}}{\sqrt{r_s^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3.15)$$

zum Potential 3.11 addieren. Dabei ist  $M_{\bullet}$  die Masse des Schwarzen Loches und  $r_s \neq 0$  eine Dämpfungslänge, die verhindert, dass das Potential im Ursprung unendlich groß wird. Die Orbitintegration wird in kartesischen Koordinaten durchgeführt. Die stellaren Beschleunigungen entsprechen den Ableitungen des Potentials 3.11 nach x,y und z. ähnlich wie bei den Potentialen werden für die Beschleunigungen in den zentralen und äußersten Regionen analytische Näherungen benutzt (s. [11] Abschnitt 3.8, Gl. (21), (22)). Die

<sup>4</sup>für Potentiale, deren Dichten auf ähnlichen konzentrischen Ellipsoiden geschichtet sind

<sup>5</sup>(s. Abschnitt 2.3.2)

durch das Schwarze Loch hervorgerufene Beschleunigung bestimmt sich durch Ableitung des Plummer-Potentials aus

$$a_{\bullet,\xi} = \frac{\xi G M_{\bullet}}{\sqrt{(r_s^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \xi = x, y, z. \quad (3.16)$$

Für eine schnelle und präzise Orbitintegration wird die Gesamtbeschleunigung  $(a_x, a_y, a_z)$  in einem Gitter (in Kugelkoordinaten) gespeichert und linear interpoliert.

### 3.3 Orbits

Die Orbitstruktur in triaxialen Potentialen wurde bereits in Abschnitt 2.3.4 beschrieben. Nun soll die  $(x, z)$ -Ebene der Galaxie genauer betrachtet werden. Man kann nämlich zeigen, dass alle vier Orbits typen senkrecht in wohldefinierten Regionen die  $(x, z)$ -Ebene durchqueren. Alle Tubes außer die sogenannten **Thin-Orbits**, bei denen der äußere und innere radiale Wendepunkt zusammenfallen, durchqueren die  $(x, z)$ -Ebene zwei mal senkrecht. Nämlich einmal innerhalb und einmal außerhalb der grauen Zone in Abb. 3.1, die durch die Thin-Orbit-Kurven und das Äquipotential eingegrenzt wird. Ein Schwarzes Loch im

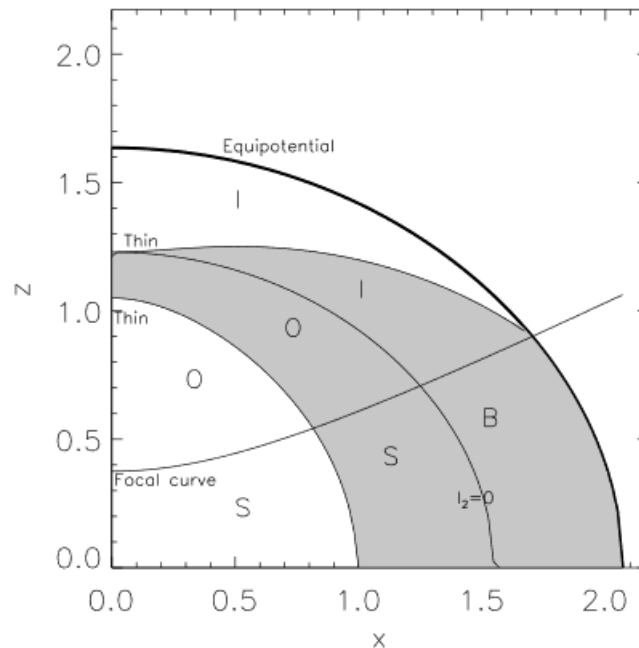


Abbildung 3.1: Die  $(x, z)$ -Ebene für eine triaxiale Galaxie, für eine Energie  $E$ , die so groß ist, dass alle Orbits typen (Kurzachsantubes (S), innere (I) und äußere (O) Langachsantubes und Box-Orbits (B)) vertreten sind. Alle Tube-Orbits durchqueren die  $(x, z)$ -Ebene in zwei Punkten. Nämlich einmal innerhalb und einmal außerhalb der grauen Zone, sodass die graue Zone alle Orbits nur einmal beinhaltet. [Aus [11], Abb. 2]

Zentrum verändert die Orbits jedoch zum Teil. Dann durchqueren nicht alle Orbits die  $(x, z)$ -Ebene senkrecht. Die 3 Tubes bleiben nach wie vor vertreten. Jedoch verändern sich die Box-Orbits zum Teil stark, da sie dem Zentrum der Galaxie sehr nahe kommen können. Das hier verwendete MGE-Modell hat deshalb eine Orbitstruktur, die komplexer ist, als oben beschrieben wurde. Beim folgenden Sampling der Anfangsbedingungen nutzt man dennoch die beschriebene Orbitstruktur, da sie der Orbitstruktur des MGE-Modells, wie sich später zeigen wird, sehr nahe kommt.

### 3.3.1 Sampling der Anfangsbedingungen

Bevor die Orbits berechnet werden können, müssen passende Anfangsbedingungen gewählt werden, mit denen die Orbits starten sollen. Wie oben erklärt wurde, entscheidet die Anfangsbedingung, welcher Orbits entsteht. Lässt man z.B. einen Teststern von einer Äquipotentialfläche in Ruhe starten, bewegt er sich auf einem Box-Orbit. Damit also eine für das Potential repräsentative **Orbit Library**, d.h. eine Kollektion einzelner Orbits, entstehen kann, müssen geeignete Anfangsbedingungen gefunden werden.

Van den Bosch et alii sampeln die orbitalen Anfangsbedingungen über ein dichtes Gitter in der  $(x, z)$ -Ebene. Nun kann es dabei zu Doppelzählungen der Tube-Orbits kommen, da diese die  $(x, z)$ -Ebene zwei mal durchqueren. Diese Doppelzählungen vermeiden sie, indem sie die Thin-Orbit-Kurven schrittweise vorher bestimmen. Dazu starten sie Orbits bei festem  $\theta$  bei verschiedenen Radien und schauen, bei welchem Radius die Orbitbreite minimal wird. Die Startpunkte  $(x, z)$  werden dann von einem polaren Gitter  $(R, \theta)$  zwischen den Thin-Orbit-Kurven und dem Äquipotential ausgewählt. Zu jedem Punkt in der  $(x, z)$ -Ebene werden über die Energie  $E$  verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten gesampelt. Die Anfangsgeschwindigkeiten in  $y$ -Richtung werden über

$$v_{y,0}^2 = 2[V(x_0, 0, z_0) - E] \quad \text{und} \quad (v_{x,0}, v_{z,0}) = (0, 0) \quad (3.17)$$

bestimmt. Diese Gruppe von Anfangsbedingungen  $(E, R, \theta)$  wird  $(x, z)$ -**Startraum** genannt.

Man konnte zeigen, dass eine hinreichende Anzahl an Box-Orbits entscheidend ist für die triaxiale Gestalt der Galaxie. Deshalb startet man zusätzliche Box-Orbits, indem man sie von der Äquipotentialfläche in Ruhe loslässt. Das Sampling dieser Orbits erfolgt in Kugelkoordinaten  $(\theta, \phi)$ . Diese Gruppe von Anfangsbedingungen  $(E, \theta, \phi)$  wird *stationärer Startraum* genannt.

Beide Starträume lassen sich zusammen in einer Abbildung wie 3.2 darstellen.

### 3.3.2 Orbitberechnung und Dithering

Nachdem die Anfangsbedingungen festgelegt wurden, können die Orbits berechnet werden. Die Orbits in den Starträumen werden numerisch integriert und deren Eigenschaften gespeichert. Das Speichergitter wird in Kugelkoordinaten  $(r_g, \theta_g, \phi_g)$  beschrieben und hat 300 Zellen. Triaxiale Galaxien sind symmetrisch bzgl. ihrer drei Hauptebenen. Deshalb müssen sämtliche orbitalen Eigenschaften nur in einem Oktanten berechnet werden, alle anderen folgen aus der Symmetrie.

Bei einer Superposition der bisher berechneten Orbits stellt man fest, dass die resultierende DF sehr sprunghaft und lokal stark variierend ist. Dies liegt daran, dass einzelne Orbits Deltafunktionen im Phasenraum entsprechen, während die DF die Superposition dieser Deltafunktionen darstellt. Deshalb kann die DF stark sprunghaft werden. Die DF muss aber aus physikalischer Sicht weichere Übergänge haben. Dieses Problem wird gelöst, indem benachbarte Orbits miteinander kombiniert werden (**Dithering**). Dazu vergrößert



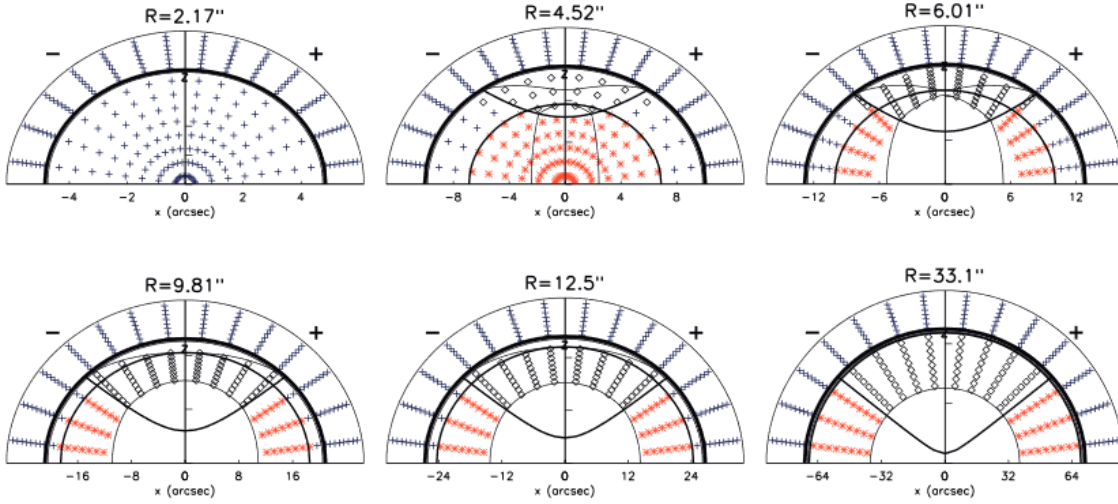


Abbildung 3.2: Gemeinsame Veranschaulichung des  $(x, z)$ -Startraumes und des stationären Startraumes. Die sechs Tafeln zeigen die Startpunkte der Orbits von einer inneren Schale des Modells (oben links) bis zu einer äußeren Schale (unten rechts). Man muss sich die Abbildung dreidimensional vorstellen: Die dicke Äquipotentiallinie trennt die beiden Starträume. Innerhalb der Äquipotentiallinie befindet sich der  $(x, z)$ -Startraum und außerhalb der stationäre Startraum, welcher aus der Zeichenebene hinausragt. Die Symbole stellen die Orbitpositionen in den Starträumen dar. Die dicke schwarze Linie entspricht dem Äquipotential. Die Kreuze repräsentieren Box-Orbits, die Sterne Kurzachsantubes und die Rauten (beide) Langachsantubes. Auch die Thin-Orbit-Kurve, Fokale Kurve und  $I_2 = 0$ -Kurve sind dargestellt. Diese trennen die Orbits. [Aus [11], Abb. 3]

man die dreidimensionalen Sampling-Starträume  $(E, \theta, \phi)$  fünf mal in jeder Richtung, sodass in jedem Bündel 125 Orbits enthalten sind. Danach werden alle Orbits in einem Bündel aufaddiert. Auf diese Weise erhält man eine weniger verzerrte und sprunghafte DF.

Die Gesamtzahl der Orbits hängt ab von

- der Genauigkeit der kinematischen Daten,
- der Größe des Galaxienmodells und
- der Gestalt des Potentials.

Bei dem Schwarzschild-Modell von van den Bosch et alii wird der  $(x, z)$ -Startraum beim Fitten zweifach und der stationären Startraum einfach benutzt, sodass die **Orbitgesamtzahl** drei mal der Orbitgesamtzahl in einem Startraum entspricht. Über die **Fitqualität**  $\chi^2$  (hierzu später mehr) kann untersucht werden, wie sich die Orbitanzahl auf das Modell auswirkt. Je höher die Orbitanzahl ist, umso kleiner ist  $\chi^2$ . Dies gilt bis zu einem gewissen Sättigungswert, ab dem sich  $\chi^2$  nicht weiter nennenswert verbessert.

Vor allem Box-Orbits, die dem Zentrum sehr nahe kommen, werden stark durch eine zentrale Massenkonzentration (CMC) oder ein Schwarzes Loch beeinflusst. Sie sind deshalb

sehr schwierig numerisch zu integrieren bzw. benötigen sehr lange Integrationszeiten. Diesen Effekt mildern van den Bosch et alii, indem sie einen nicht-negativen Wert für die Dämpfungslänge  $r_s$  (s. Gl. 3.15) im Potential benutzen. Auf diese Weise kann man auch **Orbits in der Nähe des Schwarzen Lochs** integrieren.

Die niederenergetischen Tube-Orbits, welche bei großen Radien sind, kommen nicht hinreichend nahe an die CMC heran, um gestört zu werden. Die Tubes, die nahe  $R_\bullet$  gestartet werden, werden zu präzedierenden Ellipsen.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Dabei wird je nach Präzessionsform zwischen Pyramidenorbits und Linsenorbits unterschieden.

## 3.4 Superposition der Orbits

Nun muss eine Superposition der berechneten Orbits konstruiert werden, welche die kinematischen Beobachtungen fittet und gleichzeitig die bestimmte Massenverteilung 3.7 reproduziert.

Beim Fitten werden die Orbits linear kombiniert, wobei jedem Orbit ein Gewicht  $\gamma_i$  zugeordnet wird. Die  $\gamma_i$  müssen positiv sein  $\gamma_i \geq 0$ , da sie jeweils der Masse in jedem Orbit entsprechen.

Man kann den Fit auf verschiedene Arten realisieren. Van den Bosch et alii benutzen folgende Methode: Sie versuchen die kinematischen Beobachtungen bestmöglich bzgl. ihrer  $\chi^2$  zu fitten, wobei sie die bestimmte Massenverteilung 3.7 als 'Nebenbedingung' mit einbeziehen. Die SB Beobachtungen haben eine übliche Unsicherheit von 2%. Innerhalb dieser 2% erlaubt der Solver eine Variation der Masse, um den bestmöglichen kinematischen Fit (bzgl. der  $\chi^2$ ) zu finden.

Für die Superposition wird ein Quadratisches Programm genutzt. Dieses optimiert die  $\gamma_i$  bzgl. der kleinsten Fehlerquadrate

$$\min_{\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^n} \|\underline{A}\vec{\gamma} - \vec{b}\|^2, \quad (3.18)$$

wobei als physikalische Nebenbedingung

$$\vec{\gamma} \geq 0 \quad (3.19)$$

und die 2%-Nebenbedingung für die Massen

$$0,98\vec{p} \leq \underline{M}\vec{\gamma} \leq 1,02\vec{p} \quad (3.20)$$

eingehalten werden müssen. Der Vektor  $\vec{b}$  enthält die  $m$  beobachteten kinematischen Daten. Der Vektor  $\vec{p}$  enthält die aus der beobachteten SB bestimmten Massendaten, also u.a. die Massen in den 300 Zellen des Massengitters (s. Abschnitt 3.3.2).  $\underline{A}$  ist eine  $m \times n$  Abbildungsmatrix, deren  $n$  Spalten die Beiträge jedes Orbits zu den kinematischen Daten  $\vec{b}$  angeben.  $\underline{M}$  ist eine Abbildungsmatrix, die die Beiträge der Orbits zu den Massendaten  $\vec{p}$  angibt.

Zur Bestimmung der bestmöglichen Gewichte  $\gamma_i$ , wird der Unterschied zwischen Modell und Beobachtungen über die  $\chi^2$ -Methode für verschiedene Inputparameterwerte gemessen:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_d} \left( \frac{D_i^* - D_i}{\Delta D_i} \right)^2 \quad (3.21)$$

Dabei ist  $N_d$  die Anzahl der Observablen,  $D_i$  die  $i$ -te Observable,  $D_i^*$  die Modellvorhersage und  $\Delta D_i$  die Unsicherheit der Beobachtung  $D_i$ .

### 3.4.1 Regularisierung

Die gefittete bestmögliche orbitale Gewichtverteilung kann eine sprunghafte, schnell variierende Funktion sein, was aber physikalisch nicht sinnvoll ist. Es gibt keine physikalischen

Theorien, die beschreiben, wie 'weich' die Gewichtverteilung einer Galaxie sein muss. Trotzdem erwartet man meist eine weichere Gewichtverteilung. Dieses Problem lösen van den Bosch et alii, indem sie lineare Regularisationsterme einführen. Diese Terme minimieren die höheren Ableitungen der Gewichte, sodass diese weniger stark lokal variieren. Dadurch entsteht eine weniger sprunghafte Gewichtverteilung.

Die Addition dieser Terme hat einen ähnlichen Effekt wie die Addition von sogenannten Maximalentropie-Nebenbedingungen (vgl. [6]), die ebenfalls für weichere Gewichtverteilungen sorgen.

Außerdem führen van den Bosch et alii einen Parameter  $\lambda$  in die Regularisierungsterme ein, der bestimmt, wie stark regularisiert wird. Er ist ein Maß für den Fehler, der durch die Regularisierung verursacht wird. Je stärker die Regularisierung ist, umso höher der  $\chi^2$ -Wert. Van den Bosch et alii untersuchten anhand eines triaxialen Test-Abel-Modells, welcher  $\lambda$ -Wert optimal ist. Sie stellen fest, dass sich die besten Resultate für  $\lambda = 0,2$  ergeben.

Genauer zur Regularisierung, die Regularisierungsgleichungen, Tests der Regularisierung in Bezug auf triaxiale Modelle sowie eine Untersuchung der Frage, ob und in wie weit die Regularisierung die rückgewonnenen Inputparameter<sup>7</sup> verändert<sup>8</sup>, findet sich in [11], 5.2-5.3 und ausführlich in [10]. Wichtig ist hier nur die Feststellung, dass die Regularisierung die bestmöglichen Fitparameter nicht ändert und tatsächlich für eine weichere und damit realistischere Gewichtverteilung sorgt.

---

<sup>7</sup>wie die Sichtwinkel, die Masse-Leuchtkraft-Beziehung oder die Masse des Schwarzen Loches

<sup>8</sup>Dies wurde in [11] mittels des Abel-Modells getestet.

# Kapitel 4

## Tests mit triaxialen Abel-Modellen

Schwarzschild-Modelle haben viel zu unserem Verständnis der Dynamik elliptischer Galaxien beigetragen. Dennoch bleiben viele Fragen bzgl. der Eindeutigkeit und der Genauigkeit der Modellvorhersagen offen.

Es stellt sich also die Frage, ob das beschriebene Schwarzschild-Modell jeweils die richtigen Eigenschaften (wie Form- und Lageparameter) der modellierten Galaxie liefert. Um dies herauszufinden, kann man reale Galaxien nicht verwenden, da deren intrinsische Eigenschaften und Parameter nicht bekannt sind. Vorstellbar wäre auch ein numerisches Galaxiemodell mit der Schwarzschild-Methode selbst zu konstruieren und dessen Parameter dann als Input für ein anderes Schwarzschild-Modell zu benutzen, um zu sehen, wie gut die ursprünglichen Parameter rekonstruiert werden. Dieses Verfahren ist allerdings nicht ganz unabhängig von der verwendeten Schwarzschild-Software.

Deshalb nutzten van de Ven et alii in [10] ein sogenanntes Abel-Modell. Dieses modelliert eine theoretische Galaxie, deren interne Struktur, Parameter und DF a priori bekannt sind. Van de Ven et alii erzeugten mit diesem Abel-Modell Testbeobachtungen, die den realen Beobachtungen, die in der Praxis vorliegen (z.B. die kinematischen Daten des SAURON Integral-Feld-Spektrographen), ähnlich sind. Auf diese Testbeobachtungen wendeten sie dann die beschriebene Schwarzschild-Methode an. Die Parameter und Eigenschaften, die die Schwarzschild-Methode lieferte, verglichen sie dann mit den ursprünglichen Werten, die das Test-Abel-Modell hatte. Ihre wichtigsten Testergebnisse und Methoden werden im Folgenden kurz beschrieben.

### 4.1 Abel-Modelle

Abel-Modelle haben Gravitationspotentiale die eine sog. **Stäckel-Form** haben. Für diese Potentiale sind alle drei Integrale der Bewegung analytisch und bekannt. Modelle mit solchen Potentialen können kein zentrales Schwarzes Loch beinhalten und sind daher nicht geeignet für die Modellierung galaktischer Kerne. Dennoch können sie für eine Vielzahl von Achsenverhältnissen konstruiert werden und deren Kinematik spiegelt gut die Kinematik elliptischer Galaxien wieder.

Für Potentiale mit Stäckel-Form lassen sich die Bewegungsgleichungen in konfokalen elliptischen Koordinaten  $(\lambda, \mu, \nu)$  schreiben.<sup>1</sup> Das Stäckel-Potential nimmt in diesen Koordinaten die Form

$$V_s(\lambda, \mu, \nu) = \frac{U(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + \frac{U(\mu)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)} + \frac{U(\nu)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)} \quad (4.1)$$

an, wobei  $U(\tau)$  eine beliebige Funktion von  $(\tau = \lambda, \mu, \nu)$  ist. Die Poisson-Gleichung 2.1 gibt dann wie üblich die zugehörige Dichte  $\varrho_s(\lambda, \mu, \nu)$  an.

Jeder Orbit hat im Potential 4.1 drei analytische Integrale der Bewegung:

$$E = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + U[\lambda, \mu, \nu], \quad (4.2)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}TL_y^2 + \frac{1}{2}L_z^2 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)v_x^2 + (\alpha - \beta)x^2U[\lambda, \mu, \nu, -\alpha], \quad (4.3)$$

$$I_3 = \frac{1}{2}L_x^2 + \frac{1}{2}(1 - T)L_y^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \beta)v_z^2 + (\gamma - \beta)z^2U[\lambda, \mu, \nu, -\gamma], \quad (4.4)$$

wobei  $v_x, v_y$  und  $v_z$  die Geschwindigkeitskomponenten und  $L_x = yv_z - zv_y$ ,  $L_y = zv_x - xv_z$  und  $L_z = xv_y - yv_x$  die Drehimpulskomponenten in kartesischen Koordinaten sind.  $T \equiv (\beta - \alpha)/(\gamma - \alpha)$  ist ein Triaxialitätsparameter. Nach dem Jeans'schen Theorem (s. Abschnitt 2.3.3) ist die DF eine Funktion  $f(E, I_2, I_3)$  dieser drei Integrale der Bewegung. Van de Ven et alii setzen die Abel-DF in Abhängigkeit einer Variable  $S$  in der Form

$$f(E, I_2, I_3) = f(S), \quad \text{mit} \quad S = -E + wI_2 + uI_3, \quad (4.5)$$

an, wobei  $w$  und  $u$  zwei Parameter sind und zeigen damit, dass sich die gesamte LOSVD für Abel-Modelle auf eine einfache Weise berechnen lässt. Aus dieser Abel-DF konstruieren sie auch eine realistische simulierte SB.

Die Orbitstruktur dieser Abel-Modelle ähnelt der Orbitstruktur, die in Abschnitt 2.3.4 besprochen wurde. Es existieren vier Orbitsorten: Box-Orbits, Kurzachsentubes und innere und äußere Langachsentubes (ähnlich wie in Abb. 2.1).

## 4.2 Van de Ven's triaxiales Test-Abel-Modell

Um nun ein spezielles triaxiales Galaxiemodell zu erstellen, muss  $U[\tau]$  in Gleichung 4.1 passend gewählt werden. Eine einfache und schnell auswertbare Wahl ist

$$U(\tau) = -GM\sqrt{\tau}(\tau + \beta), \quad (4.6)$$

welche dem triaxialen Stäckel-Potential 4.1 die Gestalt

$$V_s(\lambda, \mu, \nu) = \frac{-GM \left( \sqrt{\lambda\mu} + \sqrt{\mu\nu} + \sqrt{\nu\lambda} - \beta \right)}{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})(\sqrt{\nu} + \sqrt{\lambda})} \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>zur Definition der elliptischen Koordinaten s. [10], §2.1

gibt, wobei  $GM = \sqrt{-\gamma} + \sqrt{-\alpha}$  gesetzt wird, sodass im Zentrum  $V_s(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -1$  gilt. Die Dichte dieser Modelle ist näherungsweise ellipsoidal. Da Modelle mit der  $U(\tau)$ -Form in Gleichung 4.6 sogenannten **isochronen Potentialen** der Form  $-GM/(\sqrt{\tau} + \sqrt{-\alpha})$  ähneln, werden sie auch **isochrone Modelle** genannt. Isochrone Modelle haben eine endliche Gesamtmasse, da ihr Potential nach außen hin mit  $1/r$  abfällt.

Als Input-Parameter für das isochrone Abel-Modell wählten van de Ven et alii

- ein Masse-Leuchtkraft-Verhältnis von  $(M/L) = 4M_\odot/L_\odot$  und
- die Sichtwinkel  $(\vartheta, \varphi, \psi) = (70^\circ, 30^\circ, 101^\circ)$  bzw. äquivalent dazu die intrinsischen Formparameter  $(p, q, u) = (0, 82; 0, 67; 0, 88)$  bei einer mittleren projizierten Abflachung der SB von  $q' = 0, 76$ .

Eine genaue Erläuterung dieser Modellparameter findet sich in [10], §4.3.

Für dieses isochrone Test-Abel-Modell berechnen sie die LOSVD und erstellen damit eine zweidimensionale kinematische Karte (wie die SAURON-Map in Abb. 5.3 (oben)), welche dann als simulierte Integral-Feld-Beobachtung dient. Sie berücksichtigen dabei auch die reale beobachtete Variation der Messungenauigkeiten und der  $S/N$ -Werte über die beobachtete Region. Ihre kinematischen Karten sind in Abb. 4.1 (Mitte) dargestellt.

## 4.3 Ergebnisse des Test-Abel-Modells

**Reproduktion der internen Dynamik und der DF** Die triaxialen Schwarzschild-Modell-Fits an das Test-Abel-Modell von van de Ven et alii zeigen, dass das Schwarzschild-Modell sowohl die interne Dynamik als auch die DF einer elliptischen Galaxie gut reproduzieren kann. Um die interne Dynamik und die DF zu untersuchen, verglichen sie die Orbitgewichte  $\gamma$  des Schwarzschild-Modells mit der DF des Abel-Modells.

**Reproduktion der Modellparameter** Im Konturplot der Schwarzschild-Modell-Fits (Abb. 4.2) sind die Input-Parameter  $(M/L, p, q, u, \vartheta, \varphi, \psi)$  des Test-Abel-Modells als rote Rauten dargestellt. Wie man sieht, liegen diese immer im  $1\sigma$ -Bereich der Best-Fit-Parameter. Van de Ven et alii zeigen sogar, dass diese eine maximale Abweichung von 10% zu den Best-Fit-Parametern haben. Ferner konnten sie nachweisen, dass sich die Form einer Galaxie nicht mit dem Schwarzschild-Modell eindeutig eingrenzen lässt, wenn sie keinen KDC und keine andere kinematische Besonderheit hat (wie z.B. M87).

Zudem untersuchten sie, was passiert, wenn man die intrinsische Form  $(p, q, u)$  von den Best-Fit-Werten abändert. Betrachtet man Abbildung 4.3, sieht man, dass sich die Nullgeschwindigkeitskurve (grüner Bereich) mit den Formparametern  $(p, q)$  zum Teil stark verändert. Auch die Orbitstruktur wird offenbar stark von  $(p, q)$  beeinflusst. Ein Vergleich mit dem jeweils in Abb. 4.3 oben links dargestellten Abel-Modell zeigt, dass die Modelle sich signifikant verschlechtern, wenn man  $p$  und/oder  $q$  von den korrekten Werten abändert. Wählt man die Formparameter  $(p, q)$  falsch, kann es also passieren, dass sich die Kinematik nicht fitten lässt.

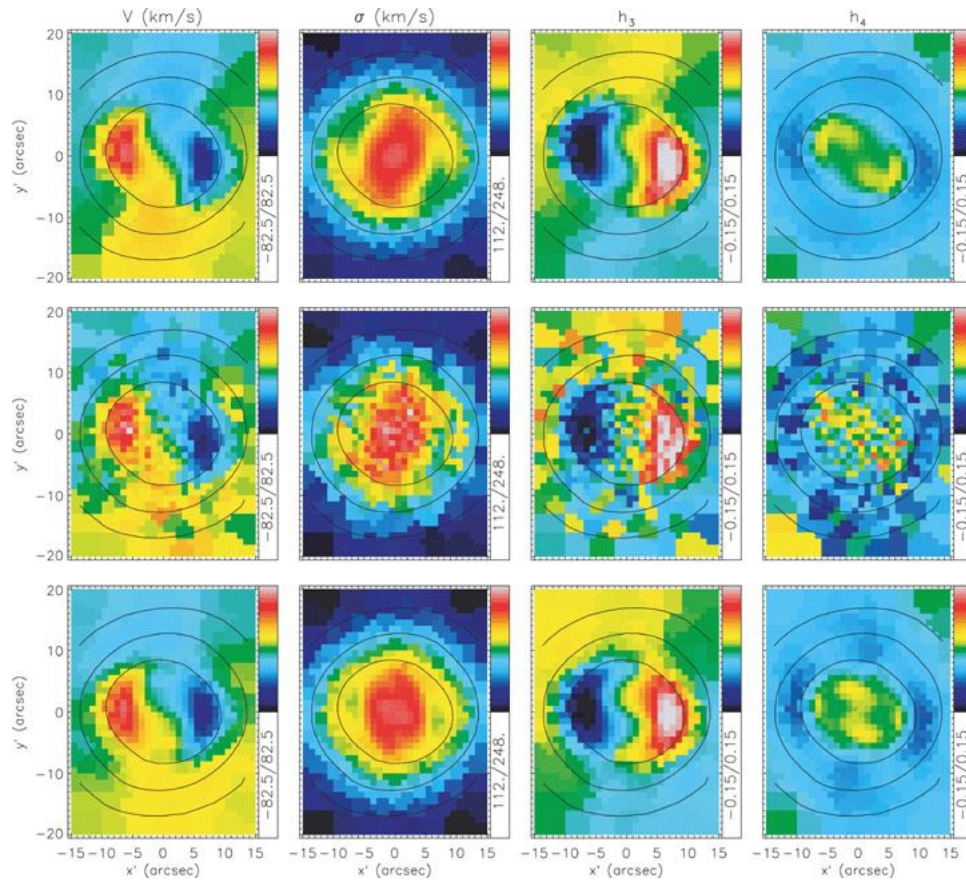


Abbildung 4.1: Kinematische Karte für ein triaxiales Abel-Modell ohne realistische Messungenauigkeiten (oben); mit realistischen Messungenauigkeiten (Mitte); für das Best-Fit Schwarzschild-Modell (unten) [Aus [10], Abb. 8]



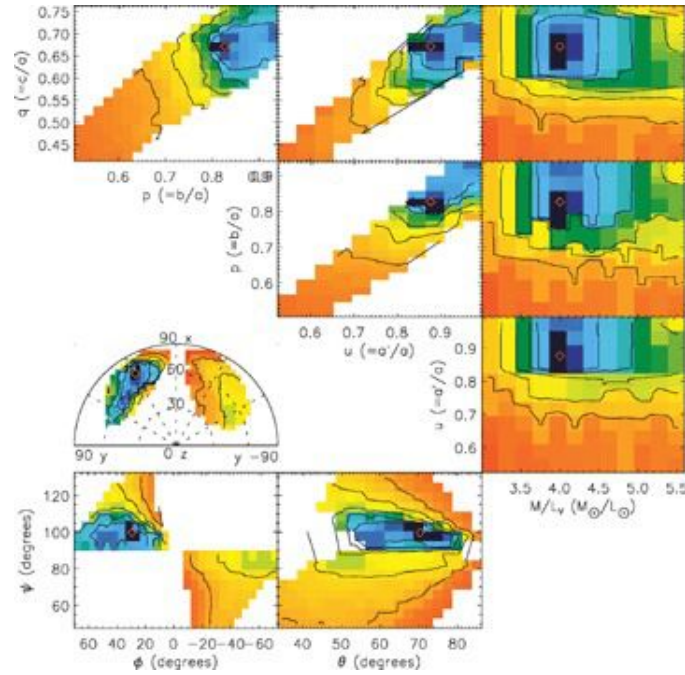


Abbildung 4.2: Konturplots der Schwarzschild-Modelle, die an das Abel-Modell gefittet wurden, für verschiedene intrinsische Formen und  $M/L$ -Werte. Die roten Rauten deuten die Input-Parameter des Abel-Modells an. Die Konturlinien zeigen die 1, 2, 4, 8 und  $32\sigma$ -Konfidenzbereiche. [Aus [11], Abb. 6]

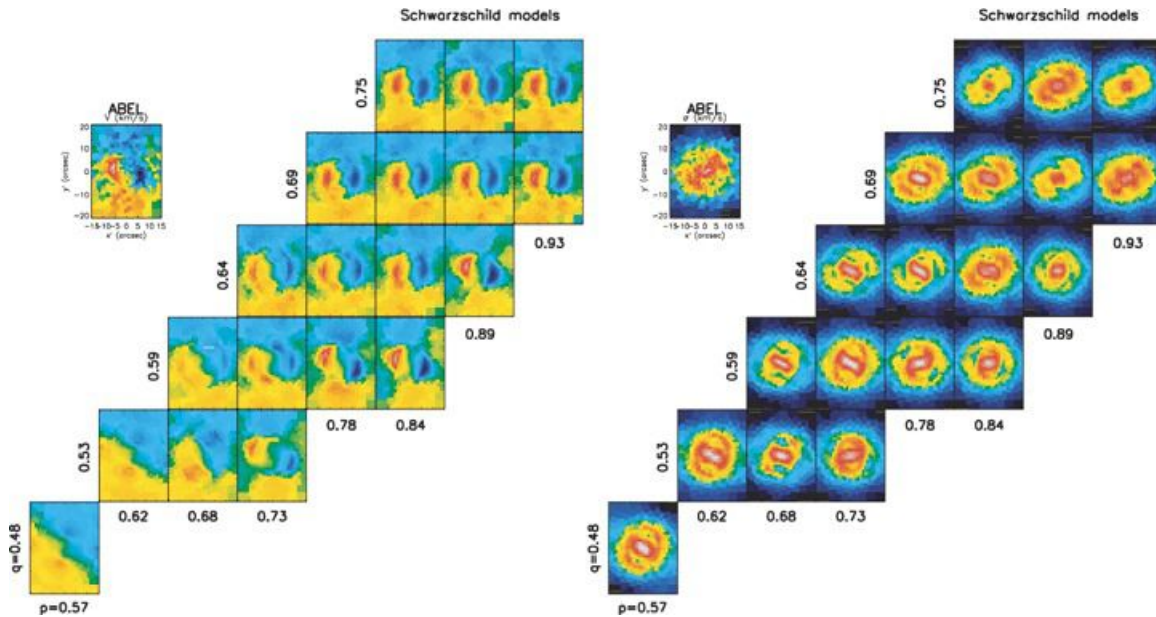


Abbildung 4.3: [Schwarzschild-Modelle für verschiedene intrinsische Formparameter  $(p, q)$ ] links: Geschwindigkeitsfeld des Schwarzschild-Modells, oben links ist das Input-Abel-Geschwindigkeitsfeld dargestellt; rechts: Dispersionsfeld des Schwarzschild-Modells, oben links ist das Input-Abel-Dispersionsfeld dargestellt; für das Input-Abel-Modell legten van de Ven et alii  $(p, q) = (0, 82; 0, 67)$  fest [Aus [11], Abb. 5]



# Kapitel 5

## Anwendung der Schwarzschild Methode auf NGC 4365

Nach einer kurzen Erläuterung der Eigenschaften und Besonderheiten von NGC 4365, werden die Beobachtungsdaten derselbigen beschrieben. Anschließend werden die Ergebnisse der Untersuchungen von van den Bosch et alii vorgestellt, welche das Schwarzschild-Modell auf die reale elliptische Galaxie NGC 4365 angewendet haben ([11]).

### 5.1 NGC 4365

NGC 4365 (Abb. 5.1) ist eine E3 Riesenellipse und befindet sich 70 Millionen Lichtjahre entfernt im Sternbild Jungfrau. Ihr Licht ist gelb-rötlich, was auf ihre alte Sternpopulation hindeutet.

In elliptischen Galaxien ist die Sterbe- und Entstehungsrate von Sternen vernachlässigbar klein, wie in den letzten Kapiteln bemerkt wurde. Man nimmt also an, dass in elliptischen Galaxien nach ihrer anfänglichen Entstehungsphase keine weitere Sternentstehung mehr stattfindet. Dennoch weist NGC 4365 in dieser Hinsicht eine Besonderheit auf: Man konnte in NGC 4365 eine große Anzahl junger Sternhaufen identifizieren, sodass es in NGC 4365 mehrere unterschiedliche Sternentstehungszeiträume gegeben haben muss. Die meisten der in Abb. 5.1 sichtbaren hellen Punkte sind Kugelsternhaufen, wobei etwa die Hälfte davon zu der jungen Population gehört und nur ca. einige wenige Milliarden Jahre alt ist. Die Galaxie selbst aber ist ungefähr 12 Milliarden Jahre alt.

#### 5.1.1 Der kinematisch entkoppelte Kern (KDC) von NGC 4365

Eine weitere Besonderheit an NGC 4365 ist, dass sie einen kinematisch entkoppelten Kern (KDC, engl. kinematically decoupled core) besitzt. Untersuchungen zeigen, dass es zwei mögliche Ursachen für die Entstehung eines KDC gibt. Zum einen kann es nach einem Verschmelzungsprozess zwischen Galaxien zur Ausbildung eines KDC kommen. Zum anderen aber - und diese Möglichkeit soll nachfolgend mit der Schwarzschild-Methode analysiert

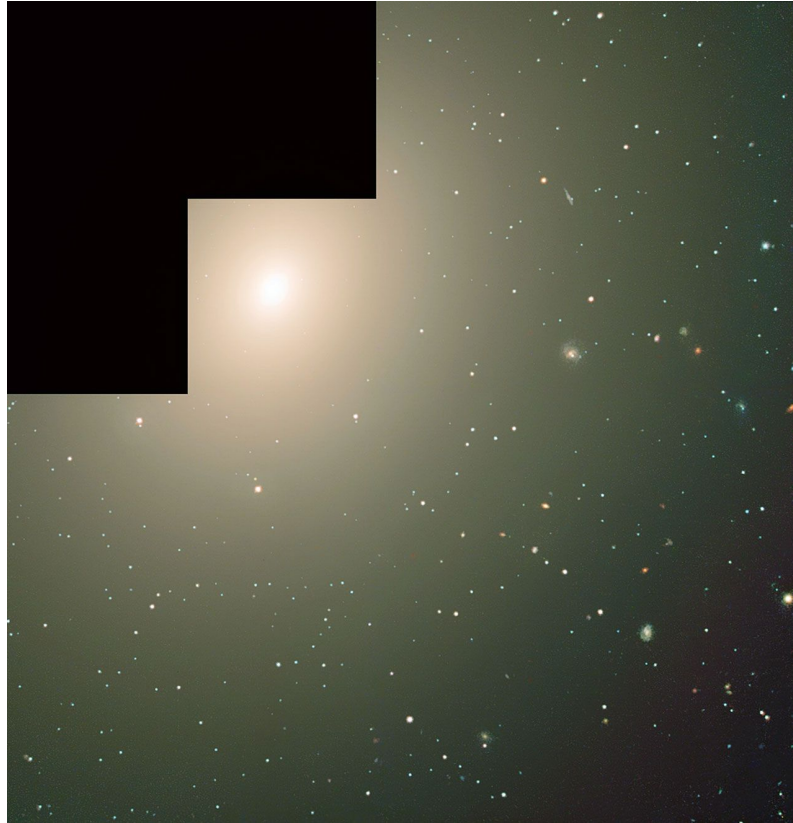


Abbildung 5.1: NGC 4365 Aufnahme: Kombination einer HST- und einer VLT-Aufnahme [Aus <https://www.spacetelescope.org/images/heic0208a/>]

werden - kann eine triaxiale Form der Galaxie einen KDC zulassen.

Nach der Behandlung des Schwarzschild-Modells, wird in der anschließenden Diskussion die Plausibilität dieser beiden Erklärungsansätze geprüft.

### 5.1.2 Beobachtungsdaten

NGC 4365 wurde mit dem Integral-Feld-Spektrographen SAURON am 29. und 30. März 2000 nachts aufgenommen. Dabei wurde eine Fläche von  $33 \times 63 \text{ arcsec}$  erfasst, bei einem Sampling von  $0,8 \text{ arcsec}$ .

Das Signal-Rausch-Verhältnis  $S/N$  ist normalerweise in den zentralen, hellen Regionen der Galaxie sehr hoch, während es weiter außen abnimmt. Man möchte aber für den gesamten Messbereich eine möglichst gleichbleibende und hohe  $S/N$  bekommen. Deshalb wurde bei der Extraktion der LOSVD aus den beobachteten Daten ein sogenanntes **Voronoi-Verfahren** benutzt. Dabei wird die beobachtete (zweidimensionale) Region in Voronoi-Zellen (Abb. 5.2) aufgeteilt. Bestimmte benachbarte Zellen werden dann so miteinander kombiniert, dass die  $S/N$ -Werte über die Beobachtungsregion ungefähr gleich bleiben. Für jede Voronoi-Zelle extrahiert man dann die Geschwindigkeit  $v$ , die Geschwindigkeitsdisper-

sion  $\sigma$  und die höheren GH-Momente  $h_3$  und  $h_4$  der LOSVD. Diese Daten sind in Abbildung 5.3 oben dargestellt.

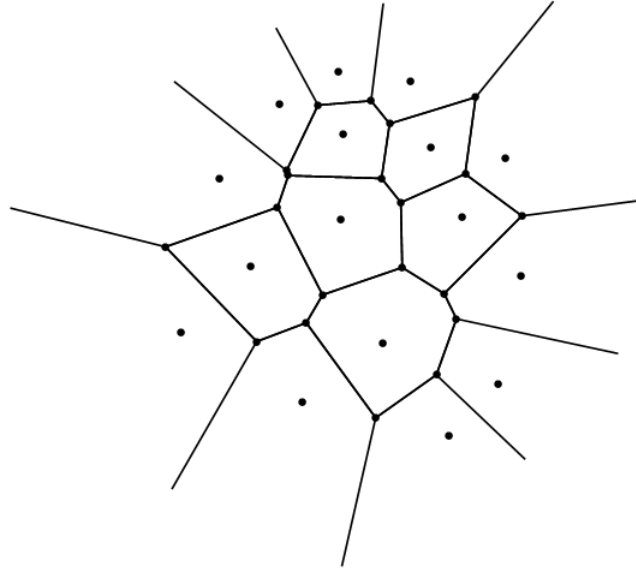


Abbildung 5.2: Voronoi-Zellen: Jede Zelle wird durch genau ein Zentrum bestimmt und umfasst alle Punkte der Fläche, die bzgl. der euklidischen Metrik näher am Zentrum der Zelle liegen als an jedem anderen Zentrum. [Aus <https://mathematica.stackexchange.com/questions/61021/triangulated-mesh-from-voronoi-diagram>, 20.02.2018, 22:45 Uhr]

Van den Bosch et alii stellten fest, dass in den inneren ungefähr 6 *arcsec* ein Kern existiert, der um die Nebenachse (der elliptischen Isophoten) rotiert. Weiter außen rotieren die Sterne um eine um  $82^\circ$  versetzte Achse. Dies deutet darauf hin, dass die Galaxie triaxial sein muss. Die mittleren Höchstgeschwindigkeiten betragen  $55 \text{ km/s}$  und die höchsten Dispersionswerte liegen bei ca.  $260 \text{ km/s}$ .

Für das MGE-Massenmodell wurde eine HST-Aufnahme und eine Aufnahme des 1,3m-McGraw-Hill beim MDM Observatorium verwendet.

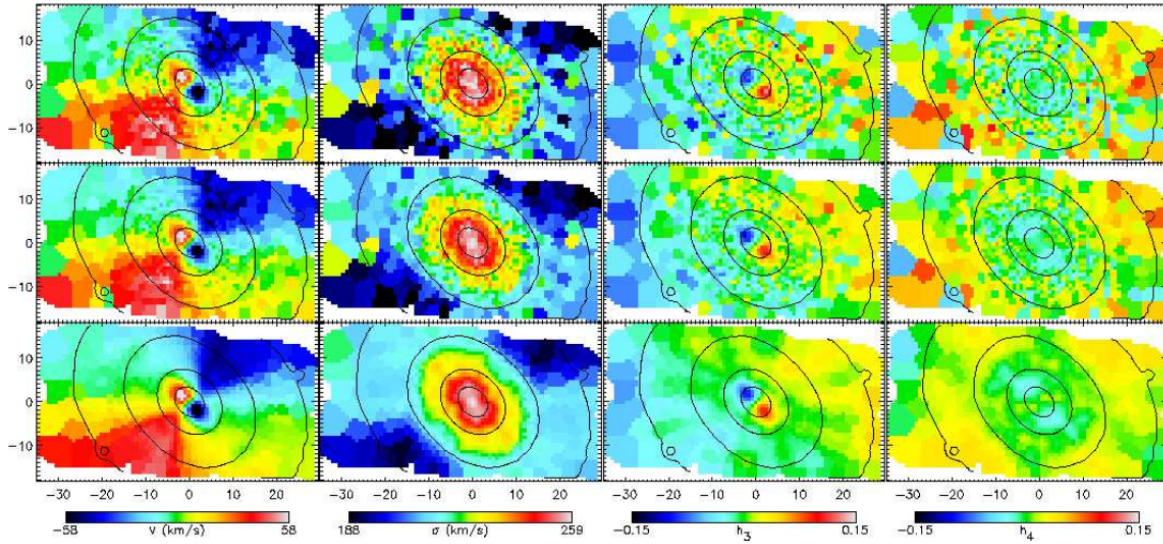


Abbildung 5.3: Oben: SAURON Beobachtungen von NGC 4365, von links nach rechts: mittlere Geschwindigkeit, Geschwindigkeitsdispersion und die GH-Momente  $h_3$  und  $h_4$ ; Mitte: bzgl. des Galaxiezentums punktsymmetrisierte Kinematik (nicht-symmetrische Abweichungen kann ein triaxiales Modell nicht reproduzieren); Unten: kinematische Daten des Best-Fit Schwarzschild-Modells [Aus [11]]

## 5.2 Schwarzschild-Modell

### 5.2.1 SB-Fit und Massendichteverteilung

Bei der Modellierung der Massendichte wurde versucht die kugelförmigste Form der Galaxie zu bestimmen, die mit den Beobachtungen verträglich ist (vgl. Abschnitt 3.1.1). Dafür setzen van den Bosch et alii für die projizierten Achsenverhältnisse der Gaußfunktionen  $q'_j$  einen Mindestwert von 0,67 fest. Gleichzeitig setzen sie für die isophotale Verdrehung der einzelnen Gaußfunktionen  $|\Delta\psi'_j|$  einen Maximalwert von  $4,5^\circ$  fest. Für den Massendichte-Fit wurde eine Software von Cappellari (2002) benutzt. In Abbildung 5.4 sind die Fit-Parameter des MGE-Massenmodells aufgelistet. Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen die SB von NGC 4365 mit der überplotteten Best-Fit MGE.



j	$\log SB_0 (L_{\odot}, I \text{ pc}^{-2})$	$\log \sigma' (\text{arcsec})$	$q'$	$\Delta\psi' (^{\circ})$
1	3.424	-1.024	0.800	0.0
2	3.319	-0.727	0.800	0.0
3	3.238	-0.320	0.800	0.0
4	3.435	-0.027	0.670	0.0
5	3.820	0.138	0.709	0.5
6	3.740	0.402	0.698	0.8
7	3.576	0.648	0.798	0.0
8	3.106	0.955	0.737	0.0
9	2.874	1.224	0.739	0.0
10	2.400	1.499	0.741	3.5
11	2.122	1.833	0.775	3.6
12	1.329	2.362	0.670	4.5

Abbildung 5.4: Parameter des MGE-Massenmodells [Aus [11]]

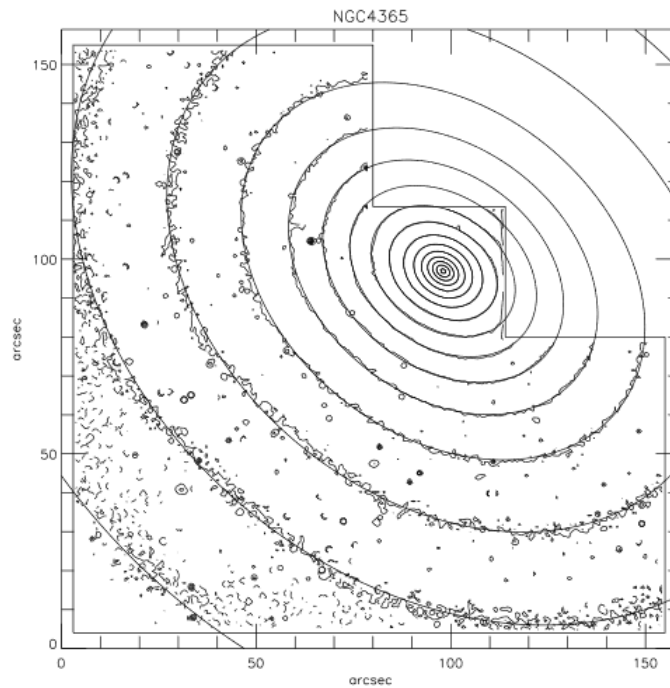


Abbildung 5.5: Konturen der HST-Aufnahme von NGC 4365 mit der Best-Fit MGE [Aus [11]]

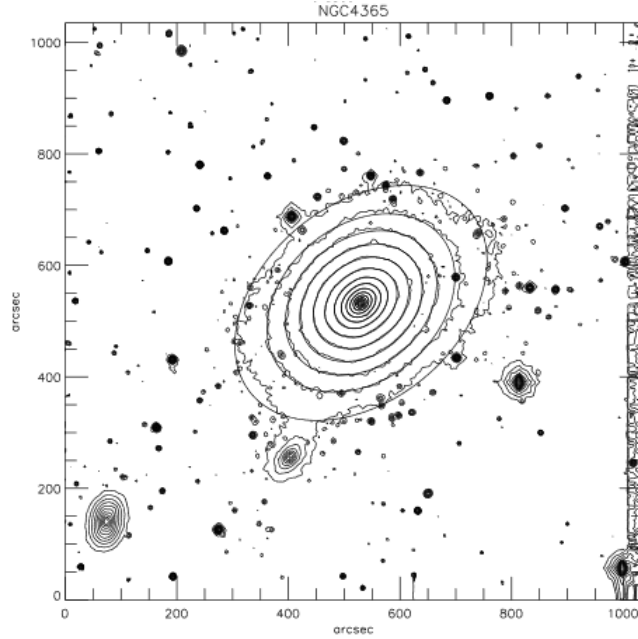


Abbildung 5.6: Konturen der McGraw-Hill-Teleskop-Aufnahme von NGC 4365 mit der Best-Fit MGE [Aus [11]]

### 5.2.2 Orbits, Schwarzes Loch und intrinsische Formparameter

Van den Bosch et alii benutzen hier  $3 \times 1176$  Orbits, wobei sie 2352 davon in der  $(x, z)$ -Ebene starten und die übrigen als Box-Orbits auf Äquipotentialen starten. Sie nehmen für NGC 4365 eine Entfernung von  $23 Mpc$  an. Die interne Dynamik bleibt davon unberührt, aber Längen, Massen und das Masse-Leuchtkraft-Verhältnis sind von der Entfernung abhängig. Für das zentrale Schwarze Loch nehmen sie der  $M_\bullet$ - $\sigma$ -Relation<sup>1</sup> folgend eine Masse von  $M_\bullet = 3,6 \times 10^8 M_\odot$  an.

Zur Bestimmung eines Schwarzschild-Modells sind neben der Masse des Schwarzen Lochs zusätzlich noch die intrinsischen Formparameter  $(p, q, u)$  und das Masse-Leuchtkraft-Verhältnis  $M/L$  festzulegen. Um die Formparameter  $(p, q, u)$  und das Masse-Leuchtkraft-Verhältnis  $M/L$  zu bestimmen, wurde nun folgendermaßen verfahren:

Die Formparameter  $(p, q, u)$  wurden zunächst in 0,06-er Schritten gesamplet, während  $M/L$  in 11 Schritten von  $3,0 M_\odot$  bis  $5,0 M_\odot$  gesamplet wurde. So entstanden insgesamt 1056 Schwarzschild-Modelle. Für jedes Schwarzschild-Modell wurde die Fitqualität bzgl. der Beobachtungen  $\chi^2$  (s. Abschnitt 3.4) bestimmt. Als Best-Fit-Modell wurde das Modell mit dem geringsten  $\chi^2$ -Wert gewählt.

Für die Fehlergrenzen der Best-Fit-Parameter wurde jeweils  $1\sigma$  (68%) verwendet. Um die  $\sigma$ -Konfidenzbereiche abzuschätzen, benutzten van den Bosch et alii sogenannte  $\Delta\chi^2$ -Konturplots (Abb. 5.7). Diese stellen die  $\Delta\chi^2$ -Gradienten für jedes Parameterpaar farblich

<sup>1</sup> $\log(M_\bullet/M_\odot) = \alpha + \beta \log(\sigma/\sigma_0)$ , wobei  $\sigma_0 = 200 km/s$ ,  $\alpha = 8,13 \pm 0,06$  und  $\beta = 4,02 \pm 0,32$ , aus [9]



dar. Die Best-Fit-Parameter sind in Abb. 5.7 in den schwarzen Regionen zu finden. Die schwarzen Konturlinien, die diese Regionen umschließen, deuten die  $\sigma$ -Konfidenzbereiche an, wobei z.B. die innerste Konturlinie den  $1\sigma$ -Konfidenzbereich angibt. Der  $1\sigma$ -Bereich entspricht dabei  $\Delta\chi^2 < \sqrt{2N_{obs}}$ , wobei  $N_{obs}$  die Anzahl der Observablen im Modell ist.<sup>2</sup>

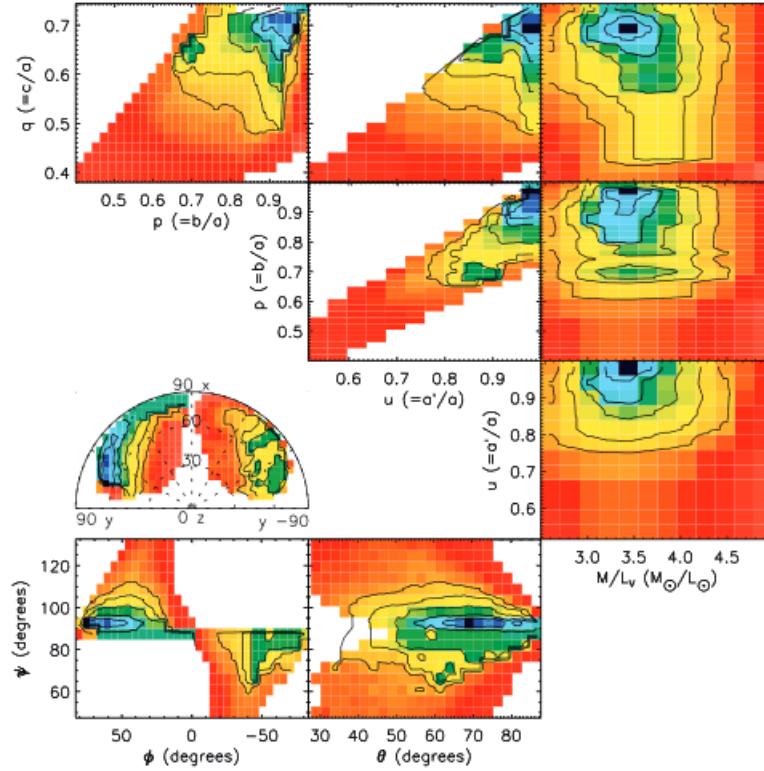


Abbildung 5.7:  $\Delta\chi^2$ -Konturplots von NGC 4365 für verschiedene intrinsische Parameter. Die schwarzen Konturlinien geben die 1, 2, 4, 8 und  $32\sigma$ -Konfidenzbereiche an. Nicht-deprojizierbare Regionen sind weiß. [Aus [11]]

### 5.2.3 Best-Fit-Parameter

Das Best-Fit- $\chi^2$  beträgt 4295. Die Best-Fit-Parameter lauten:

- $M/L = (3,5 \pm 0,2)M_{\odot}/L_{\odot}$  (im I-Band<sup>3</sup>)
- $(p, q, u) = (0,97^{+0,03}_{-0,05}, 0,70^{+0,03}_{-0,03}, 0,99^{+0,01}_{-0,04})$
- $(\vartheta, \varphi, \psi) = (68^{\circ}, 73^{\circ}, 91^{\circ})$

Abbildung 5.3 zeigt das Best-Fit-Modell.

<sup>2</sup>in [11], §7.4 wird begründet, warum man hier  $\Delta\chi^2 < \sqrt{2N_{obs}}$  und nicht wie üblich  $\Delta\chi^2 = 1$  für das  $1\sigma$ -Intervall verwendet

<sup>3</sup>Infrarot-Band, hier:  $\sim 8000\text{\AA}$ ; in anderen Bändern wird sich der  $M/L$ -Wert i. Allg. unterscheiden

### 5.3 Diskussion zum NGC 4365-Modell

**$M/L$ -Wert** Axialsymmetrische Modelle geben für den  $M/L$ -Wert von NGC 4365 ( $4,3 \pm 0,4$ ) $M_{\odot}/L_{\odot}$  an (vgl. [4], wobei hier  $\sigma_e = 231 \text{ km/s}$  benutzt wurde). Dieser Wert stimmt (bei etwa  $2\sigma$  Toleranz) gut mit dem Schwarzschild-Modellwert überein.

**Gesamtmasse der Galaxie** Aus dem bestimmten Best-Fit  $M/L$ -Wert lässt sich die Gesamtmasse der Galaxie berechnen. Van den Bosch et alii erhielten hierbei einen Wert von  $4,8 \times 10^{11} M_{\odot}$ .

**Vergleich: Beobachtung und Modell** Abbildung 5.8 zeigt einen Vergleich der kinematischen Beobachtungsdaten (schwarze Linie) und der Modelldaten (rote Punkte). Wie man sieht, stimmt das Best-Fit-Modell gut mit den Beobachtungen überein.

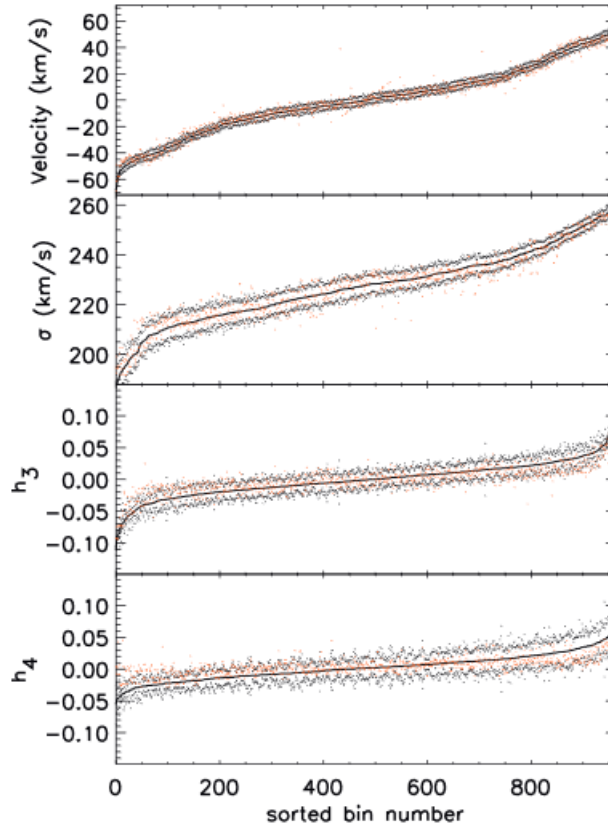


Abbildung 5.8: Kinematik des Best-Fit-Modells. Die Beobachtungen einschließlich der Fehler (schwarze Punkte) werden durch die schwarze Linie dargestellt. Die Modelldaten werden als rote Punkte dargestellt. [Aus [11]]

**Intrinsische Form** Um die Gestalt eines Ellipsoids zu beschreiben, führt man häufig den *Triaxialitätsparameter*  $T \equiv (1 - p^2)/(1 - q^2)$  ein. Abb. 5.9 zeigt, welche Ellipsoidformen

sich für bestimmte Werte von  $T$  ergeben. Die innere und äußere Region der Galaxie haben

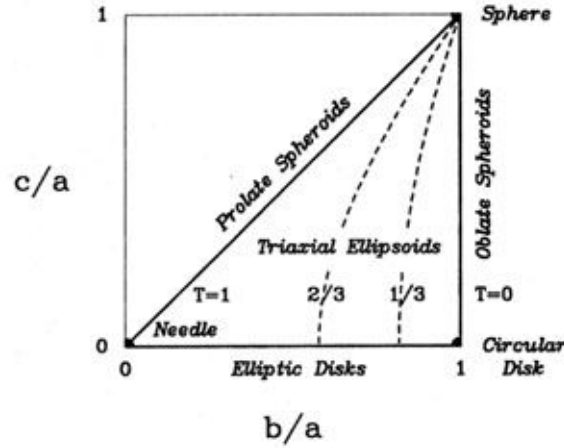


Abbildung 5.9: Ebene aller möglichen Achsenverhältnisse  $\frac{b}{a}$  und  $\frac{c}{a}$  für triaxiale Ellipsoide. Die gestrichelten Linien sind Kurven konstanter Triaxialität. Für oblate Ellipsoide ist  $T = 0$ , für prolate ist  $T = 1$  [Aus [https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Franx/Franx2\\_3\\_1.html](https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Franx/Franx2_3_1.html), 20.02.2018, 22:45 Uhr]

eine unterschiedliche Form, wie Abb. 5.10 zeigt. In den inneren ca.  $35 \text{ arcsec}$  liegt eine in etwa **oblate**<sup>4</sup> Form vor mit  $p \geq 0,95$ ,  $0,65 < q < 0,75$  und einer Triaxialität  $T < 0,2$ . Bis  $35 \text{ arcsec}$  liegen auch kinematische Daten vor. Außerhalb von  $35 \text{ arcsec}$  wird das Modell **prolater**. Die Triaxialität  $T$  steigt dort auf ungefähr  $0,6$ .

**Oblate Form im Inneren** Das Best-Fit Modell hat in seinen inneren  $35 \text{ arcsec}$  eine näherungsweise oblate axialsymmetrische Form (s. Abb. 5.10). Diese Form lässt aber nicht die in den SAURON-Beobachtungen (Abb. 5.3) sichtbare Rotation um die Hauptachse zu. Eine solche Rotation ist nur in Galaxien möglich, die triaxial sind. Auch der erwähnte KDC kann nur in triaxialen Galaxien existieren.

**Verteilung der Orbits** Etwa 75% der Masse in den innersten  $30 \text{ arcsec}$  befindet sich in Kurzachsentrubes, wie Abb. 5.11 (rechts) zeigt. Abb. 5.11 (rechts) ist wie folgt zu lesen: Bei  $30 \text{ arcsec}$  machen z.B. die Kurzachsentrubes  $\sim 20\%$ , die Langachsentrubes  $\sim 4\%$  und die Box-Orbits  $\sim 1\%$  der *Gesamtmasse* der Galaxie (bis  $R = \infty$ ) aus. D.h. man erhält  $\frac{20}{20+4+1} = 80\%$ , also ungefähr die genannten 75% der Gesamtmasse bis  $R = 30 \text{ arcsec}$ . Bis  $30 \text{ arcsec}$  findet man also hauptsächlich Kurzachsentrubes vor. Langachsentrubes werden erst ab  $30 \text{ arcsec}$  signifikant und haben davor einen mit den Box-Orbits vergleichbaren Anteil an der Masse.

**Rotationsrichtungen** Innerhalb der ersten  $6 \text{ arcsec}$ , also im Bereich des KDC, bewegen sich die Sterne auf prograden Kurzachsentrubes (Abb. 5.11 (links)). Zwischen 6 und

<sup>4</sup>zur Bedeutung der Begriffe 'oblat' und 'prolat' vgl. Abb. 5.9

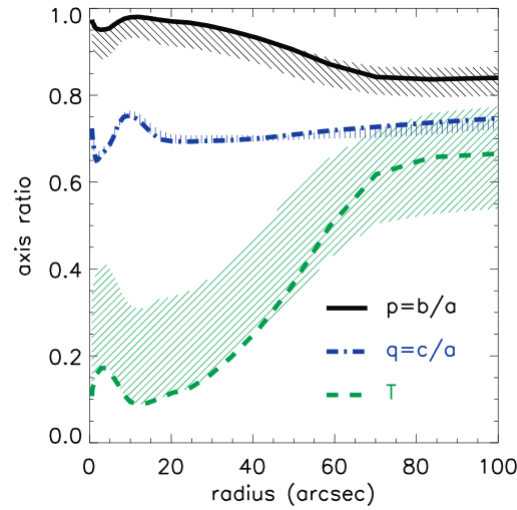


Abbildung 5.10: Achsenverhältnisse  $p$ ,  $q$  und Triaxialität  $T$  des Best-Fit-Modells in Abhängigkeit vom Radius. Die kinematischen Beobachtungen reichen bis etwa  $35 \text{ arcsec}$ . [Aus [11]]

$30 \text{ arcsec}$  aber haben die Sterne in den Kurzachsentrubes keine bevorzugte Rotationsrichtung.

Die Sterne auf Langachsentrubes bewegen sich innerhalb von  $30 \text{ arcsec}$  fast alle auf retrograden Tubes. Sie machen etwa 15% der Gesamtmasse bis  $30 \text{ arcsec}$  aus. Dies bedeutet, dass sie einen großen Beitrag zur beobachteten mittleren Geschwindigkeit liefern müssen!

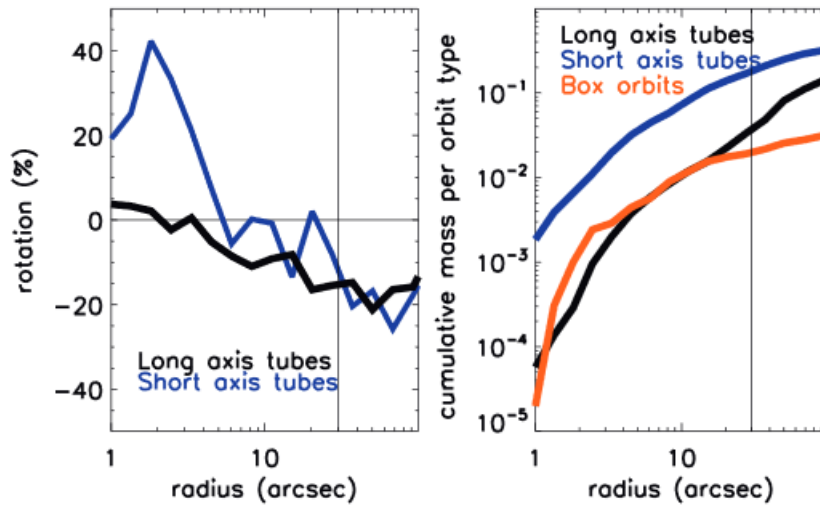


Abbildung 5.11: links: Ausgeglichenheit prograder und retrograder Rotation in Abhängigkeit des Radius  $R$  (in Prozent der Gesamtmasse bis  $R$ ); rechts: kumulierte Masse jedes Orbittyps; die schwarze senkrechte Linie gibt den Radius der SAURON-Beobachtungen an [Aus [11]]

**Gesonderte Kinematik der einzelnen Orbits** Abb. 5.12 zeigt eine Dekomposition der Kinematik der einzelnen vorkommenden Orbits im NGC 4365-Modell. Abgebildet sind der Massenanteil, die Geschwindigkeiten und die Dispersion. Wie man sieht, haben die Sterne auf pro- und retrograden Kurzsachsentubes sehr hohe Geschwindigkeiten im Bereich von  $|v_{max}| > 150 km/s$  und relativ kleine Dispersionswerte  $|\sigma| \sim 160 km/s$  in entgegengesetzten Richtungen. Ihre Überlagerung hingegen hat sehr kleine Geschwindigkeitswerte ( $|v_{max}| < 60 km/s$ ) und hohe Dispersionswerte ( $|\sigma| \sim 220 km/s$ ). Auch die Langsachsentubes weisen hohe Geschwindigkeitswerte auf ( $|v_{max}| > 150 km/s$ ). Die Langsachsentubes haben zwar einen sehr geringen Anteil an der Gesamtmasse von  $\sim 20\%$ . Dennoch tragen sie einen großen Teil zur Gesamtkinematik bei, wie ein Vergleich der Abb. 5.12 (a) und (e) zeigt.

**KDC** Abgesehen von der Unausgeglichenheit der prograden Kurzsachsentubes im Kern der Galaxie, lässt sich keine weitere Besonderheit im Kern feststellen, die den KDC auszeichnet. Auch in der Dekomposition (Abb. 5.12) ist der KDC eher eine Nebenerscheinung der Kurzsachsentubestruktur und weist keine auffälligen Merkmale auf. So scheint der KDC also ein Teil des Hauptkörpers der Galaxie zu sein und nicht eine kinematische Sonderstellung zu haben.

**Vergleich mit der VF-Fitting-Methode von Statler et alii** Van den Bosch et alii vergleichen in [11] ihre Schwarzschild-Modell-Ergebnisse mit den Ergebnissen von Statler et alii. Diese untersuchten NGC 4365 mittels der sogenannten **Velocity-Field-Fitting-Methode** (s. [8]). Bei der VF-Methode wird eine analytische Lösung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (5.1)$$

bestimmt. Dazu nimmt man eine plausible Form der Massendichte  $\varrho$  und der Geometrie der Strömungslinien des mittleren Flusses (ausgedrückt durch die Stromdichte  $\vec{j}$ ) an. Sie nutzt bayessche Statistik und versucht die von SAURON gemessenen Geschwindigkeiten zu fitten. Die Dispersion,  $h_3$  und  $h_4$  werden jedoch nicht berücksichtigt im Fit. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass sie weniger rechenintensiv ist und deshalb schneller eine größere Parameterbandbreite sampeln kann als die Schwarzschild-Methode.

Die von Statler et alii bestimmten Achsenverhältnisse stimmen unter Berücksichtigung der Fehlergrenzen nicht mit denen von van den Bosch et alii bestimmten Achsenverhältnissen überein. Auch die Triaxialität  $T$  in den inneren  $35 \text{ arcsec}$  und die Sichtwinkel  $(\vartheta, \varphi, \psi)$  stimmen nicht bei beiden überein.

Wie van den Bosch et alii testeten, hat zwar das Weglassen von  $h_4$  beim Fit keinen deutlichen Einfluss auf die Form der Galaxie. Aber das Weglassen von  $h_3$  oder der Dispersion  $\sigma$  verändert die Best-Fit-Form signifikant. Dabei wird auch die LOSVD-Form beeinflusst. Diese weicht dann immer mehr von einer Gaußform ab. D.h. Fitmodelle müssen zumindest die GH-Momente bis  $h_3$  berücksichtigen, um die Galaxieform und die LOSVD korrekt reproduzieren zu können.

Ferner stellten sich Schwarzschild-Modelle, die nur die Geschwindigkeit fitten, bei van den Bosch et alii als nicht-eindeutig heraus. Fraglich ist also, ob der VF-Fitting Ansatz von Statler et alii die LOSVD korrekt reproduziert. Andererseits war es auch nicht das Ziel von Statler et alii die gesamte dreidimensionale Massenverteilung in der Galaxie zu reproduzieren, wozu sie laut eigener Aussage eher ein Schwarzschild-Modell nutzen würden. Vielmehr ging es ihnen darum, die Form der Flächen gleicher Massendichte einzuschränken und die Orientierung der Galaxie bzgl. der Sichtlinie zu bestimmen (vgl. [8], §2f.). Dennoch ergeben sich auch gerade hierbei, wie oben erwähnt wurde, große Unterschiede zwischen ihrem VF-Modell und dem Schwarzschild-Modell, sodass eine genauere Untersuchung der VF-Modelleigenschaften erforderlich ist.

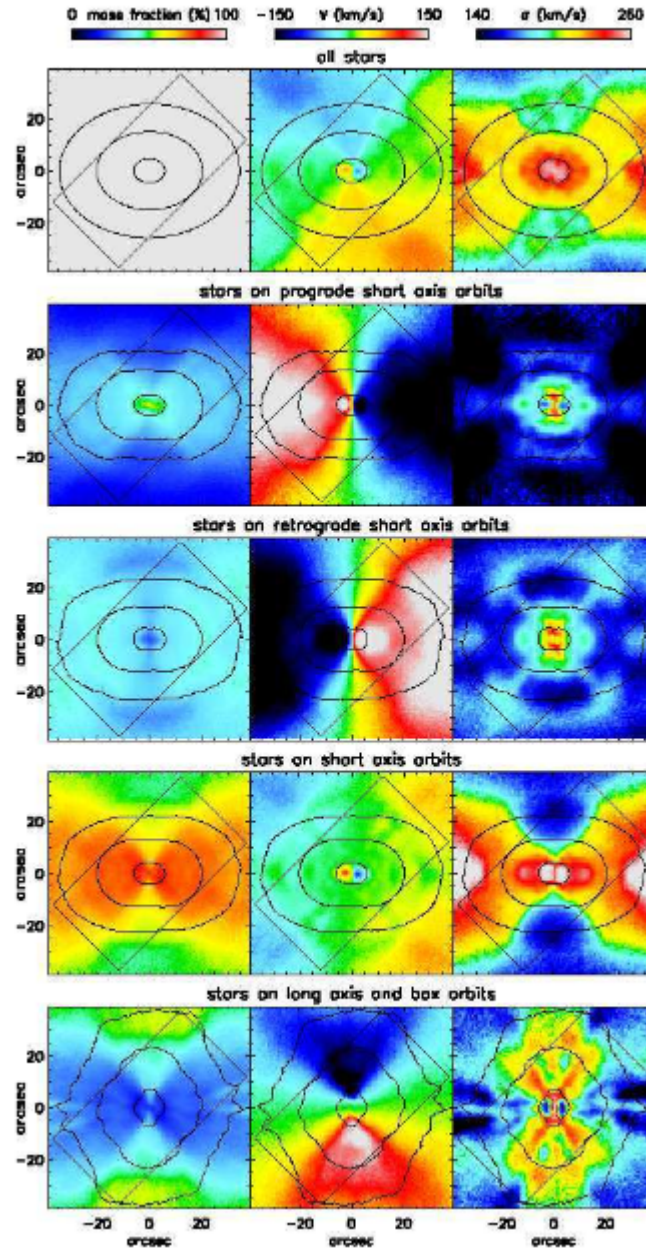


Abbildung 5.12: Extrapolierte Kinematik des NGC 4365-Modells; von oben nach unten: (a) Beitrag aller Sterne, (b) Sterne auf prograden, (c) retrograden und (d) kombinierten Kurzachsentubes und (e) Sterne auf Langachsentubes und Box-Orbits. Die Konturen deuten Linien gleichen Strahlungsflusses an. Ihre Superposition ergibt die Isophoten der MGE, wie man in (a) sieht. Das schwarze Rechteck deutet die Region an, die mit SAURON beobachtet wurde. [Aus [11]]





# Kapitel 6

## Diskussion

Das in dieser Arbeit beschriebene triaxiale Schwarzschild-Modell von van den Bosch et alii ermöglicht die dynamische Modellierung einer Vielzahl elliptischer Galaxien. Es fittet die beobachtete SB sowie die beobachteten Geschwindigkeiten, die Dispersion und höhere GH-Momente bis mindestens  $h_4$ . Isophotale Verdrehungen und Elliptizitätsvariationen in der beobachteten SB können dabei genauso berücksichtigt werden, wie ein zentrales Schwarzes Loch, dunkle Materie und KDCs.

Die mit triaxialen Abel-Modellen durchgeführten Tests dieses Schwarzschild-Modells zeigen, dass das Schwarzschild-Modell gut die interne Orbitstruktur und die DF einer elliptischen Galaxie reproduzieren kann. Allerdings können die Formparameter nur dann gut eingeschränkt werden, wenn die beobachtete Galaxie eine besondere kinematische Struktur hat, wie z.B. einen KDC.

Je genauer die LOSVD beobachtet wird, umso besser wird das Modell eingeschränkt.

**NGC 4365** Bei der Anwendung der Schwarzschild-Methode auf die elliptische E3 Galaxie NGC 4365 ließen sich die Modellparameter signifikant einschränken. Der Best-Fit hat gezeigt, dass NGC 4365 im I-Band ein Masse-Leuchtkraft-Verhältnis von  $M/L = (3,5 \pm 0,2)M_\odot/L_\odot$  hat. Die räumliche Orientierung ist  $(\vartheta, \varphi, \psi) = (68^\circ, 73^\circ, 91^\circ)$ . Dabei hat die Galaxie innerhalb der zentralen  $35 \text{ arcsec}$  die Achsenverhältnisse  $p \geq 0,95$ ,  $0,65 < q < 0,75$ . In diesem Bereich der Galaxie ist sie also in etwa oblat axialsymmetrisch. Die meisten Sterne befinden sich dort zu gleichen Teilen auf pro- und retrograden Kurzachsentubes. Weiter außen wird die Galaxie triaxialer.  $T$  steigt mit zunehmendem Radius bis auf  $\sim 0,6$ . Die Sterne befinden dort sowohl auf Kurzachsentubes als auch auf Langachsentubes. Der KDC von NGC 4365 hat sich als ein Bestandteil der Kurzachsentubes in den inneren  $\sim 6 \text{ arcsec}$  herausgestellt. Ferner haben Davies et alii (s. [5]) festgestellt, dass auch das Alter der KDC-Sterne vergleichbar mit dem Alter der anderen Sterne in der Galaxie ist. Deshalb vermuten van den Bosch et alii, dass der KDC kein kinematisch entkoppelter Teil der Galaxie ist.

**Anwendungsgebiete des triaxialen Schwarzschild-Modells** Die meisten der heutigen **Schätzungen der Massen Schwarzer Löcher** basieren auf axialsymmetrischen

Galaxiemodellen. Bei diesen Modellen führt man die Zunahme der Sichtliniengeschwindigkeitsdispersion in Richtung des Galaxiezentruns auf ein zentrales Schwarzes Loch zurück, da es in axialsymmetrischen Systemen keine andere Erklärung für die Geschwindigkeitszunahme gibt.

In triaxialen Galaxien aber können zum Teil auch Box-Orbits für eine Geschwindigkeitszunahme sorgen. Nimmt man also an, dass die betrachtete Galaxie triaxial ist, kann sich ein anderer Massenwert für das Schwarze Loch ergeben. Aktuell kennt man einige Korrelationen zwischen der Masse eines Schwarzen Lochs und der Leuchtkraft der Galaxie, die das Schwarze Loch beinhaltet. Sofern die Leuchtkraft mit der Form der Galaxie korreliert ist, könnten sich diese **Masse-Leuchtkraft-Korrelationen** durch die Triaxialitätsannahme für Schwarze Löcher ändern.

Mit kinematischen Beobachtungen bei großen Radien, wo die dunkle Halomasse überwiegt, können triaxiale Schwarzschild-Modelle erstellt werden, um die **Form des Halos** zu analysieren. Momentan gibt es diverse Simulationen, die eine stark triaxiale Form des Halos vorhersagen. Nach diesen Simulationen ist die triaxiale Form auf Verschmelzungsprozesse von Galaxien zurückzuführen.

**Erweiterungen des Schwarzschild-Modells** Beim beschriebenen Schwarzschild-Modell geht man davon aus, dass alle Sterne gleich sind. Eine Erweiterung des Modells bestünde also darin, mehrere verschiedene Sternpopulationen in das Modell einzubauen und Liniestärken verschiedener Elemente im Galaxiespektrum mit einzubeziehen. Auf diese Weise könnte man untersuchen wie die Alter der Sterne und die Metallizität verteilt sind.

Außerdem könnte die triaxiale Form der Galaxie rotieren. Im beschriebenen Modell ist die triaxiale Form in einem Inertialsystem fixiert. Andererseits ist fraglich, ob eine solche Formrotation der Galaxie überhaupt für Modelle von Riesenellipsen relevant ist.

**Systemstabilität** Wie oben erwähnt, können zentrale Box-Orbits bei der Existenz eines Schwarzen Lochs chaotisch werden und die triaxiale Form von innen heraus zerstören, da sie für die triaxiale Form sehr wichtig sind. Auch triaxiale Simulationen zeigen, dass sich das Zentrum bei der Existenz einer zentralen Massenkonzentration hin zu einer runderen Form entwickelt. Das beschriebene Modell von NGC 4365 ist im Inneren oblat axialsymmetrisch, während es weiter außen triaxial wird. Van den Bosch et alii sehen darin ein Indiz dafür, dass das zentrale Schwarze Loch die Galaxie von innen heraus axialsymmetrisch formt. Hier bleiben noch Fragen bzgl. der Zeiten, in denen solche Entwicklungen ablaufen, offen (sofern sie überhaupt stattfinden).

Insgesamt konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, wie flexibel und weitreichend der Anwendungsbereich der Schwarzschild-Modelle ist und wie diese Modelle zu unserem Verständnis der Dynamik elliptischer Galaxien beitragen können. Ebenso wurde dargelegt, dass diese Modelle einen Weg bieten, um Eigenschaften dunkler Halos oder Schwarzer Löcher in elliptischen Galaxien zu untersuchen. Gerade dies demonstriert das hohe Potential der Schwarzschild-Modelle.

# Literaturverzeichnis

- [1] J. Binney und M. Merrifield: *Galactic Astronomy*. Princeton University Press, Princeton, 1998.
- [2] J. Binney und S. Tremaine: *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [3] M. Cappellari, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **333** (2002), 400.
- [4] M. Cappellari, R. Bacon, M. Bureau, M. Damen, R. Davies, P. de Zeeuw, E. Emsellem, J. Falcon-Barroso, D. Krajnovic, H. Kuntschner, R. McDermid, R. Peletier, M. Sarzi, R. van den Bosch und G. van de Ven, *MNRAS* **366** (2006), 1126.
- [5] R. Davies, H. Kuntschner, E. Emsellem, R. Bacon, M. Bureau, C. Carollo, Y. Copin, B. Miller, G. Monnet, R. Peletier, E. Verolme und P. de Zeeuw, *The Astrophysical Journal Letters* **548** (2001), L33.
- [6] D.O. Richstone und S. Tremaine, *APJ* **327** (1988), 82.
- [7] M. Schwarzschild, *APJ* **232** (1979), 236.
- [8] T.S. Statler, E. Emsellem, R.F. Peletier und R. Bacon, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **353** (2004), 1.
- [9] S. Tremaine, K. Gebhardt, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. Faber, A. Filippenko, R. Green, C. Grillmair, L. Ho, J. Kormendy, T. Lauer, J. Magorrian, J. Pinkney und D. Richstone, *APJ* **574** (2002), 740.
- [10] G. Van De Ven, P.T. De Zeeuw und R.C.E. Van Den Bosch, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **385** (2008), 614.
- [11] R.C.E. Van Den Bosch, G. Van De Ven, E.K. Verolme, M. Cappellari und P.T. De Zeeuw, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **385** (2008), 647.



# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt und durch meine Unterschrift, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig, ohne fremde Hilfe angefertigt worden ist. Inhalte und Passagen, die aus fremden Quellen stammen und direkt oder indirekt übernommen worden sind, wurden als solche kenntlich gemacht. Ferner versichere ich, dass ich keine andere, außer der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur verwendet habe. Diese Versicherung bezieht sich sowohl auf Textinhalte sowie alle enthaltenden Abbildungen, Skizzen und Tabellen. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

München, den