3.3. von Neumannの安定性解析

調べたいスキームによって離散化した方程式の厳密解を

$$u_j^n = g^n \exp(i(j\theta))$$

であると仮定する(g^nのnは冪). $0 \leqq \theta \leqq \pi$がパラメータで, $\theta = 0$は空間全体で一定の波, $\theta = \pi$ではjについて一つおきに符号が変わる波を表す. 実際の解はこの形のフーリエ分解された解の重ね合わせだが, これを用いることで近似解の波の成分でどの周波数成分が減衰しやすいのか調べることができる.

Jhon von Neumann

gは複素振幅率と呼ばれ, 時間ステップごとの振幅の増幅率を表す.

→$|g| \geqq 1$では時間ステップごとに振幅が増大し, 不安定になってしまう.

→$|g| \leqq 1$かどうか, あるいはその条件を調べる.

3.3. von Neumannの安定性解析

また，gは複素数であるので$g=|g|\exp(i\phi)$とすればその振幅の増大或いは減少の原因が

振幅そのものが変化している(散逸誤差)なのか位相のずれによる変化(分散誤差)なのかを調べることができる.

具体的な流れは，$|g|_{ex}$やϕ_{ex}を解析解からわかる正しい値として

①離散化した方程式に$u_j^n = g^n \exp(i(j\theta))$を代入する.

②その方程式をgについて解く.

③さらに$g=|g|\exp(i\phi)$として，振幅成分と位相成分に分ける.

④$|g|$と$\dfrac{\phi}{\phi_{ex}}$をについて解き，図示して周波数成分(θ)ごとの誤差を見る.