2.3. 有限差分法について

今度は$u_{j\pm 2}$をj周りでTaylor展開してみる.

$$u_{j+2} = u_j + 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j + 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j + \cdots$$

$$u_{j-2} = u_j - 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j + 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j - \cdots$$

これらから$u_{j\pm 1}$のTaylor展開で2階微分の項を消去することを考えると,

2次精度の前進，後進差分式

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j = \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \qquad ・・・①$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \qquad ・・・②$$

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j + \cdots$$

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j - \cdots$$

が得られる.

2.3. 有限差分法について

以上，代表的な差分化を導出した．もちろんこれ以外にも考えられるが，これよりはこの6つを用いて構成されるスキーム(微分方程式を離散化して解くアルゴリズム)を考える．

前進差分式(1次精度)→ $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \cdots ①'$$

後進差分式(1次精度)→ $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \cdots ②'$$

前進差分式(2次精度)→ $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdots ①$$

後進差分式(2次精度)→ $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdots ②$$

中心差分式(2次精度)→ $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdots ③$$

2階微分差分式(1次精度)→ $$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad \cdots ④$$