

流体力学の数値計算法

6/3 B4 赤松秀耶

目次

1. 勉強の内容, 目的など

1.1. 勉強の内容

1.2. 数値的解法の目的

2. 偏微分方程式の数値的に解くために

2.1. 計算機による微分の考え方

2.2. 具体的な幾つかの方法

2.3. 有限差分法について

3. 計算スキームの有効性評価

3.1. 誤差の種類について

3.2. Laxの同等定理

3.3. von Neumannの安定性解析

3.4. CFL条件

3.5. 安定性議論のまとめ

4. 移流方程式

4.1. 陽解法と陰解法

4.2. FTCSスキーム

4.3. Lax-Friedrichスキーム

4.4. Leap-Frogスキーム

4.5. Lax-Wendroffスキーム

4.6. MacCormackスキーム

4.7. 1次精度風上差分

4.8. 陽解法のまとめ

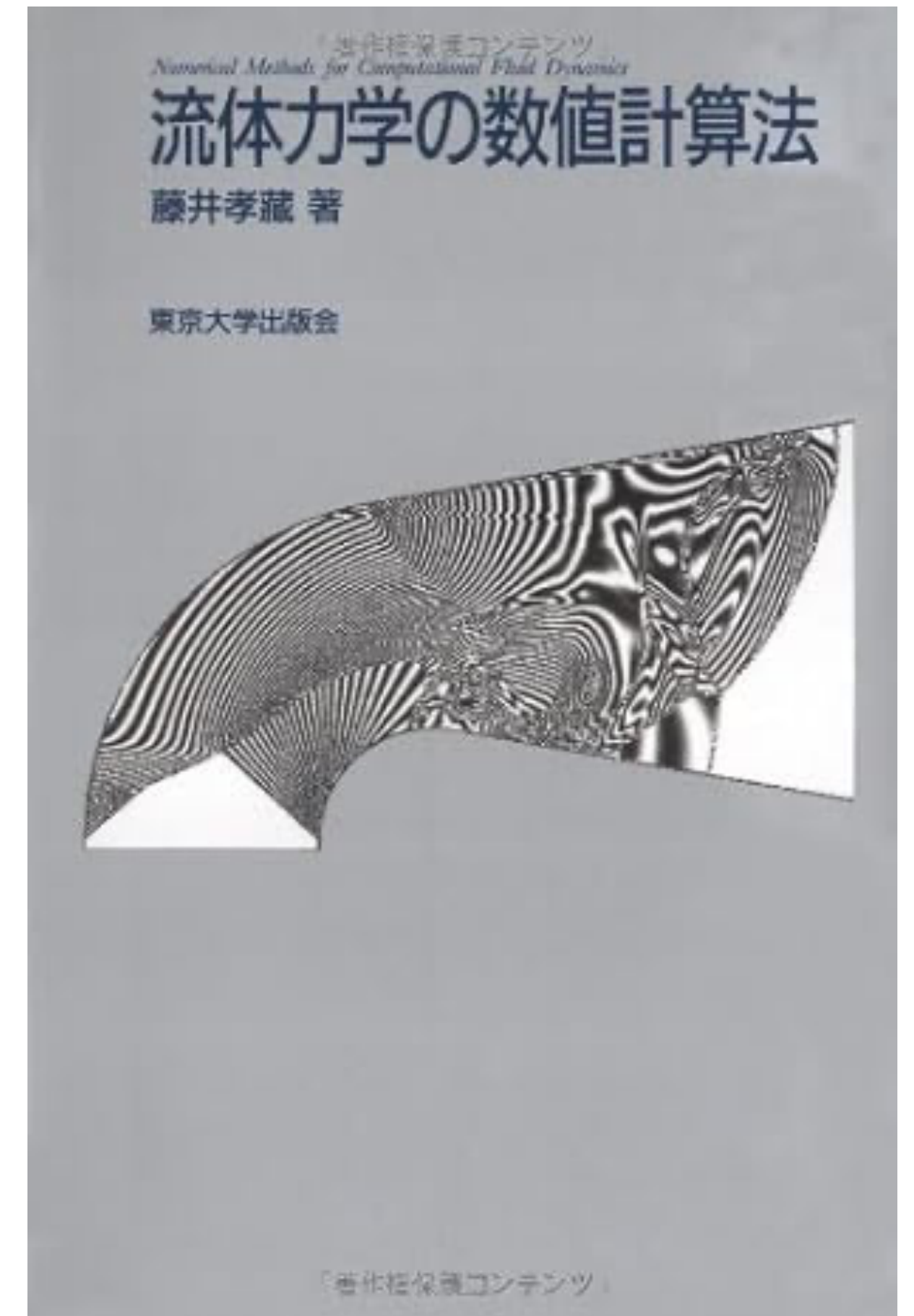
1.1. 勉強の内容

基本的に、この本の内容に沿って(足りないと思う箇所は補ったり順番をテレコにしたりしつつ)勉強を進めていきます。

→形としては、1人で輪読(?)してるような感じで、自分の頭の中の整理も含め勉強したことを共有できればと思っています。

→将来の研究に役立てるようにB4の間の勉強会で読み終わりたいと考えています。

→なるべく自分の頭の中でわかり易く言語化したいので、間違いやより良い解釈があったら教えてください。



※各スライドのタイトルは私が勝手につけたもので、本書の目次とは対応していません。

1.2. 数値的解法の目的

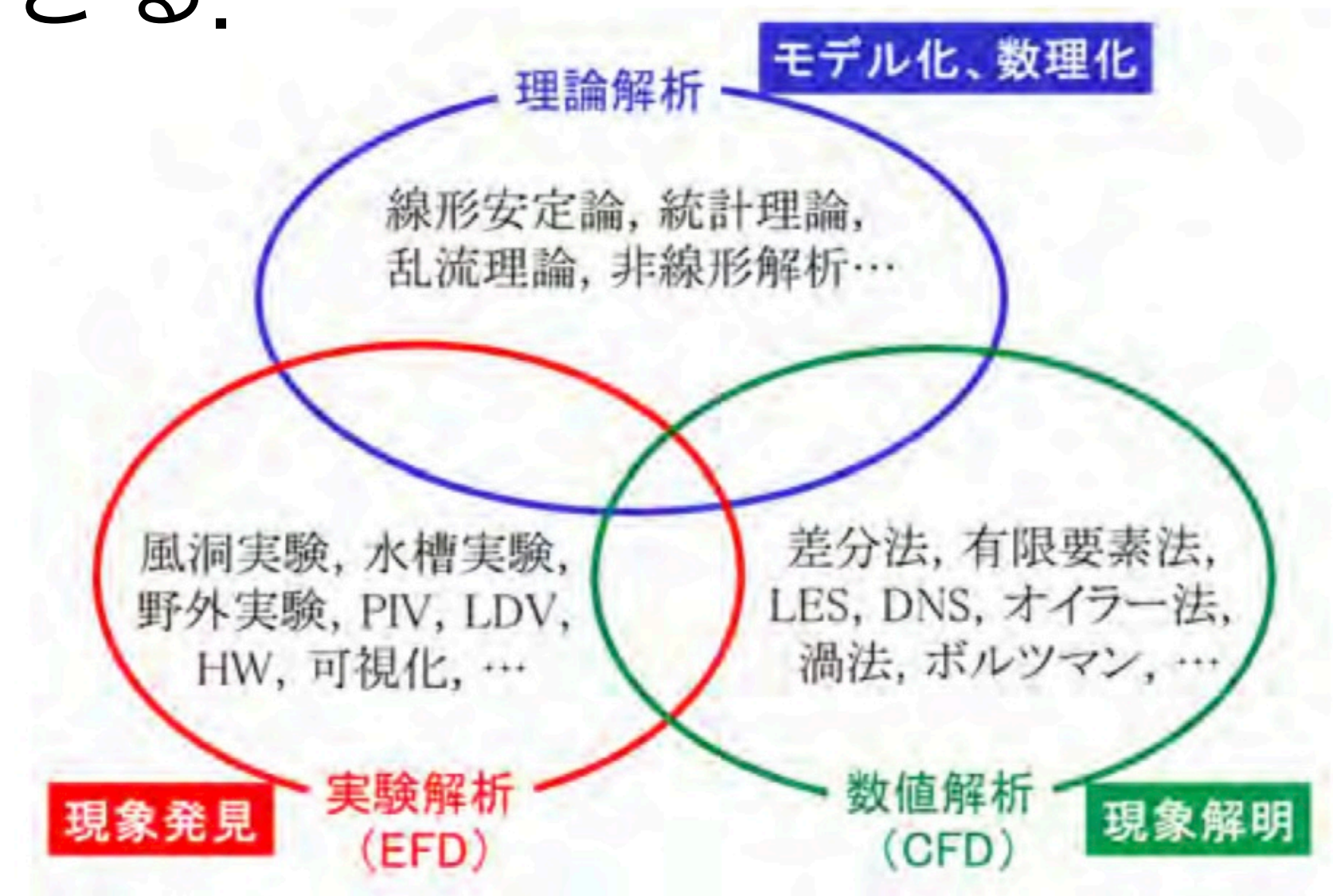
- ・ 何故、数値計算で方程式を解くのか？（或いは、そこから物理現象を導きたいのか？）

→実験や理論では得られない、または難しい現象のデータを得られる。
(3次元空間の時系列データや乱流現象など)

→任意の条件設定が可能で、様々な初期値や境界条件を変えて現象を見られる。

→再現性に富んでおり、同じ現象をじっくり観察できる。

これらの理由で、目的に応じた様々な数値計算法が研究・開発されている。



2.1. 偏微分方程式を数値的に解くために

数値的に解くとは：プログラミング言語による演算で解けるような形に変形して解くこと.

高校で習うような微分の定義→
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

→計算機では、連続関数(無限の点)は扱えない. しかし、微分方程式に対して **離散化** を考えることで、微分を差分に変換して、計算機でも扱えるような形にして計算してもらうことで、何らかの結果は得られる. (正確さは不明)

→差分なので、当然解析的手法で導いた厳密解とは誤差が生まれる.

数値計算は、この誤差をどうするかの話. 完璧な数値計算コードはないので、目的にあったものを使う必要がある.

2.2. 具体的な幾つかの方法

流体の数値計算の代表的な方法として、以下が挙げられる。

○格子法

→メッシュを用いて固定点で計算を行う，Euler的な手段．格子を前もって形成するので，変形を伴うと弱い，粒子間の相互作用は気にしなくて良い．

- ・有限差分法(FDM)

→固定メッシュでの計算

- ・有限要素法(FEM)

→変形メッシュでの計算

など．．．

○粒子法

→各粒子の位置と運動量に着目して計算を行う，Lagrange的な手段．粒子のいる場所を考えれば良いので変形には強い，近くの粒子の相互作用を考慮する．

- ・SPH法

→圧縮性流体を扱う

- ・MPS法

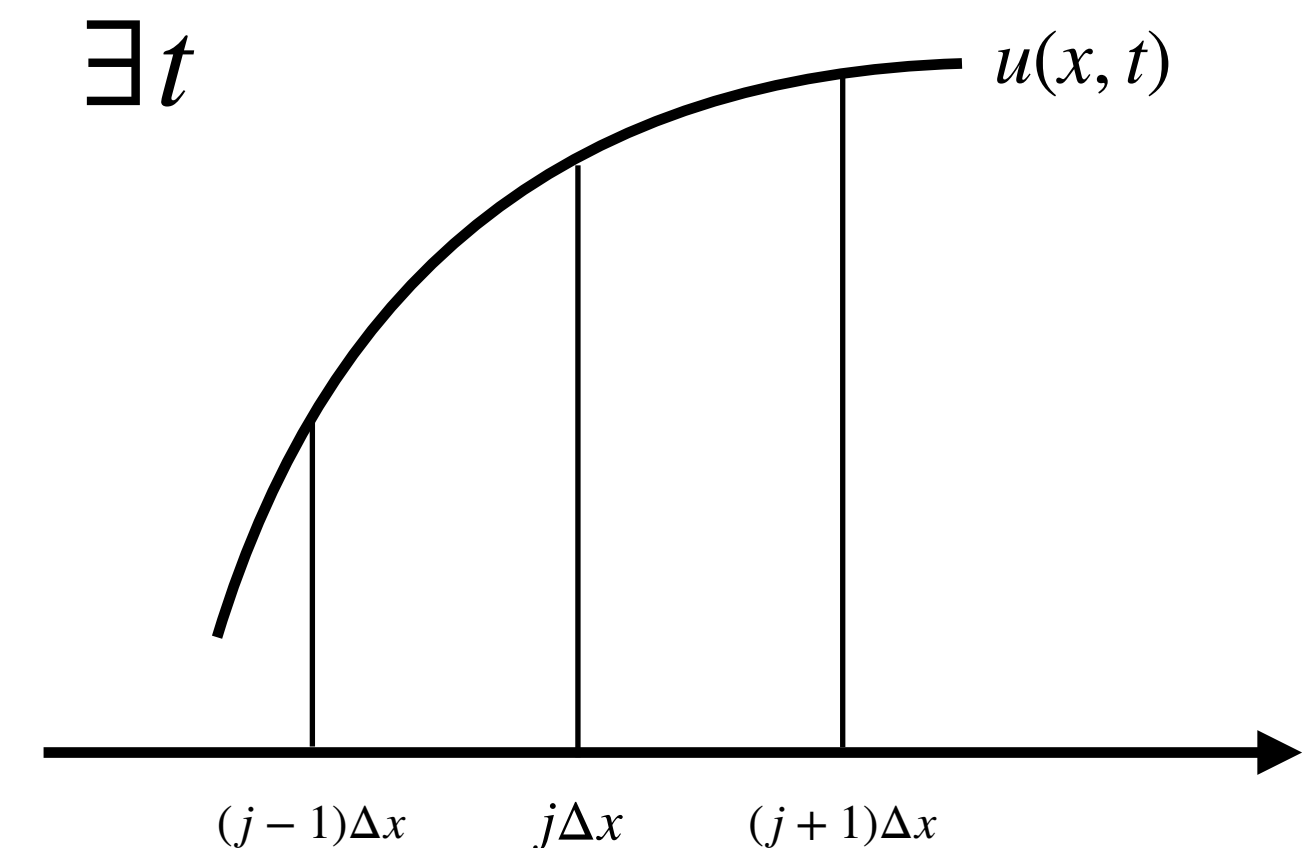
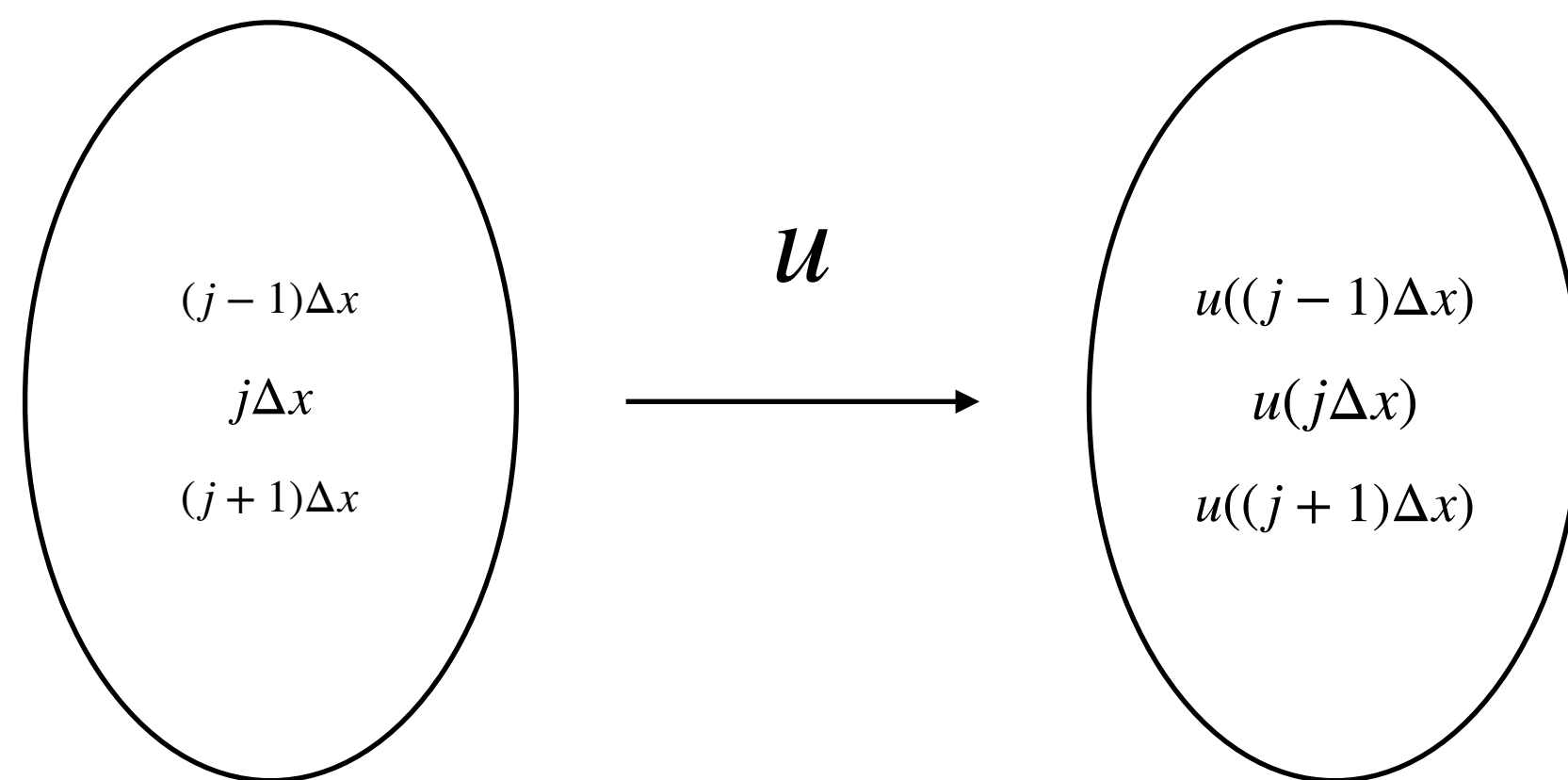
→非圧縮流体を扱う

など．．．

2.3. 有限差分法について

有限差分法は、柔軟性に欠けるものの構造が単純でわかりやすく、プログラムも容易であることからよく用いられる方法である。これを詳しく見る。

- ・ 格子法として分類されることからわかるように、まず対象となる連続領域を格子に分割する作業が必要
→つまり、厳密解が $u(x, t)$ である時、この計算法で得られる解は $u(n\Delta t, j\Delta x)$ となる。
(ここで $\Delta t, \Delta x$ は格子点の幅, n, j はステップ数。)



2.3. 有限差分法について

さらに離散化のために，偏微分方程式の微分項を差分近似することを考える．

u_j^n を $u(n\Delta t, j\Delta x)$ などとして，いま時間方向は一定とし Δx が微小としてTaylor展開すると

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j + \dots$$

これより，1次精度での前進差分式

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}'$$

が得られる．(微分が四則演算になっている．)同様に， $u|_{j-1}$ を j 周りで展開して

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j - \dots$$

これより，1次精度での後退差分式

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}'$$

が得られる．

2.3. 有限差分法について

さらに各々のTaylor展開の差をとると(収束級数同士であることに注意), 中心差分式

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

が得られる. これは差を取ると $(\Delta x)^2$ の項が打ち消し合うので誤差は $O((\Delta x)^2)$ である.

次に各々のTaylor展開の和をとると, 2階微分の差分式

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

今, 一回微分において前進差分, 後進差分,

中心差分が得れたが, 前者2つは1次精度,

中心差分のみ2次精度である.

→精度は高い方がいいので, 前者2つも2次精度

にしたい.

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u_j + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j + \dots \\ u_{j-1} &= u_j - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j - \dots \end{aligned}$$

2.3. 有限差分法について

今度は $u_{j\pm 2}$ を j 周りでTaylor展開してみる.

$$u_{j+2} = u_j + 2\Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j + 2(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j + \dots$$

$$u_{j-2} = u_j - 2\Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j + 2(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j - \dots$$

これらから $u_{j\pm 1}$ のTaylor展開で2階微分の項を消去することを考えると,

2次精度の前進, 後進差分式

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

が得られる.

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j + \dots$$
$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j - \dots$$

2.3. 有限差分法について

以上, 代表的な差分化を導出した. もちろんこれ以外にも考えられるが, これよりは
この6つを用いて構成される **スキーム** (微分方程式を離散化して解くアルゴリズム) を
考える.

$$\text{前進差分式(1次精度)} \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}'$$

$$\text{後進差分式(1次精度)} \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}'$$

$$\text{前進差分式(2次精度)} \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$\text{後進差分式(2次精度)} \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

$$\text{中心差分式(2次精度)} \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

$$\text{2階微分差分式(1次精度)} \rightarrow \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

3.1. 誤差の種類について

計算スキームの具体例を見る前に、そのスキームがどれだけ有効なのか(或いは、どれだけ誤差が発生するのか)を確かめる方法が必要である。まずは、発生しうる誤差の原因を見る。ここで挙げた原因が合わさって、近似解に”**散逸誤差**”や”**分散誤差**”という形で現れる。

- ・ 打ち切り誤差

- 元の微分方程式と差分化した式との差。 (差分式の $O(\Delta x)$ などがこれ)

- 最も大きな誤差の原因。

- ・ 丸め誤差

- 計算機の性能や精度による誤差。 CFDでは最終的に有効数字3桁以上を要求することが少ないので基本的には単精度(32bit)の計算でも無視されうるが、近年の高性能計算機を用いる手法では倍精度でも影響を無視できない(らしい)。

- ・ 離散化誤差

- 打ち切り誤差+境界条件を数値化した時の誤差。

3.2. Laxの同等定理

定理：あるスキームが収束する必要十分条件は安定かつ適合していること.

収束性：格子の刻み幅を細かくしていったとき，近似解が元の微分方程式の解(厳密解)に近づくこと.

適合性：格子の刻み幅を細かくしていったとき，離散化した式が元の微分方程式に近づくこと.

安定性：時間発展する微分方程式において，計算のステップを進めるごとに，どのような誤差も増大しない.



Peter D. Lax (2005)

収束するスキームを用いれば，それによって得られた近似解は正しい.

逆にスキームが正しい数値解を与えるには，そのスキームが収束する必要がある.

安定かつ適合は収束の必要十分条件なので，安定かつ適合するスキームを使えば良いということになる.

3.3. von Neumannの安定性解析

調べたいスキームによって離散化した方程式の厳密解を

$$u_j^n = g^n \exp(i(j\theta))$$

であると仮定する(g^n の n は冪). $0 \leq \theta \leq \pi$ がパラメータで, $\theta = 0$ は空間全体で一定の波, $\theta = \pi$ では j について一つおきに符号が変わる波を表す. 実際の解はこの形のフーリエ分解された解の重ね合わせだが, これを用いることで近似解の波の成分でどの周波数成分が減衰しやすいのか調べることができる.



Jhon von Neumann

g は複素振幅率と呼ばれ, 時間ステップごとの振幅の増幅率を表す.

→ $|g| \geq 1$ では時間ステップごとに振幅が増大し, 不安定になってしまう.

→ $|g| \leq 1$ かどうか, あるいはその条件を調べる.

3.3. von Neumannの安定性解析

また, g は複素数であるので $g = |g| \exp(i\phi)$ とすればその振幅の増大或いは減少の原因が振幅そのものが変化している(散逸誤差)なのか位相のずれによる変化(分散誤差)なのかを調べることができる.

具体的な流れは, $|g|_{ex}$ や ϕ_{ex} を解析解からわかる正しい値として

①離散化した方程式に $u_j^n = g^n \exp(i(j\theta))$ を代入する.

②その方程式を g について解く.

③さらに $g = |g| \exp(i\phi)$ として, 振幅成分と位相成分に分ける.

④ $|g|$ と $\frac{\phi}{\phi_{ex}}$ をについて解き, 図示して周波数成分(θ)ごとの誤差を見る.

3.4. CFL条件

陽解法(のちに述べる)で満たさなければいけない条件で、物理的な波の速度と数値的な波の速度の比(クーラン数という)が

$$|\nu| = \left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

を満たさなければならないという条件. von Neumannの安定性解析を行う上でも出会うことになるが、定性的に説明もできる. $c > 0$ として

$$\frac{c}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} > 1$$

なら、物理的な波の方が数値的な波より早く移動してしまう. これはつまり数値的に影響できる範囲が物理的特性が現れる範囲を包みきれてないということになるので、物理的に意味のない値を計算してしまい、不安定になってしまう.

3.5. 安定性議論のまとめ

- ・ 3.2～3.4などで述べた，その離散化手法が正しそうな答えを与えるかどうかは (もはや解析解がわかっているような) ごく簡単なモデルででしか調べられないことがほとんどである．
- ・ しかし，そうして得られた結果を，より複雑な問題に対しても適用できると仮定する．
- ・ その結果，概してうまく働いているというのがCFDの科学的根拠である．

4.1. 陽解法と陰解法

時空間方向に計算を進める問題の解法は、大きく分けて2種類ある.

○陽解法(ecplicit法)

→幾つかの既知の現在値からある1箇所の次ステップの値を求める.

メリット：計算自体が単純であるためプログラムが容易で、1回の計算にかかる時間も短い.

デメリット：CFL条件より時間ステップを短くしなければならないので、計算の反復回数が増えて、全体の計算時間が長くなることがある.

○陰解法(inplicit法)

→幾つかの既知の現在値から幾つかの次ステップの値を求める.

メリット：大きな時間ステップで計算できるので、全体の計算時間が短くなる.

デメリット：連立方程式を解く必要があるので、計算が煩雑になりプログラムが複雑で1回あたりの計算が長い.

4.2. FTCSスキーム

ここからは具体的なスキームを見ていく。モデル方程式は、流体力学の重要な現象である”移流”と”拡散”を表す”移流方程式”と”拡散方程式”であり、まずは移流方程式

$$u_t + cu_x = 0 \quad (c > 0)$$

を対象に考える。先に、陽解法に分類されるスキームから見ていく。

時間は前にしか進まないことや、1ステップ先のある点は現在のその点の周囲の点の情報を受け取ることを考えると、自然な離散化として

$$u_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad u_x = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

これをモデルに代入して整理すると、クーラン数 ν として

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

となる。

4.2. FTCSスキーム

これにvon Neumannの安定性解析を行なってみる. $u_j^n = g^n \exp(i(j\theta))$ として

$$g^{n+1} e^{ij\theta} = g^n e^{ij\theta} - \frac{1}{2} \nu (g^n e^{i(j+1)\theta} - g^n e^{i(j-1)\theta})$$
$$\therefore g = 1 - \nu \sin \theta$$

$g = |g| e^{i\phi}$ として

$$|g| e^{i\phi} = |g| (\cos \phi + i \sin \phi) = 1 - \nu \sin \theta$$

$$\therefore |g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2 \theta, \phi = -\arctan(\nu \sin \theta)$$

移流方程式の解析解は $u(x, t) = u(x - ct)$ なので

$$|g|_{ex} = 1, \phi_{ex} = -\nu \theta$$

なお, これは

$$|g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2 \theta \geq 1$$

なので考えるまでもなく常に不安定になってしまう.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} \nu (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

4.3. Lax-Friedrichのスキーム

FTCSスキームと同様に

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

まで離散化する. このままでは絶対不安定となって役に立たないスキームなので, 平均操作で解を安定方向へ持っていくようにする(後述). つまり右辺の u_j^n を

$$u_j^n = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$$

$$\therefore u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

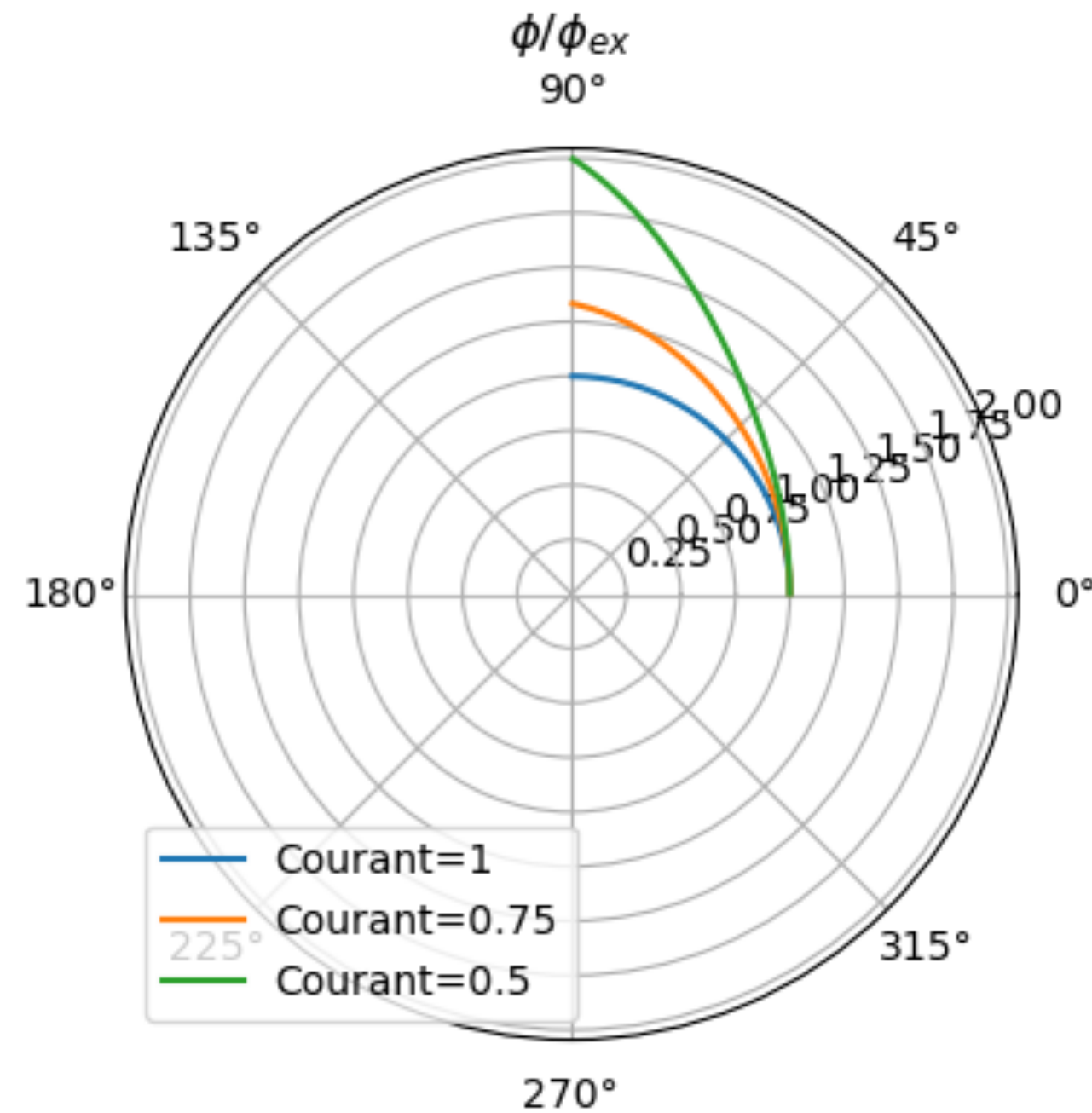
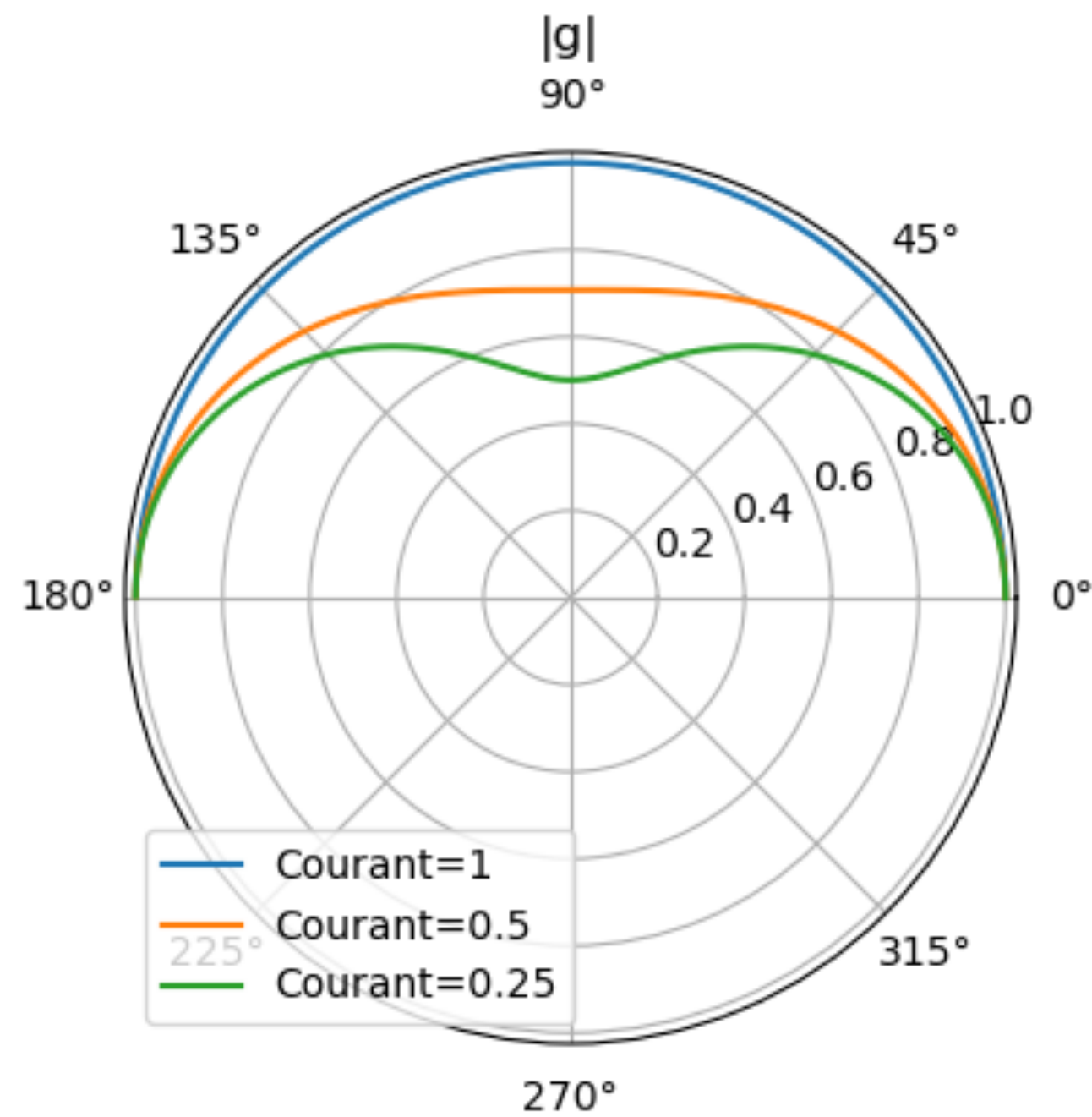
Von Neumannの安定性解析をすると

$$g = \cos \theta - i\nu \sin \theta$$

$$\therefore |g|^2 = \cos^2 \theta + \nu^2 \sin^2 \theta, \phi = -\arctan(\nu \tan \theta)$$

4.3. Lax-Friedrichスキーム

これを極座標にプロットすると以下のようなになる.



これをみると $\theta = \frac{\pi}{2}$ の成分を持つ波は, クーラン数0.5の時に減衰しやすいなどと言える.

4.4. Leap-Frogスキーム

今度は、時空間ともに中心差分で試みる。

$$u_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \quad u_x = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\therefore u_j^{n+1} = u_j^n - \nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Von Neumannの安定性解析をすると

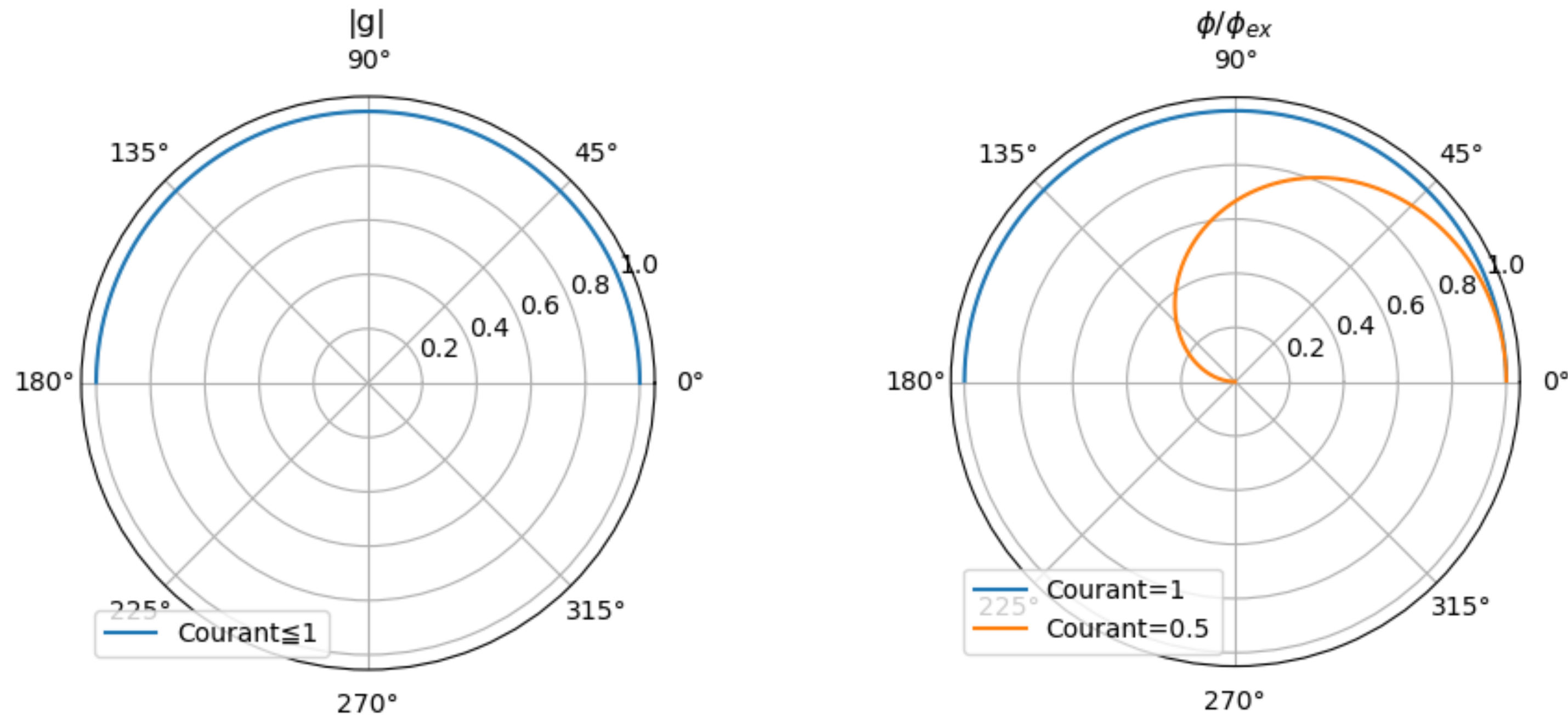
$$g = -i\nu \sin \theta \pm \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \theta}$$

$$\therefore |g|^2 = 1, \phi = -\arctan\left(\frac{\nu \sin \theta}{\sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \theta}}\right)$$

今度は、周波数によって散逸誤差が発生しないことがわかる。

4.4. Leap-Frogスキーム

これを極座標にプロットすると以下のようなになる.



よって, クーラン数が小さければ高周波の波に遅延位相誤差が生まれてしまう.
また, CFL条件を満たさなければ(当然)スキームは不安定になる.

4.5. Lax-Wendroffのスキーム

いま, $u_t = -cu_x$ や $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ より

$$u_j^{n+1} = u_j^n + (\Delta t) u_t|_j^n + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}|_j^n + \dots$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c(\Delta t) u_x|_j^n + \frac{1}{2}c^2(\Delta t)^2 u_{xx}|_j^n + \dots$$

とでき, u_x, u_{xx} を中心差分で離散化すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

これは右辺第3項を除けばFTCSと同じ形になっており, Lax-Friedrichスキームとは異なるFTCSの修正とも言える. (これは拡散を表し, スキームを安定に向かわせる.)

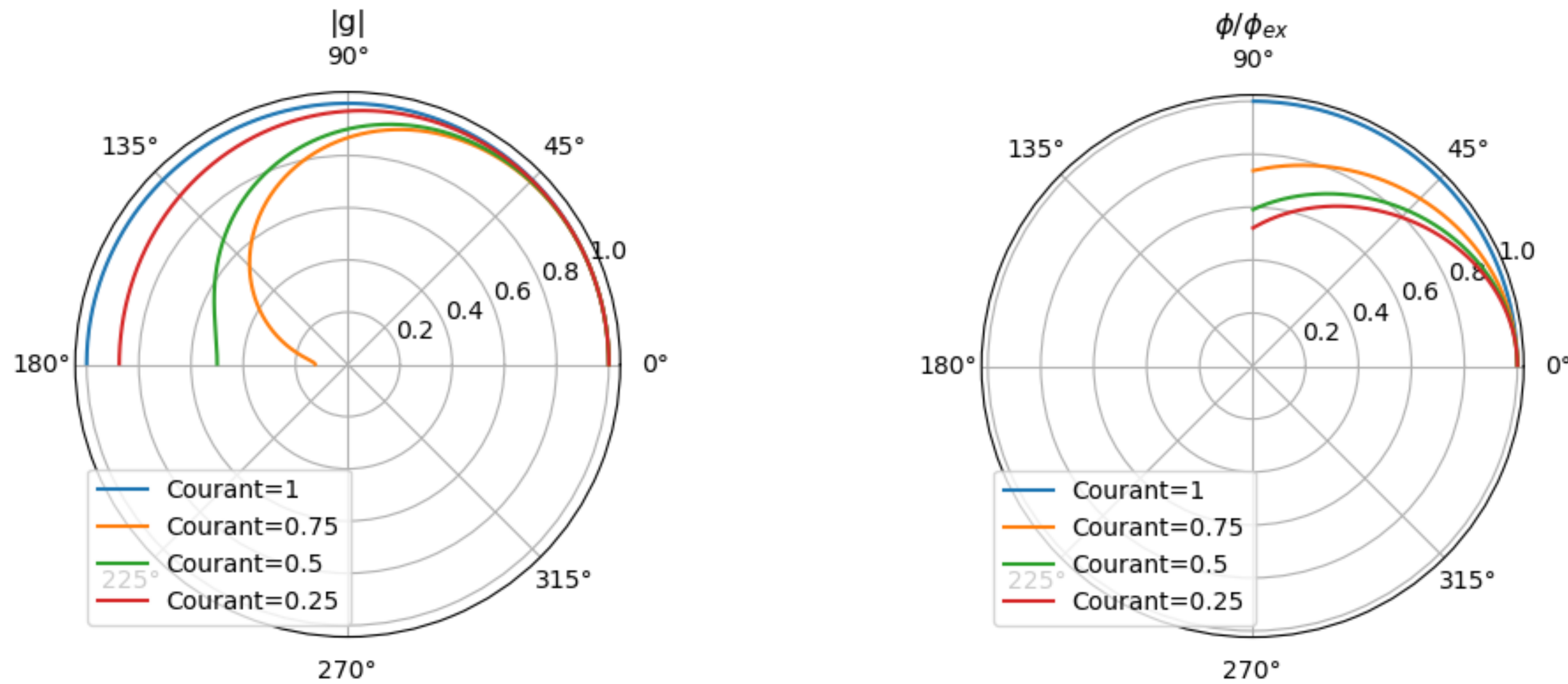
安定解析をして

$$g = 1 - i\nu \sin \theta + \nu^2(\cos \theta - 1)$$

$$\therefore |g|^2 = (1 - \nu^2(1 - \cos \theta))^2 + \nu^2 \sin^2 \theta, \phi = -\arctan\left(\frac{\nu \sin \theta}{1 - \nu^2(1 - \cos \theta)}\right)$$

4.5. Lax-Wendroffのスキーム

これを極座標にプロットすると以下のようなになる。



よってクーラン数が高い場合は高周波成分で散逸誤差があり，逆にクーラン数が高い時の高周波成分以外では遅延位相誤差が見られる。

4.5. Lax-Wendroffのスキーム

Lax-Wendroffのスキームには2段階版が存在し

$$\text{第1段階：} \quad \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (u_{j+1}^n + u_j^n)/2}{\Delta t/2} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

$$\text{第2段階：} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0$$

この第1段階を第2段階に代入すれば元のLax-Wendroffのスキームと等価であることは簡単にわかる。(増幅率も元と同じ.)

第1段階で格子幅 $\frac{1}{2}$, 時間刻み $\frac{1}{2}$ のLax-Friedrichスキームであり,

第2段階は残りの時間刻み $\frac{1}{2}$ のLeap-Frogスキームである.

4.6. MacCormackのスキーム

Lax-Wendroffスキームと等価であるが、こちらは $\frac{1}{2}$ 点や段階を踏むのではなく、予測と修正を繰り返すような計算になっている。 $(\frac{1}{2}$ 時間の点に意味を持たせられる?)

航空分野で有名な計算法らしい。

$$\text{予測段階：} \quad \bar{u}_j = u_j^n - \nu(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

$$\text{修正段階：} \quad u_j^{n+1} = \frac{1}{2}((u_j^n + \bar{u}_j) - \nu(\bar{u}_j - u_j^n))$$

こちらも当然、増幅率はLax-Wendroffスキームと同じである。

4.7. 1次精度風上差分

最後に、移流という現象を考えると最もそれらしいスキームを調べる。

時間は常に前に向かって進み、流れは上流からやってくるので、

時間微分：前進差分、空間微分：後退差分(空間的に上流のデータと現在地のデータ)で離散化してみる。

$$u_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \qquad u_x = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$\therefore u_j^{n+1} = u_j^n - \nu(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$\nu = 1$ ならば $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$ でこれは移流方程式の厳密解の射影になる。

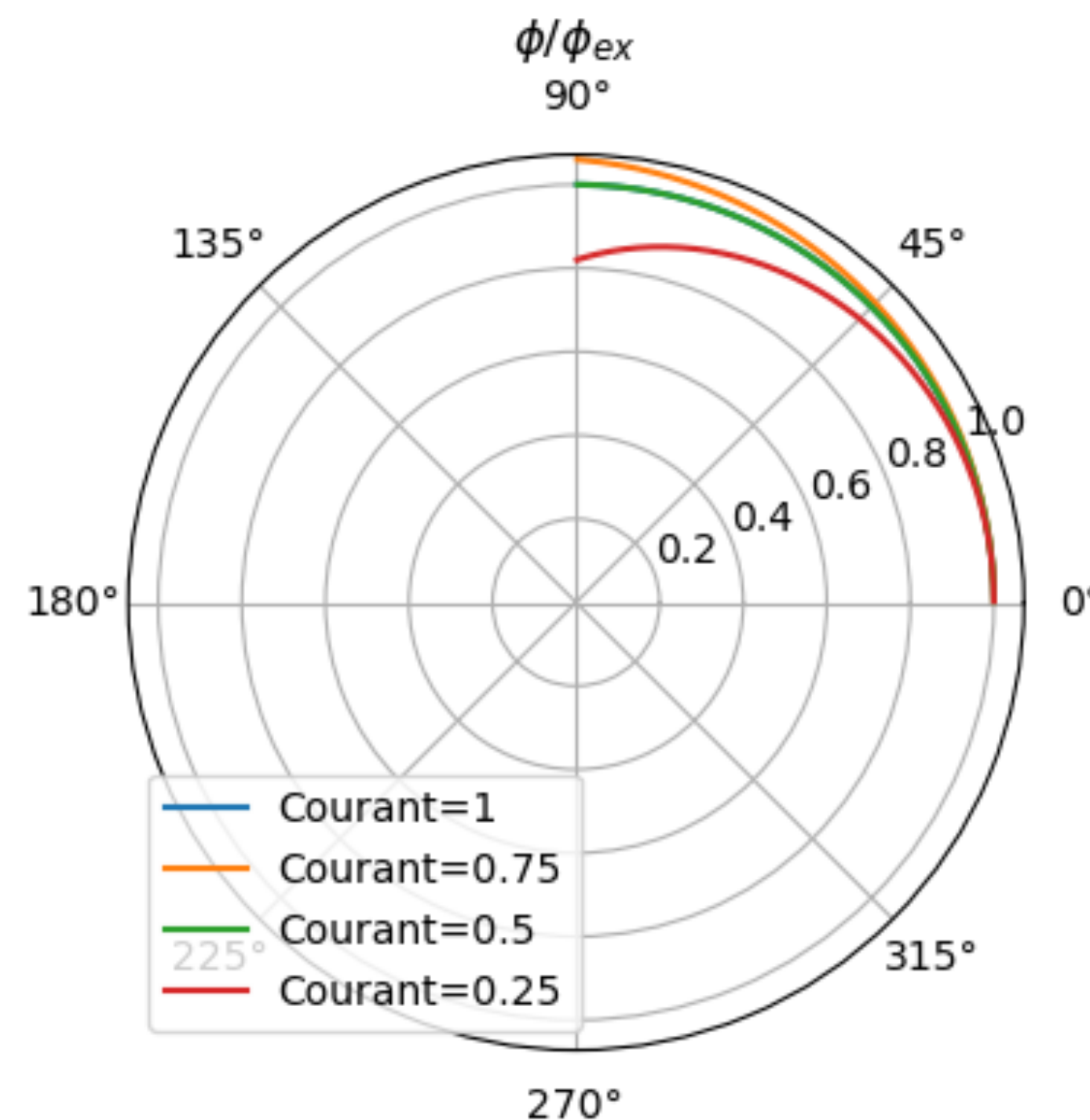
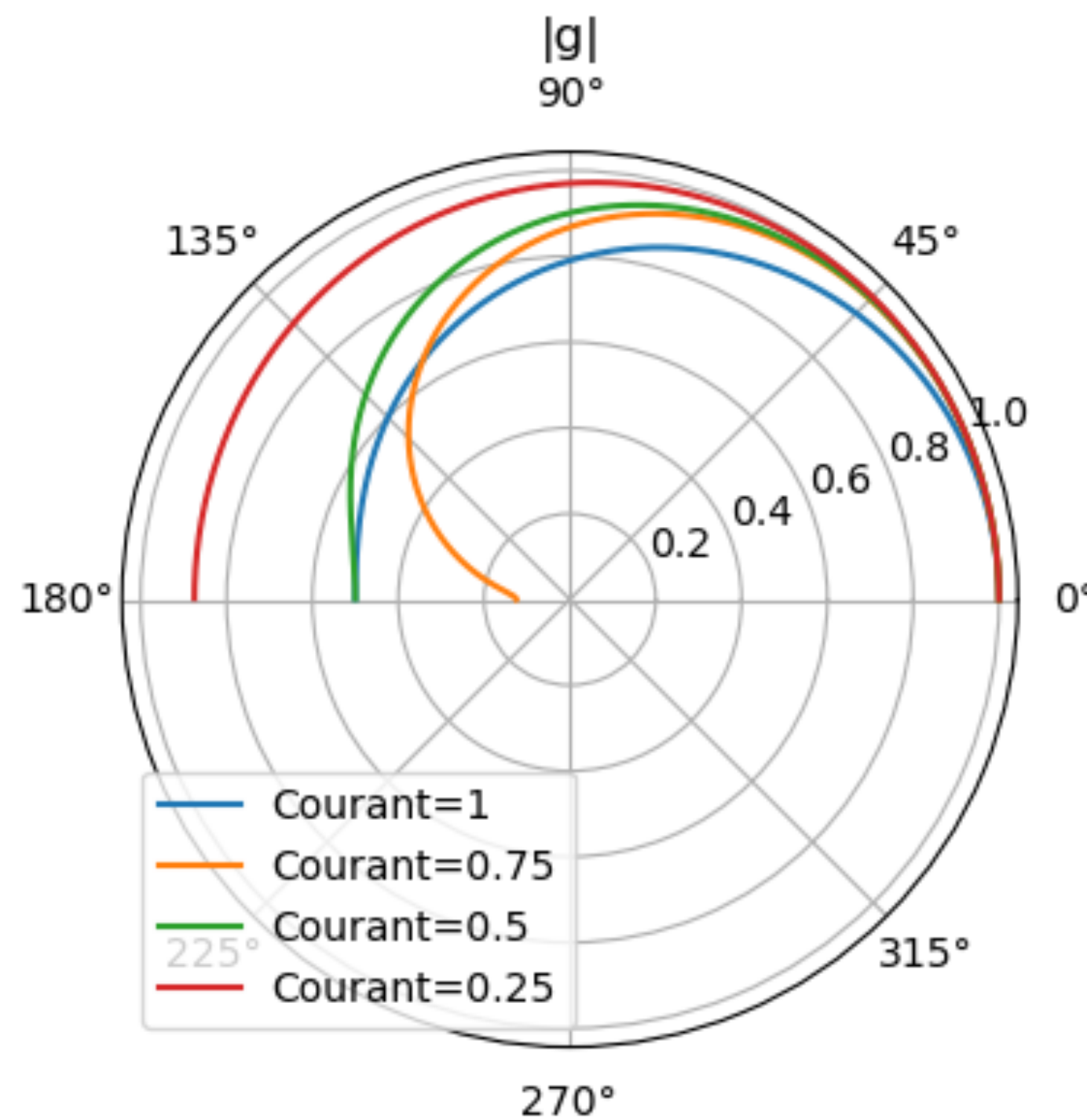
安定性解析をしてみると

4.7. 1次精度風上差分

$$g = 1 - \nu(1 - \cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore |g|^2 = (1 - \nu + \nu \cos \theta)^2 + (\nu \sin \theta)^2, \phi = -\arctan\left(\frac{\nu \sin \theta}{1 - \nu + \nu \cos \theta}\right)$$

図に起こすと以下のようなになる.



→CFD条件の下では高周波成分が減衰しやすい.

$\nu < 0.5$ で遅延位相誤差,
 $0.5 < \nu < 1$ で前進位相誤差となりそう.

4.8. 陽解法のまとめ

4.5において、Lax-WendroffスキームはFTCSスキームの修正だと述べたが、それは他のスキームにおいても言える。

$$\text{FTCS : } u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

まず、Lax-Friedrichスキームは

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &= u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)} \end{aligned}$$

Lax-Wendroffスキームは

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \underbrace{\frac{1}{2}\nu^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}$$

4.8. 陽解法のまとめ

1次精度風上差分は

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \nu(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &= u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \underline{\frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)} \end{aligned}$$

となり、全て拡散を表す2階微分の有限差分表示を付け加える形になっている。
特に、CFL条件を考えると $\nu \leq 1$ なので拡散項に ν を含まないLax-Freidrichスキームは
とても拡散的であると言える。これら2階微分の差分式につく係数 ν が各スキームの
性質を示している。

次回の内容

- ・ 移流方程式の陰解法
- ・ 拡散方程式, 楕円方程式の数値的解法
- ・ より高次な風上差分式の導出
- ・ 非線形方程式への拡張