2.3. 有限差分法について

さらに離散化のために，偏微分方程式の微分項を差分近似することを考える．

u_j^nを$u(n\Delta t, j\Delta x)$などとして，いま時間方向は一定としΔxが微小としてTaylor展開すると

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j + \cdots$$

これより，1次精度での前進差分式

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \cdot\cdot\cdot ①'$$

が得られる．(微分が四則演算になっている．)同様に，$u|_{j-1}$をj周りで展開して

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j - \cdots$$

これより，1次精度での後退差分式

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \cdot\cdot\cdot ②'$$

が得られる．

2.3. 有限差分法について

さらに各々のTaylor展開の差をとると(収束級数同士であることに注意)，中心差分式

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \qquad ・・・③$$

が得られる．これは差を取ると$(\Delta x)^2$の項が打ち消し合うので誤差は$O((\Delta x)^2)$である．
次に各々のTaylor展開の和をとると，2階微分の差分式

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \qquad ・・・④$$

今，一回微分において前進差分，後進差分，
中心差分が得れらたが，前者2つは1次精度，
中心差分のみ2次精度である．
→精度は高い方がいいので，前者2つも2次精度
にしたい．

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j + \cdots$$

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j - \cdots$$