4.2. FTCSスキーム

これにvon Neumannの安定性解析を行なってみる．$u_j^n = g^n \exp(i(j\theta))$として

$$g^{n+1}e^{ij\theta} = g^n e^{ij\theta} - \frac{1}{2}\nu(g^n e^{i(j+1)\theta} - g^n e^{i(j-1)\theta})$$

$$\therefore g = 1 - \nu \sin\theta$$

$g = |g| e^{i\phi}$として

$$|g| e^{i\phi} = |g|(\cos\phi + i\sin\phi) = 1 - \nu\sin\theta$$

$$\therefore |g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2\theta, \phi = -\arctan(\nu\sin\theta)$$

移流方程式の解析解は$u(x, t) = u(x - ct)$なので

$$|g|_{ex} = 1, \phi_{ex} = -\nu\theta$$

なお，これは

$$|g|^2 = 1 + \nu^2\sin^2\theta \geqq 1$$

なので考えるまでもなく常に不安定になってしまう．

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

4.3. Lax-Friedrichのスキーム

FTCSスキームと同様に

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

まで離散化する．このままでは絶対不安定となって役に立たないスキームなので，

平均操作で解を安定方向へ持っていくようにする(後述)．つまり右辺のu_j^nを

$$u_j^n = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$$

$$\therefore u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Von Neumannの安定性解析をすると

$$g = \cos\theta - i\nu\sin\theta$$

$$\therefore |g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2\sin^2\theta, \phi = -\arctan(\nu\tan\theta)$$