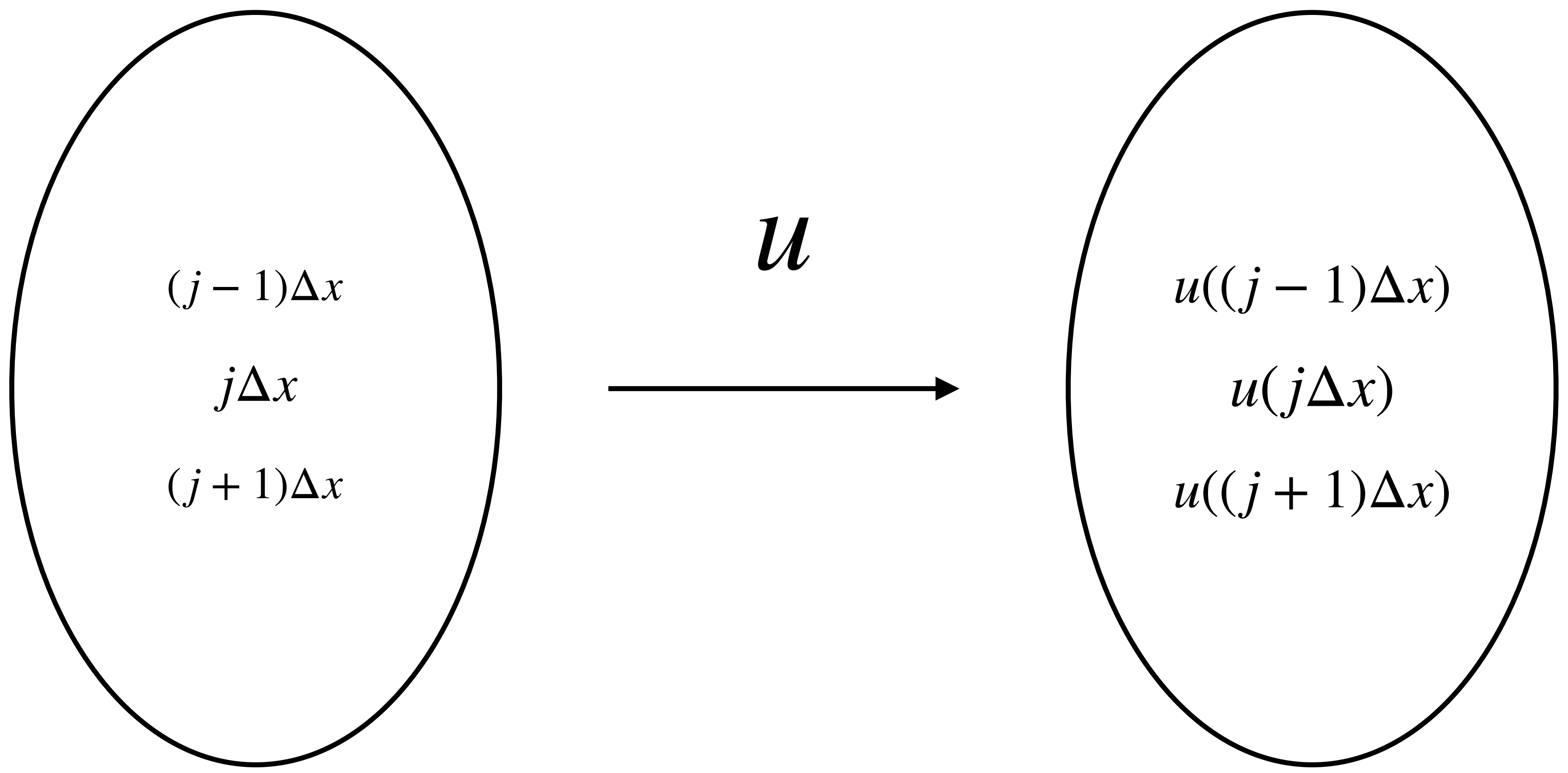
2.3. 有限差分法について

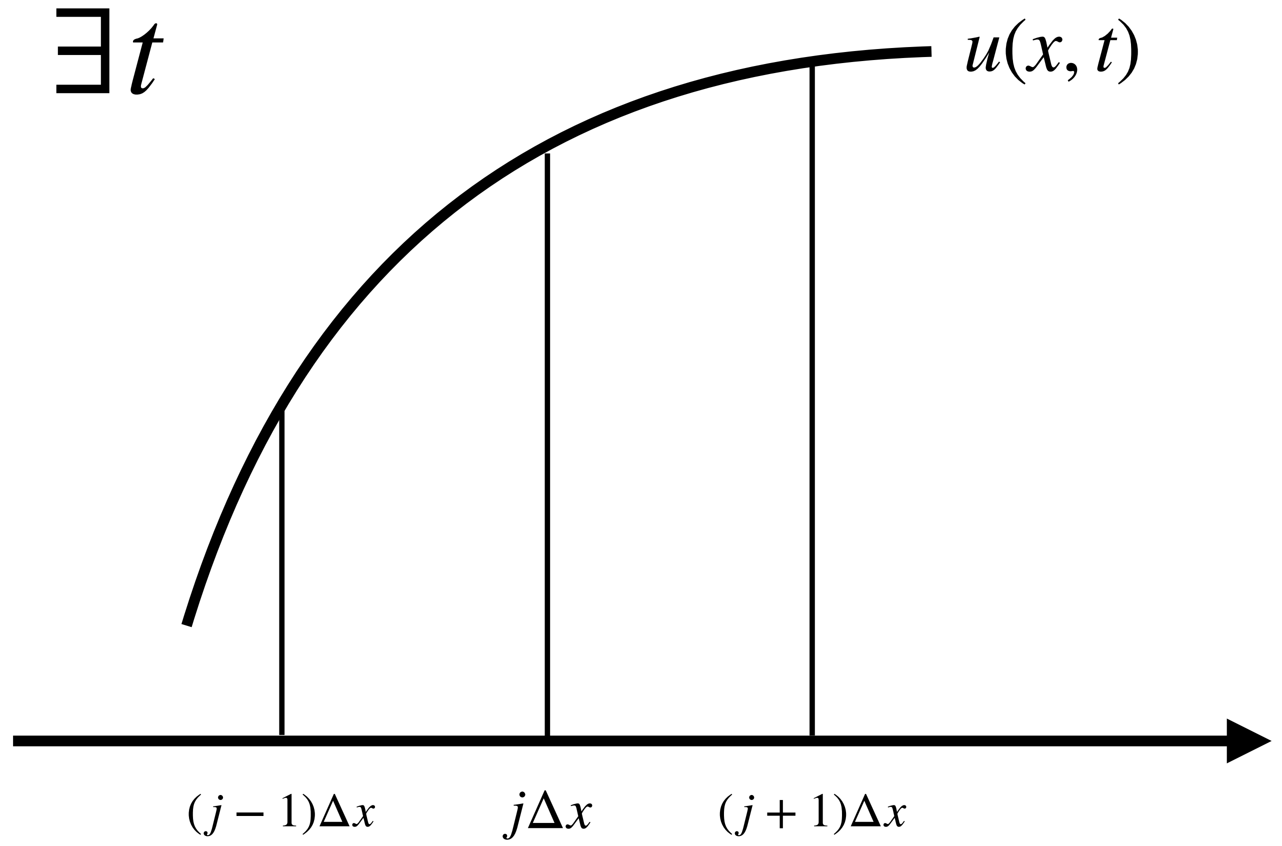
有限差分法は，柔軟性に欠けるものの構造が単純でわかりやすく，プログラムも容易であることからよく用いられる方法である．これを詳しく見る．

・格子法として分類されることからもわかるように，まず対象となる連続領域を格子に分割する作業が必要

→つまり，厳密解が$u(x,t)$である時，この計算法で得られる解は$u(n\Delta t, j\Delta x)$となる．

（ここで$\Delta t, \Delta x$は格子点の幅，n, jはステップ数．）





2.3. 有限差分法について

さらに離散化のために，偏微分方程式の微分項を差分近似することを考える.

u_j^nを$u(n\Delta t, j\Delta x)$などとして，いま時間方向は一定としΔxが微小としてTaylor展開すると

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j + \cdots$$

これより，1次精度での前進差分式

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \cdots ①'$$

が得られる.（微分が四則演算になっている.）同様に，$u|_{j-1}$をj周りで展開して

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_j - \cdots$$

これより，1次精度での後退差分式

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \cdots ②'$$

が得られる.