2.3. 有限差分法について

さらに各々のTaylor展開の差をとると(収束級数同士であることに注意)，中心差分式

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \qquad ・・・③$$

が得られる．これは差を取ると$(\Delta x)^2$の項が打ち消し合うので誤差は$O((\Delta x)^2)$である．
次に各々のTaylor展開の和をとると，2階微分の差分式

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \qquad ・・・④$$

今，一回微分において前進差分，後進差分，
中心差分が得れらたが，前者2つは1次精度，
中心差分のみ2次精度である．
→精度は高い方がいいので，前者2つも2次精度
にしたい．

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j + \cdots$$

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j - \cdots$$

2.3. 有限差分法について

今度は$u_{j\pm2}$をj周りでTaylor展開してみる.

$$u_{j+2} = u_j + 2\Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + 2(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j + \cdots$$

$$u_{j-2} = u_j - 2\Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + 2(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j - \cdots$$

これらから$u_{j\pm1}$のTaylor展開で2階微分の項を消去することを考えると,

2次精度の前進，後進差分式

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

が得られる.

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j + \cdots$$

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j - \cdots$$