4.2. FTCSスキーム

ここからは具体的なスキームを見ていく．モデル方程式は，流体力学の重要な現象である”移流”と”拡散”を表す”移流方程式”と”拡散方程式”であり，まずは移流方程式

$$u_t + cu_x = 0 \qquad (c > 0)$$

を対象に考える．先に，陽解法に分類されるスキームから見ていく．

時間は前にしか進まないことや，1ステップ先のある点は現在のその点の周囲の点の情報を受け取ることを考えると，自然な離散化として

$$u_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \qquad u_x = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

これをモデルに代入して整理すると，クーラン数νとして

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

となる．

4.2. FTCSスキーム

これにvon Neumannの安定性解析を行なってみる．$u_j^n = g^n \exp(i(j\theta))$として

$$g^{n+1}e^{ij\theta} = g^n e^{ij\theta} - \frac{1}{2}\nu(g^n e^{i(j+1)\theta} - g^n e^{i(j-1)\theta})$$

$$\therefore g = 1 - \nu \sin\theta$$

$g = |g|e^{i\phi}$として

$$|g|e^{i\phi} = |g|(\cos\phi + i\sin\phi) = 1 - \nu\sin\theta$$

$$\therefore |g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2\theta, \phi = -\arctan(\nu\sin\theta)$$

移流方程式の解析解は$u(x,t) = u(x-ct)$なので

$$|g|_{ex} = 1, \phi_{ex} = -\nu\theta$$

なお，これは

$$|g|^2 = 1 + \nu^2\sin^2\theta \geqq 1$$

なので考えるまでもなく常に不安定になってしまう．

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$