การป้องการความเสี่ยง (Hedging)

เสนอ

ผศ.ดร. สมพร ปั่นโภชา

สมาชิก

2010511104009 พัชร โสพสโชคชัย

2010511104023 ปฐมพร สุขหอ

รายงานเล่มนี้เป็นส่วนนึงของรายวิชา สัมมนาคณิตศาสตร์การเงิน (SM420)

ภาคปลายปีการศึกษา 2566

มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

บทที่ 9

การป้องการความเสี่ยง (Hedging)

การป้องกันความเสี่ยงเป็นแนวทางปฏิบัติในการทำให้พอร์ตการลงทุนมีความอ่อนไหวน้อยลงต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในตลาด เช่น ราคาหลักทรัพย์และอัตราดอกเบี้ย ถ้า F(S, t) เป็นคำตอบของ Black-Scholes Partial Differential Equation. (6.14) ขนาด $\Delta = F_S$ เป็นส่วนสำคัญของการป้องกันความเสี่ยงในพอร์ตโฟลิโอ ในความเป็นจริงแล้วขนาดของ Δ ที่เหมือนกันนี้ถูกใช้เพื่อให้ได้ Black-Scholes PDE เมื่อ Δ เป็นศูนย์ ทำให้สมการ Black-Scholes สามารถบอกได้ว่า อัตราผลตอบแทนจากพอร์ตโฟลิโอที่ประกอบด้วยการเป็นเจ้าของหลักทรัพย์อ้างอิงและการขายออปชั่น (หรือ position ตรงกันข้าม) ควรมีค่าเท่ากับอัตราของผลตอบแทนจากอัตราดอกเบี้ยไร้ความเสี่ยง (Risk-free interest rate) ในจำนวนเงินสดสุทธิที่เท่ากัน

ในบทที่ 8 อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivatives) มูลค่าของ European put option และ call option ได้รับการคำนวณไปแล้ว ในบทนี้จึงจะใช้ในการพูดถึงการป้องกันความเสี่ยงให้กับพอร์ตการลงทุน

9.1 หลักการทั่วไป

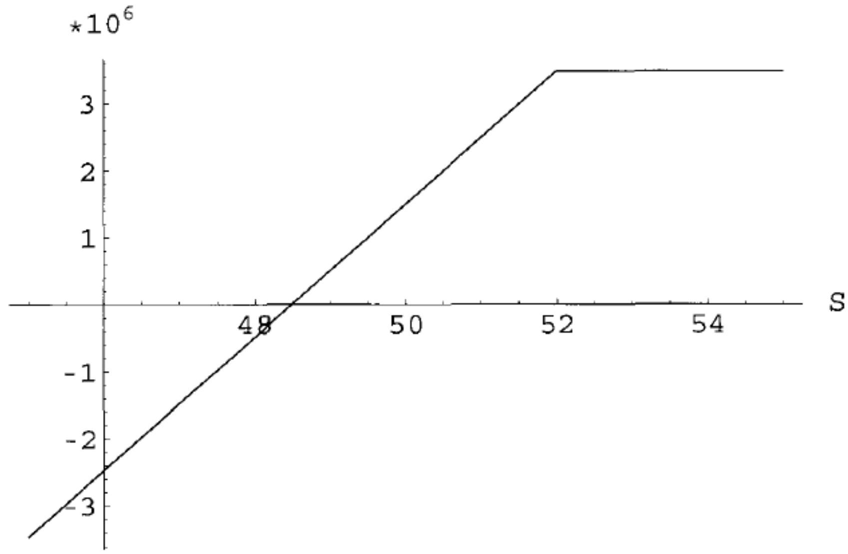
ก่อนที่เราจะมีการกล่าวถึงการป้องกันความเสี่ยง ให้เรานึกถึงว่าหากมีบุคคลหนึ่ง (เช่น ธนาคาร) จะขาย call option ที่อ้างอิงกับราคาหุ้นให้กับอีกบุคคลหนึ่ง (เช่น นักลงทุน) โดยธนาคารได้ให้สัญญากับนักลงทุนว่านักลงทุนจะสามารถซื้อหุ้นได้ในราคาที่กำหนดไว้ (ราคาใช้สิทธิ : strike price) ในเวลาที่กำหนดไว้ในอนาคต (วันหมดอายุ : expiry date) โดยหุ้นจะต้องมีพร้อมสำหรับนักลงทุนในราคาใช้สิทธิถึงแม้ว่ามูลค่าตลาดของหุ้นจะสูงกว่าราคาที่ใช้สิทธิก็ตาม ซึ่งธนาคารอยู่ในตำแหน่งที่ได้รับประโยชน์หาก ณ วันใช้สิทธิราคาตลาดของหุ้นต่ำกว่าราคาใช้สิทธิที่ตั้งไว้ เมื่อตอนขาย call option ให้กับนักลงทุน ในกรณีนี้นักลงทุนจะไม่มีการใช้สิทธิ call option และธนาคารจะเก็บเงินที่ได้รับจากการขาย option แต่ในทางกลับกัน หากราคาตลาดของหุ้นสูงกว่าราคาใช้สิทธิของ option ธนาคารจะต้องตรวจสอบให้แน่ใจว่าจะสามารถหาผู้ขายหุ้นให้กับนักลงทุนที่จะตกลงยอมรับราคาใช้สิทธิได้ วิธีหนึ่งที่สามารถบรรลุเป้าหมายนี้ได้ คือ ธนาคารเป็นผู้ขายให้กับนักลงทุนเอง

พิจารณากลยุทธ์นี้ : ธนาคารสร้าง European call option ที่อ้างอิงกับราคาหุ้นที่มีราคาปัจจุบันอยู่ที่ \$50 ในขณะที่ราคาใช้สิทธิอยู่ที่ \$52 อัตราดอกเบี้ยไร้ความเสี่ยงอยู่ที่ 2.5% ต่อปี วันหมดอายุ คือ 4 เดือน และความผันผวนของราคาหุ้นอยู่ที่ 22.5% ต่อปี ตามสูตรการกำหนดราคา option ของ Black-Scholes มูลค่าของ European call option นี้คือ \$1.91965 สมมติว่านักลงทุนซื้อ call option เหล่านี้ 1 ล้านสิทธิ ธนาคารได้รับรายได้ที่ \$1,919,650 ธนาคารมีทางเลือกที่จะรอจนถึงวันหมดอายุเพื่อซื้อหุ้น 1 ล้านหุ้น หรือธนาคารอาจซื้อ 1 ล้านหุ้นในขณะที่นักลงทุนซื้อ call option 1 ล้านสิทธิก็ได้ สมมติว่าธนาคารเลือกเส้นทางอย่างหลัง ธนาคารจะต้องจ่ายเงิน \$50 ล้าน ซึ่งมากกว่ารายได้ที่เกิดจากการขาย call option อย่างมาก

ถ้า S แทนราคาต่อหุ้นของหุ้น ณ เวลาใช้สิทธิ แล้วรายได้สุทธิที่เกิดจากธุรกรรมจะเป็นไปตามสูตรดังนี้

$$1919650 + (\min\{52, S\}e^{-0.025/3} - 50) \cdot 10^6.$$

โดยสามารถตรวจสอบได้ว่าเมื่อ S ≈ 48.4827 ค่าใช้จ่ายสุทธิเป็นศูนย์ รูปที่ 9.1 จะแสดงให้เห็นว่าหุ้นอยู่ต่ำกว่าราคานั้น ธนาคารจะขาดทุน (ที่ S = 46 จะขาดทุนมากกว่า 2.4 ล้านเหรียญสหรัฐ) และหาก = ราคาหุ้นสูงกว่ากำไรของธนาคาร (ที่ S = 52 กำไรเกือบ 3.5 ล้านเหรียญสหรัฐ) เนื่องจากราคาใช้สิทธิ์อยู่ที่ $52 รายได้สุทธิสูงสุดสำหรับธนาคารจึงเกิดขึ้นที่ราคานั้น



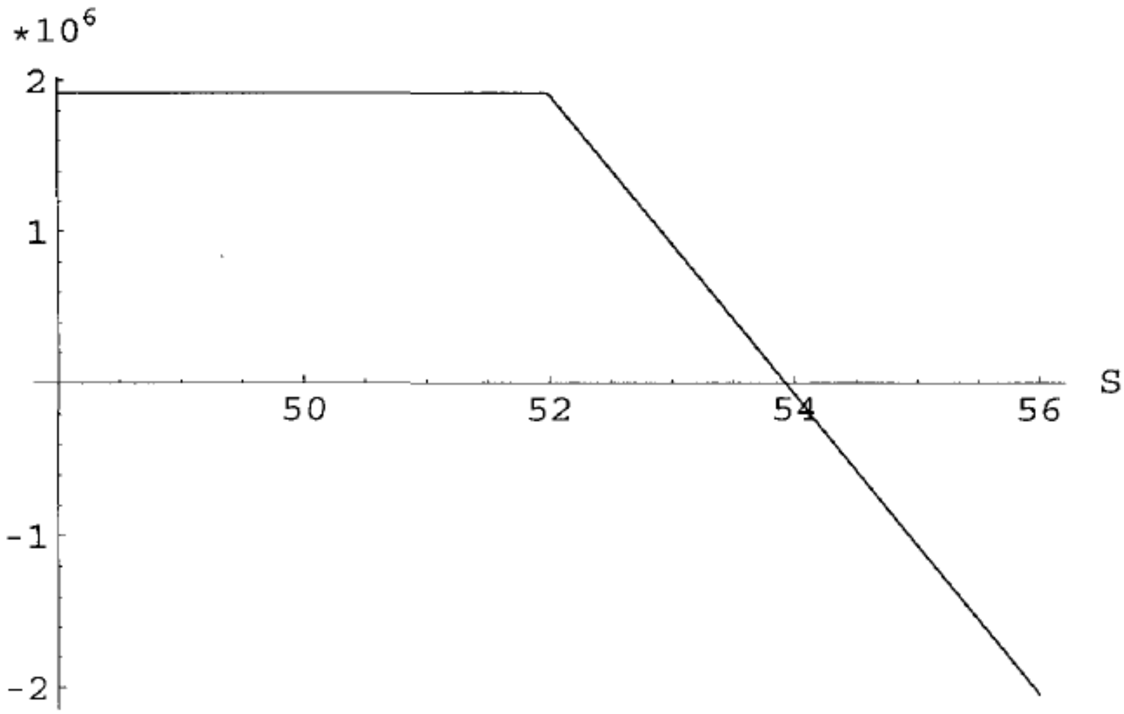
รูปที่ 9.1 เส้นแสดงกำไรหรือขาดทุนให้กับผู้ขาย European call option ที่ใช้ covered position โดยการซื้อหลักทรัพย์อ้างอิง ณ เวลาที่ขายออปชั่น

อีกทางเลือกหนึ่งสำหรับธนาคารคือการซื้อหุ้นเมื่อถึงเวลาใช้สิทธิและขายให้กับนักลงทุนทันทีในราคาใช้สิทธิ (strike price) ในสถานการณ์สมมติินี้ รายได้สุทธิที่เกิดจากธุรกรรมนี้คือ

$$1919650 + \min\{0, 52 - S\}e^{-0.025/3} \cdot 10^6.$$

รายได้สุทธิจะเป็นศูนย์เมื่อ S อยู่ที่ประมาณ $53.9357 ตราบใดที่ราคาหุ้นยังคงต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ ธนาคารจะยังคงได้รับรายได้จากการขายออปชัน อย่างไรก็ตามธนาคารยังสามารถขาดทุนได้เช่นกัน หากราคาหุ้นสูงขึ้นก่อนวันหมดอายุ หากราคาของหุ้นขึ้นไปถึง $56 ต่อหุ้น จะทำให้ผลขาดทุนสุทธิของธนาคารจะอยู่ที่ประมาณ $2.0 ล้าน

ในรูปที่ 9.2 แสดงให้เห็นถึงผลกำไรหรือขาดทุนของผู้ขาย European call option



รูปที่ 9.2 เส้นแสดงกำไรหรือขาดทุนให้กับผู้ขาย European call option ที่ใช้ naked position โดยการซื้อหลักทรัพย์อ้างอิง ณ วันหมดอายุของออปชั่น

แผนการเหล่านี้ไม่สามารถนำไปปฏิบัติได้จริงสำหรับการป้องกันความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุนในโลกการเงิน เนื่องจากอาจมีต้นทุนที่สูง ในส่วนถัดไปจะกล่าวถึงวิธีการป้องกันความเสี่ยงที่ง่ายและปฏิบัติได้จริง

9.2 การป้องกันความเสี่ยงด้วยเดลต้า (Delta Hedging)

วัตถุประสงค์ของการป้องกันความเสี่ยง คือ การกำจัดหรือลดการเปลี่ยนแปลงในมูลค่าของพอร์ตการลงทุนของนักลงทุนหรือสถาบันให้น้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ เนื่องจากเงื่อนไขที่เปลี่ยนแปลงในตลาดการเงิน ตัวแปรหนึ่งที่อาจเปลี่ยนแปลงได้ คือ มูลค่าของหุ้นหรือหลักทรัพย์ที่เป็นสินทรัพย์อ้างอิงของ option โดยจากบทที่แล้วจะเห็นว่า delta เป็นอนุพันธ์ย่อยของมูลค่าของ option ที่เกี่ยวข้องกับมูลค่าของหลักทรัพย์อ้างอิงจากในส่วนที่ 8.2 ที่กล่าวว่า Delta (Δ) กำเนิดจาก European call option และ put option เราจึงสามารถนึกถึง Delta ได้ในลักษณะดังต่อไปนี้ : สำหรับทุกหน่วยการเปลี่ยนแปลงของมูลค่าของหลักทรัพย์อ้างอิงส่งผลให้มูลค่าของ option เปลี่ยนแปลงไปตามค่า Δ พอร์ตโฟลิโอที่ประกอบด้วยหลักทรัพย์และ options เรียกว่า Delta-neutral หากมีการขาย option หลักทรัพย์อ้างอิงจะถูกซื้อตามจำนวนหน่วยของ Δ

ตัวอย่างที่ 9.1 พิจารณากรณีหลักทรัพย์ที่มีราคา $100 ในขณะที่อัตราดอกเบี้ยไร้ความเสี่ยงคือ 4% ต่อปี ความผันผวนของราคาหุ้นต่อปีคือ 23% ราคาใช้สิทธิกำหนดไว้ที่ $105 และวันหมดอายุคืออีก 3 เดือน ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ ω = -0.279806 มูลค่าของ European call option คือ C = 2.96155 และ Delta สำหรับ option คือ

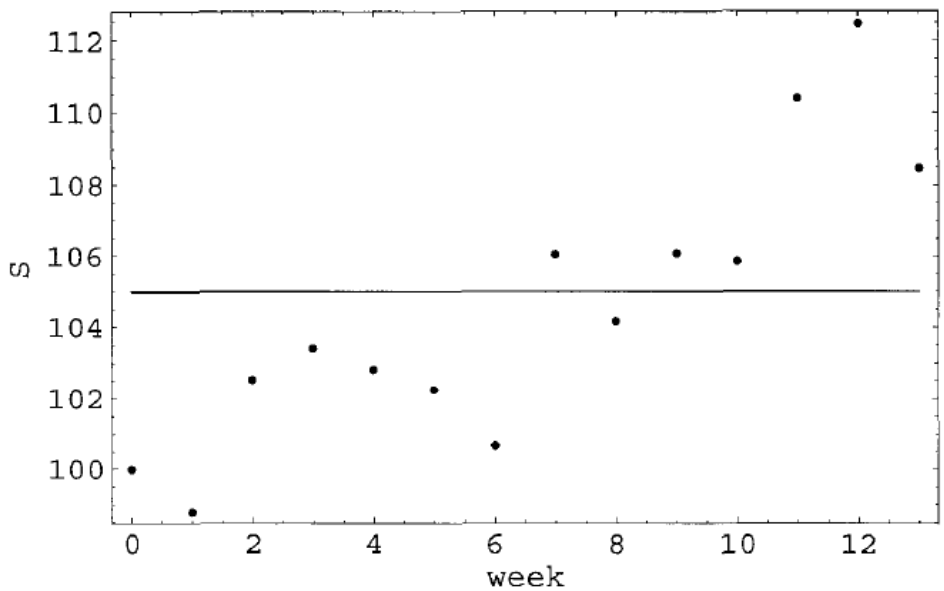
$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = 0.389813.$$

ดังนั้น หากบริษัทขาย European call option ให้นักลงทุน จำนวน 10,000 หุ้นของหลักทรัพย์อ้างอิง[1] บริษัทจะได้รับเงิน $29,615.50 และซื้อหลักทรัพย์อ้างอิงมูลค่า $38,9813 = (10,000)(0.389813)(100) ซึ่งส่วนใหญ่ได้มาจากเงินกู้ยืม

บริษัทอาจเลือกที่จะไม่ทำอะไรเพิ่มเติมจนกว่าจะถึงเวลาใช้สิทธิของ option ในกรณีนี้จะเรียกว่า "hedge and forget" ในทางกลับกัน หากราคาของหลักทรัพย์เป็นแบบ dynamic บริษัทอาจเลือกที่จะทำการปรับเปลี่ยนจำนวนหุ้นของหลักทรัพย์ที่ถืออยู่เป็นระยะๆ กลยุทธ์นี้เรียกว่าการปรับสมดุล (rebalancing) ทำให้เป็นพอร์ตโฟลิโอใหม่ โดยตัวอย่างในข้างต้นสามารถนำมาใช้ร่วมกับการปรับสมดุลรายสัปดาห์ได้

สมมติว่ามูลค่าของหลักทรัพย์เป็นไปตามการเดินแบบสุ่ม (random walk) ดังแสดงในรูปที่ 9.3 ในกรณีนี้ European call option จะถูกใช้สิทธิในวันหมดอายุ เนื่องจากราคาของหลักทรัพย์ ณ วันหมดอายุมากกว่าราคาใช้สิทธิที่ $105 เมื่อสิ้นสุดสัปดาห์แรกแล้วมูลค่าหลักทรัพย์จะลดลงเหลือ $98.79

[1] โดยปกติแล้ว option จะกำหนดไว้ที่ 100 หุ้นของหลักทรัพย์อ้างอิง (shares of the underlying security) ดังนั้นในทางปฏิบัติ option สำหรับ 10,000 หุ้นจะเท่ากับ 100 options เพื่อไม่ให้เกิดความสับสน เราจะถือว่าสมมติให้อัตราส่วน option ต่อหุ้นเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง



รูปที่ 9.3 การเดินแบบสุ่มของมูลค่าของหลักทรัพย์ เส้นแนวนอนแสดงถึงราคาใช้สิทธิของ European call option ที่อ้างอิงกับราคาหลักทรัพย์

เมื่อคำนวณใหม่จะได้ Δ = 0.339811 ดังนั้น Investment firm จะปรับการถือหลักทรัพย์ของตนทำให้จำนวนการถือหลักทรัพย์เหลือ 3,398 หุ้น ซึ่งมีมูลค่ารวม $335,699 นอกจากนี้เมื่อสิ้นสุดสัปดาห์แรกบริษัทจะมีค่าใช้จ่ายที่เกิดขึ้นในรูปของดอกเบี้ยจากเงินที่ยืมมาเพื่อซื้อหุ้นหลักทรัพย์ในตอนแรก ดังสมการ

$$(389813)(e^{0.04/52} - 1) = \$299.97.$$

ดอกเบี้ยสำหรับปัจจุบันจะถูกบวกเข้ากับรายการต้นทุนสะสมของสัปดาห์หน้า จากตารางที่ 9.1 สรุปการปรับสมดุลรายสัปดาห์จนถึงวันหมดอายุ ประกาศ ณ วันหมดอายุ Investment firm มีหลักทรัพย์ทั้งสิ้น 10,000 หุ้นในพอร์ตการลงทุนซึ่งนักลงทุนจะจ่ายเป็นมูลค่ารวม $1,050,000 ดังนั้น Investment firm มีรายได้สุทธิจากการขาย call option และการป้องกันความเสี่ยงในสถานะนี้รวมเท่ากับ

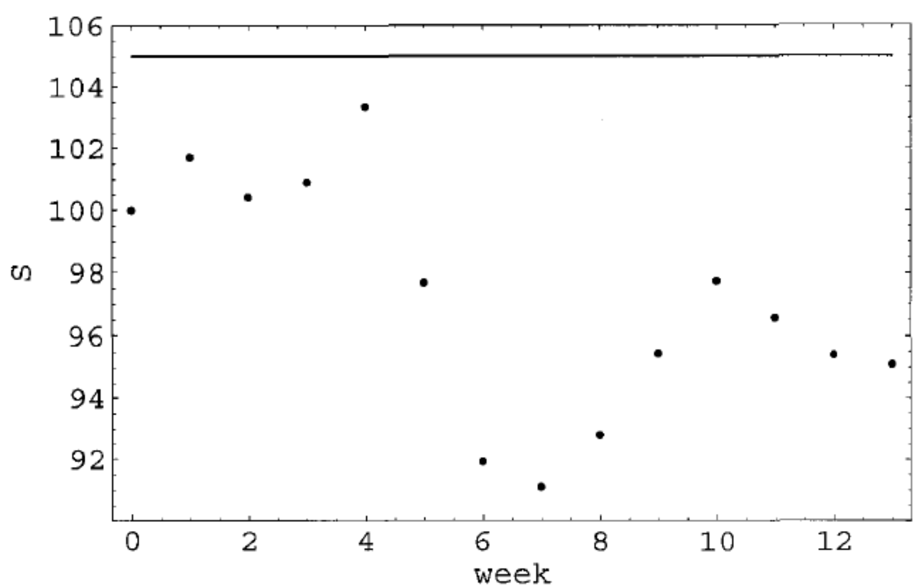
$$1{,}050{,}000 + 29{,}615.50 - 1{,}069{,}460 = \$10{,}155.50$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง บริษัทมีกำไรจากการออก call option ผู้อ่านควรทราบว่าสิ่งนี้ถือว่านักลงทุนไม่ต้องชำระค่า call option จนกว่าจะถึงวันใช้สิทธิ

ตารางที่ 9.1 การป้องกันความเสี่ยงด้วย Delta โดยใช้การปรับสมดุลพอร์ตโฟลิโอในช่วงเวลารายสัปดาห์

Week	S	Δ	Shares Held	Interest Cost	Cumulative Cost
0	100.00	0.389813	3898	300	389800
1	98.79	0.339811	3398	262	340705
2	102.52	0.462922	4629	359	467169
3	103.41	0.490192	4902	382	495760
4	102.82	0.460541	4605	358	465604
5	102.25	0.428236	4282	333	432935
6	100.67	0.347145	3471	271	351625
7	106.05	0.589204	5892	468	608643
8	104.17	0.491348	4913	390	507129
9	106.08	0.595047	5950	475	617524
10	105.86	0.585915	5859	468	608366
11	110.40	0.878690	8787	717	932085
12	112.46	0.985811	9858	811	1053247
13	108.47	1.0	10000	0	1069460

อีกทางเลือกหนึ่ง มูลค่าของหลักทรัพย์อาจมีการเติบโตในลักษณะที่ไม่มีการใช้ call option สถานการณ์ดังกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 9.4 เนื่องจากมูลค่าของหลักทรัพย์ต่ำกว่าราคาที่ใช้สิทธิจึงทำให้ call option หมดอายุโดยไม่ได้ใช้สิทธิ



รูปที่ 9.4 การรับรู้อีกประการหนึ่งของการเดินแบบสุ่ม (random walk) ของมูลค่าของหลักทรัพย์ เส้นแนวนอนแสดงถึงราคาใช้สิทธิของ European call ที่อ้างอิงกับหลักทรัพย์

จากตาราง 9.2 สรุปการปรับสมดุลรายสัปดาห์ของบริษัทการลงทุนตามแนวทางการป้องกันความเสี่ยงด้วย Delta สังเกตได้ว่า ณ วันหมดอายุ investment firm จะไม่มีหลักทรัพย์เหลืออยู่เลย (เหตุผลที่ไม่จำเป็นต้องมีเนื่องจากจะไม่มีการใช้ call option) รายได้สุทธิของ investment firm ในการขาย call option และการป้องกันความเสี่ยงจาก position ดังกล่าวคือ

$$29615.50 - 29669 = -\$53.50.$$

ในกรณีนี้บริษัทจะสูญเสียเงินเพียงเล็กน้อยจากการทำธุรกรรมทั้งหมดที่กล่าวมา

ตารางที่ 9.2 การป้องกันความเสี่ยงของ Delta โดยใช้การปรับสมดุลพอร์ตโฟลิโอในช่วงเวลารายสัปดาห์สำหรับ option ที่จะหมดอายุแล้วไม่ได้ใช้สิทธิ

Week	S	Δ	Shares Held	Interest Cost	Cumulative Cost
0	100.00	0.389813	3898	300	389800
1	101.71	0.440643	4406	340	441769
2	100.43	0.386757	3868	299	388077
3	100.91	0.394649	3946	305	396247
4	103.37	0.482725	4827	375	487621
5	97.69	0.246176	2462	198	256959
6	91.95	0.071229	712	74	96244
7	91.12	0.043022	430	54	70623
8	92.81	0.050427	504	60	77545
9	95.45	0.078574	786	80	104521
10	97.75	0.110154	1102	104	135491
11	96.58	0.036209	362	49	64126
12	95.40	0.001508	15	24	31072
13	95.10	0.0	0	0	29669

การปรับสมดุลพอร์ตโฟลิโออาจเกิดขึ้นไม่มากก็น้อยกว่ารายสัปดาห์อย่างที่เคยทำใน 2 ตัวอย่างที่กล่าวถึงก่อนหน้านี้ ปริมาณที่กล่าวถึงในส่วนที่ 8.3 เรียกว่า Gamma (Γ) เป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของพอร์ตโฟลิโอที่เกี่ยวข้องกับมูลค่าของหลักทรัพย์อ้างอิง กล่าวอีกนัยหนึ่ง Gamma คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ Delta เทียบกับ S หาก $|\Gamma|$ มีขนาดใหญ่ Δ จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วต่อการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยใน S ในกรณีนี้อาจจำเป็นต้องปรับสมดุลตำแหน่งของ investment firm บ่อยครั้ง ถ้า $|\Gamma|$ มีขนาดเล็ก ดังนั้น Δ จะค่อนข้างไม่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงใน S เพราะฉะนั้นอาจไม่จำเป็นต้องปรับสมดุลบ่อยนัก ดังนั้น investment firm จึงสามารถตรวจสอบ Gamma เพื่อกำหนดความถี่ในการปรับสมดุล position ของบริษัท

9.3 Delta Neutral Portfolios

ในแบบฝึกหัดที่ 15 ของบทที่ 7 ขอให้ผู้อ่านตรวจสอบว่าหุ้นหรือหลักทรัพย์นั้นเป็นไปตาม Black-Scholes PDE (6.14) สมมติว่าพอร์ตโฟลิโอประกอบด้วยการผสมผสานเชิงเส้นระหว่างออปชั่นและหุ้นของหลักทรัพย์อ้างอิง พอร์ตโฟลิโอประกอบด้วย short position ใน European call option และ long position หลักทรัพย์ (ป้องกันความเสี่ยงอย่างเหมาะสมตามที่อธิบายไว้ในส่วนก่อนหน้า) ดังนั้นมูลค่าสุทธิ P ของพอร์ตโฟลิโอคือ

$$\mathcal{P} = C - \Delta S = C - \left.\frac{\partial C}{\partial S}\right|_{S_0} S, \tag{9.1}$$

โดยที่ S_0 คือราคาของหลักทรัพย์ ณ เวลาที่มีการป้องกันความเสี่ยงเกิดขึ้น โดยขนาดของ P เป็นไปตามสมการของ Black-Scholes เนื่องจาก C และ S มีการทำแยกกัน และสมการนี้เป็นสมการเส้นตรง ดังนั้นจึงสมเหตุสมผลที่จะพิจารณา Delta สำหรับพอร์ตโฟลิโอ

อนุพันธ์ย่อยของพอร์ตโฟลิโอทั้งหมดเทียบกับ S โดยแสดงถึงความไวของมูลค่าพอร์ตโฟลิโอต่อการเปลี่ยนแปลงใน S การแยกความแตกต่างทั้งสองด้านของสมการ (9.1) ในส่วนที่มีความเกี่ยวข้องกับ S ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - \left.\frac{\partial C}{\partial S}\right|_{S_0}$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวจะเท่ากับศูนย์เมื่อ $S = S_0$ (เช่น ขณะที่มีการป้องกันความเสี่ยงเกิดขึ้น) และจะยังคงมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อค่า S อยู่ใกล้กับ S_0 ด้วยเหตุนี้พอร์ตโฟลิโอที่มีการป้องกันความเสี่ยงโดยใช้การป้องกันความเสี่ยงแบบ Delta บางครั้งจึงเรียกว่า Delta neutral.

สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยไร้ความเสี่ยงคงที่และความผันผวนของหลักทรัพย์ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นหากใช้อนุกรมเทย์เลอร์เพื่อหามูลค่าของพอร์ตโฟลิโอในแง่ของ t และ S คือ

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathcal{P}_0 + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}(t - t_0) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S}(S - S_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial S^2}\frac{(S - S_0)^2}{2} + \cdots \\ \delta \mathcal{P} &= \Theta \delta t + \Delta \delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\delta S)^2 + \cdots\end{aligned}$$

Terms ที่ถูกละเว้นทั้งหมดในอนุกรมเทย์เลอร์เกี่ยวข้องกับยกกำลังของ δt ที่มากกว่า 1. ส่วน Gamma Term ยังคงอยู่เนื่องจากตัวแปรสุ่ม โดยจะสุ่ม S ตามกระบวนการสุ่มที่ขึ้นอยู่กับ $\sqrt{\delta t}$ ดูสมการที่ (5.38) หากพอร์ตโฟลิโอได้รับการป้องกันความเสี่ยงโดยใช้การป้องกันด้วย delta ดังนั้น Δ ของพอร์ตโฟลิโอจะเป็นศูนย์

$$\delta\mathcal{P} \approx \Theta\delta t + \frac{1}{2}\Gamma(\delta S)^2, \tag{9.2}$$

การประมาณที่ละเว้น term ที่เกี่ยวข้องกับการยกกำลังของ δt มากกว่า 1. Term ที่เกี่ยวข้องกับ θ ไม่ใช่ stochastic ดังนั้น จึงต้องคงไว้ แต่อย่างไรก็ตามการประมาณค่าสามารถปรับปรุงเพิ่มเติมได้หากพอร์ตโฟลิโอสามารถทำให้เป็น gamma neutral เช่น หากสามารถปรับองค์ประกอบในพอร์ตโฟลิโอเพื่อให้ $\Gamma = 0$

9.4 Gamma Neutral Portfolios

Gamma สำหรับพอร์ตโฟลิโอ คือ อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของพอร์ตโฟลิโอที่มีความสัมพันธ์กับ S พอร์ตโฟลิโอไม่สามารถทำให้เป็น Gamma neutral ได้โดยใช้ option และหลักทรัพย์อ้างอิงที่มีลักษณะเชิงเส้นตรงเพียงอย่างเดียวได้ เนื่องจากอนุพันธ์อันดับสองของ S เทียบกับตัวมันเองนั้นเท่ากับศูนย์ ตามที่อธิบายไว้ในส่วนก่อนหน้า พอร์ตโฟลิโอสามารถทำให้เป็น Delta neutral ได้ด้วยการผสมผสานที่เหมาะสมของ option และหลักทรัพย์อ้างอิง แต่พอร์ตโฟลิโอสามารถทำให้เป็น Gamma neutral ได้โดยการจัดการองค์ประกอบของพอร์ตโฟลิโอ ที่มีลักษณะ non-linearly ซึ่งขึ้นอยู่กับ S องค์ประกอบหนึ่งดังกล่าว คือ option อย่างไรก็ตาม ตามที่กล่าวไว้ข้างต้น

การทำพอร์ตโฟลิโอให้เป็น Gamma neutral ไม่สามารถทำได้ โดยมีเพียง option และหลักทรัพย์อ้างอิงเท่านั้น วิธีหนึ่งที่สามารถบรรลุเป้าหมายของพอร์ตโฟลิโอ Gamma neutral คือการรวม option 2 ประเภท (หรืออาจจะมากกว่านั้น) ไว้ในพอร์ตโฟลิโอซึ่งอ้างอิงกับหลักทรัพย์แบบเดียวกัน ตัวอย่างเช่น สมมติว่าพอร์ตโฟลิโอมี option 2 แบบที่มีเวลาใช้สิทธิแตกต่างกันแต่อ้างอิงหุ้นแบบเดียวกัน investment firm อาจขาย European call options จำนวนหนึ่ง โดยมีวันหมดอายุ 3 เดือน และซื้อ European call options ในจำนวนอีกจำนวนหนึ่ง ที่อ้างอิงหุ้นแบบเดียวกัน แต่จะมีวันหมดอายุภายใน 6 เดือน ให้จำนวน option ในตอนแรกแทนด้วย w_e และให้จำนวน option ในภายหลังแทนด้วย w_l Gamma ของพอร์ตโฟลิโอก็จะเป็น

$$\Gamma_{\mathcal{P}} = w_e\Gamma_e - w_l\Gamma_l,$$

โดยที่ Γ_e และ Γ_l แสดงถึง Gamma ของ option ก่อนหน้าและภายหลังตามลำดับ เราสามารถเลือกจำนวนของ options ในตอนแรกและภายหลังเพื่อให้ $\Gamma_P = 0$ เมื่อพอร์ตโฟลิโอถูกทำให้เป็น Gamma neutral โดยหลักทรัพย์อ้างอิงจะสามารถเพิ่มลงในพอร์ตโฟลิโอในลักษณะที่ทำให้พอร์ตโฟลิโอ Delta neutral ได้ ดังนั้น ผู้อ่านควรจำไว้ว่าหลักทรัพย์อ้างอิงจะให้ค่า $\Gamma = 0$ ดังนั้นความเป็น Gamma neutral สำหรับพอร์ตโฟลิโอจะยังคงมีอยู่ ในขณะที่ความเป็น Delta neutral สำเร็จแล้ว ดังนั้นสมการ (9.2) สำหรับพอร์ตโฟลิโอ Gamma neutral จะลดรูปเป็น

$$\delta\mathcal{P} \approx \Theta\delta t. \tag{9.3}$$

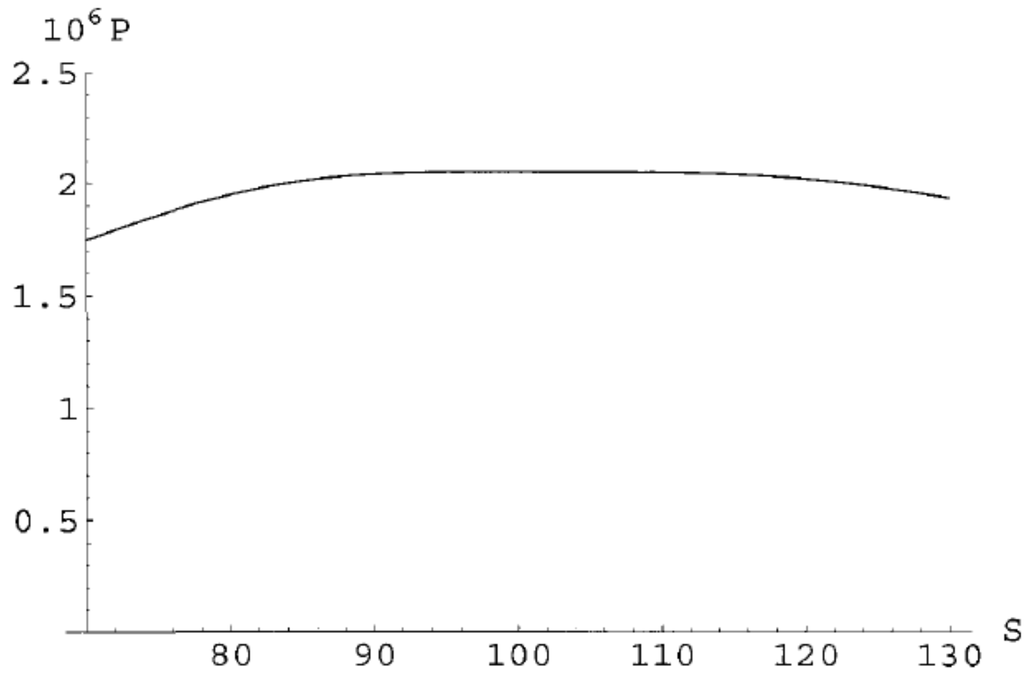
ตัวอย่างที่ 9.2 สมมติว่ามูลค่าปัจจุบันของหุ้นคือ \$100 ในขณะที่ความผันผวนของหุ้นคือ $\sigma = 0.22$ และอัตราดอกเบี้ยไร้ความเสี่ยงคือ 2.5% ต่อปี Investment firm ขาย European call option มีสินทรัพย์อ้างอิงคือหุ้นโดยมีเวลาใช้สิทธิ 3 เดือนหลังจากนี้และราคาใช้สิทธิอยู่ที่ \$102 บริษัทซื้อ European call options ที่มีสินทรัพย์อ้างอิงเป็นหุ้นตัวเดียวกัน โดยมีราคาใช้สิทธิเท่ากันแต่มีเวลาใช้สิทธิ 6 เดือนนับจากนี้ ตามสมการ (8.10) Gamma ของ option ที่มีอายุ 3 เดือนคือ $\Gamma_3 = 0.03618$ ในขณะที่ Gamma ของ option ที่มีอายุ 6 เดือนคือ $\Gamma_6 = 0.02563$ พอร์ตโฟลิโอจะกลายเป็น Gamma neutral ณ จุดใดก็ได้ในจตุภาคแรกของ w_3w_6 - space ดังสมการ

$$0.03618w_3 - 0.02563w_6 = 0$$

สมมติว่า $w_3 = 100{,}000$ ของ option อายุ 3 เดือน ที่ถูกขายไปดังนั้นพอร์ตโฟลิโอจะเป็น Gamma neutral หากเราซื้อ option อายุ 6 เดือนได้ $w_6 = 141{,}163$ ดังนั้นก่อนที่เราจะสามารถสรุปได้ว่าควรมีหุ้นไว้ในพอร์ตโฟลิโอเท่าไร จึงต้องหา Delta ของพอร์ตโฟลิโอก่อนคือ

$$w_3\Delta_3 - w_6\Delta_6 = (100000)(0.4728) - (141163)(0.5123) = -25038.$$

ดังนั้นพอร์ตโฟลิโอสามารถทำให้เป็น Delta neutral ได้หากมีการขายหุ้นอ้างอิงจำนวน 25,038 หุ้น จากรูปที่ 9.5 แสดงให้เห็นว่าช่วงของมูลค่าหุ้นอ้างอิงจะค่อนข้างกว้างและมูลค่าของพอร์ตการลงทุนยังคงใกล้เคียงกับค่าเดิม



รูปที่ 9.5 มูลค่ารวมของพอร์ตโฟลิโอที่เป็นแบบ Gamma neutral ที่ไม่อ่อนไหวต่อการเปลี่ยนแปลงมูลค่าของหลักทรัพย์อ้างอิงในช่วงต่าง ๆ

การอธิบายเรื่องการป้องกันความเสี่ยงนี้ยังห่างไกลจากความสมบูรณ์ โดยบทปัจจุบันจะมุ่งเน้นไปที่การสร้างมูลค่าของพอร์ตโฟลิโอให้ทนทานต่อการเปลี่ยนแปลงมูลค่าของหลักทรัพย์เป็นหลัก ในความเป็นจริงแล้ว อัตราดอกเบี้ยแบบไร้ความเสี่ยงและความผันผวนของหุ้นยังส่งผลต่อมูลค่าของพอร์ตการลงทุนด้วย จาก Rho และ Vega ที่กล่าวถึงในบทที่ 8 สามารถใช้ในการปรับพอร์ตการลงทุนเพื่อป้องกันความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยและความผันผวน ในบทนี้มีการสันนิษฐานด้วยว่าสามารถซื้อ option และหลักทรัพย์ที่จำเป็นได้เพื่อสร้างการป้องกันความเสี่ยงตามที่ต้องการ ในทางปฏิบัติสิ่งนี้อาจไม่สามารถทำได้เสมอไป ตัวอย่างเช่น บริษัทด้านการลงทุนอาจจะไม่สามารถซื้อหุ้นในปริมาณที่เพียงพอเพื่อสร้างพอร์ตโฟลิโอ Delta neutral หรือ Gamma neutral ได้ ในกรณีนี้พวกเขาอาจต้องทดแทนด้วยหลักทรัพย์อื่นที่เกี่ยวข้องหรือเครื่องมือทางการเงินอื่น ๆ เพื่อสร้างการป้องกันความเสี่ยง กลยุทธ์นี้จะกล่าวถึงในบทถัดไปหลังจากแนะนำแนวคิดทางสถิติเบื้องต้นแล้ว