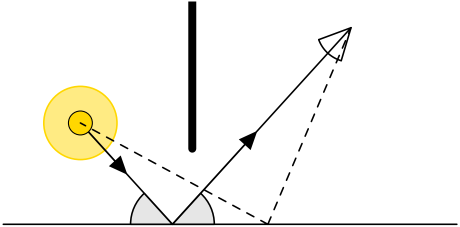
Chuyên đề - HH 2: Cực trị hình học

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

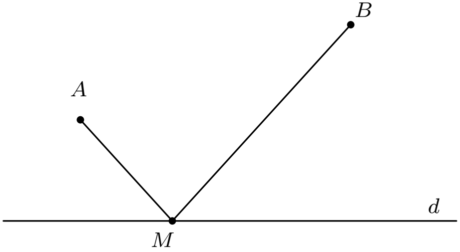
9/2022

Một bài toán trong tự nhiên (Hiện tượng phản xạ toàn phần)



Bài toán

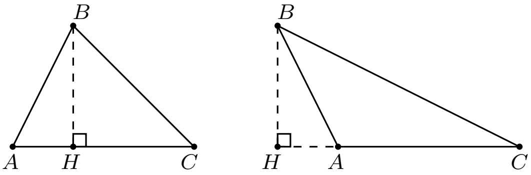
Cho hai điểm A, B nằm cùng một phía với đường thẳng d cho trước. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Ví dụ 1

Trong các $\triangle ABC$ có các cạnh AB và AC không đổi, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.



Lời giải.

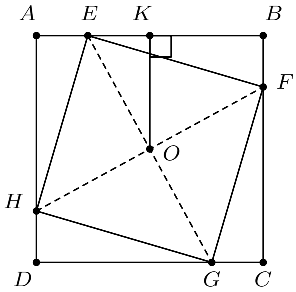
Kẻ đường cao BH, khi đó tam giác ABH vuông tại H nên $BH \leq AB$. Dẫn tới

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH \leq \frac{1}{2}AC \cdot AB \text{ (hằng số)}.$$

Vậy $\max S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB$, dấu bằng xảy ra $\iff BH = AB \iff AB \perp AC$. $\square$

Ví dụ 2

Cho hình vuông $ABCD$, hãy xác định hình vuông $EFGH$ có các đỉnh nằm trên các cạnh của hình vuông $ABCD$ sao cho $EFGH$ có diện tích nhỏ nhất.



Lời giải.

Chứng minh được tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $EFGH$ trùng nhau tại một điểm O (tại sao?). Ta có

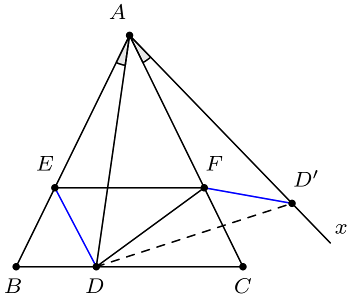
$$S_{EFGH} = EF^2 = (\sqrt{2}OE)^2 = 2OE^2.$$

Với K là trung điểm AB thì $OE \geq OK$, dẫn tới $S_{EFGH} \geq 2OK^2$ (hằng số).
Vậy diện tích $EFGH$ nhỏ nhất $\iff E, F, G, H$ là trung điểm các cạnh hình vuông $ABCD$. $\square$

Bất đẳng thức tam giác

Ví dụ 3

Cho $\triangle ABC$ cân tại A và điểm D cố định thuộc cạnh BC. Hãy dựng một đường thẳng song song với BC, cắt hai cạnh bên ở E, F sao cho $ED + FD$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải.

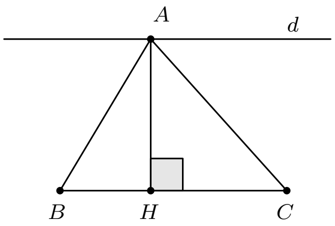
Dựng tia Ax nằm khác phía điểm B so với AC sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAD}$, trên Ax lấy D' sao cho $AD' = AD$. Khi đó D' cố định và $ED = D'F$.

$$\Longrightarrow ED + FD = D'F + FD \geq DD' \text{ (hằng số).}$$

Vậy $ED + FD$ nhỏ nhất $\iff$ F là giao điểm DD' với AC. $\square$

Ví dụ 4

Trong các $\triangle ABC$ có cùng cạnh BC và cùng diện tích, hãy tìm tam giác có chu vi nhỏ nhất.

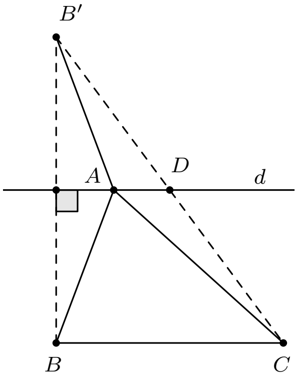


Lời giải

Kẻ đường cao AH, ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC \implies AH = \frac{2S_{ABC}}{BC}.$$

Vì S_{ABC}, BC là hằng số nên AH cũng là hằng số. Do đó khoảng cách từ A đến BC không đổi. Vậy A di chuyển trên một đường cố định $d \parallel BC$.



Lời giải

Chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất $\iff$ $AB + AC$ nhỏ nhất.
Gọi B' là điểm đối xứng với B qua d, khi đó

$$AB + AC = AB' + AC \geq B'C \text{ (hằng số)}.$$

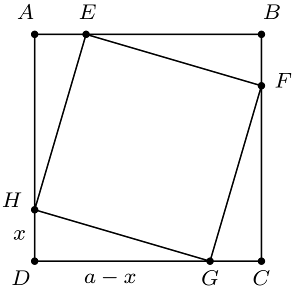
$AB + AC = B'C \iff B', A, C$ thẳng hàng. Khi đó A ở vị trí giao điểm D của $B'C$ và d, $\triangle DBC$ cân tại D.

Vậy trong các $\triangle ABC$ có cùng cạnh BC và cùng diện tích thì tam giác cân với cạnh đáy BC có chu vi nhỏ nhất.

Bất đẳng thức đại số

Ví dụ 5

Giải ví dụ 2 bằng cách khác.



Lời giải.

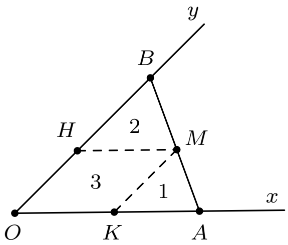
Đặt độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ là a và $DH = x$. Khi đó

$$\begin{aligned} S_{EFGH} &= S_{ABCD} - 4S_{DHG} = a^2 - 4\frac{x(a-x)}{2} \\ &= 2x^2 - 2ax + a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Vậy S_{EFGH} nhỏ nhất $\iff x = \frac{a}{2}$, từ đây có kết luận tương tự ví dụ 2. $\square$

Ví dụ 6

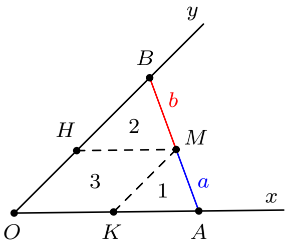
Cho $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt và một điểm M thuộc miền trong của góc. Tìm đường thẳng đi qua M và cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $\triangle OAB$ có diện tích nhỏ nhất.



Lời giải

Vẽ $MH \parallel Ox, MK \parallel Oy$ thì S_{MHOK} không đổi. Đặt diện tích của $\triangle OAB$, $\triangle AMK$, $\triangle BMH$, $MHOK$ lần lượt là S, S_1, S_2, S_3. Ta có

$$S_3 = S - (S_1 + S_2) \implies \frac{S_3}{S} = 1 - \frac{S_1 + S_2}{S}.$$



Lời giải

Các tam giác AMK, BMH, OAB đồng dạng nên

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \quad \text{và} \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

trong đó $a = MA$ và $b = MB$.

Khi đó

$$\frac{S_3}{S} = 1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì $4ab \leq (a+b)^2$ nên

$$\frac{S_3}{S} \leq \frac{1}{2} \implies S \geq 2S_3 \text{ (hằng số)}.$$

Vậy $\min S = 2S_3$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$, khi đó M là trung điểm AB.