Chuyên đề - ĐS 2: Chứng minh bất đẳng thức

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Lí thuyết

Các tính chất cơ bản

1. $a > b$ và $c > d \implies a + c > b + d$ (chú ý: bất đẳng thức $a - c > b - d$ không đúng).
2. $a > b$
   - $c > 0$ thì $ac > bc$,
   - $c < 0$ thì $ac < bc$.
3. $a > b \geq 0$ và $c > d \geq 0 \implies ac > bd$.
4. $a > b \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^* \implies a^n > b^n$.
5. $m > n > 0$
   - $a > 1 \implies a^m > a^n$,
   - $0 < a < 1 \implies a^m < a^n$.
6. $a > b > 0 \implies \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

Trong các tính chất trên, nhiều dấu $>$ (hoặc $<$) có thể thay bởi $\geq$ (hoặc $\leq$).

Bên cạnh bất đẳng thức $a^2 \geq 0$ và $-a^2 \leq 0$ thì còn hay sử dụng các bất đẳng thức sau

Liên quan đến giá trị tuyệt đối

1. $|a| \geq 0$, dấu bằng $\iff a = 0$.
2. $|a| \geq a$, dấu bằng $\iff a \geq 0$.
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$, dấu bằng $\iff ab \geq 0$.
4. $|a-b| \geq |a| - |b|$.

Ví dụ 1

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x-1| + |x-3|$.

Lời giải sai: Vì $|x-1| \geq 0, |x-3| \geq 0$ nên $A \geq 0$, dấu bằng xảy ra

$$\iff x-1 = x-3 = 0 \iff x = ?$$

Lời giải.

Ta có

$$A = |1-x| + |x-3| \geq |(1-x)+(x-3)| = 2.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff (1-x)(x-3) \geq 0 \iff 1 \leq x \leq 3.$ $\square$

Bất đẳng thức Cô-si

1. Với a, b là hai số bất kì thì

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad (a+b)^2 \geq 4ab, \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

2. Với $a, b > 0$ thì

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Tất cả các bất đẳng thức thì đều có dấu bằng xảy ra $\iff a = b$.

Ví dụ 2

Cho x, y là các số dương. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad \text{và} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}.$$

Nhân hai vế bất đẳng thức trên suy ra

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy} \cdot \frac{2}{\sqrt{xy}} = 4.$$

Từ đây suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, dấu bằng xảy ra $\iff x = y$. $\square$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 3

Chứng minh rằng $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$.

Lời giải.

Biến đổi $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$, đặt

$$y = x^2 - 5x + 5 \implies VT = (y-1)(y+1) = y^2 - 1.$$

Vì $y^2 \geq 0$ nên $y^2 - 1 \geq -1$, dẫn tới

$$VT \geq -1 = VP.$$

$\square$

Ví dụ 4

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$.

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \geq 9 \iff ab + \underbrace{a+b}_{1} + 1 \geq 9ab \iff 1 \geq 4ab.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$4ab \leq (a+b)^2 = 1.$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh, dấu bằng xảy ra $\iff a = b = \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 5

Cho a, b, c đồng thời khác 0. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Lời giải.

Áp dụng $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ta có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{2a}{c}$. Tương tự thì

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{2b}{a} \quad \text{và} \quad \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq \frac{2c}{b}.$$

Cộng ba bất đẳng thức thì có được

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \implies \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

$\square$

Ví dụ 6

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Lời giải.

Biến đổi

$$VT = 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì với $x, y > 0$ ta có

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 2.$$

Khi đó

$$VT \geq 3+2+2+2 = 9.$$

□

Ví dụ 7

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$ thì $\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Với mỗi số nguyên $k \geq 2$ thì

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned} VT &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} + \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{(n-1)n}} - \frac{1}{n(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□