Đại số - Bài 3: Nghiệm của phương trình bậc hai (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Bài 1

Cho các số hữu tỉ a, b, c với $a \neq 0$ và $|b| = |a + c|$. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là số hữu tỉ.

Lời giải.

Ta có

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2.$$

Do đó nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm |a - c|}{2a} \in \mathbb{Q}.$$

$\square$

Bài 2

Tìm các số $a \in \mathbb{Z}$ để các nghiệm của $x^2 - (a+4)x + 4a - 25 = 0$ đều là số nguyên.

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì

$$\Delta = a^2 - 8a + 116 = (a-4)^2 + 100$$

phải là số chính phương. Đặt $(a-4)^2 + 100 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$(a-4-k)(a-4+k) = -100.$$

Vì $a - 4 - k \leq a - 4 + k,\ a - 4 - k \equiv a - 4 + k \pmod 2$ và $100 = 2 \times 50 = 10 \times 10$ nên

$a-4-k$	-2	-50	-10
$a-4+k$	50	2	10
a	28	-20	4

Như vậy $a \in \{-20, 4, 28\}$ (thử lại thỏa mãn). $\square$

Bài 3a

Tìm các giá trị của m để $x^2 + (m-2)x + 3 = 0$ và $2x^2 + mx + m + 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

Lời giải.

Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2 + (m-2)x_0 + 3 = 0 \\ 2x_0^2 + mx_0 + m + 2 = 0 \end{cases} \implies (m-4)x_0 + 4 - m = 0.$$

Thấy rằng với $m = 4$ thì hai phương trình là $x^2 + 2x + 3 = 0$ và $2x^2 + 2x + 4 = 0$ không có nghiệm chung. Do đó $m \neq 4$, suy ra $x_0 = 1$. Dẫn tới

$$\begin{cases} 1 + (m-2) + 3 = 0 \\ 2 + m + m + 2 = 0 \end{cases} \implies m = -2.$$

Vậy $m = -2$ (thử lại thỏa mãn). $\square$

Bài 3b

Tìm các giá trị của m để một nghiệm của $2x^2 - 13x + 2m = 0$ gấp đôi một nghiệm của $x^2 - 4x + m = 0$.

Lời giải.

Giả sử x_0 là nghiệm của $x^2 - 4x + m = 0$ và $2x_0$ là nghiệm của $2x^2 - 13x + 2m = 0$.

$$\begin{cases} x_0^2 - 4x_0 + m = 0 \\ 2(2x_0)^2 - 13 \cdot (2x_0) + 2m = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0^2 - 4x_0 + m = 0 \\ 4x_0^2 - 13x_0 + m = 0 \end{cases}.$$

Thực hiện

$$4x_0^2 - 13x_0 + m - 4(x_0^2 - 4x_0 + m) = 0 \implies x_0 = m.$$

Do đó $m^2 - 4m + m = 0 \implies m \in \{0, 3\}$ (thử lại thỏa mãn). $\square$

Bài 4a

Cho số nguyên lẻ m, chứng minh $m^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Lời giải.

Đặt $m = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1.$$

Thấy rằng k hoặc $k+1$ là số chẵn nên $k(k+1)$ là số chẵn, do vậy có thể đặt $k(k+1) = 2u$ với $u \in \mathbb{Z}$. Dẫn đến

$$m^2 = 4 \cdot 2u + 1 = 8u + 1 \equiv 1 \pmod 8.$$

$\square$

Bài 4b

Cho các số nguyên lẻ a, b, c. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải.

Giả sử $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó Δ phải là số chính phương. Vì a, b, c lẻ nên

$$b^2 = 8H + 1 \quad \text{và} \quad ac = 2K + 1$$

với $H, K \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = 8H + 1 - 4(2K + 1)\\ &= 8(H - K) - 3\\ &\equiv -3 \not\equiv 1 \pmod 8.\end{aligned}$$

Như vậy theo câu a thì Δ không thể là số chính phương (mâu thuẫn). $\square$

Bài 5a

Cho số nguyên tố q và số nguyên a. Biết rằng a^2 là bội của q, chứng minh a^2 là bội của q^2.

Tính chất

Với số nguyên tố q và các số nguyên c, d thỏa mãn

$$cd \,\vdots\, q \implies c \,\vdots\, q \quad \text{hoặc} \quad d \,\vdots\, q$$

Lời giải.

Vì $a^2 \,\vdots\, q$ mà q là số nguyên tố nên $a \,\vdots\, q$, đặt $a = qk$ với $k \in \mathbb{Z}$ thì

$$a^2 = (qk)^2 = q^2 \cdot k^2 \,\vdots\, q^2$$

$\square$

Bài 5b

Tìm các số nguyên tố p, biết rằng phương trình $x^2 + px - 12p = 0$ có hai nghiệm nguyên.

Tính chất

Cho các số nguyên a, b, c khác 0 thì $ac \vdots bc \iff a \vdots b$

Lời giải.

Vì phương trình có nghiệm nguyên nên $\Delta = p^2 + 48p$ là số chính phương. Mà

$$\Delta \vdots p \implies \Delta \vdots p^2 \implies 48 + p \vdots p$$

Do đó $48 \vdots p$, mặt khác $48 = 2^4 \times 3$ nên $p \in \{2, 3\}$. Thử lại thì chỉ có trường hợp $p = 2$ thỏa mãn. □