Chuyên đề - HH 4: Cực trị đối với đường tròn (Bài tập)

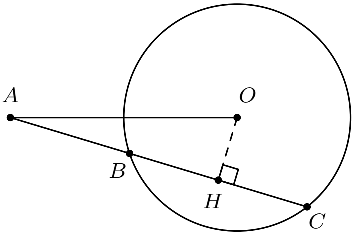
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Bài 1

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Xác định đường thẳng đi qua A cắt đường tròn tại hai điểm B, C sao cho $AB + AC$ lớn nhất.



Lời giải.

Gọi H là trung điểm BC thì

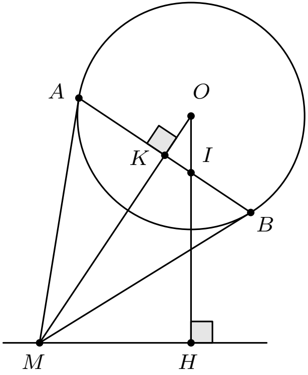
$$AB + AC = 2AH.$$

Ngoài ra $OH \perp BC$ nên $AH \leq AO$.

Vậy $\max(AB + AC) = 2AO$, dấu bằng xảy ra $\iff$ đường thẳng đi qua O. □

Bài 2a

d và (O) không giao nhau. Điểm M di chuyển trên d, kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O). Gọi H là hình chiếu của O trên d, điểm I là giao điểm OH với AB. Chứng minh rằng $OI \cdot OH = OM \cdot OK$ với K là trung điểm AB.



Lời giải.

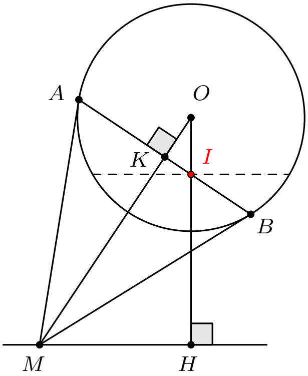
Dễ thấy $\triangle OKI \sim \triangle OHM$ (g.g) nên

$$\frac{OK}{OI} = \frac{OH}{OM} \implies OI \cdot OH = OM \cdot OK$$

$\square$

Bài 2b

Tìm vị trí của M để AB nhỏ nhất.



Lời giải.

Theo câu a thì

$$OI \cdot OH = OM \cdot OK = OA^2 \implies OI = \frac{OA^2}{OH}$$

nên I là điểm cố định. Trong các dây đi qua I, dây vuông góc OI tại I có độ dài nhỏ nhất, khi đó M trùng H. □

Bài 3

Cho đường tròn (O, R). Các điểm A, B, C di chuyển trên đường tròn sao cho chu vi $\triangle ABC$ không đổi. Biết rằng có công thức diện tích

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi là tam giác đều.

Lời giải.

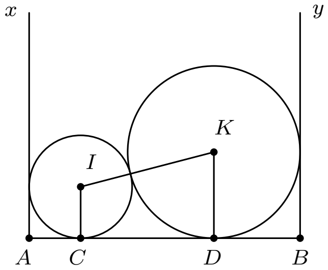
Theo đề thì $a + b + c = k$ với k là hằng số. Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{k^3}{27} \implies S_{ABC} \leq \frac{k^3}{81R}.$$

Vậy $\max S_{ABC} = \frac{k^3}{81R} \iff a = b = c$. $\square$

Bài 4

Các tia Ax và By vuông góc với AB và nằm một phía của AB. (I) và (K) tiếp xúc ngoài với nhau, tiếp xúc đoạn AB, (I) tiếp xúc Ax, (K) tiếp xúc By. Xác định vị trí của $(I), (K)$ sao cho tứ giác $CIKD$ có diện tích lớn nhất (C, D theo thứ tự là tiếp điểm của các $(I), (K)$ với AB).



Lời giải

Đặt $IC + KD = x$ thì

$$AC + BD = IC + KD = x.$$

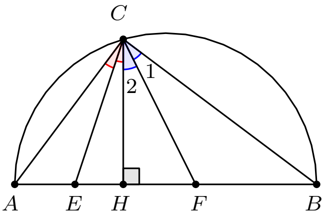
Suy ra $CD = AB - x$ nên

$$S_{CIKD} = \frac{x(AB - x)}{2} \leq \frac{AB^2}{8}.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff AC + BD = \frac{AB}{2} \iff AC = BD = \frac{AB}{4}$.

Bài 6a

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Điểm C di chuyển trên nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Gọi CE, CF lần lượt là các đường phân giác của $\widehat{HCA}, \widehat{HCB}$. Chứng minh rằng $EF = AC + BC - AB$.



Lời giải.

Ta có

$$\widehat{ACF} = 90^\circ - \widehat{C}_1 = 90^\circ - \widehat{C}_2 = \widehat{CFA}$$

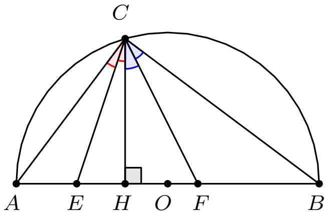
nên $\triangle ACF$ cân tại A, do vậy $AC = AF$. Tương tự thì $BC = BE$, dẫn đến

$$AC + BC = AF + BE = AB + EF.$$

□

Bài 6b

Tìm vị trí của C để $\triangle CEF$ có diện tích lớn nhất.



Lời giải.

Đặt $AC = x, BC = y$ thì $EF = x + y - 2R$. Có $CH \leq CF = R$ nên

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} CH \cdot EF \leq \frac{1}{2} R(x + y - 2R).$$

Mặt khác

$$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \cdot AB^2 = 8R^2.$$

$\square$

Suy ra

$$x + y \leq 2\sqrt{2}R \implies S_{AEF} \leq (\sqrt{2} - 1)R^2.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff x = y \iff CO \perp AB$.