Chuyên đề - ĐS 6: Liên hợp trong giải phương trình

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

11/2022

Khi rút gọn biểu thức thì biến đổi

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Tuy nhiên khi giải phương trình thì làm ngược lại

$$\sqrt{x-1}-2 = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2}.$$

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq \frac{5}{3}$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4})+(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2})=0\\
\iff\ &\frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0\\
\iff\ &(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0.
\end{aligned}$$

Biểu thức trong ngoặc luôn dương nên $x-3=0 \iff x=3$. □

$$
\begin{aligned}
a - b &= \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \\
&= \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0.$

<u>Phân tích:</u>

x	0	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{3x+1}$	1	2	$\cancel{\sqrt{7}}$	$\cancel{\sqrt{10}}$	$\cancel{\sqrt{13}}$	4	$\cancel{\sqrt{19}}$
$\sqrt{6-x}$	$\cancel{\sqrt{6}}$	$\cancel{\sqrt{5}}$				1	

Lời giải

ĐKXĐ: $\frac{-1}{3} \le x \le 6$. Biến đổi

$$(\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $\frac{-1}{3} \leq x \leq 6$. Biến đổi

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-14x-5=0\\
\iff\ & \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0\\
\iff\ & (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0.
\end{aligned}$$

Với điều kiện xác định thì

$$\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1>0.$$

Do vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$. □

Ví dụ 3

Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$.

<u>Phân tích:</u> Phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$ (sử dụng MTCT) nên ta phân tích ra thừa số $2x-1$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $0 < x \leq 1$, phương trình tương đương $(1+x^2)\sqrt{1-x} = (2x+x^2)\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
&\iff x^2(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}) + (\sqrt{1-x}-2x\sqrt{x}) = 0\\
&\iff \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} + \frac{1-x-4x^3}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}} = 0\\
&\iff (1-2x)\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} + \frac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$. □