

Đại số - Bài 4: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Bài 1

Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x} \right) : \sqrt{6x}.$

b) $B = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

c) $C = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2 + 2ab + b^2}}$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$.

Đáp án

a) $A = 7/3$

b) $B = 1$

c) $C = |a|$

Bài 2

So sánh M với 1 biết

$$M = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1}$$

với $a > 0$ và $a \neq 1$.

Lời giải.

Rút gọn được

$$M = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{a}} > 0$ nên $M < 1$.



Bài 3a

Tính giá trị biểu thức $D = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}.$

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}\frac{D}{\sqrt{2}} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + (\sqrt{5} + 1)} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2 - (\sqrt{5} - 1)} \\ &= \dots \\ &= -1.\end{aligned}$$

Do đó $D = -\sqrt{2}.$



Bài 3b

Tính giá trị biểu thức

$$E = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right] \text{ với}$$

$$x = 2 - \sqrt{3} \text{ và } y = 2 + \sqrt{3}.$$

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left(\frac{x + y}{xy} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } E\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1)}{1} = -2 \text{ nên } E = -\sqrt{2}.$$



Bài 4

Cho biết x thỏa mãn $\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1$. Không tìm x , hãy tính giá trị

$$F = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}.$$

Cách 1

Biến đổi

$$\begin{aligned} F &= \left(\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right) \left(\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right) \\ &= (x^2 - 6x + 13) - (x^2 - 6x + 10) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Cách 2

Đặt $\sqrt{x^2 - 6x + 13} = a$ và $\sqrt{x^2 - 6x + 10} = b$. Theo giả thiết thì $a - b = 1$, ngoài ra $a^2 - b^2 = 3$. Dẫn tới

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = 3.$$

Vậy $F = a + b = 3$.

Bài 5a

Cho biểu thức $G = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$. Tìm x để $G = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Rút gọn được $G = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Do vậy

$$G = \frac{1}{3} \iff \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \iff x = \frac{9}{4}.$$

Vậy $x = \frac{9}{4}$.



Bài 5b

Cho biểu thức $G = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H = G - 9\sqrt{x}$.

Lời giải.

Với $G = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ thì $H = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \right)$. Áp dụng bất đẳng thức cô-si có được

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 9\sqrt{x}} = 6.$$

Do đó $H \leq 1 - 6 = -5$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = 9\sqrt{x} \iff x = \frac{1}{9}$. □