Chuyên đề - ĐS 1: Biến đổi biểu thức (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

8/2022

Bài 1

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt.

a) Chứng minh rằng $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}
a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) &= (a^2b-a^2c+b^2c-b^2a)+c^2(a-b)\\
&= ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)\\
&= (a-b)(ab-c(a+b)+c^2)\\
&= (a-b)(c-a)(c-b)\\
&= -(a-b)(b-c)(c-a).
\end{aligned}$$

□

Bài 1

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt.

b) Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}$.

Phân tích

Với $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ hay $(a, b, c) = (4, 5, 2)$ thì $A = -3$.

$$\text{Dự đoán } A = -3.$$

Cần chứng minh

$$\begin{aligned}
& (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = -3(a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)) \\
\iff\ & (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).
\end{aligned}$$

Lời giải.

Theo ví dụ đã nêu thì

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Ngoài ra theo câu a thì

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

Do đó $A=\dfrac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=-3.$ $\square$

Bài 2

Cho $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2$ và $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2.$$

Phân tích

$$\underbrace{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}_{4} = \underbrace{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}_{2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

Cần chứng minh $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 1.$

Lời giải.

Có $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{a+b+c}{abc}=1$. Do đó

$$\begin{aligned}4=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2&=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\&=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2.\end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=2$. □

Bài 3 (Tuyển sinh Hà Nội 2022)

Cho a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$H = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Phân tích

$1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a+b)(a+c)$. Do đó

$$H = \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} - \frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Biến đổi

$$\begin{aligned} a+b+c-abc &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ &= (a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Lời giải.

Có $1+a^2=(a+b)(a+c)$, tương tự với $1+b^2, 1+c^2$. Ngoài ra thì

$$a+b+c-abc=(a+b)(b+c)(c+a).$$

Do đó

$$\begin{aligned}H&=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}-\frac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{2(ab+bc+ca-1)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0.\end{aligned}$$

Vậy $H=0$. □

Bài 4

Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn

$$a + b + c = 2022 \quad \text{và} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2022}.$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có ít nhất một số bằng 2022.

Phân tích

Cần chứng minh $(a - 2022)(b - 2022)(c - 2022) = 0$, tương đương

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$$

Ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a + b + c}$ suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2022}=\dfrac{1}{a+b+c}$, do đó

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c} \implies (ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=0.$$

Tương đương

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0 \iff (2022-c)(2022-a)(2022-b)=0.$$

Vậy có ít nhất một trong ba số a, b, c bằng 2022. $\square$