Chuyên đề - ĐS 5: Bất đẳng thức Cô-si (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

11/2022

Bài 1a

Chứng minh rằng $x^3 \geq 3x - 2$ với mọi $x > 0$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số

$$x^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3x \iff x^3 \geq 3x - 2.$$

$\square$

Bài 1b

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

Lời giải.

Áp dụng câu a thì

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3(a + b + c) - 6.$$

Cần chứng minh

$$3(a + b + c) - 6 \geq a + b + c \iff a + b + c \geq 3.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3.$ $\square$

Bài 2

Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$9(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Lời giải.

Có $9a^4 + \frac{1}{9} \geq 2a^2$, tương tự thì

$$9(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{3}.$$

Cần chứng minh

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{3} \geq a^2 + b^2 + c^2 \iff a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$. □

Chú ý

- Với hai số x, y bất kì thì

$$2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \geq 4xy.$$

- Với ba số x, y, z bất kì thì

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

Bài 3a

Tìm hai số nguyên m, n sao cho bất đẳng thức

$$m \cdot \frac{a^4}{b} + n \cdot b^3 \geq 4a^3$$

đúng với mọi $a, b > 0$.

Phân tích: Thay $a = b$ thì $m + n = 4$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho $m + n$ số thì

$$m \cdot \frac{a^4}{b} + n \cdot b^3 \geq (m+n) \sqrt[m+n]{\left(\frac{a^4}{b}\right)^m (b^3)^n} = (m+n) \sqrt[m+n]{a^{4m} b^{3n-m}}.$$

Suy ra $3n - m = 0$, nên $m = 3$ và $n = 1$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số

$$\frac{a^4}{b}+\frac{a^4}{b}+\frac{a^4}{b}+b^3 \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{a^4}{b}\right)^3\cdot b^3}=4a^3,$$

tương đương với $\dfrac{a^4}{b} \geq \dfrac{4a^3-b^3}{3}$. $\square$

Bài 4a

Chứng minh rằng $(1+x^2)(1+y^2) \geq (x+y)^2$ với mọi $x, y > 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+x^2)(1+y^2) &= x^2+y^2+(1+x^2y^2)\\ &\geq x^2+y^2+2xy\\ &= (x+y)^2.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\iff xy = 1$. $\square$

Bài 4b

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq 4\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lời giải.

Áp dụng câu a thì $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq (a+b)(b+c)(c+a)$. $\quad (*)$

Ngoài ra

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc = 8.$$

Do đó

$$\begin{aligned} VP(*) &= \sqrt[3]{\big((a+b)(b+c)(c+a)\big)^2}\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &\geq \sqrt[3]{8^2}\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= 4\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

□

Bài 5a

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

$$b\sqrt{a}+a\sqrt{c}+c\sqrt{b} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Lời giải.

Ta có

$$b\sqrt{a}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}\cdot\frac{\frac{b}{2}+ab}{2}$$

Hoàn toàn tương tự thì

$$b\sqrt{a}+a\sqrt{c}+c\sqrt{b} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}+ab+bc+ca\right).$$

Kết hợp với $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{3}{4}$ thì có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 5b

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{a+2b^2}+\dfrac{b^2}{b+2c^2}+\dfrac{c^2}{c+2a^2}\geq\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+2b^2}&=\frac{a(a+2b^2)-2ab^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\\&\geq a-\frac{2ab^2}{2\sqrt{a\cdot 2b^2}}=a-\frac{ab^2}{b\sqrt{2a}}\\&=a-\frac{b\sqrt{2a}}{2}.\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, cộng ba bất đẳng thức và kết hợp câu a thu được điều cần chứng minh. □