Hình học - Bài 6: Vị trí tương đối của hai đường tròn (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

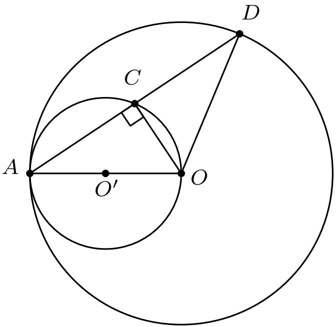
12/2022

Bài 1

Cho đường tròn tâm O bán kính OA và đường tròn đường kính OA.

a) Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C. Chứng minh $AC = CD$.



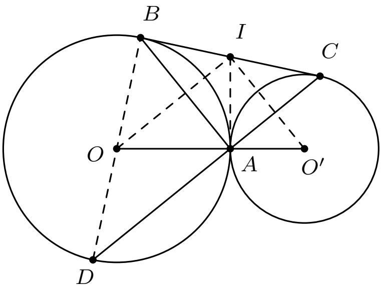
Lời giải.

a) Gọi tâm của đường tròn đường kính OA là O'. Vì $OO' = OA - O'A$ nên (O) và (O') tiếp xúc nhau.

b) Vì $C \in (O')$ và AO là đường kính của (O') nên $\widehat{ACO} = 90^\circ$. $\triangle AOD$ cân tại O có CO là đường cao nên cũng là đường trung tuyến, suy ra $AC = CD$. $\square$

Bài 2

Hai đường tròn $(O,3)$ và $(O',1)$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Tính AB và AC.



Lời giải.

Tính được $BC = 2IA = 2\sqrt{3}$. Tia CA cắt (O) tại D, ta biết rằng BD là đường kính của (O).

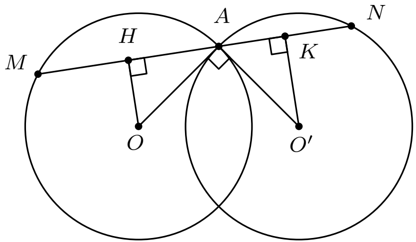
Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle BDC$ vuông tại B có đường cao BA thì

$$\frac{1}{BA^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BC^2} \implies AB = 3.$$

Do vậy $AC = \sqrt{3}$. □

Bài 3

(O) và (O') có cùng bán kính R, cắt nhau tại A và B, ngoài ra $OA \perp O'A$. Vẽ cát tuyến chung MAN với $M \in (O)$ và $N \in (O')$. Tính $AM^2 + AN^2$ theo R.



Lời giải.

Kẻ $OH, O'K \perp MN$. Chứng minh được

$$\triangle AOH = \triangle O'AK \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

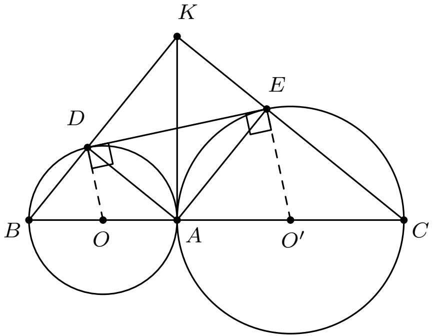
nên $AK = OH$. Do đó

$$\begin{aligned} AM^2 + AN^2 &= 4(AH^2 + AK^2) \\ &= 4(AH^2 + OH^2) \\ &= 4R^2. \end{aligned}$$

□

Bài 4a

(O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi AB, AC lần lượt là đường kính của $(O), (O')$. DE là tiếp tuyến chung với $D \in (O)$ và $E \in (O')$, K là giao điểm BD với CE. Tứ giác $ADKE$ là hình gì?



Lời giải.

Ta có $\widehat{AOD} = 2\widehat{B}$ và $\widehat{AO'E} = 2\widehat{C}$, mặt khác

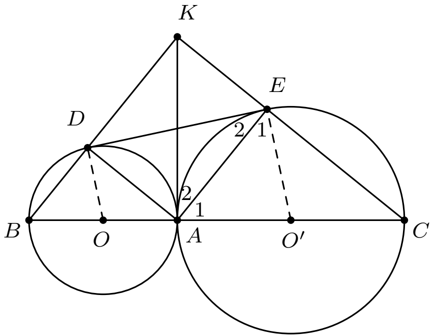
$$\widehat{AOD} + \widehat{AO'E} = 180^\circ$$

nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{BKC} = 90^\circ$, ngoài ra $\widehat{KDA} = \widehat{KEA} = 90^\circ$ nên $ADKE$ là hình chữ nhật. $\square$

Bài 4b

Chứng minh rằng AK là tiếp tuyến chung của (O) và (O').



Lời giải.

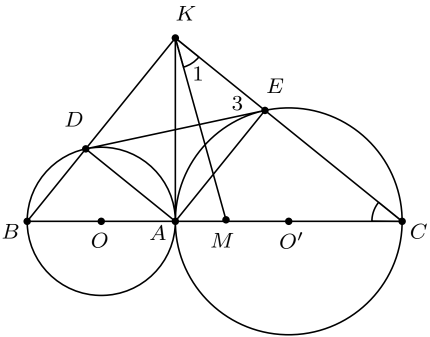
Có

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$$

nên AK là tiếp tuyến chung. □

Bài 4c

Chứng minh rằng $MK \perp DE$ với M là trung điểm BC.



Lời giải.

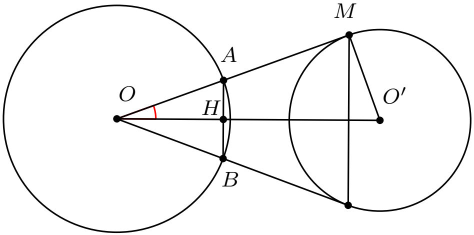
Có

$$\widehat{K}_1 + \widehat{E}_3 = \widehat{C} + \widehat{AKE} = 90^\circ$$

nên $MK \perp DE$. □

Bài 5a

(O,R) và (O',R') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến đi qua O với đường tròn (O'), chúng cắt đường tròn (O) tại A và B. Gọi H là trung điểm AB. Chứng minh rằng $AH \cdot OO' = RR'$.



Lời giải.

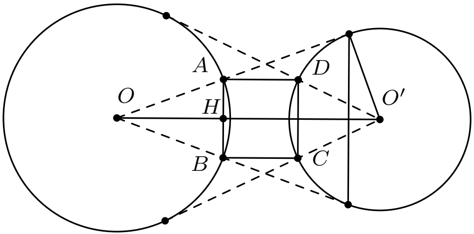
Gọi M là giao điểm OA với (O'). Ta có

$$\frac{AH}{OA} = \sin\widehat{AOH} = \frac{MO'}{OO'},$$

suy ra $AH \cdot OO' = OA \cdot MO' = RR'$. $\square$

Bài 5b

Kẻ các tiếp tuyến đi qua O' với đường tròn (O), chúng cắt đường tròn (O') tại C và D. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.



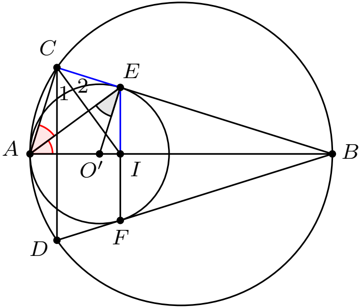
Lời giải.

Dựa vào câu a thì $AB = 2AH = \frac{2RR'}{OO'}$, tương tự cho CD có được $AB = CD$.

Sau đó chứng minh $ABCD$ là hình bình hành ($AB \parallel CD$), từ đó chứng minh nó là hình chữ nhật. $\square$

Bài 6

(O) có đường kính AB, (O') tiếp xúc trong với (O) tại A. Các dây BC, BD của (O) tiếp xúc với (O') theo thứ tự tại E, F. Gọi I là giao điểm EF với AB. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle BCD$.



Lời giải.

Với $\widehat{CAE} = \widehat{EAB}$ $(= \widehat{AEO'})$, chứng minh được

$$\triangle ACE = \triangle AIE \implies EC = EI.$$

Vậy $\triangle ECI$ cân tại E nên

$$\widehat{C}_2 = \widehat{EIC} = \widehat{C}_1.$$

Dẫn tới CI là tia phân giác $\widehat{DCB}$, ngoài ra BI là tia phân giác $\widehat{CBD}$ nên có điều cần chứng minh. □