Đại số - Bài 3: Hệ phương trình bậc nhất (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023

Bài 1

Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 4x+4y=3xy \\ 5x+6y=4xy \end{cases}$, b) $\begin{cases} 4(x+y)=5(x-y) \\ \frac{40}{x+y}+\frac{40}{x-y}=9 \end{cases}$.

Đáp án

a) $(x, y) \in \{(0,0),(4,2)\}$.

b) Hệ tương đương

$$\begin{cases} \frac{5}{x+y}-\frac{4}{x-y}=0 \\ \frac{40}{x+y}+\frac{40}{x-y}=9 \end{cases} \iff \begin{cases} 5a-4b=0 \\ 40a+40b=9 \end{cases}$$

với $a=\frac{1}{x+y}, b=\frac{1}{x-y}$. Cuối cùng thì $(x, y)=(9,1)$.

Bài 1c

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+3)(y-5)=xy\\(x-2)(y+5)=xy\end{cases}$.

Lời giải.

Hệ tương đương

$$\begin{cases}xy-5x+3y-15=xy\\xy+5x-2y-10=xy\end{cases} \iff \begin{cases}5x-3y=-15\\5x-2y=10\end{cases}.$$

Từ đây tìm được $(x,y)=(12,25)$. $\square$

Bài 1d

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y+12} = 1 \\ \dfrac{x}{y-12} - \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases}.$

Lời giải.

ĐKXĐ: $y \notin \{-12, 0, 12\}$. Hệ tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{12x}{y(y+12)} = 1 \\ \dfrac{12x}{y(y-12)} = 2 \end{cases} \implies 12x = y(y+12) = 2y(y-12).$$

Tìm được $y = 36$. Cuối cùng thì $(x, y) = (144, 36)$. □

Bài 2a

Giải và biện luận theo m hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=12 \\ mx+5y+4z=46 \\ 5x+my+3z=48 \end{cases}.$

Lời giải.

Hệ tương đương

$$\begin{cases} z=12-x-y \\ mx+5y+4(12-x-y)=46 \\ 5x+my+3(12-x-y)=48 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=12-x-y \\ (m-4)x+y=-2 \\ 2x+(m-3)y=12 \end{cases}.$$

Như vậy

- Với $m \in \{2,5\}$ thì hệ vô nghiệm.
- Với $m \notin \{2,5\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$(x,y,z)=\left(\frac{-2m-6}{(m-2)(m-5)}, \frac{12m-44}{(m-2)(m-5)}, \frac{12m-34}{m-2}\right).$$

Bài 2b

Giải và biện luận theo m hệ phương trình $\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my + z = 3m \\ x + y + mz = 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ tương đương

$$\begin{cases} z = m^2 - mx - y \\ x + my + (m^2 - mx - y) = 3m \\ x + y + m(m^2 - mx - y) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = m^2 - mx - y \\ (1-m)x + (m-1)y = 3m - m^2 \\ (m^2 - 1)x + (m-1)y = m^3 - 2 \end{cases}.$$

Như vậy

- Với $m \notin \{-2, 1\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = \left(\frac{m^2-m-1}{m-1}, \frac{2m-1}{m-1}, -1\right)$.
- Với $m = -2$ thì hệ có vô số nghiệm.
- Với $m = 1$ thì hệ vô nghiệm.

$\square$

Bài 3a

Cho các số a, b, c đôi một khác nhau sao cho $a+b+c \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+b)(x+y)-cz=a-b \\ (b+c)(y+z)-ax=b-c \\ (c+a)(z+x)-by=c-a \end{cases}.$$

Lời giải.

Cộng cả ba phương trình thì

$$(a+b+c)(x+y+z)=0 \implies x+y+z=0.$$

Tìm được

$$(x, y, z)=\left(\frac{c-b}{a+b+c}, \frac{a-c}{a+b+c}, \frac{b-a}{a+b+c}\right).$$

□

Bài 3b

Cho các số a, b, c đôi một khác nhau sao cho $a+b+c \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ bx+cy+az=0 \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}.$$

Lời giải

Cộng cả ba phương trình thì

$$(a+b+c)(x+y+z)=0 \implies x+y+z=0.$$

Thay $z=-x-y$ vào hai phương trình đầu ta có

$$(a-c)x+(b-c)y=0$$
$$(b-a)x+(c-a)y=0.$$

Lời giải.

Ta có

$$
\begin{aligned}
(a-c)x+(b-c)y&=0 \qquad (1)\\
(b-a)x+(c-a)y&=0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Lấy $(c-a)PT(1)-(b-c)PT(2)$ ta có

$$\big((c-a)(a-c)-(b-a)(b-c)\big)x=0. \qquad (3)$$

Vì

$$
\begin{aligned}
(c-a)(a-c)-(b-a)(b-c)&=-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca\\
&=\frac{-1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)<0
\end{aligned}
$$

nên $x=0$, do đó $y=z=0$. □