Đại số - Bài 2: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải bất đẳng thức (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Bài 1

Cho hai số x, y thỏa mãn $x + y + xy = (x + y)^2$. Chứng minh rằng $\frac{-1}{3} \leq x, y \leq 1$.

Lời giải.

Ta có $y^2 + (x-1)y + x^2 - x = 0$, xem đây là phương trình bậc hai ẩn y (tham số x) thì

$$\Delta_y = -3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \iff (3x+1)(x-1) \leq 0.$$

Do đó $\frac{-1}{3} \leq x \leq 1$, hoàn toàn tương tự thì $\frac{-1}{3} \leq y \leq 1$. $\square$

Bài 2a

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Ta có

$$A - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2+1} \geq 0 \implies A \geq 1.$$

Vậy $\min A = 1 \iff x = -2$. Ngoài ra

$$6 - A = \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \implies A \leq 6.$$

Vậy $\max A = 6 \iff x = \frac{1}{2}$. $\square$

Chú ý

$\min A = 1$ và $\max A = 6$ được xác định bởi phương trình bậc hai ẩn x (tham số A).

Bài 2b

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$.

Lời giải.

Quy đồng biểu thức B thì ta có

$$(B-1)x^2 + 2(B+1)x + 2B - 2 = 0. \tag{$*$}$$

Nếu $B = 1$ thì dễ thấy $x = 0$. Xét $B \neq 1$, xem $(*)$ là một phương trình bậc hai theo ẩn x (với tham số B), khi đó

$$\Delta'_x = -B^2 + 6B - 1 \geq 0.$$

Tương đương

$$(B-3)^2 \leq 8 \iff -2\sqrt{2} \leq B - 3 \leq 2\sqrt{2} \iff 3 - 2\sqrt{2} \leq B \leq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Tìm được $\min B = 3 - 2\sqrt{2} \iff x = \sqrt{2}$ và $\max B = 3 + 2\sqrt{2} \iff x = -\sqrt{2}$. $\square$

Bài 3

Cho hai số x, y thỏa mãn $xy \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$C = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

Lời giải.

Ta có

$$C = \frac{\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$$

với $t = \frac{x}{y}$. Dựa vào Ví dụ 2 ta có $\frac{1}{3} \leq C \leq 3$.

Vậy $\min C = \frac{1}{3} \iff x = y$ và $\max C = 3 \iff x = -y$. $\square$

Bài 4a

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $D = -4x^2 + 4x + 5$ với $1 \le x \le 4$.

Nháp: $D = -(2x-1)^2 + 6$ nên quan tâm $\cancel{f\left(\frac{1}{2}\right)}$, $f(1)$ và $f(4)$. Vì

$$f(1) = 5 \quad \text{và} \quad f(4) = -43$$

nên $-43 \le D \le 5$.

Lời giải.

Ta có

$$-4x^2 + 4x + 5 \ge -43 \iff (x+3)(x-4) \le 0.$$

Bất đẳng trên đúng do $1 \le x \le 4$, vậy $\min D = -43 \iff x = 4$.

$$-4x^2 + 4x + 5 \le 5 \iff x(x-1) \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $x \ge 1$, vậy $\max D = 5 \iff x = 1$. $\square$

Bài 4b

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $E = 4x^2 + 20x + 19$ với $-3 \leq x \leq 1$.

Nháp: $E = (2x+5)^2 - 6$ nên quan tâm $f(-3), f\left(\frac{-5}{2}\right)$ và $f(1)$. Vì

$$f(-3) = -5, \quad f\left(\frac{-5}{2}\right) = -6 \quad \text{và} \quad f(1) = 43$$

nên $-6 \leq E \leq 43$.

Lời giải.

Ta có

$$4x^2 + 20x + 19 \geq -6 \iff (2x+5)^2 \geq 0.$$

Vậy $\min E = -6 \iff x = \frac{-5}{2}$.

$$4x^2 + 20x + 19 \leq 43 \iff (x+6)(x-1) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $-3 \leq x \leq 1$, vậy $\max E = 43 \iff x = 1$. $\square$

Bài 5

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2(m-2)x - 2m + 7 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta' = m^2 - 2m - 3 \geq 0 \iff m \leq -1 \text{ hoặc } m \geq 3.$$

Theo hệ thức Vi-ét thì $x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 12m + 2$. Ta chứng minh

$$4m^2 - 12m + 2 \geq f(3) = 2 \iff 4m(m-3) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. Vậy

$$\min(x_1^2 + x_2^2) = 2 \iff m = 3.$$

$\square$

Bài 6

Cho hai số dương a, b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

Lời giải.

Ta có

$$F = 3\left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\right) - 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ thì $F = 3t^2 - 8t - 6$. Ta sẽ chứng minh

$$3t^2 - 8t - 6 \geq f(2) = -10 \iff (3t-2)(t-2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì $t \geq 2$. Vậy $\min F = -10$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2 \iff a = b$. $\square$