

Hình học - Bài 2: Tỉ số lượng giác của góc nhọn (Bài tập)

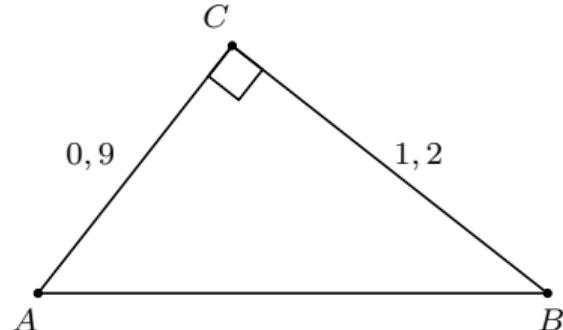
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Bài 1

Cho $\triangle ABC$ vuông tại C có $AC = 0,9$ và $BC = 1,2$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B , từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A .



Lời giải.

Có được $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 1,5$. Do vậy

$$\sin B = \frac{3}{5}, \quad \cos B = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{3}{4} \quad \text{và} \quad \operatorname{cotg} B = \frac{4}{3}.$$

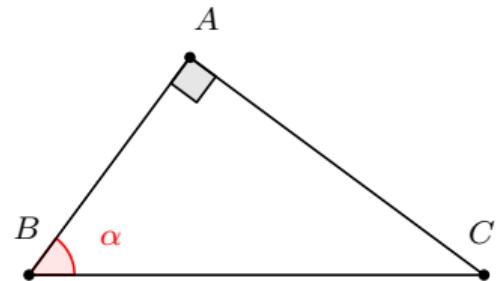
Khi đó $\sin A = \cos B = \frac{4}{5}$, hoàn toàn tương tự có được

$$\cos A = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{4}{3} \quad \text{và} \quad \operatorname{cotg} A = \frac{3}{4}.$$



Bài 2a

Chứng minh rằng với góc nhọn α bất kì thì $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.



Lời giải.

Giả sử α ứng với góc B của $\triangle ABC$ vuông tại A . Khi đó

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$



Bài 3

Biết $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Lời giải.

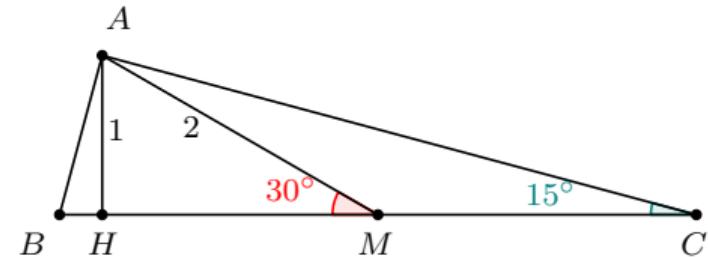
Biến đổi

$$A = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1} = -3.$$



Bài 4

Chứng minh rằng $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ mà không dùng bảng số hay máy tính.



Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\hat{C} = 15^\circ$ và $BC = 4$. Gọi AH, AM lần lượt là đường cao và đường trung tuyến của tam giác. Ta có

$$\widehat{AMH} = 30^\circ \quad \text{và} \quad AM = \frac{BC}{2} = 2.$$

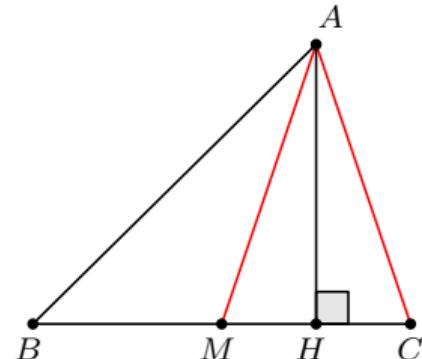
Dẫn tới $AH = 1$ và $HM = \sqrt{3}$. Suy ra $HC = \sqrt{3} + 2$ và $AC = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{HC}{AC} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

□

Bài 5

Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC . Tính $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}$.



Lời giải.

Kẻ đường cao AH . Ta có

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\frac{AH}{BH}}{\frac{AH}{CH}} = \frac{CH}{BH}.$$

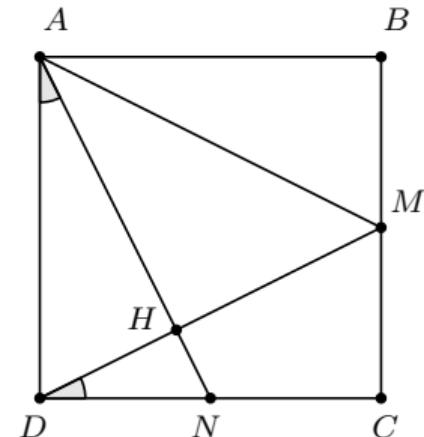
$\triangle AMC$ cân tại A có đường cao AH nên AH cũng là đường trung tuyến do đó

$$CH = \frac{CM}{2} = \frac{BC}{4} \implies \frac{CH}{BH} = \frac{1}{3}.$$



Bài 6a

Cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm BC, CD . Chứng minh rằng DM vuông góc với AN .

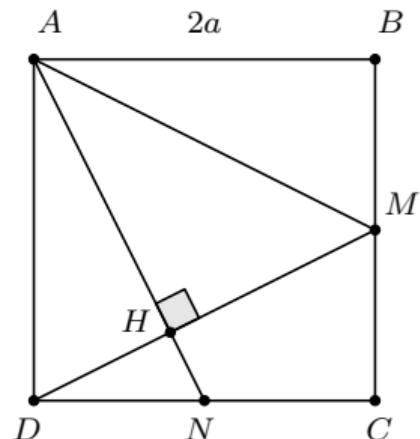


Lời giải.

Gọi H là giao điểm AN với DM . Chứng minh được $\triangle ADN \cong \triangle DCM$ (2 cạnh góc vuông), suy ra $\widehat{DAN} = \widehat{CDM}$. Do đó

$$\widehat{DAN} + \widehat{ADH} = \widehat{CDM} + \widehat{ADH} = 90^\circ.$$

Vậy DM vuông góc với AN tại H . □



Bài 6b

Cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm BC, CD . Tính $\cos \widehat{MAN}$.

Lời giải.

Đặt $AB = 2a$, tính được $AM = AN = a\sqrt{5}$. Từ

$$AD^2 = AH \cdot AN \implies AH = \frac{4a}{\sqrt{5}}.$$

Do vậy $\cos \widehat{MAN} = \frac{AH}{AM} = \frac{\frac{4a}{\sqrt{5}}}{a\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.

□