Đề kiểm tra lần 2

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 10 năm 2022

§1 Đề bài

Bài 1 (3 điểm)**.**

a) Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$.

Bài 2 (3 điểm)**.** Cho biểu thức $G = \dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

a) Rút gọn G.

b) Tìm tất cả số nguyên x để G cũng là số nguyên.

Bài 3 (3 điểm)**.**

a) Cho $\triangle ABC$ có đường phân giác AD và đường trung tuyến AM, ngoài ra thì $AB = 6$cm và $AC = 4$cm. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N. Tính tỉ số BN/CN.

b) Biết rằng với góc nhọn α bất kì thì $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ và $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Từ đó chứng minh rằng

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \times \cos^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha \times \sin^2\alpha = 2.$$

Bài 4 (1 điểm)**.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 2. Điểm I là nằm giữa A và B, tia DI cắt tia CB tại K. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

§2 Lời giải

Bài 1.

a) Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$.

Lời giải.
a) Biến đổi

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\sqrt{2}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2+\sqrt{3}}{2+(\sqrt{3}+1)} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-(\sqrt{3}-1)} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\
&= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\
&= \frac{(3+\sqrt{3}) + (3-\sqrt{3})}{6} = 1.
\end{aligned}$$

Do đó $D = \sqrt{2}$.

b) Vì $abc = 1$ nên $a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$ tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c). \tag{1}$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ $(*)$, ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \tag{2}$$

Lại áp dụng $(*)$ ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a+b+c). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$. Vậy (1) được chứng minh nên bất đẳng thức đề cho đã được giải quyết. □

Bài 2. Cho biểu thức $G = \dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

a) Rút gọn G.

b) Tìm tất cả số nguyên x để G cũng là số nguyên.

Lời giải.
a) Biến đổi

$$\begin{aligned}
G &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} \\
&= \frac{2\sqrt{x}-9+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{2\sqrt{x}-9+(2x-3\sqrt{x}-2)-(x-9)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}.
\end{aligned}$$

b) Ta có

$$G = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $\sqrt{x}$ là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Để $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}$ không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$.
Khi đó $\sqrt{x}-3$ là ước nguyên của 4, ngoài ra $\sqrt{x}-3 \geq -3$ nên $\sqrt{x}-3 \in \{-2,-1,1,2,4\}$.

$\sqrt{x}-3$	-2	-1	1	2	4
x	1	4	16	25	49
G	-1	kxđ	5	3	2

Vậy $x \in \{1, 16, 25, 49\}$. □

Bài 3.

a) Cho $\triangle ABC$ có đường phân giác AD và đường trung tuyến AM, ngoài ra thì $AB = 6$cm và $AC = 4$cm. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N. Tính tỉ số BN/CN.

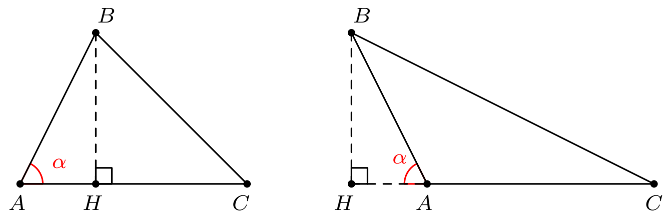
b) Biết rằng với góc nhọn α bất kì thì $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ và $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Từ đó chứng minh rằng

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \times \cos^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha \times \sin^2\alpha = 2.$$

Lời giải.
a) Đầu tiên ta chứng minh kết quả sau

Bổ đề. *Với tam giác ABC bất kì, gọi α là góc nhọn tạo bởi các đường thẳng AB, AC. Khi đó*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin\alpha.$$

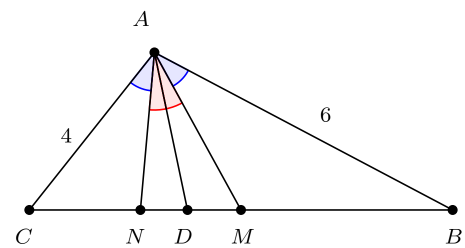


Chứng minh. Vẽ đường cao BH, khi đó $BH = AB \sin\alpha$. Do vậy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB \sin\alpha.$$

□

Vậy bổ đề được chứng minh, giờ quay lại bài toán.



Biến đổi kết hợp với bổ đề ta có

$$\frac{BN}{CM} = \frac{S_{ABN}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AN \cdot \sin\widehat{BAN}}{\frac{1}{2}AC \cdot AM \cdot \sin\widehat{CAM}} = \frac{3AN}{2AM} \tag{1}$$

Tương tự thì

$$\frac{BM}{NC} = \frac{S_{ABM}}{S_{ANC}} = \frac{3AM}{2AN} \tag{2}$$

Nhân (1) với (2) thu được $\frac{BN}{CN} = \frac{BN}{CM} \cdot \frac{BM}{NC} = \frac{9}{4}$.

b) Đặt

$$X = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha \quad \text{và} \quad Y = \operatorname{tg}^2\alpha \times \cos^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha \times \sin^2\alpha.$$

Áp dụng $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ta có

$$\begin{aligned}
\sin^6\alpha + \cos^6\alpha &= (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 \\
&= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) \\
&= \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha \\
&= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha \\
&= 1 - 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

Do vậy

$$X = (1 - 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha) + 3\sin^2\alpha \times \cos^2\alpha = 1.$$

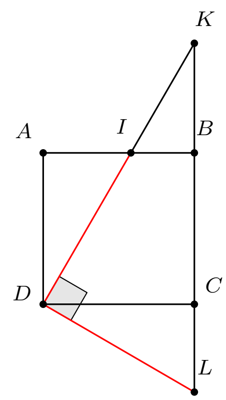
Tiếp theo sử dụng công thức $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ thì

$$Y = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \times \cos^2\alpha + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \times \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Vế trái của biểu thức cần chứng minh chính là $X + Y = 2$ (điều phải chứng minh). □

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 2. Điểm I là nằm giữa A và B, tia DI cắt tia CB tại K. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

Lời giải.
Kẻ đường thẳng vuông góc với DI tại D, đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L.



Xét $\triangle AID$ và $\triangle CLD$ có

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ \\ AD = CD \\ \widehat{ADI} = \widehat{CDL} \text{ (cùng phụ } \widehat{IDC}) \end{cases}$$

Do vậy $\triangle AID = \triangle CLD$ (cạnh góc vuông-góc nhọn). Suy ra $DI = DL$, dẫn tới

$$\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{4}.$$

Vì $DC = 2$ nên $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{4}$. □