

Ôn tập 7: Đề HSG tỉnh Hòa Bình 2022-2023

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Câu 1

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} + \frac{x-2}{x\sqrt{x}+x} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P , từ đó tìm giá trị của x sao cho $P = 4$.
- b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Lời giải.

a) Rút gọn được

$$P = \frac{x}{\sqrt{x}-1}.$$

Do vậy $P = 4 \iff (\sqrt{x}-2)^2 = 0 \iff x = 4$.

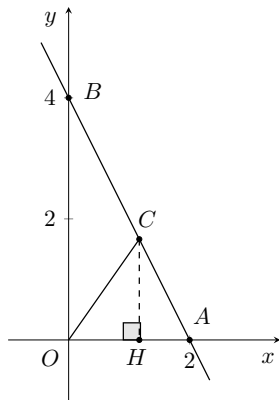
b) Biến đổi $x = 2(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + 1)^2$. Do đó

$$P = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 1) - 1} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 2.$$



Câu 2a

Cho hàm số $y = -2x + 4$ có đồ thị là đường thẳng (d) . Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với các trục tọa độ Ox, Oy và $C(m, -2m + 4)$ là điểm thuộc đoạn AB . Tìm giá trị của m để diện tích $\triangle OBC$ bằng hai lần diện tích $\triangle OAC$.



Lời giải.

Ta có $S_{OAC} + S_{OBC} = S_{OAB} = 4$, ngoài ra $S_{OBC} = 2S_{OAC}$ nên $S_{OAC} = \frac{4}{3}$.

Kẻ $CH \perp OA$ thì $CH = |-2m + 4|$. Vì điểm C thuộc đoạn AB nên nằm trong góc phần tư (I), do đó tọa độ của C đều dương, nghĩa là $m > 0$ và $-2m + 4 > 0$. Suy ra

$$S_{OAC} = \frac{1}{2}CH \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot (-2m + 4) \cdot 2 = 4 - 2m.$$

Như vậy $4 - 2m = \frac{4}{3} \iff m = \frac{4}{3}$.



Câu 2b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 3x + 3y \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$.

Lời giải.

Từ phương trình đầu ta có $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0$.

- Nếu $x + y = 0$ thì dễ dàng tìm được $(x, y) \in \{(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.
- Nếu $x^2 - xy + y^2 = 3$, khi đó

$$x^2 + 2y^2 = 6 = 2(x^2 - xy + y^2) \implies x^2 - 2xy = 0.$$

Tới đây chia thành hai trường hợp nhỏ là $x = 0$ hoặc $x = 2y$.

Vậy $(x, y) \in \{(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3}), (2, 1), (-2, -1)\}$.



Câu 2c

Cho $\triangle ABC$ đều. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác. Tính diện tích tam giác biết rằng $R - r = 2$.

Lời giải.

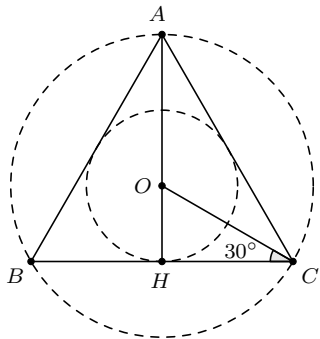
Gọi O là tâm của tam giác đều, thấy ngay $OC = R$. Gọi H là trung điểm BC thì $OH = r$. Ngoài ra

$$OH = OC \cdot \sin 30^\circ \implies r = \frac{R}{2}.$$

Kết hợp với giả thiết ta có $r = 2, R = 4$ nên $AH = r + R = 6$. Ngoài ra

$$BC = 2CH = 2OC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}.$$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = 12\sqrt{3}$ (đơn vị diện tích). \square



Câu 3a

Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 2y - 5 = 0$.

Cách 1

Phương trình tương đương $x^2 - (3y - 1)x + 2y^2 - 2y - 5 = 0$, xem đây là một phương trình bậc hai theo ẩn x với tham số y . Ta có

$$\Delta_x = y^2 + 2y + 21 = (y + 1)^2 + 20$$

là số chính phương. Đặt $(y + 1)^2 + 20 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $(y + 1 - k)(y + 1 + k) = -20$.

Vì $y + 1 - k \leq y + 1 + k$ và $y + 1 - k \equiv y + 1 + k \pmod{2}$ nên

$y + 1 - k$	-2	-10
$y + 1 + k$	10	2
y	3	-5

Vì $y \in \mathbb{N}^*$ nên chỉ nhận $y = 3$. Từ đây tìm được $(x, y) \in \{(1, 3), (7, 3)\}$.

Cách 2

Phương trình tương đương

$$(x - y)(x - 2y) + x - 2y = 5 \iff (x - 2y)(x - y + 1) = 5.$$

Tới đây lập bảng

$x - 2y$	1	5	-1	-5
$x - y + 1$	5	1	-5	-1
x	7	-5	-11	1
y	3	-5	-5	3

Vì $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $(x, y) \in \{(1, 3), (7, 3)\}$.

Câu 3b

Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng (Phú Thọ) với giá bán mỗi quả là 50 000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1 000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được 10 quả. Xác định giá bán mỗi quả bưởi để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30 000 đồng.

Lời giải.

Gọi x (đồng) là giá dự định bán cho mỗi quả thì $x \geq 30\,000$. Như vậy cửa hàng giảm mỗi quả $50\,000 - x$ (đồng) nên bán tăng thêm $\frac{50\,000 - x}{100}$ (quả). Do vậy số tiền thu được là

$$T = \text{Số quả} \times \text{Số tiền mỗi quả} = \left(40 + \frac{50\,000 - x}{100}\right)x = \frac{(90\,000 - x)x}{100}.$$

Có $(90\,000 - x)x \leq \frac{((90\,000 - x) + x)^2}{4} = \frac{81 \times 10^8}{4}$, vậy để T lớn nhất thì dấu bằng phải xảy ra, khi và chỉ khi $90\,000 - x = x \iff x = 45\,000$ (thỏa mãn). □