Ôn tập 8: Một số bài toán hình hay gặp

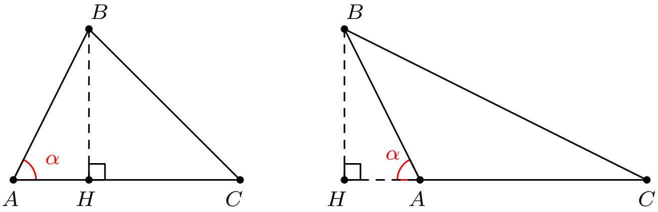
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Bài 1a

Cho $\triangle ABC$ không vuông tại A. Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB và AC. Chứng minh $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha$



Lời giải.

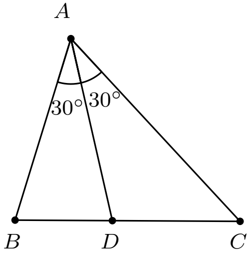
Vẽ đường cao BH, khi đó $BH = AB\sin\alpha$. Do vậy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha$$

□

Bài 1b

Biết rằng $\widehat{A} = 60^\circ$ và AD là đường phân giác của tam giác. Chứng minh $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{AD}$.



Lời giải.

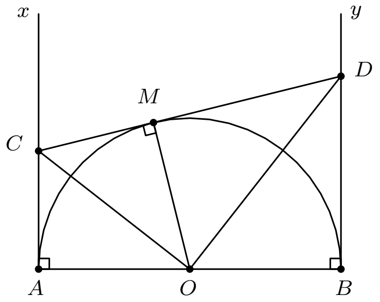
Ta có $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC}$ tương đương

$$\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 30^\circ + \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin 30^\circ = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 60^\circ$$
$$\iff \frac{AD}{2}(AB + AC) = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \cdot AC$$

Hệ thức này tương đương với yêu cầu đề bài. □

Bài 2a

Cho nửa đường tròn (O, R) có đường kính AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc (O); kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By tại C, D. Chứng minh rằng $AC \cdot BD = R^2$



Lời giải.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $AC = CM$ và $BD = MD$, do đó

$$AC \cdot BD = CM \cdot MD$$

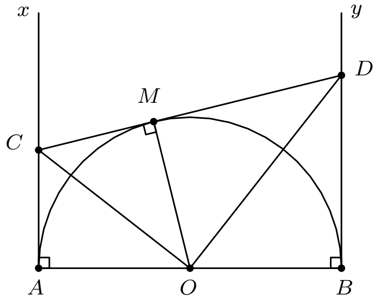
Ngoài ra cũng theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì chứng minh được $\widehat{COD} = 90^\circ$, vậy $\triangle OCD$ vuông tại O có đường cao OM nên

$$CM \cdot MD = OM^2.$$

Do đó $AC \cdot BD = R^2$ (không đổi). □

Bài 2b

Tìm vị trí điểm M trên nửa đường tròn sao cho diện tích tứ giác $ACDB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải.

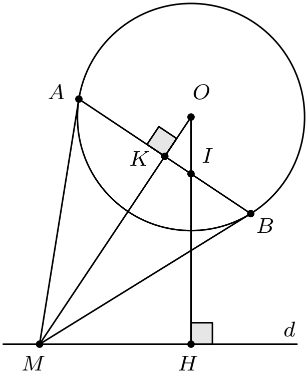
Diện tích tứ giác $ACDB$ là

$$\begin{aligned} S = \frac{AB}{2}(AC + BD) &\geq \frac{AB}{2} \cdot 2\sqrt{AC \cdot BD} \\ &= AB \cdot R \\ &= 2R^2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\iff AC = BD \iff M$ là điểm chính giữa nửa đường tròn (O). □

Bài 3a

Cho d và (O) không giao nhau. Điểm M nằm trên d, kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O). Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên d.



Lời giải.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của O trên AB, d và gọi I là giao điểm OH với AB. Thấy rằng $\triangle OKI \sim \triangle OHM$ (g.g) nên

$$\frac{OK}{OI} = \frac{OH}{OM} \implies OI \cdot OH = OM \cdot OK$$

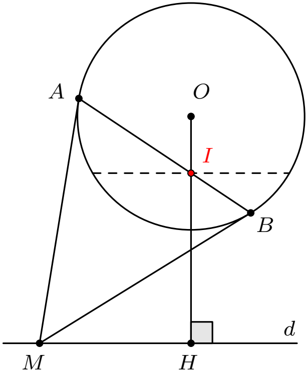
Mà $OM \cdot OK = OA^2 = R^2$ nên

$$OI \cdot OH = R^2 \implies OI = \frac{R^2}{OH}.$$

Do vậy I là điểm cố định. $\square$

Bài 3b

Tìm vị trí điểm M trên d sao cho đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất.

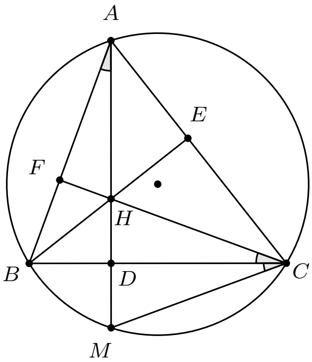


Lời giải.

Trong các dây đi qua I, dây vuông góc OI tại I có độ dài nhỏ nhất, khi đó M trùng H. □

Bài 4a

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O); các đường cao AD, BE, CF cắt (O) ở M, N, K. Chứng minh rằng M đối xứng với trực tâm H của $\triangle ABC$ qua đường thẳng BC.



Lời giải.

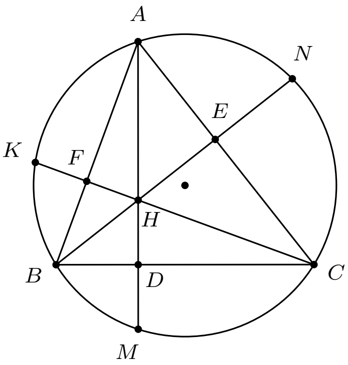
Ta có

$$\widehat{HCD} = \widehat{BAD} \ (= 90^\circ - \widehat{B})$$
$$= \widehat{DCM} \ (= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BM}\,).$$

Do đó $\triangle HCD = \triangle MCD$ (cạnh góc vuông-góc nhọn), dẫn đến $DM = DH$. Ngoài ra $HM \perp BC$ nên ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 4b

Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{AD} + \dfrac{BN}{BE} + \dfrac{CK}{CF} = 4.$



Lời giải.

Ta có

$$\frac{AM}{AD} = 1 + \frac{DM}{AD} = 1 + \frac{HD}{AD} = 1 + \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}.$$

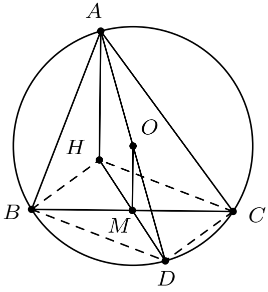
Tương tự thì

$$\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}} \quad \text{và} \quad \frac{CK}{CF} = 1 + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}.$$

Cộng ba phân thức trên thu được điều cần chứng minh. □

Bài 5a

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác. Chứng minh rằng $AH = 2OM$ với M là trung điểm BC.



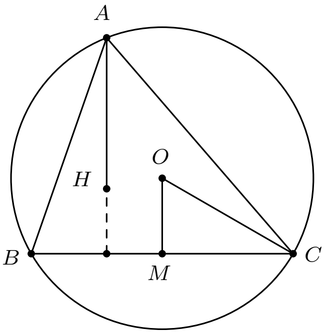
Lời giải.

Kẻ đường kính AD của đường tròn (O). Chứng minh được $BH \parallel CD$ (cùng vuông góc AC), tương tự thì $BD \parallel CH$, vậy $BHCD$ là hình bình hành.

Vì M là trung điểm BC, ngoài ra $BHCD$ là hình bình hành nên M cũng là trung điểm HD. Như vậy MO là đường trung bình $\triangle AHD$ nên $AH = 2OM$. □

Bài 5b

Tính số đo $\widehat{BAC}$ biết rằng AH bằng bán kính đường tròn (O).



Lời giải.

Theo câu a ta có $AH = 2OM$, kết hợp với giả thiết suy ra $OC = 2OM$. Như vậy

$$\cos \widehat{MOC} = \frac{OM}{OC} = \frac{1}{2} \implies \widehat{MOC} = 60^\circ.$$

Do vậy

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{MOC} = 60^\circ.$$

$\square$