Đại số - Bài 1: Phương trình bậc nhất hai ẩn (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

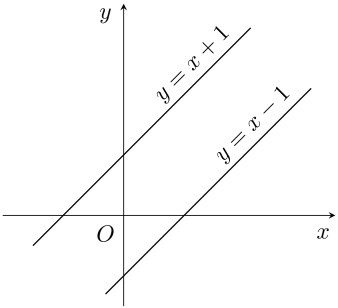
Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023

Bài 1

Vẽ đồ thị biểu diễn tập nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1.$$



Lời giải.

Ta có

$$(x-y)^2 = 1 \iff \left[\begin{aligned} x - y &= -1 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right. .$$

Do vậy đồ thị biểu diễn tập nghiệm của phương trình là hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = x - 1$. $\square$

Bài 2

Cho đường thẳng $(m+2)x - my = -1$ với m là tham số.

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng là lớn nhất.

Đáp án

a) Điểm cố định $N\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

b) Gọi h là khoảng cách, nếu $m \in \{-2, 0\}$ thì $h = \frac{1}{2}$. Xét $m \notin \{-2, 0\}$ thì

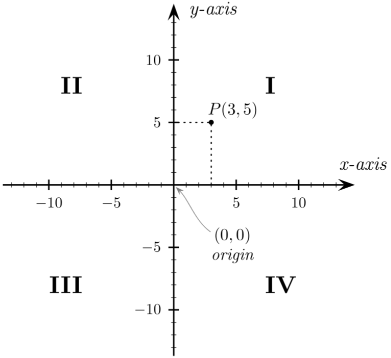
$$\frac{1}{h^2} = (m+2)^2 + m^2 \geq 2.$$

Do đó $\max h = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff m = -1$.

Bài 3

Tìm tất cả cặp số (x, y) nguyên âm thỏa mãn $8x + 9y = -79$.

<u>Cách hỏi khác:</u> Tìm các điểm nằm trên đường thẳng $8x + 9y = -79$ có hoành độ và tung độ là các số nguyên, ngoài ra các điểm này nằm bên trong góc phần tư thứ III.



Lời giải.

Theo đề thì $9y + 79 \,\vdots\, 8$, mặt khác

$$9y + 79 = 8(y + 10) + y - 1 \implies y - 1 \,\vdots\, 8.$$

Do đó $y = 8k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$. Dẫn đến

$$x = \frac{-9y - 79}{8} = -9k - 11.$$

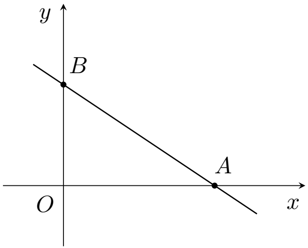
Theo đề thì

$$\begin{cases} -9k - 11 = x < 0 \\ 8k + 1 = y < 0 \end{cases} \iff \frac{-11}{9} < k < \frac{-1}{8}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = -1$, do đó $(x, y) = (-2, -7)$. $\square$

Bài 4

Đường thẳng $ax + by = 6$ (với a, b là các số dương) tạo với trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 9. Tính tích ab.



Lời giải.

Gọi giao điểm của đường thẳng với trục hoành, trục tung lần lượt là A, B thì

$$A\left(\frac{6}{a}, 0\right) \quad \text{và} \quad B\left(0, \frac{6}{b}\right).$$

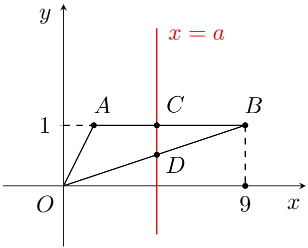
Do đó $OA = \frac{6}{a}$ và $OB = \frac{6}{b}$, ta có

$$9 = S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{6}{b}$$

suy ra $ab = 2$. $\square$

Bài 5

Cho hai điểm $A(1,1)$ và $B(9,1)$. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với AB và chia $\triangle OAB$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.



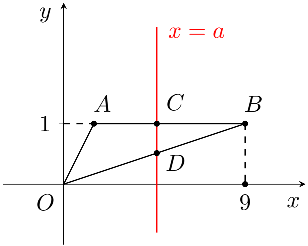
Lời giải

Vì $d \perp Ox$ nên phương trình của d là $x = a$, tính được $S_{OAB} = 4$.

Gọi giao điểm của d với AB, OB là C, D.

- $C(a, 1)$.
- $D(a, y_D)$ nằm trên đường thẳng OB có phương trình $y = \frac{1}{9}x$ nên

$$y_D = \frac{1}{9}x_D = \frac{a}{9} \implies D\left(a, \frac{a}{9}\right).$$



Lời giải

Có $C(a, 1)$ và $D\left(a, \frac{a}{9}\right)$, do vậy

$$BC = 9 - a \quad \text{và} \quad CD = 1 - \frac{a}{9}.$$

Suy ra

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD = \frac{1}{2}(9 - a)\left(1 - \frac{a}{9}\right).$$

Mặt khác $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{OAB} = 2$, tìm được $a = 15$ (loại) hoặc $a = 3$. Vậy đường thẳng d có phương trình $x = 3$.

Bài 6

Chứng minh rằng có vô hạn bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $3x + 4y + 5z = 2022$.

Phương pháp:

1. Phản chứng: giả sử phương trình chỉ có hữu hạn nghiệm, tìm mâu thuẫn.
2. Trực tiếp: chỉ ra bộ số (x, y, z) thỏa đề.

Nháp: $z = 0$ thì $3x + 4y = 2022$. Có

$$4y = 2022 - 3x \vdots 3 \implies 4y \vdots 3 \implies y \vdots 3$$

nên $y = 3k$ với $k \in \mathbb{Z}$, khi đó

$$x = \frac{2022 - 4y}{3} = 674 - 4k.$$

Lời giải.

Với $k \in \mathbb{Z}$, chọn $x = 674 - 4k, y = 3k$ và $z = 0$ thì

$$3x + 4y + 5z = 3(674 - 4k) + 4 \cdot 3k + 5 \cdot 0 = 2022.$$

Như vậy $(x, y, z) = (674 - 4k, 3k, 0)$ là nghiệm nguyên của phương trình nên phương trình có vô số nghiệm nguyên. $\square$