Chuyên đề - ĐS 5: Bất đẳng thức Cô-si

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

11/2022

- Với $a, b > 0$ thì
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$
Dấu bằng xảy ra $\iff a = b$.
- Với $a, b, c > 0$ thì
$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$
Dấu bằng xảy ra $\iff a = b = c$.
- Với $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thì
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$
Dấu bằng xảy ra $\iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ví dụ 1

Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \sqrt[3]{3a + b} + \sqrt[3]{3b + c} + \sqrt[3]{3c + a}.$$

<u>Phân tích:</u> Dấu bằng xảy ra $\iff a = b = c = 1$, khi đó $3a + b = 4$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số $3a + b, 4, 4$ thì

$$\sqrt[3]{(3a + b) \cdot 4 \cdot 4} \leq \frac{(3a + b) + 4 + 4}{3} \iff \sqrt[3]{3a + b} \leq \frac{3a + b + 8}{6\sqrt[3]{2}}.$$

Tương tự thì $\sqrt[3]{3b + c} \leq \frac{3b+c+8}{6\sqrt[3]{2}}$ và $\sqrt[3]{3c + a} \leq \frac{3c+a+8}{6\sqrt[3]{2}}$, do vậy

$$A \leq \frac{4(a + b + c) + 8 \times 3}{6\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{4}.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff a = b = c = 1$. $\square$

Ví dụ 2

Cho các số $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = a^3 + b^3 + c^3 + d^3.$$

Phân tích: Dấu bằng xảy ra $\iff a = b = c = d = \frac{1}{2}$, khi đó $a^3 = \frac{1}{8}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số $a^3, a^3, \frac{1}{8}$ thì

$$a^3 + a^3 + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3a^2}{2} \iff a^3 \geq \frac{3a^2}{4} - \frac{1}{16}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$B \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{4} - \frac{4}{16} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff a = b = c = d = \frac{1}{2}$. $\square$

Ví dụ 3

Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

<u>Phân tích:</u> $a^2 = \frac{a^2}{b+c} \cdot (b+c)$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si

$$\frac{a^2}{b+c} + (b+c) \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot (b+c)} = 2a.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff \frac{a^2}{b+c} = b+c \iff a = b+c$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b \quad \text{và} \quad \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c.$$

Công các bất đẳng thức trên lại ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c,$$

tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh. $\square$

Chú ý

Bất đẳng thức dạng $A + B + C \geq M + N + P$

- Cách 1: đánh giá $xA + yM \geq (x+y)N$, tương tự thì

$$xB + yN \geq (x+y)P \quad \text{và} \quad xC + yP \geq (x+y)M.$$

- Cách 2: đánh giá $xA + yB \geq (x+y)M$, tương tự thì

$$xB + yC \geq (x+y)N \quad \text{và} \quad xC + yB \geq (x+y)P.$$

Ví dụ 4

Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$4(1-a)(1-b) \leq \big((1-a)+(1-b)\big)^2 = (1+c)^2.$$

Tương tự thì $4(1-b)(1-c) \leq (1+a)^2$ và $4(1-c)(1-a) \leq (1+b)^2$. Nhân cả ba bất đẳng thức trên có được

$$64\big((1-a)(1-b)(1-c)\big)^2 \leq \big((1+a)(1+b)(1+c)\big)^2,$$

tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh. $\square$

Chú ý

Bất đẳng thức dạng $A \cdot B \cdot C \geq M \cdot N \cdot P$

- Cách 1: đánh giá $A^2 \geq M \cdot N$, tương tự thì

$$B^2 \geq N \cdot P \quad \text{và} \quad C^2 \geq P \cdot M$$

- Cách 2: đánh giá $A \cdot B \geq M^2$, tương tự thì

$$B \cdot C \geq N^2 \quad \text{và} \quad C \cdot A \geq P^2$$

Ví dụ 5

Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}.$$

Phân tích: Dấu bằng xảy ra $\iff a=b=c=1$.

$$1+b^2\geq 2b\implies\frac{a}{1+b^2}\leq\frac{a}{2b}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự có được

$$VT\geq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Cần chứng minh

$$3-\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3}{2}\iff ab+bc+ca\leq 3.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng do $ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$. □