Hình học - Bài 3: Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến (Bài tập)

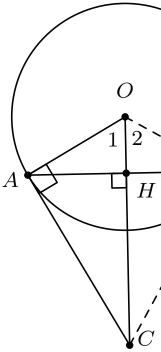
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

11/2022

Bài 1a

Cho đường tròn (O, R), dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C. Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến của đường tròn.



Lời giải.

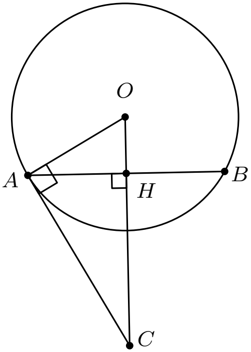
Gọi H là giao điểm AB với OC. $\triangle OAB$ cân tại O có đường cao OH nên $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, dẫn tới

$$\triangle OAC = \triangle OBC \text{ (c.g.c)}$$

nên $\widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^\circ$. Vậy CB là tiếp tuyến của đường tròn. $\square$

Bài 1b

Biết $R = 15$ và $AB = 24$. Tính OC.



Lời giải.

Có

$$AH = \frac{AB}{2} = 12 \implies OH = 9.$$

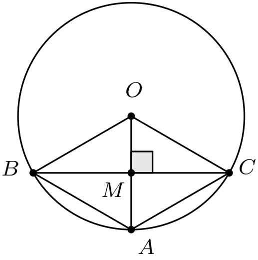
$\triangle OAC$ vuông tại A có đường cao AH nên

$$OA^2 = OH \cdot OC \implies OC = 25 \text{ (cm)}.$$

$\square$

Bài 2a

Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA. Tứ giác $OCAB$ là hình gì?

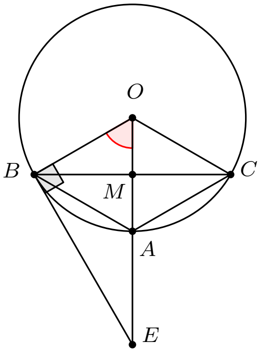


Lời giải.

Bán kính OA vuông góc dây BC nên trung điểm của BC là $M \in OA$.
Tứ giác $OCAB$ có giao điểm hai đường chéo là trung điểm mỗi đường nên tứ giác là hình bình hành. Ngoài ra hai đường chéo vuông góc nên tứ giác là hình thoi. $\square$

Bài 2b

Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, nó cắt OA tại E. Tính BE theo R.



Lời giải.

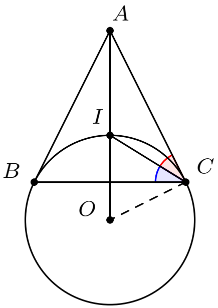
Có $OA = OB = AB$ nên $\triangle OAB$ đều

$$\Longrightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ.$$

Do vậy $BE = OB \cdot \text{tg}60^\circ = R\sqrt{3}$. □

Bài 3a

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có I là giao điểm của các đường phân giác trong. Xác định vị trí tương đối của AC với đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle BIC$.



Lời giải.

Các điểm A, I, C cùng thuộc đường trung trực của BC nên A, I, O thẳng hàng và $AO \perp BC$. Có

$$\widehat{OCI} = \widehat{OIC} \quad \text{và} \quad \widehat{ACI} = \widehat{ICO}$$

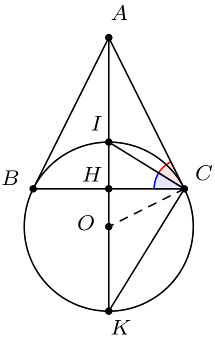
nên

$$\begin{aligned}\widehat{OCA} &= \widehat{OCI} + \widehat{ACI} \\ &= \widehat{OIC} + \widehat{ICO} \\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O). □

Bài 3b

Gọi H là trung điểm BC, IK là đường kính của (O). Chứng minh rằng $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$.



Lời giải.

$\triangle ACH$ có CI là đường phân giác trong nên

$$\frac{AI}{HI} = \frac{AC}{HC}.$$

$\triangle ACH$ có CK là đường phân giác ngoài $(CK \perp CI)$ nên

$$\frac{AK}{HK} = \frac{AC}{HC}.$$

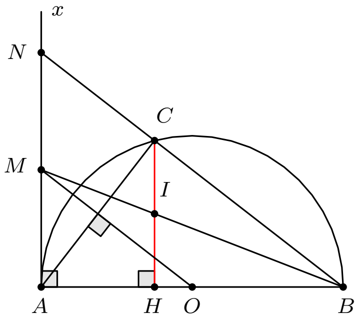
Do đó

$$\frac{AI}{HI} = \frac{AK}{HK} \left(= \frac{AC}{HC}\right) \iff \frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}.$$

$\square$

Bài 4

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB, Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn (Ax và nửa đường tròn nằm cùng phía với AB), C là một điểm thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Đường thẳng qua O và vuông góc với AC cắt Ax tại M. Gọi I là giao điểm MB và CH. Chứng minh rằng $CI = HI$.



Lời giải.

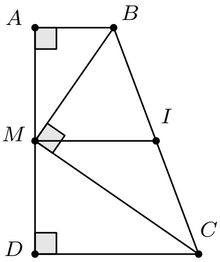
Gọi N là giao điểm BC với Ax. $\triangle ABN$ có OM là đường trung bình ($OA = OB$ và $OM \parallel BN$) nên $MA = MN$. Ngoài ra $CH \parallel AM$ nên

$$\frac{CI}{NM} = \frac{HI}{AM} \left(= \frac{BI}{BM} \right) \Longrightarrow CI = HI.$$

□

Bài 5a

Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $\widehat{BMC} = 90^\circ$ với M là trung điểm AD. Chứng minh rằng AD là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC.



Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC thì I là tâm đường tròn có đường kính BC.

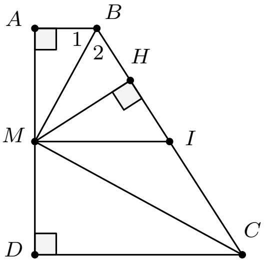
Vì M, I là trung điểm hai cạnh bên của hình thang $ABCD$ nên MI là đường trung bình của hình thang.

$$\Longrightarrow IM \parallel AB \Longrightarrow IM \perp AD.$$

Do đó AD là tiếp tuyến của đường tròn (I). $\square$

Bài 5b

Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AD.



Lời giải.

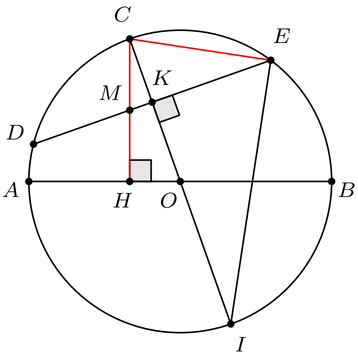
Kẻ $MH \perp BC$, vì $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ $(= \widehat{BMI})$ nên

$$\triangle MBA = \triangle MBH \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}.$$

Suy ra $MH = MA$, vậy H thuộc đường tròn (M) có đường kính AD. Mà $MH \perp BC$ nên BC là tiếp tuyến của (M). □

Bài 6

Cho đường tròn (O) có đường kính AB, C là một điểm thuộc (O), H là hình chiếu của C trên AB. Qua trung điểm M của CH, kẻ đường thẳng vuông góc với OC, cắt đường tròn tại D và E. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn (C, CD).



Lời giải.

OC cắt $DE, (O)$ lần lượt tại K, I. Có

$$CE^2 = CK \cdot CI = 2CK \cdot CO \overset{(*)}{=} 2CM \cdot CH = CH^2.$$

Vì $\triangle CMK \sim \triangle COH$ nên có $(*)$.
Do đó H thuộc đường tròn (C, CD). Mà $CH \perp AB$ nên AB là tiếp tuyến của (C, CD). $\square$