Đề kiểm tra lần 4

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 12 năm 2022

§1 Đề bài

Bài 1 (3 điểm)**.**

a) Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}.$$

b) Tìm m để hai đường thẳng $y = mx + 2$ và $y = (2m-3)x - 1$ vuông góc với nhau.

Bài 2 (3 điểm)**.**

a) Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{2x-3} = 2x + \sqrt{x} - 6$.

Bài 3 (3 điểm)**.** Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, ngoài ra tia phân giác góc C đi qua trung điểm I của AD. Gọi H là hình chiếu của I trên BC.

a) Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn (I, IA) tại điểm H.

b) Gọi K là giao điểm AC với BD, chứng minh KH song song với DC.

Bài 4 (1 điểm)**.** Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc BC tại D. Vẽ đường kính DN của (I), gọi F là giao điểm AN với BC. Chứng minh rằng $BD = CF$.

§2 Lời giải

Bài 1.

a) Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}.$$

b) Tìm m để hai đường thẳng $y = mx + 2$ và $y = (2m-3)x - 1$ vuông góc với nhau.

Lời giải.
a) Biến đổi

$$\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1} = \sqrt{6(2-\sqrt{2})-1} = \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2},$$
$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3})^2 + 3\cdot(\sqrt{3})^2 + 3\cdot\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}+1.$$

Do đó

$$A = \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 1+1 = 2.$$

b) Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$m(2m-3) = -1 \iff 2m^2 - 3m + 1 = 0 \iff (2m-1)(m-1) = 0.$$

Vậy $m \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. □

Bài 2.

a) Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{2x-3} = 2x + \sqrt{x} - 6$.

Lời giải.
a) Áp dụng định lí Cô-si ta có $a^4 + 1 \geq 2a^2,\ b^4 + 1 \geq 2b^2$ và $c^4 + 1 \geq 2c^2$. Cộng ba bất đẳng thức trên có được

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^2+b^2+c^2) - 3. \tag{1}$$

Mặt khác ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$, do đó

$$2(a^2+b^2+c^2) - 3 \geq a^2 + b^2 + c^2. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

b) ĐKXĐ: $x \geq \frac{3}{2}$, phương trình tương đương $(\sqrt{2x-3} - \sqrt{x}) - (2x-6) = 0$

$$\iff \frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} - 2(x-3) = 0 \iff (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} - 2\right) = 0. \tag{3}$$

Vì $x \geq \frac{3}{2}$ nên $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x} \geq 0 + \sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{1}{2}$, do đó

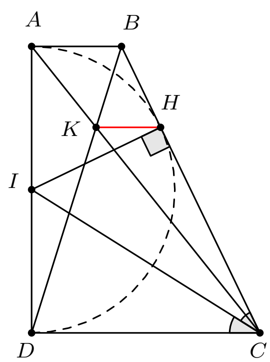
$$\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} < 2 \implies \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} - 2 < 0.$$

Kết hợp với (3) suy ra $x = 3$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$. □

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, ngoài ra tia phân giác góc C đi qua trung điểm I của AD. Gọi H là hình chiếu của I trên BC.

a) Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn (I, IA) tại điểm H.

b) Gọi K là giao điểm AC với BD, chứng minh KH song song với DC.



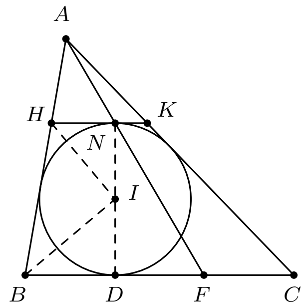
Lời giải.
a) Chứng minh được $\triangle CIH = \triangle CID$ (cạnh huyền-góc nhọn) nên $IH = ID$. Do vậy H thuộc đường tròn (I, IA) nên BC tiếp tuyến với đường tròn này tại H.

b) Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau thì $BH = BA$ và $CH = CD$, do đó

$$\frac{BH}{HC} = \frac{BA}{CD} \overset{AB \parallel CD}{=} \frac{BK}{KD}.$$

Vậy theo định lí Ta-lét đảo thì $KH \parallel CD$. □

Bài 4. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc BC tại D. Vẽ đường kính DN của (I), gọi F là giao điểm AN với BC. Chứng minh rằng $BD = CF$.



Lời giải.

Tiếp tuyến tại N của (I) cắt AB, AC lần lượt tại H, K. Vì $HN \parallel BD$ (cùng vuông góc ND) nên

$$\widehat{NHB} + \widehat{HBD} = 180^\circ \implies \widehat{NHI} + \widehat{IBD} = 90^\circ.$$

Do đó $\widehat{NHI} = \widehat{BID}$ (cùng phụ $\widehat{IBD}$), suy ra $\triangle NHI \sim \triangle DIB$ (g.g). Do đó

$$\frac{NH}{NI} = \frac{DI}{DB} \implies NH \cdot DB = NI \cdot DI$$

Hoàn toàn tương tự thì $NK \cdot CD = NI \cdot DI$ nên $NH \cdot DB = NK \cdot CD$, suy ra

$$\frac{NK}{BD} = \frac{NH}{CD} = \frac{NK + NH}{BD + CD} = \frac{HK}{BC}. \tag{1}$$

Mặt khác vì $HK \parallel BC$ nên

$$\frac{NK}{CF} = \frac{AK}{AC} = \frac{HK}{BC}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) thu được $BD = CF$. □