Hình học - Bài 2: Dây và khoảng cách từ tâm đến dây (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

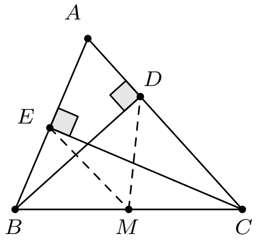
10/2022

Bài 1

Cho $\triangle ABC$ có các đường cao BD và CE. Chứng minh rằng

a) B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

b) $DE < BC$.



Lời giải.

a) Gọi M là trung điểm BC, khi đó

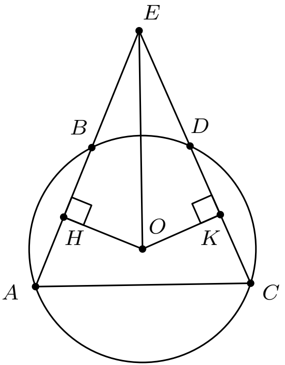
$$MB = MB = MD = ME = \frac{1}{2}BC.$$

Vậy B, E, D, C cùng thuộc đường tròn $\left(M, \frac{BC}{2}\right)$.

b) Do DE là dây còn BC là đường kính của (M) nên $DE < BC$. $\square$

Bài 2

Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại E nằm bên ngoài đường tròn. Chứng minh rằng $EA = EC$.



Lời giải.

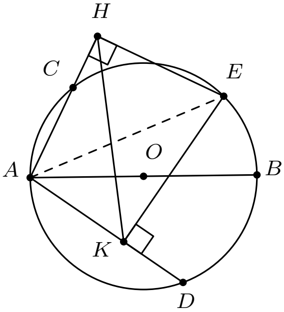
Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB, CD. Vì $AB = CD$ nên $OH = OK$

$$\Longrightarrow \triangle OHE = \triangle OKE \Longrightarrow EH = EK.$$

Do đó $EA = AH + EH = \frac{AB}{2} + EH = CK + EK = EC$. $\square$

Bài 3

Cho đường tròn (O) đường kính AB và các dây AC, AD. Gọi E là điểm bất kì trên đường tròn, H và K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AC, AD. Chứng minh rằng $HK \leq AB$.



Lời giải.

Các điểm A, H, E, K thuộc đường tròn đường kính AE, mà HK là dây nên

$$HK \leq AE.$$

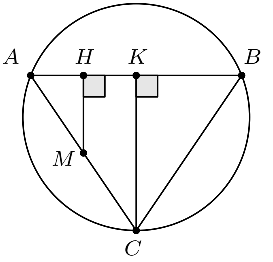
Ngoài ra trong đường tròn (O) thì $AE \leq AB$. Do đó

$$HK \leq AE \leq AB.$$

$\square$

Bài 4a

Cho đường tròn tâm O, dây $AB = 24$cm và dây $AC = 20$cm ($\widehat{BAC} < 90^\circ$ và điểm O nằm trong $\widehat{BAC}$). Gọi M là trung điểm AC. Biết rằng khoảng cách từ M đến AB bằng 8cm. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.



Lời giải.

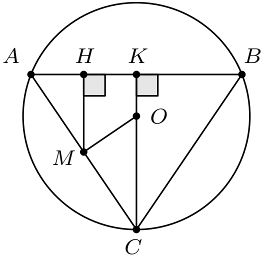
Kẻ MH, CK vuông góc AB. Ta có $AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = 6$, vì MH là đường trung bình của $\triangle ACK$ nên

$$AK = 2AH = 12 \implies AK = \frac{1}{2}AB.$$

Vậy CK là đường trung tuyến của $\triangle ABC$, ngoài ra còn là đường cao nên $\triangle ABC$ cân tại C. $\square$

Bài 4b

Tính bán kính của đường tròn.



Lời giải.

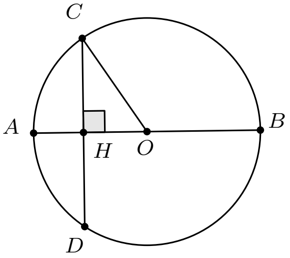
Có được $CK = 2MH = 16$. Vì $\triangle OMC \sim \triangle AKC$ nên

$$\frac{OC}{MC} = \frac{AC}{CK} \implies \frac{OC}{10} = \frac{20}{16},$$

từ đây dẫn tới $OC = 12,5\text{cm}$ $\square$

Bài 5a

Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 13$cm.
Dây CD có độ dài 12cm vuông góc với AB tại H.
Tính HA và HB.



Lời giải.

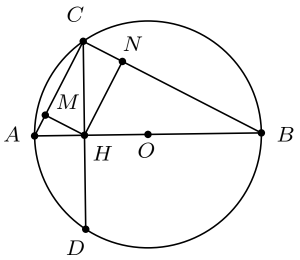
Giả sử $HA < HB$. Tính được

$$OH = \sqrt{CO^2 - CH^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}.$$

Do đó $HA = OA - OH = 4$ (cm) và $HB = OB + OH = 9$ (cm). □

Bài 5b

Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H trên AC, BC. Tính diện tích tứ giác $CMHN$.



Lời giải.

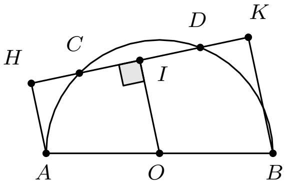
$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 2\sqrt{13}$. Do đó

$$CM = \frac{CH^2}{AC} = \frac{18}{\sqrt{13}} \quad \text{và} \quad MH = \frac{CH \cdot AH}{AC} = \frac{12}{\sqrt{13}}.$$

Do đó $S_{CMHN} = CM \cdot MH = \frac{216}{13}$ (cm^2). □

Bài 6a

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB và dây CD. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD. Chứng minh rằng $CH = DK$.



Lời giải.

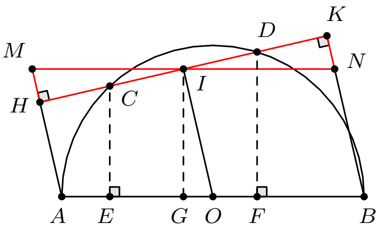
Gọi I là trung điểm CD thì $OI \perp CD$. Vì OI là đường trung bình của hình thang $AHKB$ nên I là trung điểm HK. Do đó

$$CH = IH - IC = IK - ID = DK.$$

$\square$

Bài 6b

Chứng minh rằng $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.



Lời giải.

Qua I kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AH, BK tại M, N. Thấy rằng

$$S_{AHKB} = S_{AMNB} = IG \cdot AB$$

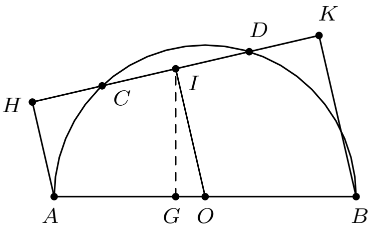
với E, G, F lần lượt là hình chiếu của C, I, D trên AB. Ngoài ra

$$S_{ACB} + S_{ADB} = \frac{1}{2}(CE + DF)AB = IG \cdot AB$$

Do vậy $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$ (cùng bằng $IG \cdot AB$) $\square$

Bài 6c

Tìm diện tích lớn nhất của tứ giác $AHKB$ biết $AB = 30\text{cm}$ và $CD = 18\text{cm}$.



Lời giải.

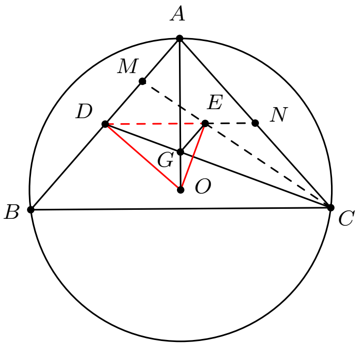
Tính được $IO = 12$. Theo ý b thì

$$S_{AHKB} = IG \cdot AB \leq IO \cdot AB = 12 \cdot 30 = 360\ (\text{cm}^2).$$

Dấu bằng xảy ra $\iff IO \perp AB \iff CD \parallel AB$. $\square$

Bài 7

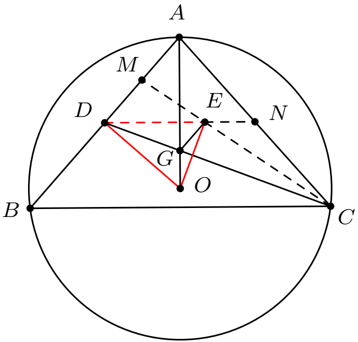
Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm AB và E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc với CD.



Lời giải

Gọi M, N là trung điểm AD, AC. Gọi G là giao điểm AO với CD thì G là trọng tâm $\triangle ABC$. Theo tính chất trọng tâm thì

$$\frac{CE}{CM} = \frac{2}{3} = \frac{CG}{CD} \implies EG \parallel DM \implies EG \perp DO.$$



Lời giải.

Do vậy

$$EG \perp DO. \tag{1}$$

Có $OG \perp BC$ mà $BC \parallel DN$ nên $OG \perp DN$, tức là

$$OG \perp DE. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra G là trực tâm của $\triangle DEO$, do đó

$$OE \perp DG \iff OE \perp CD.$$

□