Chuyên đề - HH 2: Cực trị hình học (Bài tập)

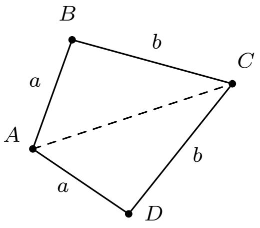
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

Bài 1

Cho trước các số a, b. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ABCD$, biết $AB = AD = a$ và $BC = CD = b$.



Lời giải.

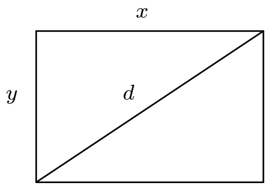
Ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \leq \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab.$$

Vậy $\max S_{ABCD} = ab$, dấu bằng xảy ra $\iff \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. □

Bài 2

Trong các hình chữ nhật có đường chéo bằng d không đổi, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.



Lời giải.

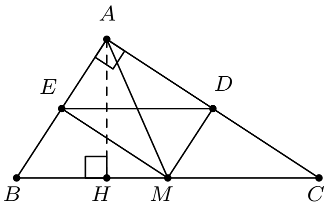
Gọi độ dài hai cạnh hình chữ nhật là x và y, khi đó $x^2 + y^2 = d^2$. Diện tích hình chữ nhật là

$$S = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{d^2}{2}.$$

Vậy trong các hình chữ nhật có cùng đường chéo bằng d thì hình vuông có diện tích lớn nhất, bằng $\frac{d^2}{2}$. $\square$

Bài 3

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, điểm M nằm giữa B và C. Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB. Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.



Lời giải.

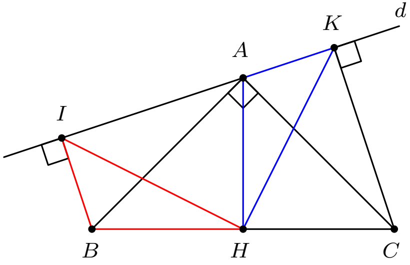
Gọi H là hình chiếu của A lên BC. Thấy rằng $AEMD$ là hình chữ nhật, khi đó

$$DE = AM \geq AH.$$

Vậy DE nhỏ nhất $\iff M \equiv H$ hay M là hình chiếu của A lên BC. $\square$

Bài 4a

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = 2a$. Một đường thẳng d đi qua A và không cắt cạnh BC. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên d, gọi H là trung điểm BC. Chứng minh rằng $\triangle HIK$ vuông cân tại H.



Lời giải.

Chứng minh được $\triangle AIB = \triangle CKA$ (cạnh huyền-góc nhọn). Ta có

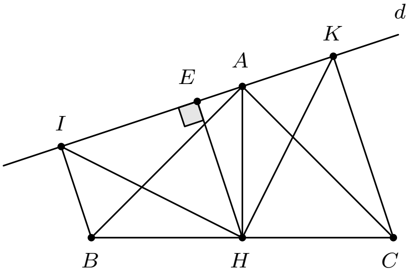
$$\begin{cases} AK = BI\ (\triangle AIB = \triangle CKA) \\ \widehat{IBH} = \widehat{KAH}\ (= 45^\circ + \widehat{KAC}) \\ AH = BH \end{cases} \implies \triangle KAH = \triangle IBH \text{ (c-g-c)}.$$

Do đó $HK = HI$ và $\widehat{KHA} = \widehat{IHB}$ nên

$$\widehat{KHI} = \widehat{KHA} + \widehat{AHI} = \widehat{IHB} + \widehat{AHI} = 90^\circ.$$

Bài 4b

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = 2a$. Một đường thẳng d đi qua A và không cắt cạnh BC. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên d, gọi H là trung điểm BC. Tìm giá trị lớn nhất của S_{HIK} khi d thay đổi.



Lời giải.

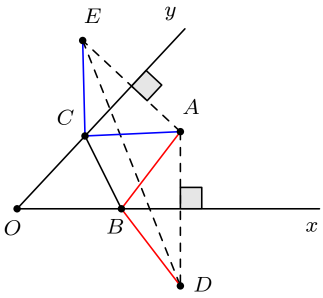
Gọi HE là đường cao của $\triangle HIK$. Vì $\triangle HIK$ vuông cân tại H nên

$$S_{HIK} = HE^2 \leq HA^2 = a^2.$$

Vậy $\max S_{HIK} = a^2 \iff E \equiv A \iff d \perp AH$. $\square$

Bài 5

Cho góc nhọn xOy và điểm A thuộc miền trong của góc. Dựng điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.



Lời giải.

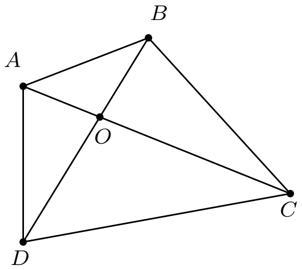
Dựng D, E lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox, Oy thì D, E là các điểm cố định. Chu vi $\triangle ABC$ là

$$AB + BC + CA = DB + BC + CE \geq ED.$$

Vậy chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất $\iff$ B, C là giao điểm của DE với Ox, Oy. □

Bài 6a

Các đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau ở O.
Chứng minh rằng $S_{OAB} \times S_{OCD} = S_{OAD} \times S_{OBC}$.



Lời giải.

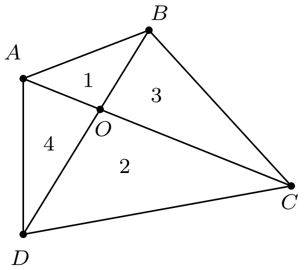
Ta có

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OAD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_{OBC}}{S_{OCD}},$$

suy ra $S_{OAB} \times S_{OCD} = S_{OAD} \times S_{OBC}$. $\square$

Bài 6b

Các đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau ở O.
Tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác, biết
$S_{OAB} = 9\text{cm}^2$ và $S_{OCD} = 16\text{cm}^2$.



Lời giải.

Kí hiệu như hình vẽ, ta có $S_1 = 9$ và $S_2 = 16$. Theo câu a thì

$$S_3 S_4 = S_1 S_2 = 9 \times 16 = 144.$$

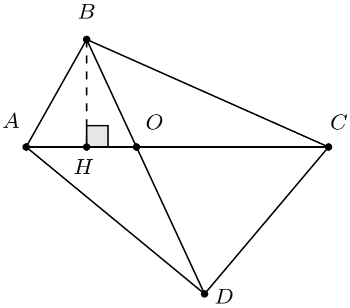
Diện tích của tứ giác là

$$S = S_1 + S_2 + (S_3 + S_4) \geq S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_3 S_4} = 9 + 16 + 2\sqrt{144} = 49.$$

Vậy $\min S = 49$ (cm^2) $\iff S_3 = S_4 \iff S_{ACD} = S_{BCD} \iff AB \parallel CD$. □

Bài 7

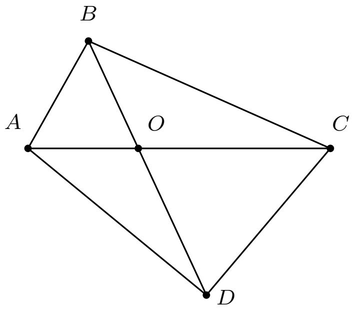
Trong các tứ giác có tổng hai đường chéo bằng a, tứ giác nào có diện tích lớn nhất?



Lời giải

Xét tứ giác $ABCD$ có $AC + BD = a$. Gọi O là giao điểm AC với BD, gọi H là hình chiếu của B lên AC. Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH \leq \frac{1}{2}AC \cdot OB$$



Lời giải

Ta có

$$S_{ABC} \leq \frac{1}{2}AC \cdot OB$$

Tương tự thì $S_{ADC} \leq \frac{1}{2}AC \cdot OD$. Suy ra

$$S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}AC(OB + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$$

Ngoài ra

$$AC \cdot BD \leq \frac{(AC + BD)^2}{4} = \frac{a^2}{4} \implies S_{ABCD} \leq \frac{a^2}{8}.$$

Vậy $\max S_{ABCD} = \frac{a^2}{8}$, dấu bằng xảy ra $\iff AC \perp BD$ và $AC = BD = \frac{a}{2}$.