Hình học - Bài 2: Góc nội tiếp - tiếp theo (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

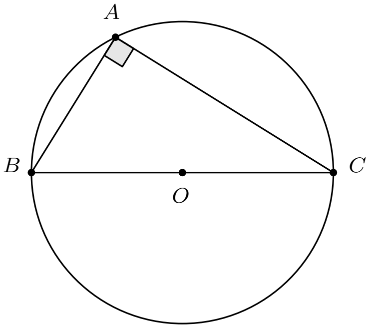
Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023

Bài 1a

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A nội tiếp đường tròn (O, R). Chứng minh rằng

$$\frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$



Lời giải.

Từ

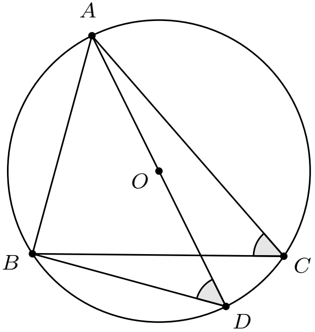
$$\sin B = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{2R}$$

suy ra điều cần chứng minh, tương tự cho đẳng thức còn lại. $\square$

Bài 1b

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O, R). Chứng minh rằng

$$\frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$



Lời giải.

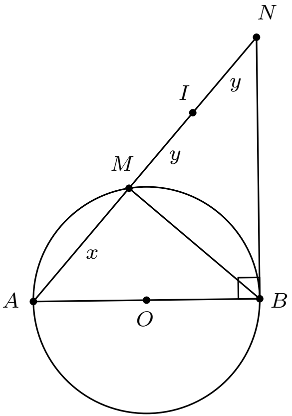
Kẻ đường kính AD, từ

$$\sin C = \sin D = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{2R}$$

suy ra điều cần chứng minh, tương tự cho đẳng thức còn lại. $\square$

Bài 2b

Cho (O) có đường kính $AB = 12$cm. Một đường thẳng đi qua A cắt (O) ở M và cắt tiếp tuyến của (O) tại B ở N. Tính AM, biết rằng $AI = 13$cm với I là trung điểm MN.



Lời giải.

Vì $\triangle BAN$ vuông tại B có đường cao BM nên

$$AM \cdot AN = AB^2.$$

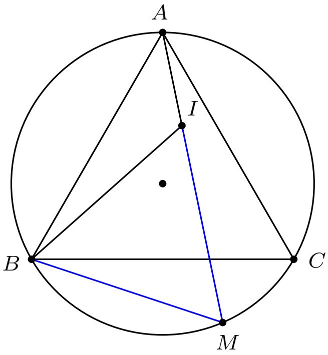
Đặt $AM = x$ và $IM = y$ thì ta có

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x(x + 2y) = 12^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x \\ x(x + 2(13 - x)) = 12^2 \end{cases}.$$

Tìm được $x = 18$ (loại vì $> AB$) hoặc $x = 8$ (nhận). □

Bài 3a

Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp (O). Gọi M là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC. Trên đoạn MA lấy điểm I sao cho $MI = MB$. Chứng minh rằng $\triangle MBI$ đều.



Lời giải.

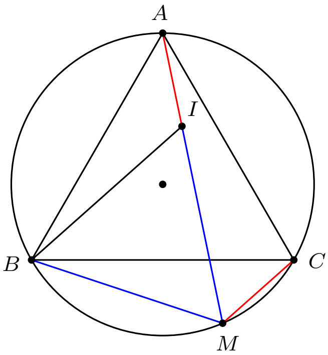
$\triangle MBI$ cân tại M có

$$\widehat{M} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{C} = 60^\circ$$

nên là tam giác đều. □

Bài 3b

Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.



Lời giải.

$\triangle ABI = \triangle CBM$ (c.g.c) vì

$$\begin{cases} AB = CB \\ \widehat{ABI} = \widehat{CBM}\ (= 60^\circ - \widehat{IBC}) \\ BI = BM\ (\triangle MBI \text{ đều}) \end{cases}$$

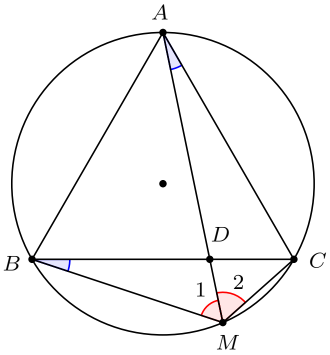
Suy ra $AI = CM$, do vậy

$$AM = MI + IA = MB + MC.$$

$\square$

Bài 3c

Chứng minh rằng $\dfrac{MD}{MB}+\dfrac{MD}{MC}=1$ với D là giao điểm MA và BC.



Lời giải.

Ta có

$$\widehat{M}_1=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}=\widehat{M}_2$$

nên $\triangle MBD\sim\triangle MAC$ (g.g), suy ra $\frac{MD}{MB}=\frac{MC}{MA}$.

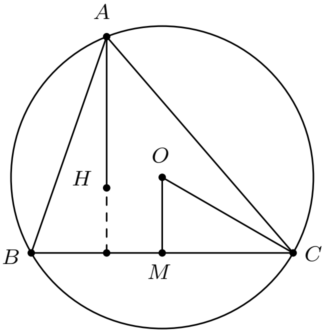
Tương tự thì $\frac{MD}{MC}=\frac{MB}{MA}$, kết hợp với câu b ta có

$$\frac{MD}{MB}+\frac{MD}{MC}=\frac{MC+MB}{MA}=1.$$

□

Bài 4

Tính số đo góc A của $\triangle ABC$ nhọn biết rằng khoảng cách từ A đến trực tâm H của tam giác bằng bán kính đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC thì $AH = 2OM$, kết hợp với giả thiết suy ra $OC = 2OM$. Như vậy

$$\cos \widehat{MOC} = \frac{OM}{OC} = \frac{1}{2} \implies \widehat{MOC} = 60^\circ.$$

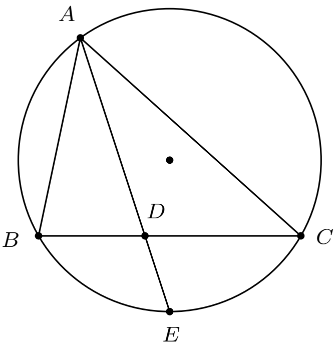
Do vậy

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{MOC} = 60^\circ.$$

$\square$

Bài 5a

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Đường phân giác AD cắt đường tròn tại điểm E. Chứng minh rằng $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



Lời giải.

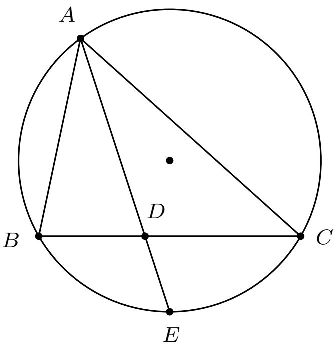
Vì $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ (g.g) nên

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

từ đây suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Bài 5b

Chứng minh rằng $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$



Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} AB \cdot AC - AD^2 &= AD \cdot AE - AD^2 \text{ (câu a)} \\ &= AD(AE - AD) \\ &= AD \cdot DE \end{aligned}$$

Ngoài ra hai dây AE, BC của đường tròn (O) cắt nhau tại D nên

$$DA \cdot DE = DB \cdot DC$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. □