# Chuyên đề - ĐS 11: Đưa về một ẩn trong bất đẳng thức

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

5/2023

## Phương pháp

Gồm các bước sau

0. (Nháp) Dự đoán giá trị nhỏ (lớn) nhất, thường xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại điều kiện biên.
1. Đặt ẩn $t$
   - Hai biến: $t = a + b$ hoặc $t = ab$.
   - Ba biến: $t = x + y + z$ hoặc $t = xy + yz + zx$.

   Và tìm điều kiện của $t$ (sử dụng bất đẳng thức Cô-si).
2. Biểu diễn biểu thức đề cho theo $t$.
3. Chứng minh bằng biến đổi tương đương.

## Ví dụ 1

Cho hai số không âm $a, b$ thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = a^2 + ab + b^2.$$

Nháp: $a=b$ thì $a=b=1$. Ta có

$$A_{(a=1,b=1)} = 3 \quad \text{và} \quad A_{(a=0,b=2)} = A_{(a=2,b=0)} = 4.$$

Do vậy dự đoán $3 \leq A \leq 4$.

## Bước 1

Đặt $t = ab$ thì $t \geq 0$. Ta có

$$t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = 1,$$

do vậy $0 \leq t \leq 1$.

## Bước 2

Biến đổi

$$A = (a+b)^2 - ab = 4 - t.$$

## Bước 3

Ta sẽ chứng minh $3 \le A \le 4$, tương đương

$$3 \le 4 - t \le 4 \iff 0 \le t \le 1.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo điều kiện của $t$. Vậy

$$\begin{aligned} \min A = 3 &\iff t = 1 \iff a = b = 1 \\ \max A = 4 &\iff t = 0 \iff (a,b) \in \{(0,2),(2,0)\}. \end{aligned}$$

## Ví dụ 2

Cho hai số dương $a, b$ thỏa mãn $a + b = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+a^2}.$$

Nháp: $a = b$ thì $2a = a^2 \implies a = 2$, khi đó

$$B_{(a=2,b=2)} = \frac{4}{5}.$$

Do vậy dự đoán $B \geq \frac{4}{5}$.

## Lời giải

Đặt $t = ab$ thì $t > 0$ và $a + b = t$. Ta có

$$t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{t^2}{4} \implies t \geq 4.$$

Do vậy $t \geq 4$.

## Lời giải.

Biến đổi

$$B = \frac{(a^3 + b^3) + a + b}{(1 + a^2)(1 + b^2)} = \frac{(t^3 - 3t^2) + t}{1 + (t^2 - 2t) + t^2} = \frac{t^3 - 3t^2 + t}{2t^2 - 2t + 1}.$$

Ta sẽ chứng minh $B \geq \frac{4}{5}$. Vì $2t^2 - 2t + 1 > 0$ nên $\frac{t^3 - 3t^2 + t}{2t^2 - 2t + 1} \geq \frac{4}{5}$ tương đương

$$5(t^3 - 3t^2 + t) \geq 4(2t^2 - 2t + 1) \iff (t - 4)(5t^2 - 3t + 1) \geq 0.$$

Vì

$$t \geq 4 \quad \text{và} \quad 5t^2 - 3t + 1 = 5\left(t - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20} > 0$$

nên bất đẳng thức cuối đúng. Vậy

$$\min B = \frac{4}{5} \iff t = 4 \iff a = b = 2.$$

□

## Ví dụ 3

Cho $x, y, z$ là các số dương thỏa mãn $x + y + z \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{8}{xy + yz + zx}.$$

Nháp: $x = y = z$ thì $x \leq 1$, khi đó

$$C_{(x=1, y=1, z=1)} = 3.$$

Do vậy dự đoán $C \geq 3$.

## Lời giải

Đặt $t = xy + yz + zx$ thì $t > 0$. Ta có

$$t = xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} = 3.$$

Do vậy $0 < t \leq 3$.

## Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \leq 9 - 2t$. Do đó

$$C \geq \frac{1}{9-2t} + \frac{8}{t}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{9-2t} + \frac{8}{t} \geq 3$, tương đương

$$t + 8(9-2t) \geq 3t(9-2t) \iff (t-3)(t-4) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo điều kiện $t \leq 3$. Vậy

$$\min C = 3 \iff t = 3 \iff x = y = z = 1.$$

$\square$