Hình học - Bài 4: Góc ở đỉnh bên trong (ngoài) đường tròn (Bài tập)

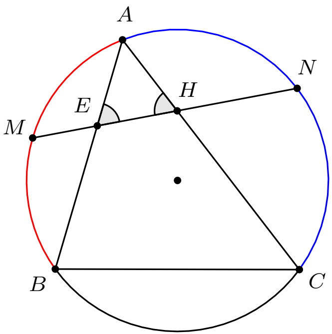
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Bài 1

Cho (O) và hai dây AB, AC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$. MN cắt dây AB tại E và cắt dây AC tại H. Chứng minh rằng $\triangle AEH$ cân.



Lời giải.

Ta có

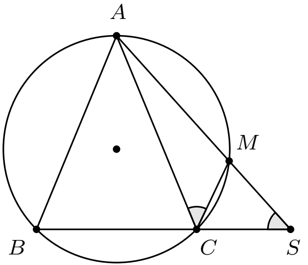
$$\widehat{AHE} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CN}}{2},$$

$$\widehat{AEH} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{BM} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AN}}{2}.$$

Mà $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$ và $\overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{AN}$ nên $\widehat{AHE} = \widehat{AEH}$, thu được điều cần chứng minh. □

Bài 2

Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp (O). Trên cung nhỏ AC lấy một điểm M, gọi S là giao điểm AM với BC. Chứng minh rằng $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.



Lời giải.

Góc $\widehat{S}$ bị chắn bởi $\overparen{AB}$ và $\overparen{MC}$ nên

$$\widehat{S} = \frac{\text{sđ}\,\overparen{AB} - \text{sđ}\,\overparen{MC}}{2}.$$

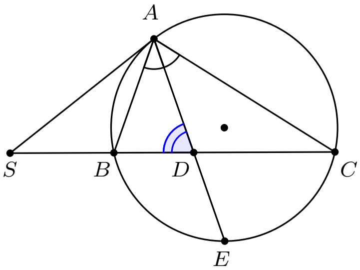
Mà $AB = AC$ nên $\overparen{AB} = \overparen{AC}$, do đó

$$\widehat{S} = \frac{\text{sđ}\,\overparen{AC} - \text{sđ}\,\overparen{MC}}{2} = \frac{\text{sđ}\,\overparen{AM}}{2} = \widehat{MCA}.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 3

Cho điểm S nằm bên ngoài (O), vẽ tiếp tuyến SA và cát tuyến SBC của đường tròn. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt dây BC tại D. Chứng minh rằng $SA = SD$.



Lời giải.

Ta có

$$\widehat{ADS} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CE}}{2}.$$

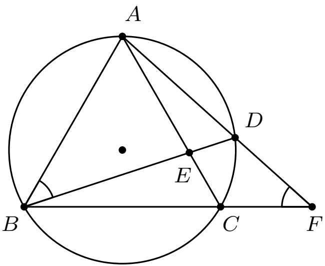
Giả sử AD cắt (O) tại E thì E là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$, nên

$$\widehat{ADS} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BE}}{2} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AE}}{2}.$$

Ngoài ra SA là tiếp tuyến nên $\widehat{SAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AE}$, từ đây thu được điều cần chứng minh. □

Bài 4a

Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp (O). Điểm D di chuyển trên cung AC. Gọi E là giao điểm AC với BD, F là giao điểm AD với BC. Chứng minh rằng $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$,



Lời giải.

Ta có

$$\widehat{F} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD}}{2}.$$

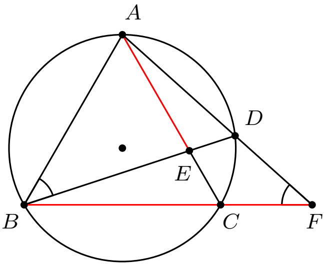
Mà $AB = AC$ nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$, do đó

$$\widehat{F} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}}{2} = \widehat{ABD}.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 4b

Chứng minh rằng tích $AE \cdot BF$ không đổi.



Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \widehat{F} = \widehat{ABD} \text{ (câu a)} \\ \widehat{ABF} = \widehat{EAB} \ (= 60^\circ) \end{cases}$$

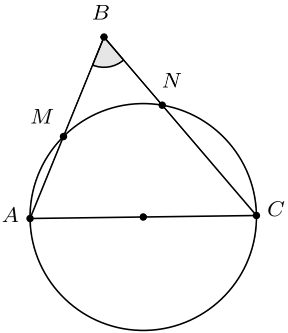
nên $\triangle ABF \sim \triangle EAB$ (g.g), do đó

$$\frac{BF}{AB} = \frac{AB}{AE} \implies AE \cdot BF = AB^2 \text{ (không đổi).}$$

□

Bài 5a

Tứ giác $ABCD$ có góc B và góc D tù. Chứng minh rằng điểm B nằm bên trong đường tròn đường kính AC.



Lời giải.

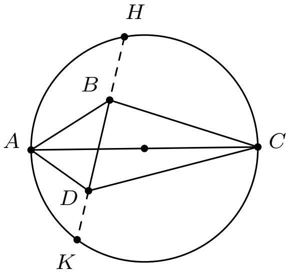
Giả sử điểm B nằm bên ngoài đường tròn đường kính AC, khi đó BA và BC lần lượt cắt đường tròn tại M và N. Ta có

$$\widehat{B} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{MN}}{2} < \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}}{2} = 90^\circ,$$

từ mâu thuẫn này suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Bài 5b

Chứng minh rằng $AC > BD$.



Lời giải.

Giả sử BD cắt đường tròn đường kính AC tại H, K. Từ câu a thấy rằng B, D nằm bên trong đường tròn nên

$$BD < HK.$$

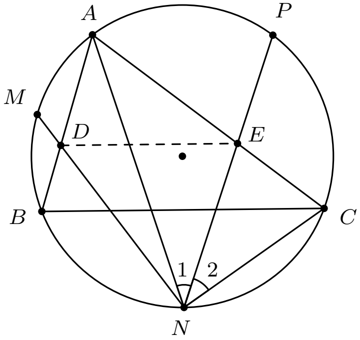
Vì HK là dây của đường tròn, còn AC là đường kính nên

$$HK \leq AC.$$

Do đó $BD < AC$. □

Bài 6

$\triangle ABC$ nội tiếp (O). Các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB,BC,CA. Gọi D là giao điểm MN với AB, E là giao điểm PN với AC. Chứng minh $DE \parallel BC$.



Lời giải.

NE là tia phân giác của $\widehat{ANC}$ vì

$$\widehat{N}_1 = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AP} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CP} = \widehat{N}_2,$$

suy ra $\frac{EA}{EC} = \frac{NA}{NC}$. Tương tự thì $\frac{DA}{DB} = \frac{NA}{NB}$.

Dễ thấy $NB = NC$ nên

$$\frac{EA}{EC} = \frac{DA}{DB},$$

do đó theo định lí Ta-lét đảo thì $DE \parallel BC$. $\square$