

Chuyên đề - DS 9: Điều kiện về nghiệm của phương trình (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1

Tìm m để phương trình $3x^2 - 4x + 2(m-1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0 \iff m < \frac{5}{3}$.

Giả sử phương trình có nghiệm x_1 và x_2 , điều kiện để cả x_1 và x_2 đều nhỏ hơn 2 là

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 < 4 \end{cases}.$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét thì ta có

$$\begin{cases} \frac{2(m-1)}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} + 4 > 0 \\ \frac{4}{3} < 4 \end{cases} \iff m > -1.$$

Vậy $-1 < m < \frac{5}{3}$. □

Bài 2

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + 2m|x - 2| - 4x + m^2 + 3 = 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\iff (x - 2)^2 + 2m|x - 2| + m^2 - 1 = 0$, đặt $y = |x - 2| \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$y^2 + 2my + m^2 - 1 = 0. \quad (*)$$

Như vậy để thỏa đề thì khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau.

- TH1: (*) vô nghiệm. Khi đó $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 < 0$ (vô lí).
- TH2: (*) có nghiệm, và các nghiệm phải là số âm. Khi đó ta phải có

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = m^2 - 1 > 0 \\ S = -2m < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m > 1 \text{ hoặc } m < -1 \\ m > 0 \end{cases} \iff m > 1.$$

Vậy $m > 1$.



Bài 3

Tìm để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0.$$

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \iff$ với mọi m . Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên

$$x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 = 0 \implies x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = 4 - 2x_1.$$

Tương tự với x_2 , do đó yêu cầu để bài tương đương

$$(4 - 2x_1)(4 - 2x_2) < 0 \iff x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0.$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $2m - 5 - 2 \cdot 2(m-1) + 4 < 0 \iff m > \frac{3}{2}$.

□

Bài 4

Tìm các giá trị của m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt

$$x^3 - (m+1)x^2 + (m^2+m-3)x - m^2 + 3 = 0.$$

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$(x-1)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0.$$

Như vậy cần tìm m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt đều khác 1. Khi đó điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4(m^2 - 3) > 0 \\ 1 - m + m^2 - 3 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \notin \{-1, 2\} \end{cases}.$$

Vậy $-2 < m < -1$ và $-1 < m < 2$.



Bài 5

Tìm m để phương trình

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$$

có bốn nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thỏa mãn $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

Lời giải

Đặt $y = x^2 \geq 0$ ta có

$$y^2 - 2(m+1)y + 2m + 1 = 0. \quad (*)$$

Giả sử thỏa đề, khi đó $(*)$ phải có hai nghiệm dương phân biệt là $0 < y_1 < y_2$. Khi đó

$$x_1 = -\sqrt{y_2}, \quad x_2 = -\sqrt{y_1}, \quad x_3 = \sqrt{y_1}, \quad x_4 = \sqrt{y_2}.$$

Từ $x_4 - x_3 = x_3 - x_2$, dẫn đến

$$\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1} = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_1} \iff y_2 = 9y_1.$$

Lời giải.

Đặt $y = x^2 \geq 0$ ta có

$$y^2 - 2(m+1)y + 2m + 1 = 0. \quad (*)$$

Giả sử $(*)$ có hai nghiệm là $0 < y_1 < y_2$. Khi đó $y_2 = 9y_1$, với

$$\begin{cases} y_2 = 9y_1 \\ y_1 + y_2 = 2(m+1) \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = \frac{m+1}{5} \\ y_2 = \frac{9(m+1)}{5} \end{cases}.$$

Ngoài ra

$$y_1 y_2 = 2m + 1 \implies \frac{m+1}{5} \cdot \frac{9(m+1)}{5} = 2m + 1$$

Từ đây tìm được $m \in \left\{ \frac{-4}{9}, 4 \right\}$ (**thử lại thỏa mãn**). □

Bài 6

Tìm m để phương trình $x^4 + mx^2 + 2m - 4 = 0$ có nghiệm.

Lời giải

Đặt $y = x^2 \geq 0$ ta có

$$y^2 + my + 2m - 4 = 0. \quad (*)$$

Điều kiện để $(*)$ có nghiệm là $\Delta = (m - 4)^2 \geq 0 \iff$ với mọi m .

$(y - 1)(y + 2) = 0$ có duy nhất một nghiệm không âm là 1, như vậy vẫn thỏa đề. Như vậy cần tìm m để $(*)$ có **ít nhất** một nghiệm không âm. Nghiệm của $(*)$ là

$$y_1 = \frac{-m - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{và} \quad y_2 = \frac{-m + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Vậy ta cần $y_2 \geq 0$.

Lời giải.

Vậy ta cần $y_2 \geq 0$, tương đương

$$\frac{-m + |m - 4|}{2} \geq 0 \iff |m - 4| \geq m.$$

Chia ra hai trường hợp.

- TH1: $m \geq 4$, khi đó $m - 4 \geq m$ (vô lí).
- TH2: $m < 4$, khi đó $4 - m \geq m \iff m \leq 2$.

Vậy $m \leq 2$.

