Hình học - Bài 5: Đường tròn nội tiếp, bàng tiếp tam giác

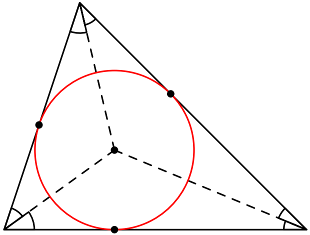
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Đường tròn nội tiếp tam giác

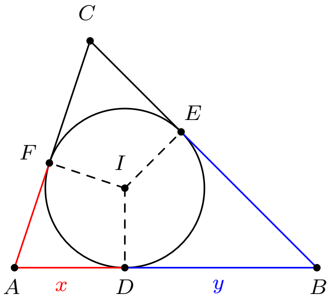
- Là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác đó, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn.
- Có tâm là giao điểm của các đường phân giác trong tam giác.



Ví dụ 1

Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ và tiếp xúc với AB tại D.

a) Chứng minh rằng $AD = \frac{AB+AC-CB}{2}$ và $BD = \frac{AB+BC-CA}{2}$.



Lời giải.

Gọi E, F là tiếp điểm của (I) trên BC, CA. Ta có

$$AF = AD = x,\ BD = BE = y \quad \text{và} \quad CE = CF.$$

Do đó

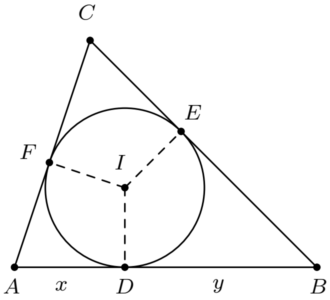
$$\begin{aligned} AB + AC - CB &= (x+y) + (x+CF) - (y+CE) \\ &= 2AD. \end{aligned}$$

Tương tự thì $AB + BC - CA = 2BD$. $\square$

Ví dụ 1

Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ và tiếp xúc với AB tại D.

b) Biết rằng $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$, chứng minh rằng $\widehat{C} = 90^\circ$.



Lời giải.

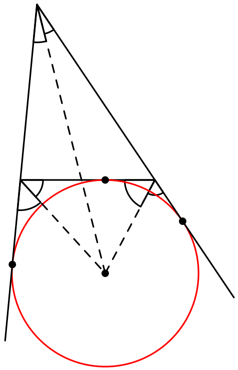
Theo câu a thì $x = \frac{c+b-a}{2}$ và $y = \frac{c+a-b}{2}$. Theo giả thiết thì $ab = 2xy$, tương đương

$$\begin{aligned} 2ab &= (c+b-a)(c+a-b) \\ &= c^2 - (a-b)^2 \\ &= c^2 - a^2 - b^2 + 2ab. \end{aligned}$$

Dẫn tới $a^2 + b^2 = c^2$ nên $\widehat{C} = 90^\circ$. □

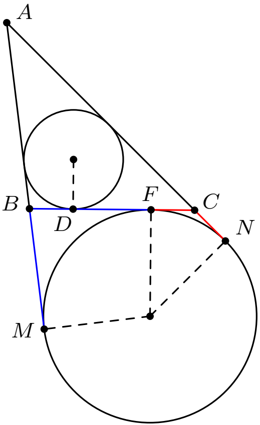
Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia.
- Có tâm là giao điểm của một đường phân giác trong và hai đường phân giác ngoài tam giác.



Ví dụ 2

Cho $\triangle ABC$, gọi D, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp trong góc A với cạnh BC. Chứng minh rằng D và F đối xứng với nhau qua trung điểm BC.



Lời giải.

Gọi M, N là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với AB, AC. Ta có

$$CF = CN = AN - b$$

$$2AN = \text{chu vi } \triangle ABC = a + b + c.$$

Do đó

$$CF = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}.$$

Ngoài ra theo Ví dụ 1 thì $BD = \frac{a+c-b}{2}$ nên $BD = CF$. □