Đại số - Bài 3: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải phương trình vô tỉ (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

5/2023

Bài 1a

Giải phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{-x^2+3x+18}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $-3 \leq x \leq 6$. Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x} \geq 0$ thì

$$t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)} \implies \sqrt{-x^2+3x+18}=\frac{t^2-9}{2}. \qquad (*)$$

Từ phương trình đề cho ta có

$$t=3+\frac{t^2-9}{2}.$$

Từ đây có được $t=-1$ (loại) hoặc $t=3$. Thay $t=3$ vào $(*)$ thì

$$\sqrt{-x^2+3x+18}=0 \implies x \in \{-3,6\}.$$

Vậy $x \in \{-3,6\}$. $\square$

Bài 1b

Giải phương trình $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $-x \geq -1$. Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\geq 0$ thì

$$t^2=3x+4+2\sqrt{(2x+3)(x+1)} \implies 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}=t^2-4.$$

Từ phương trình đề cho ta có

$$t=(t^2-4)-16.$$

Từ đây có được $t=-4$ (loại) hoặc $t=5$. Tìm được $x=3$. $\square$

Bài 1c

Giải phương trình $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30.$

Lời giải.

Đặt $t=x+\sqrt[3]{35-x^3}$ thì

$$\begin{aligned} t^3 &= x^3+(35-x^3)+3x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right) \\ &= 35+3x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right). \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình đề cho ta có

$$\frac{t^3-35}{3}=30 \implies t=5.$$

Tìm được $x\in\{2,3\}$. $\square$

Bài 2a

Giải phương trình $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x\geq -2$. Đặt $a=\sqrt{x+2}\geq 0$ và $b=\sqrt{x^2-2x+4}>0$. Có được

$$\sqrt{x^3+8}=ab$$
$$2(x^2-3x+2)=-2a^2+2b^2.$$

Từ phương trình đề cho ta có

$$-2a^2+2b^2=3ab.$$

Suy ra $a=-2b$ (loại) hoặc $a=\frac{1}{2}b$. Do đó

$$x+2=\frac{1}{4}(x^2-2x+4).$$

Tìm được $x\in\{3-\sqrt{13},3+\sqrt{13}\}$. □

Bài 2b

Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $a=\sqrt{x^2+2x} \geq 0$ và $b=\sqrt{2x-1} \geq 0$. Có được

$$\sqrt{3x^2+4x+1}=\sqrt{3a^2-b^2}.$$

Từ phương trình đề cho ta có

$$a+b=\sqrt{3a^2-b^2} \implies a^2-ab-b^2=0.$$

Suy ra $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}b$ (loại) hoặc $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$. Do đó

$$x^2+2x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}(2x-1).$$

Tìm được $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Bài 2c

Giải phương trình $2x^3 - x^2 - 3x + 1 = \sqrt{x^5 + x^4 + 1}$.

Nháp: Không thể phân tích $x^5 + x^4 + 1 = (x + a)(x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$ vì $x^5 + x^4 + 1$ không có nghiệm nguyên.

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e) \\ &= x^5 + (a + c)x^4 + (b + ac + d)x^3 + \\ &\qquad + (ad + bc + e)x^2 + (ae + bd)x + be. \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số tìm được $a = 1, b = 1, c = 0, d = -1, e = 1$. Như vậy

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1).$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x^5+x^4+1\geq 0$. Đặt $a=\sqrt{x^2+x+1}>0$ và $b=\sqrt{x^3-x+1}\geq 0$. Có được

$$\sqrt{x^5+x^4+1}=ab$$
$$2x^3-x^2-3x+1=-a^2+2b^2.$$

Từ phương trình đề cho ta có

$$-a^2+2b^2=ab.$$

Suy ra $a=-2b$ (loại) hoặc $a=b$. Do đó

$$x^2+x+1=x^3-x+1.$$

Tìm được $x\in\{-1,0,2\}$. $\square$

Bài 3a

Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$ thì $x^2+3x+1=t^2+3x$, do vậy

$$t^2+3x=(x+3)t \iff t^2-(x+3)t+3x=0. \tag{$*$}$$

Xem đây là phương trình bậc hai ẩn t (tham số x) ta có

$$\Delta_t=(x-3)^2.$$

Như vậy $(*)$ có nghiệm

$$t_1=\frac{x+3-(x-3)}{2}=3 \quad \text{và} \quad t_2=\frac{x+3+(x-3)}{2}=x.$$

Vậy $t=3$ hoặc $t=x$. Tìm được $x\in\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\}$. □

Bài 3b

Giải phương trình $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2-2x-1$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x^2+2x-1 \geq 0$. Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-1}$ thì $x^2-2x-1 = t^2-4x$, do vậy

$$2(1-x)t = t^2-4x \iff t^2+2(x-1)t-4x = 0. \tag{$*$}$$

Xem đây là phương trình bậc hai ẩn t (tham số x) ta có

$$\Delta'_t = (x+1)^2.$$

Như vậy $(*)$ có nghiệm

$$t_1 = -(x-1)+(x+1) = 2 \quad \text{và} \quad t_2 = -(x-1)-(x+1) = -2x.$$

Tìm được $x \in \{-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\}$. □

Bài 3c

Giải phương trình $9x^2 + 8x - 32 = 16\sqrt{8 - 2x^2}$.

Phân tích: Đặt $t = \sqrt{8 - 2x^2}$ thì

$$\begin{aligned} 9x^2 + 8x - 32 &= -t^2 + 7x^2 + 8x - 24 & (1) \\ &= -2t^2 + 5x^2 + 8x - 16. & (2) \end{aligned}$$

Với cách biểu diễn (1) thì

$$\Delta'_t = 7x^2 + 8x + 40.$$

Với cách biểu diễn (2) thì

$$\Delta'_t = 10x^2 + 16x + 32.$$

Cả hai trường hợp thì Δ'_t không phải bình phương đúng.

Nháp: Đặt $t = \sqrt{8-2x^2}$, ta có

$$9x^2 + 8x - 32 = 9x^2 + 8x - 32 + \Big(kt^2 - k(8-2x^2)\Big)$$
$$= kt^2 + (2k+9)x^2 + 8x - 8k - 32.$$

Do vậy $kt^2 + (2k+9)x^2 + 8x - 8k - 32 = 16t$, tương đương

$$kt^2 - 16t + (2k+9)x^2 + 8x - 8k - 32 = 0.$$

Tính được

$$\Delta'_t = -(2k^2+9k)x^2 - 8kx + 8k^2 + 32k + 64.$$

Cần tìm k sao cho $\Delta'_t = (Ax+B)^2$. Như vậy hàm số bậc hai Δ'_t (biến x) phải có nghiệm kép, nghĩa là

$$\Delta'_x = 16k^2 + (2k^2+9k)(8k^2+32k+64) = 0.$$

Tìm được $k = 0$ (loại) hoặc $k = -4$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $-2 \leq x \leq 2$. Đặt $t = \sqrt{8 - 2x^2}$ thì $9x^2 + 8x - 32 = -4t^2 + x^2 + 8x$, do vậy

$$-4t^2 + x^2 + 8x = 16t \iff 4t^2 + 16t - x^2 - 8x = 0. \qquad (*)$$

Xem đây là phương trình bậc hai ẩn t (tham số x) ta có

$$\Delta'_t = (2x+8)^2.$$

Như vậy $(*)$ có nghiệm

$$t_1 = \frac{-8 + (2x+8)}{4} = \frac{x}{2} \quad \text{và} \quad t_2 = \frac{-8 - (2x+8)}{4} = -\frac{x}{2} - 4.$$

Tìm được $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. $\square$