Hình học - Bài 1: Sự xác định đường tròn (Bài tập)

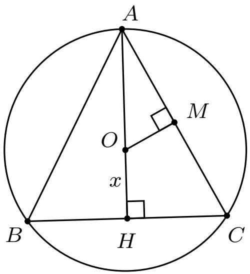
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

Bài 1a

Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng $AC = 40$cm và $BC = 48$cm. Hãy tính khoảng cách từ O đến BC.



Lời giải.

Kẻ đường cao AH, tính được $AH = 32$cm. Vì $AH > HC$ nên tâm O nằm giữa A và H. Đặt $OH = x$.

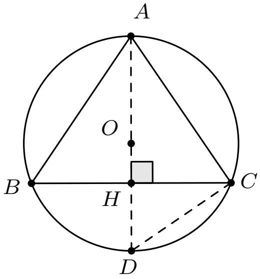
Kẻ $OM \perp AC$ thì M là trung điểm AC (?). Vì $\triangle AMO \sim \triangle AHC$ nên

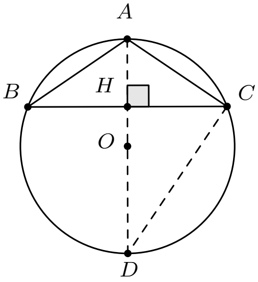
$$\frac{AO}{AC} = \frac{AM}{AH} \implies \frac{32 - x}{40} = \frac{20}{32}.$$

Từ đây tìm được $x = 7$. $\square$

Bài 1b

Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng cạnh bên bằng b và đường cao $AH = h$. Tính bán kính của đường tròn (O).





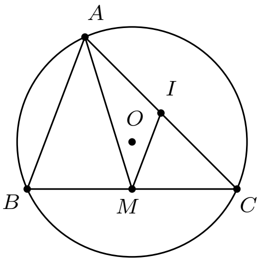
Lời giải.

Kẻ đường kính AD thì $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (?). Ta có $AC^2 = AH \cdot AD$ nên

$$AD = \frac{AC^2}{AH} = \frac{b^2}{h} \implies R = \frac{b^2}{2h}.$$

Bài 2a

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi M là trung điểm BC. Giả sử O nằm trong $\triangle AMC$. Gọi I là trung điểm AC. Chứng minh rằng chu vi tam giác IMC lớn hơn $2R$.



Lời giải.

Có $IM + IC = IM + IA > AM$, chu vi $\triangle IMC$ là

$$(IM + IC) + MC > AM + MC.$$

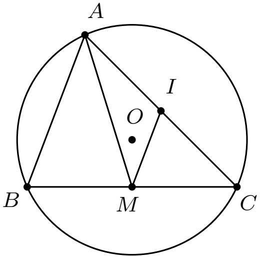
Vì O nằm trong $\triangle AMC$ nên $AM + MC > AO + OC = 2R$. Do đó

$$IM + IC + MC > AM + MC > 2R.$$

$\square$

Bài 2b

Chứng minh rằng chu vi tam giác ABC lớn hơn $4R$.

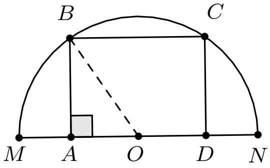


Lời giải.

Chu vi $\triangle ABC$ gấp đôi chu vi $\triangle IMC$ $(AB = 2IM,\ BC = 2MC$ và $CA = 2CI)$, kết hợp với câu a suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Bài 3

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính MN. Dựng hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp nửa đường tròn (A và D thuộc MN, B và C thuộc nửa đường tròn) sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.



Lời giải.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng

$$S = AD \cdot AB = 2AO \cdot AB$$

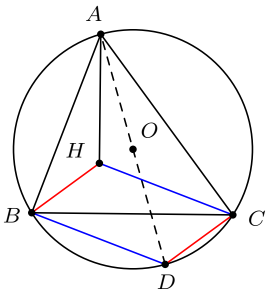
Ngoài ra $AO^2 + AB^2 = BO^2 = R^2$ với R là bán kính của nửa đường tròn. Khi đó

$$S \leq AO^2 + AB^2 = R^2.$$

Vậy $\max S = R^2$ khi và chỉ khi $AO = AB \iff \widehat{BOA} = 45^\circ$. Hình chữ nhật này được dựng bằng cách kẻ điểm B sao cho $\widehat{BOM} = 45^\circ$. □

Bài 4a

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có đường kính AD. Gọi H là trực tâm tam giác. Chứng minh rằng $BHCD$ là hình bình hành.



Lời giải.

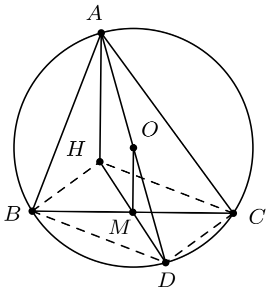
Vì H là trực tâm nên $BH \perp AC$. Vì AD là đường kính nên $CD \perp AC$. Do đó

$$BH \parallel CD \text{ (cùng vuông góc } AC\text{)}.$$

Hoàn toàn tương tự thì $BD \parallel CH$, vậy $BHCD$ là hình bình hành. $\square$

Bài 4b

Chứng minh rằng $AH = 2OM$ với M là trung điểm BC.



Lời giải.

Vì M là trung điểm BC, ngoài ra $BHCD$ là hình bình hành nên M cũng là trung điểm HD.
$\triangle AHD$ có M, O lần lượt là trung điểm HD, AD nên theo định lí đường trung bình thì

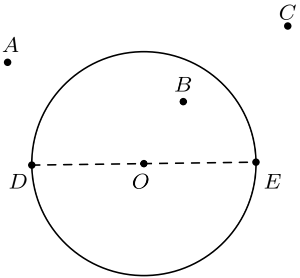
$$AH = 2OM.$$

$\square$

Bài 5

Cho ba điểm A, B, C bất kì và đường tròn (O) có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho

$$MA + MB + MC \geq 3.$$



Lời giải.

Gọi DE là một đường kính của đường tròn. Ta có $DA + EA \geq DE = 2$, tương tự thì

$$DB + EB \geq 2 \quad \text{và} \quad DC + EC \geq 2.$$

Suy ra $(DA + DB + DC) + (EA + EB + EC) \geq 6$.

- Nếu $DA + DB + DC \geq 3$ thì điểm M cần tìm là D.
- Nếu $DA + DB + DC < 3$ thì $EA + EB + EC \geq 3$, điểm M cần tìm là E.

□