Đại số - Bài 5: Căn bậc ba, căn bậc n (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

Bài 1

Tính

a) $\sqrt[3]{512}$,

b) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$,

c) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{4}$.

Đáp án

a) 8,

b) $3 - (-2) - 5 = 0$,

c) $3 - 6 = -3$.

Bài 2

Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$,

b) $B = \dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$.

Lời giải.

a) $A = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{1+\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$,

b) $B = \dfrac{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \sqrt[3]{2}$.

□

Bài 2c

Tính giá trị biểu thức $C = \dfrac{\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}}{2}$.

Đáp án

$C = \dfrac{1}{2}$.

Bài 2d

Tính giá trị biểu thức $D = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{\sqrt{27}}}$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} D^3 &= \left(2 + \frac{10}{\sqrt{27}}\right) + \left(2 - \frac{10}{\sqrt{27}}\right) + 3\sqrt[3]{\left(2 + \frac{10}{\sqrt{27}}\right)\left(2 - \frac{10}{\sqrt{27}}\right)} \times D \\ &= 4 + 3 \times \frac{2}{3} D = 4 + 2D. \end{aligned}$$

Dẫn tới $D^3 - 2D - 4 = 0$, tương đương

$$(D^3 - 8) - 2(D - 2) = 0 \iff (D - 2)(D^2 + 2D + 2) = 0. \quad (1)$$

Vì $D^2 + 2D + 2 = (D + 1)^2 + 1 > 0$ nên $(1) \iff D = 2$. $\square$

Bài 3a

Lập phương trình bậc ba với hệ số nguyên sao cho có một nghiệm là $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

Lời giải.

Đặt $m=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, khi đó

$$\begin{aligned} m^3 &= 2+4+3\sqrt[3]{2\times 4}\times m \\ &= 6+6m. \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là nghiệm của phương trình $x^3-6x-6=0$. $\square$

Bài 3b

Lập phương trình bậc ba với hệ số nguyên sao cho có một nghiệm là

$$\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}.$$

Đáp án

$x^3+12x-8=0.$

Bài 4

Tính giá trị các biểu thức sau

a) $E = \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$,

b) $F = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\left(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right)$.

Lời giải.

a) Chú ý rằng

$$\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(3 + 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

Khi đó $E = 1$.

b) Chú ý rằng

$$\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt[6]{(2 + \sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}.$$

Khi đó $F = -2$. □

Bài 5a

So sánh $5\sqrt[3]{6}$ với $6\sqrt[3]{5}$.

Lời giải.

$$5\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{750} < \sqrt[3]{1080} = 6\sqrt[3]{5}.$$

$\square$

Chú ý

Với a, b là hai số bất kì thì

$$a < b \iff \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}.$$

Bài 5b

So sánh $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ với $2\sqrt[3]{3}$.

Nháp:

$$\underbrace{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}}_{x}+\underbrace{\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}_{y}<2\sqrt[3]{3}.$$

Khi đó $x^3+y^3=6$, ta cần chứng minh $x+y<2\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \iff (x+y)^3<4(x^3+y^3)$.

Lời giải.

Đặt $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}},\ y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ thì $x>y>0$ và $x^3+y^3=6$. Ta có

$$4(x^3+y^3)-(x+y)^3=3(x+y)(x-y)^2>0.$$

Dẫn tới

$$24>(x+y)^3 \iff 2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}>x+y=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}.$$

□

Bài 6

Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ và $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}.$$

Lời giải

Đặt $am^3 = bn^3 = cp^3 = K$ thì $a = \frac{K}{m^3}, b = \frac{K}{n^3}, c = \frac{K}{p^3}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} &= \frac{\sqrt[3]{K}}{m} + \frac{\sqrt[3]{K}}{n} + \frac{\sqrt[3]{K}}{p} \\
&= \sqrt[3]{K}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) \\
&= \sqrt[3]{K}.
\end{aligned}$$

Lời giải.

Đặt $am^3 = bn^3 = cp^3 = K$ thì $a = \frac{K}{m^3}, b = \frac{K}{n^3}, c = \frac{K}{p^3}$. Khi đó

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{K}.$$

Ngoài ra thì

$$\begin{aligned} am^2 + bn^2 + cp^2 &= \frac{am^3}{m} + \frac{bn^3}{n} + \frac{cp^3}{p} \\ &= \frac{K}{m} + \frac{K}{n} + \frac{K}{p} \\ &= K\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) = K. \end{aligned}$$

Do vậy

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{K} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}.$$

□