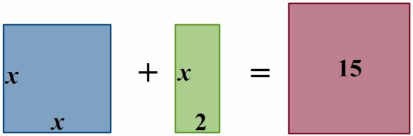
Đại số - Bài 2: Phương trình bậc hai

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

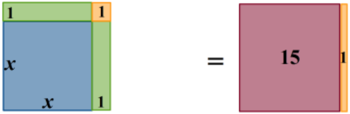
2/2023

Lịch sử



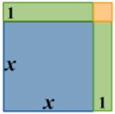
$$x^2 + 2x = 15$$

$$x^2 + 2x = 15$$

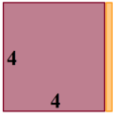


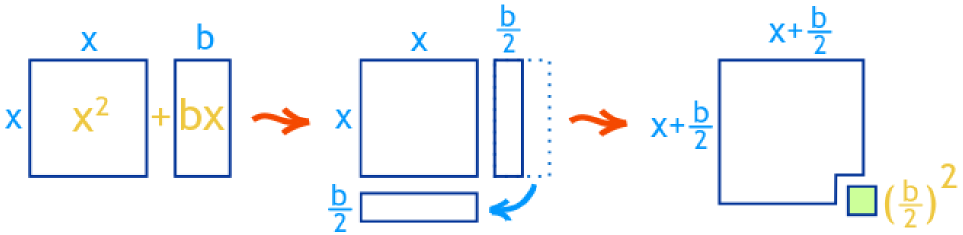
$$x^2 + 2x + 1 = 16$$

$$(x+1)^2 = 16$$



$$x + 1 = 4$$





$$
\begin{aligned}
x^2 + bx = c \iff\ & x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4} \\
\iff\ & \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4} \\
\iff\ & x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}
\end{aligned}
$$

Phương pháp giải

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ tương đương

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = \frac{-c}{a} &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{(2a)^2}. \end{aligned}$$

Với $\Delta \geq 0$ thì phương trình có nghiệm

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có **biệt thức** $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$,
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm $\iff \Delta \geq 0$.

Ví dụ 1

Giải và biện luận phương trình $mx^2 + x + 2 = 0$.

Lời giải.

TH1: $m = 0$ thì phương trình trở thành $x + 2 = 0 \iff x = -2$.

TH2: $m \neq 0$ thì $\Delta = 1 - 8m$.

- Nếu $\Delta > 0 \iff m < \frac{1}{8}$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8m}}{2m} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 8m}}{2m},$$

- Nếu $\Delta = 0 \iff m = \frac{1}{8}$ thì phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-1}{2m} = -4,$$

- Nếu $\Delta < 0 \iff m > \frac{1}{8}$ thì phương trình vô nghiệm.

□

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ $(\Delta = 4\Delta')$

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a},$$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$,
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2

Chứng minh rằng với a, b, c bất kì thì phương trình

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$$

luôn có nghiệm.

Lời giải.

Ta có

$$\Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca).$$

Vì

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

nên $\Delta' \geq 0$, do vậy phương trình đề cho luôn có nghiệm. $\square$