

# Đại số - Bài 5: Phương trình quy về phương trình bậc hai (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

## Bài 1

Giải các phương trình sau

a)  $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$ ,

b)  $x^3 - x = \sqrt{2}$ ,

c)  $(x + 2)^4 + (x + 4)^4 = 82$ ,

d)  $(x + 5)(x + 6)(x + 8)(x + 9) = 40$ .

## Ý tưởng

a)  $(x + 1)(x^2 - 6x + 7) = 0$ . Đáp án:  $x \in \{1, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$ .

b)  $x^3 - 2\sqrt{2} - x + \sqrt{2} = 0$ . Đáp án:  $x = \sqrt{2}$ .

c) Đặt  $y = x + 3$ . Đáp án:  $x \in \{-5, -1\}$ .

d) Đặt  $y = x^2 + 14x$ . Đáp án:  $x \in \{-10, -4\}$ .

## Bài 2

Giải các phương trình sau

a)  $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ ,

b)  $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$ .

Lời giải.

a) Đặt  $y = x^2 \geq 0$ , phương trình trở thành

$$2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

Cuối cùng thì  $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ .

b) Đặt  $y = x^2 - 4x + 2$ , phương trình trở thành

$$y^2 + y - 6 = 0.$$

Cuối cùng thì  $x \in \{0, 4\}$ .



### Bài 2c

Giải phương trình  $(4x + 3)^2(x + 1)(2x + 1) = 810$ .

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$(4x + 3)^2(4x + 4)(4x + 2) = 810 \times 8.$$

Đặt  $y = 4x + 3$  thì phương trình trở thành

$$y^2(y + 1)(y - 1) = 6480 \iff y^4 - y^2 - 6480 = 0.$$

Vậy  $x \in \left\{-3, \frac{3}{2}\right\}$ .



### Bài 2d

Giải phương trình  $2x^2 - 2x + \sqrt{(x+1)(x-2)} = 14$ .

Lời giải.

ĐKXD:  $x \leq -1$  hoặc  $x \geq 2$ .

Đặt  $t = \sqrt{(x+1)(x-2)} \geq 0$  thì  $x^2 - x = t^2 + 2$ . Phương trình tương đương

$$2(t^2 + 2) + t = 14 \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = -5/2 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Với  $t = 2$  tìm được  $x \in \{-2, 3\}$ .



### Bài 3

Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6, \quad \text{b) } \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1.$$

#### Ý tưởng

a) Đặt  $y = 2x + \frac{3}{x}$  thì phương trình trở thành  $\frac{2}{y-5} + \frac{13}{y+1} = 3$ .

Vậy  $x \in \left\{\frac{3}{4}, 2\right\}$ .

b) Đặt  $y = x^2 + 3x$  thì phương trình trở thành  $\frac{6}{y+2} + \frac{8}{y-4} = 1$ .

Vậy  $x \in \left\{-3, 0, \frac{-3-\sqrt{73}}{2}, \frac{-3+\sqrt{73}}{2}\right\}$ .

### Bài 3c

Giải phương trình  $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$ .

Lời giải.

ĐKXD:  $x \neq -9$ , phương trình tương đương

$$\begin{aligned}x^2 + \left(\frac{9x}{x+9}\right)^2 = 40 &\iff \left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 + 2\frac{9x^2}{x+9} = 40 \\&\iff \left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40.\end{aligned}$$

Đặt  $y = \frac{x^2}{x+9}$  thì ta có  $y^2 + 18y = 40$ . Vậy  $x \in \{1 - \sqrt{19}, 1 + \sqrt{19}\}$ .



### Bài 3d

Giải phương trình  $\frac{x(3-x)}{x+1} \left( x + \frac{3-x}{x+1} \right) = 2$ .

Lời giải.

ĐKXD:  $x \neq -1$ , đặt  $a = \frac{x(3-x)}{x+1}$  và  $b = x + \frac{3-x}{x+1}$  thì theo đề ta có  $ab = 2$ . Mặt khác

$$a + b = \frac{x(3-x)}{x+1} + \left( x + \frac{3-x}{x+1} \right) = 3.$$

Vậy  $ab = 2$  và  $a + b = 3$ , từ đây tìm được  $a$  và  $b$ . Vậy  $x = 1$ .





### Bài 4a

Chứng minh rằng với  $x = \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right)$  thì  $4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left( a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$ .

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} 4x^3 + 3x &= 4 \cdot \frac{1}{8} \left( a - \frac{1}{a} \right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} \right) + \frac{3}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( a^3 - \frac{1}{a^3} \right). \end{aligned}$$



## Bài 4b

Giải phương trình  $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$ .

Phân tích: Biểu diễn  $\frac{3}{4}$  dưới dạng  $\frac{1}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right)$  thì  $h = 2$ . Vậy với

$$k = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{h} - \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \right) \implies 4k^3 + 3k = \frac{1}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) = \frac{3}{4}.$$

Lời giải.

Thấy rằng  $k = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)$  là một nghiệm của phương trình, ta sẽ chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

■ Nếu  $x > k$  thì  $x^3 > k^3$  nên  $4x^3 + 3x > 4k^3 + 3k = \frac{3}{4}$ .

■ Nếu  $x < k$  thì  $x^3 < k^3$  nên  $4x^3 + 3x < 4k^3 + 3k = \frac{3}{4}$ .

Vậy  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

