

Chuyên đề - DS 9: Điều kiện về nghiệm của phương trình

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Ví dụ 1

Tìm m để phương trình $x^2 + mx - 1 = 0$ có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta = m^2 + 4 \geq 0$, từ đây dễ thấy phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

Giả sử phương trình có nghiệm x_1 và x_2 , điều kiện để cả x_1 và x_2 đều nhỏ hơn 2 là

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 < 4 \end{cases}.$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét thì ta có

$$\begin{cases} -1 + 2m + 4 > 0 \\ -m < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} m > \frac{-3}{2} \\ m > -4 \end{cases} \iff m > \frac{-3}{2}.$$

Vậy $m > \frac{-3}{2}$. □

Ví dụ 2

Tìm m để phương trình $x^2 - 6x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2 - 5x_1 + 2m - 2 + x_2 > 0.$$

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0 \iff m \leq \frac{11}{2}$. Vì x_1 là nghiệm nên

$$x_1^2 - 6x_1 + 2m - 2 = 0 \iff x_1^2 - 5x_1 + 2m - 2 = x_1.$$

Do đó

$$x_1^2 - 5x_1 + 2m - 2 + x_2 > 0 \iff x_1 + x_2 > 0.$$

Điều này luôn đúng vì theo hệ thức Vi-ét thì $x_1 + x_2 = 6$. Vậy $m \leq \frac{11}{2}$. □

Ví dụ 3

Tìm m để phương trình $x^3 - mx = m - 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}(x^3 + 1) - m(x + 1) = 0 &\iff (x + 1)(x^2 - x + 1 - m) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (*)\end{aligned}$$

Từ đây để thỏa đề thì sẽ có hai trường hợp.

- TH1: (*) có nghiệm kép, và nghiệm đó khác -1 . Khi đó

$$\Delta = 0 \iff 1 - 4(1 - m) = 0 \iff m = \frac{3}{4}.$$

Với $m = \frac{3}{4}$ thì (*) có nghiệm $x_0 = \frac{1}{2}$ (thỏa đề).

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2 - x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ đây để thỏa đề thì sẽ có hai trường hợp.

- TH1: (*) có nghiệm kép, và nghiệm đó khác -1 .
- TH2: (*) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm là -1 . Khi đó

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - (-1) + 1 - m = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m = 3 \end{cases} \iff m = 3.$$

Vậy $m \in \left\{\frac{3}{4}, 3\right\}$.

□