Đại số - Bài 4: Hệ thức Vi-ét

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Định lí Vi-ét

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm $(\Delta \geq 0)$ là x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{và} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ví dụ

Phương trình $3x^2 - 7x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{3} \quad \text{và} \quad x_1 x_2 = \frac{2}{3}.$$

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Đặt

$$S = \underbrace{x_1 + x_2}_{-b/a} \quad \text{và} \quad P = \underbrace{x_1 x_2}_{c/a}.$$

Thấy rằng với

- $P < 0$ thì hai nghiệm trái dấu.
- $P > 0$ thì hai nghiệm cùng dấu, ngoài ra
  - $S > 0$ thì hai nghiệm dương,
  - $S < 0$ thì hai nghiệm âm.

Ví dụ

Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$. $\quad (*)$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Lời giải.

Với $m = 0$ thì $(*)$ có nghiệm $x = -2$.

Với $m \neq 0$ thì $(*)$ là phương trình bậc hai nên có nghiệm $\iff \Delta' \geq 0$, tương đương

$$(m+1)^2 - m(m-1) \geq 0 \iff m \geq \frac{-1}{6}.$$

Vậy $(*)$ có nghiệm $\iff m \geq \frac{-1}{6}$. $\square$

Ví dụ

Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$. $\quad (*)$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải.

Theo câu a thì $(*)$ có nghiệm $\iff m \geq \frac{-1}{6}$. Giả sử $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1x_2 = \frac{m-4}{m}$. Vì $(*)$ có hai nghiệm trái dấu nên

$$\frac{m-4}{m} = x_1x_2 < 0 \iff m(m-4) < 0 \iff 0 < m < 4.$$

Vậy $0 < m < 4$. $\square$

Ví dụ

Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$. $(*)$

c) Tìm một hệ thức giữa hai nghiệm x_1, x_2 sao cho không phụ thuộc vào m.

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét thì

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m} \quad \text{và} \quad x_1x_2 = \frac{m-4}{m}.$$

Ta có $x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m}$ và $x_1x_2 = 1 - \frac{4}{m}$, do đó

$$2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = \left(4 + \frac{4}{m}\right) + \left(1 - \frac{4}{m}\right) = 5.$$

Vậy $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 5$. □

Ví dụ

Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0.$ $(*)$

d) Tìm m để $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 22$.

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m}$ và $x_1x_2 = \frac{m-4}{m}$. Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{4(m+1)^2}{m^2} - \frac{2(m-4)}{m}.$$

Suy ra

$$\frac{4(m+1)^2}{m^2} - \frac{2(m-4)}{m} = 22 \implies m \in \left\{\frac{-1}{5}, 1\right\}.$$

So sánh với điều kiện có nghiệm $m \geq \frac{-1}{6}$ thì tìm được $m = 1$. □

Ví dụ

Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$. $(*)$

e) Tìm m để $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + 4x_2 = 3$.

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m}$ và $x_1x_2 = \frac{m-4}{m}$. Với

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{5m+8}{3m} \\ x_2 = \frac{m-2}{3m} \end{cases}.$$

Ngoài ra

$$x_1x_2 = \frac{m-4}{m} \implies \frac{5m+8}{3m} \cdot \frac{m-2}{3m} = \frac{m-4}{m}$$

Từ đây tìm được $m \in \left\{\frac{1}{2}, 8\right\}$ (thỏa mãn điều kiện $m \geq \frac{-1}{6}$). $\square$