

Hình học - Bài 1: Số đo cung. Liên hệ giữa cung và dây (Bài tập)

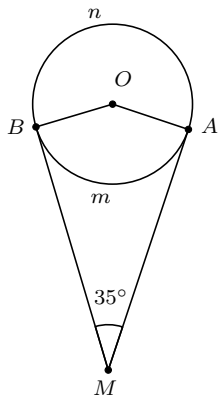
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023

Bài 1

Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M sao cho $\widehat{AMB} = 35^\circ$.
Tính số đo mỗi cung AB (cung lớn và cung nhỏ).



Lời giải.

Ta có

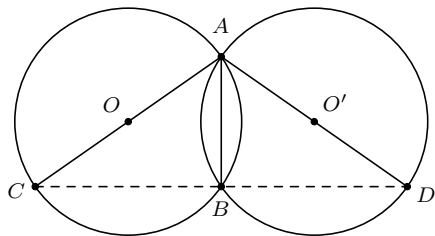
$$\text{sđ } \widehat{AmB} = \widehat{AOB} = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

$$\text{sđ } \widehat{AnB} = 360^\circ - 145^\circ = 215^\circ.$$



Bài 2a

Hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$. So sánh \widehat{BC} với \widehat{BD} .



Lời giải.

Chứng minh được

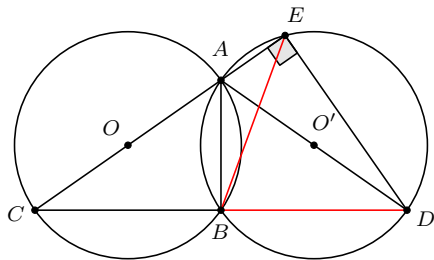
$$\triangle ABC = \triangle ABD \text{ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)}$$

nên $BC = BD$, mà hai đường tròn bằng nhau nên $\widehat{BC} = \widehat{BD}$.



Bài 2b

Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O') . Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung \widehat{EBD} .



Lời giải.

Vì $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 180^\circ$ nên C, B, D thẳng hàng.

Theo câu a thì B là trung điểm CD , do đó EB là đường trung tuyến của $\triangle ECD$ vuông tại E . Suy ra

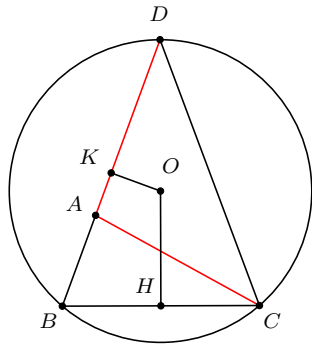
$$BE = BD \implies \widehat{BE} = \widehat{BD}.$$



Bài 3

Cho $\triangle ABC$, trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle DBC$. Kẻ $OH \perp BC$ và $OK \perp BD$ với $H \in BC, K \in BD$.

- a) Chứng minh rằng $OH > OK$.
- b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC .



Lời giải.

a) Ta có

$$BD = BA + AD = BA + AC > BC.$$

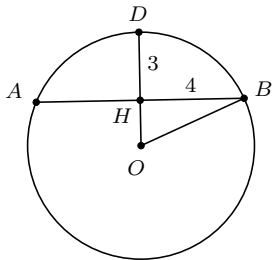
Theo định lý về dây cung và khoảng cách đến tâm thì $OH > OK$.

b) Vì $BD > BC$ nên $\widehat{BD} > \widehat{BC}$.



Bài 4

Tính bán kính của đường tròn (O), biết rằng dây AB của đường tròn có độ dài 8cm và khoảng cách từ điểm chính giữa \widehat{AB} đến dây AB bằng 3cm.



Lời giải.

Với H là trung điểm AB , D là điểm chính giữa \widehat{AB} thì $OD \perp AB$.

Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle OHB$ vuông tại H thì

$$\begin{aligned} OH^2 + HB^2 &= OB^2 \\ \Leftrightarrow (R - 3)^2 + 4^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Từ đây tìm được $R = \frac{25}{6}$ (cm).



Bài 5

Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 2\text{cm}$, dây $CD \parallel AB$ với C thuộc cung nhỏ AD . Tính độ dài các cạnh của hình thang $ABDC$ biết chu vi hình thang bằng 5cm .

Lời giải.

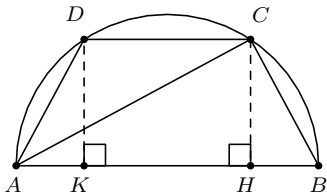
Kẻ $CH, DK \perp AB$. Vì hai dây AB, CD song song nên $BC = AD = x$. Suy ra

$$KH = CD = 3 - 2x \implies BH = \frac{AB - KH}{2} = \frac{2x - 1}{2}.$$

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle CAB$ vuông tại C có đường cao CH thì

$$BC^2 = BH \cdot AB \implies x^2 = \frac{2x - 1}{2} \cdot 2$$

Tìm được $x = 1$ nên $BC = AD = 1\text{cm}$ và $DC = 1\text{cm}$. □



Bài 6a

Cho nửa đường tròn (O) có đường kính $AB = 20\text{cm}$, C là điểm chính giữa của (O) . Điểm $H \in OA$ sao cho $OH = 6\text{cm}$. Đường vuông góc với OA tại H cắt (O) ở D . Vẽ $AE \parallel DC$ và $EK \perp AB$. Chứng minh rằng $\triangle ODK = \triangle DOH$.

Lời giải.

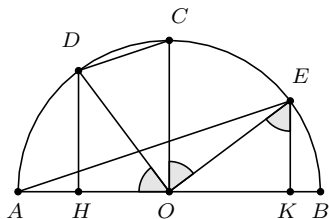
Vì $AE \parallel CD$ nên

$$\widehat{AD} = \widehat{CE} \implies \widehat{AOD} = \widehat{COE}. \quad (1)$$

Ngoài ra $CO \parallel EK$ (cùng vuông góc AB) nên

$$\widehat{KEO} = \widehat{COE}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AOD} = \widehat{KEO}$. Như vậy $\triangle ODK = \triangle DOH$ (cạnh huyền-góc nhọn).



Bài 6b

Tính diện tích $\triangle AEK$.

Lời giải

Theo câu a thì $\triangle OEK = \triangle DOH$ nên

$$EK = OH = 6 \quad \text{và} \quad OK = DH.$$

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle DAB$ vuông tại D có đường cao DH thì

$$\begin{aligned} DH^2 &= AH \cdot HB \\ &= (OA - OH)(OB + OH) \\ &= (10 - 6)(10 + 6) = 64. \end{aligned}$$

Như vậy $DH = 8$ nên $OK = 8$. Do đó $S_{AEK} = 54\text{cm}^2$.

