

Đại số - Bài 2: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023

Bài 1

Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} x - 2y\sqrt{2} = \sqrt{5}, \\ x\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10}, \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases}$$

Đáp án

a) $\left(\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{5}, \frac{1-2\sqrt{10}}{5} \right),$

b) $\left(\frac{-6+7\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right).$

Bài 2

Xác định các hệ số a, b để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$$

có nghiệm là $(x, y) = (1, -2)$.

Lời giải.

Vì hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (1, -2)$ nên

$$\begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ b + 2a = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy $a = -4$ và $b = 3$. □

Chú ý

Cho hệ phương trình với **một tham số** m

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}. \quad (\text{H})$$

Thực hiện phép cộng các phương trình của (H) ta có phương trình

$$a_3x = b_3. \quad (\text{P})$$

- (P) vô nghiệm $\implies (\text{H})$ vô nghiệm.
- (P) vô số nghiệm $\implies (\text{H})$ vô số nghiệm.
- (P) có nghiệm duy nhất \implies chưa thể kết luận (H) , phải thay $x = \frac{b_3}{a_3}$ vào (H) .

Bài 3

Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(m+1)x + (m+2)y = m-3 \\ (m+1)x + my = 3m+7 \end{cases} \quad (1)$$

$$(m+1)x + my = 3m+7 \quad (2)$$

a) Vô nghiệm,

b) Vô số nghiệm.

Lời giải

Lấy $PT(1) - 2PT(2)$ thì có được

$$(m+2)y - 2my = m-3 - 2(3m+7) \iff (m-2)y = 5m+17.$$

Lời giải.

Có được

$$(m - 2)y = 5m + 17. \quad (\diamond)$$

- Với $m = 2$ thì (\diamond) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.
- Với $m \neq 2$ thì (\diamond) có nghiệm duy nhất $y = \frac{5m+17}{m-2}$, thay vào (2) thì

$$(m + 1)x = 3m + 7 - m \cdot \frac{5m + 17}{m - 2} = \frac{-2(m^2 + 8m + 7)}{m - 2}. \quad (\clubsuit)$$

Với $m = -1$ thì (\clubsuit) có vô số nghiệm nên hệ cũng có vô số nghiệm.

Vậy hệ phương trình

a) Vô nghiệm $\iff m = 2,$ b) Vô số nghiệm $\iff m = -1.$



Bài 4a

Giải và biện luận hệ phương trình theo m

$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 3m - 1 \end{cases} \quad (4)$$

Lời giải.

Lấy $PT(1) - mPT(2)$ ta có

$$(m^2 - 1)x = 3m^2 - 2m - 1 = (m - 1)(3m + 1). \quad (\diamond)$$

Chia thành ba trường hợp sau

- Với $m \neq \{-1, 1\}$ thì (\diamond) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m+1}{m+1}$, thay vào (4) thì $y = \frac{m-1}{m+1}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.
- Với $m = 1$ thì (\diamond) có vô số nghiệm nên hệ cũng có vô số nghiệm.
- Với $m = -1$ thì (\diamond) vô nghiệm nên hệ cũng vô nghiệm.

Bài 4b

Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất, tìm m để tích xy nhỏ nhất.

Lời giải.

Với $m \neq \{-1, 1\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$(x, y) = \left(\frac{3m+1}{m+1}, \frac{m-1}{m+1} \right).$$

Khi đó

$$xy = \frac{3m^2 - 2m - 1}{(m+1)^2} = \frac{4m^2}{(m+1)^2} - 1 \geq -1.$$

Vậy $\min xy = -1 \iff m = 0$.

□

Bài 5

Tìm m để nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m - 4 \\ x + (m-1)y = m \end{cases}$$

là các số nguyên.

Lời giải.

Để nghiệm của hệ là các số nguyên thì hệ phải có nghiệm duy nhất. Tìm được $m \notin \{0, 2\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x, y) = \left(\frac{3m-2}{m}, \frac{m-2}{m} \right).$$

Chú ý là $\frac{3m-2}{m} = 3 - \frac{2}{m}$, cuối cùng thì $m \in \{-2, -1, 1\}$.

□