

Hình học - Bài 9: Diện tích hình tròn, hình quạt tròn (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Bài 1

Chân một đồng cát đổ trên một nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi 12m. Hỏi chân đồng cát đó chiếm một diện tích là bao nhiêu?

Lời giải.

Theo giả thiết thì

$$C = 2\pi R = 12 \implies R = \frac{6}{\pi}.$$

Do vậy diện tích là

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 = \frac{36}{\pi} \approx 11,5 \text{ (m}^2\text{)}.$$



Bài 2

Cho một hình tròn và một hình vuông có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn.

Lời giải.

Gọi C là chu vi của hình tròn, với R là bán kính của hình tròn thì $C = 2\pi R$. Suy ra

$$R = \frac{C}{2\pi} \implies S_{\text{tròn}} = \pi R^2 = \frac{C^2}{4\pi}.$$

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông thì $C = 4a$. Suy ra

$$a = \frac{C}{4} \implies S_{\text{vuông}} = a^2 = \frac{C^2}{16}.$$

Như vậy

$$S_{\text{tròn}} = \frac{C^2}{4\pi} > \frac{C^2}{16} = S_{\text{vuông}}.$$



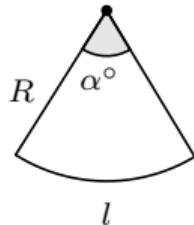
Bài 3

Một hình quạt có chu vi bằng 28cm và diện tích bằng 49cm^2 (chu vi bằng độ dài cung hình quạt cộng với hai lần bán kính). Tính bán kính của hình quạt đó.

Lời giải.

Gọi số đo của cung là α° , như vậy độ dài cung là

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180} \implies l + 2R = 28.$$



Diện tích hình quạt là

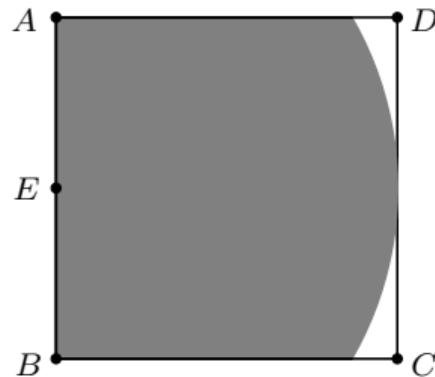
$$49 = S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{l \cdot R}{2} \implies l \cdot R = 98$$

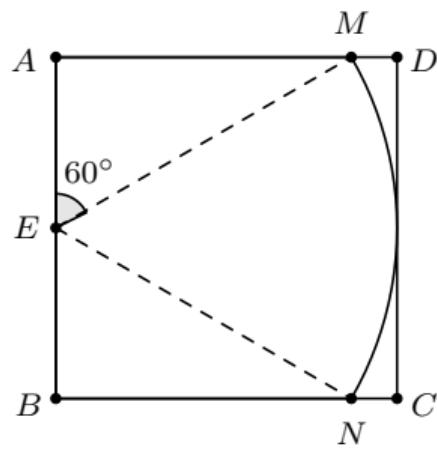
Từ các kết quả trên tìm được $R = 7$ (cm).

□

Bài 4

Một vườn hình vuông $ABCD$ có cạnh 20m như hình vẽ. Người ta buộc một con dê bằng sợi dây thừng dài 20m tại trung điểm E của cạnh AB . Tính diện tích cỏ mà con dê có thể ăn được (phần tô đậm trên hình vẽ).





Lời giải

Kí hiệu M, N như hình vẽ. Ta có

$$\cos \widehat{AEM} = \frac{AE}{EM} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \implies \widehat{AEM} = 60^\circ.$$

Như vậy $AM = EM \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$ nên

$$S_{AEM} = \frac{1}{2}AE \cdot AM = 50\sqrt{3}.$$

Thấy rằng $\widehat{MEN} = 60^\circ$ nên hình quạt tạo bởi tâm E và cung MN có diện tích là

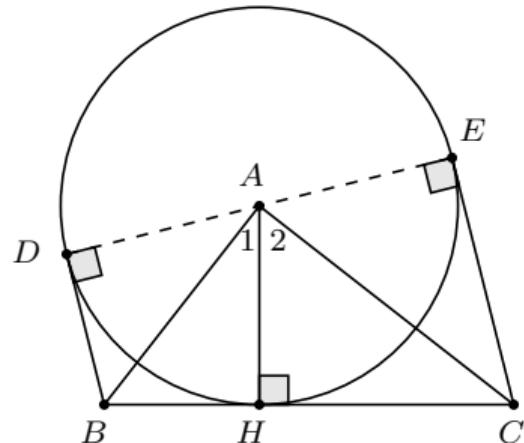
$$S_{\text{hình quạt}} = \frac{\pi \cdot EM^2 \cdot \widehat{MEN}}{360^\circ} = \frac{200\pi}{3}.$$

Diện tích cổ cần tính là

$$2S_{AEM} + S_{\text{hình quạt}} = 100\sqrt{3} + \frac{200\pi}{3} (\text{m}^2).$$

Bài 5a

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH . Kẻ các tiếp tuyến BD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.



Lời giải.

Theo tính chất của tiếp tuyến thì

$$\widehat{DAH} = 2\hat{A}_1 \quad \text{và} \quad \widehat{EAH} = 2\hat{A}_2.$$

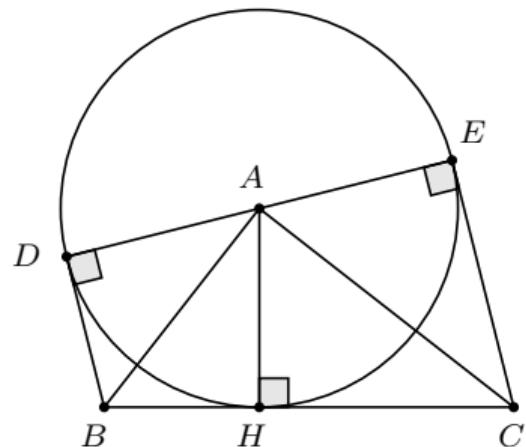
Mà $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$ nên

$$\widehat{DAH} + \widehat{EAH} = 180^\circ.$$

Do vậy ba điểm D, A, E thẳng hàng. □

Bài 5b

Biết rằng $AB = 15\text{cm}$ và $AC = 20\text{cm}$. Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng BD, BC, CE và cung DE không chứa H của đường tròn (A).



Lời giải.

Tính được $BH = 9$, $CH = 16$ và $AH = 12$. Do đó

$$BD = BH = 9, \quad CE = CH = 16$$

và $DE = 2AH = 24$. Như vậy

$$S_{BCED} = \frac{DE(BD + EC)}{2} = 300.$$

Ngoài ra diện tích một nửa hình tròn là $\frac{\pi R^2}{2} = 72\pi$.
Vậy diện tích cần tính bằng $300 + 72\pi (\text{cm}^2)$. □

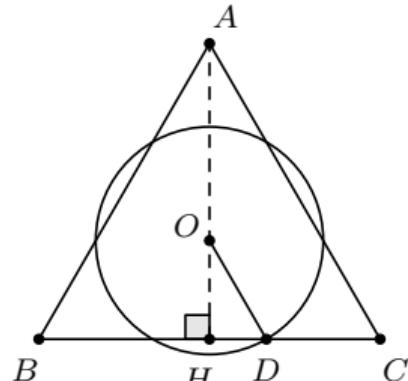
Bài 6a

Cho $\triangle ABC$ đều có tâm O và $AB = 3\text{cm}$. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 1cm , biết rằng đường tròn cắt cạnh BC tại D (D gần C hơn B). Tính độ dài CD .

Lời giải.

AO cắt BC tại H thì H là trung điểm BC . Vì O là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\frac{OH}{AH} = \frac{1}{3} = \frac{OD}{AC}.$$



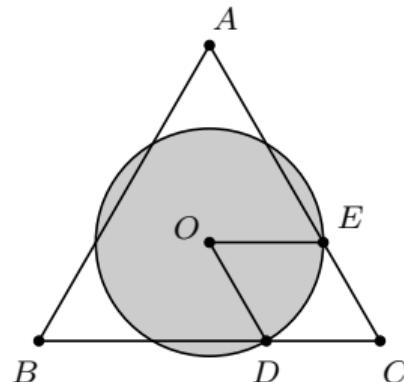
Do đó theo định lí Ta-lét đảo thì $OD \parallel AC$, suy ra

$$\frac{HD}{HC} = \frac{HO}{HA} = \frac{1}{3} \implies HD = \frac{HC}{3} = \frac{1}{2}.$$

Do vậy $CD = HC - HD = 1\text{ (cm)}$. □

Bài 6b

Tính diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn.



Lời giải

Kí hiệu E như hình vẽ, tương tự câu a thì $CE = 1$. Do đó OEC là hình thoi, hình thoi này có cạnh 1cm và $\widehat{C} = 60^\circ$ nên tính được

$$S_{OEC} = 2S_{CED} = 2 \cdot \frac{CD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích hình quạt ODE bằng $\frac{\pi \cdot OD^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{6}$. Như vậy diện tích "tam giác" CDE bằng

$$S_{OEC} - S_{\text{quạt}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Do đó phần diện tích cần tính bằng $3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2} (\text{cm}^2)$.