Hình học - Bài 7: Đường tròn nội (ngoại) tiếp (Bài tập)

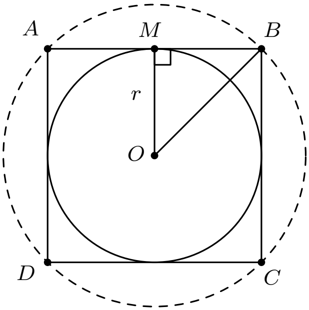
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1

Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 2$cm, hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$.



Lời giải.

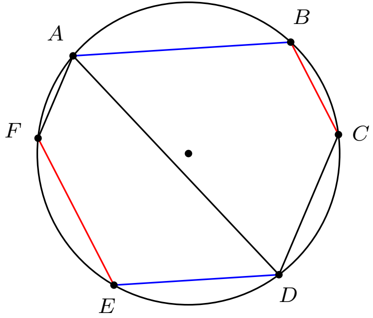
Với M là trung điểm AB thì $OM \perp AB$ nên OM chính là bán kính của đường tròn nội tiếp $ABCD$. Dễ thấy $OM = MB$, do vậy

$$OM^2 + MB^2 = OB^2 \implies r^2 + r^2 = R^2.$$

Do đó $r = \sqrt{2}$ (cm). $\square$

Bài 2

Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp một đường tròn, biết rằng $AB \parallel DE$ và $BC \parallel EF$. Chứng minh rằng $AF \parallel CD$.



Lời giải.

Thấy rằng

$$\widehat{CDA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} \quad \text{và} \quad \widehat{FAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{FD}.$$

Vì $AB \parallel DE$ nên $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$, $BC \parallel EF$ nên $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BF}$. Suy ra

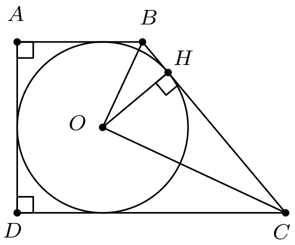
$$360^\circ - (\text{sđ}\,\overset{\frown}{AE} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CE}) = 360^\circ - (\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BF})$$

$$\iff \text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{FD}.$$

Từ đây ta có điều cần chứng minh. □

Bài 3a

Hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Biết rằng $OB = 10$cm và $OC = 20$cm. Tính bán kính của (O).



Lời giải.

Vì $AB \parallel CD$ nên $\widehat{ABC} + \widehat{DCB} = 180^\circ$, kết hợp với tính chất tiếp tuyến suy ra

$$\widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 90^\circ.$$

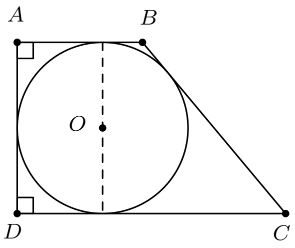
Như vậy $\triangle OBC$ vuông tại O, gọi H là tiếp điểm (O) với BC thì $OH \cdot BC = OB \cdot OC$, dẫn đến

$$OH = \frac{OB \cdot OC}{\sqrt{OB^2 + OC^2}} = 4\sqrt{5}.$$

Vậy bán kính cần tính có độ dài $4\sqrt{5}$cm. $\square$

Bài 3b

Tính diện tích hình thang $ABCD$.



Lời giải.

Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S = \frac{AD(AB + CD)}{2} = 4\sqrt{5}(AB + CD).$$

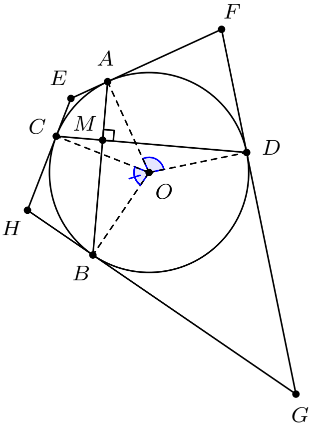
Vì hình thang $ABCD$ ngoại tiếp (O) nên

$$AB + CD = AD + BC = 8\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 18\sqrt{5}.$$

Do đó $S = 360$ (cm^2). $\square$

Bài 4

Cho (O) có các dây AB, CD vuông góc với nhau. Các tiếp tuyến với (O) tại A, B, C, D cắt nhau lần lượt tại E, F, G, H. Chứng minh $EFGH$ là tứ giác nội tiếp.



Lời giải.

Gọi M là giao điểm AB với CD thì

$$90^\circ = \widehat{AMD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}).$$

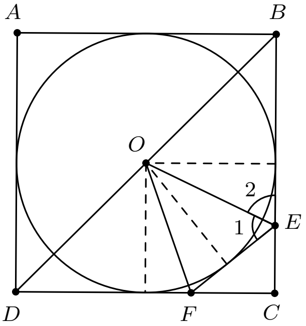
Do đó $\widehat{AOD} + \widehat{BOC} = 180^\circ$. Vì $AODF$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{AOD} = 180^\circ - \widehat{F}.$$

Tương tự thì $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{H}$, do đó $\widehat{F} + \widehat{H} = 180^\circ$ nên có điều cần chứng minh. □

Bài 5a

(O) nội tiếp hình vuông $ABCD$. Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F. Chứng minh các tam giác DFO, OFE và BOE đồng dạng với nhau.



Lời giải.

Theo tính chất của tiếp tuyến thì thấy ngay

$$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2.$$

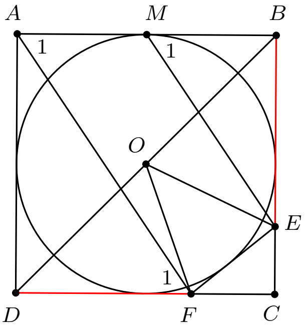
Ngoài ra cũng theo tính chất của tiếp tuyến thì chứng minh được

$$\widehat{FOE} = 45^\circ \implies \widehat{FOE} = \widehat{OBE}.$$

Do đó $\triangle OFE \sim \triangle BOE$ (g.g), hoàn toàn tương tự thì ta có $\triangle OFE \sim \triangle DFO$. □

Bài 5b

Chứng minh rằng ME song song với AF với M là trung điểm AB.



Lời giải.

Theo câu a thì $\triangle DFO \sim \triangle BOE$, suy ra

$$\frac{DF}{DO} = \frac{BO}{BE} \implies DF \cdot BE = BO^2 = 2a^2$$

với $a = BM$. Như vậy

$$\frac{DF}{2a} = \frac{a}{BE} \implies \frac{DF}{DA} = \frac{BM}{BE}.$$

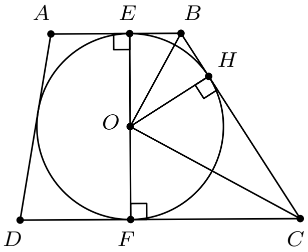
Do đó $\triangle ADF \sim \triangle EBM$ (c.g.c), suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{F_1}$. Mặt khác

$$\widehat{A_1} = \widehat{F_1} \implies \widehat{M_1} = \widehat{A_1}.$$

Như vậy có điều cần chứng minh. □

Bài 6a

Cho hình thang $ABCD$ (có đáy CD) ngoại tiếp (O, r); tiếp điểm trên AB, CD lần lượt là E, F. Chứng minh rằng $BE \cdot CF = r^2$.



Lời giải.

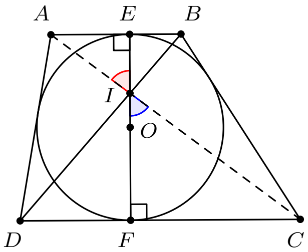
Gọi H là tiếp điểm BC với (O), chứng minh được $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Ngoài ra $BE = BH$ và $CF = CH$ nên

$$BE \cdot CF = BH \cdot CH = OH^2 = r^2.$$

□

Bài 6b

Chứng minh rằng AC, BD và EF đồng quy.



Lời giải

Gọi giao điểm BD với EF là I, ta sẽ chứng minh ba điểm A, I, C thẳng hàng.

Tương tự câu a thì $AE \cdot DF = r^2$, do đó

$$BE \cdot CF = AE \cdot DF \implies \frac{BE}{DF} = \frac{AE}{CF}.$$

Mà $\frac{BE}{DF} = \frac{IE}{IF}$ $(BE \parallel DF)$ nên $\frac{AE}{CF} = \frac{IE}{IF}$. Do đó $\triangle AEI \sim \triangle CFI$ (c.g.c), suy ra

$$\color{red}{\widehat{AIE}} = \color{blue}{\widehat{CIF}}.$$

Như vậy ba điểm A, I, C thẳng hàng nên ta có điều cần chứng minh.