Hình học - Bài 3: Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung (Bài tập)

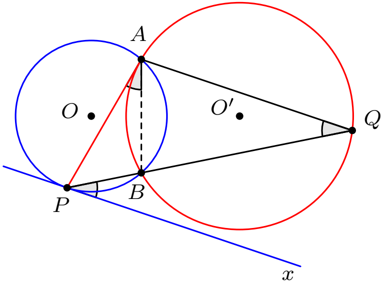
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Bài 1

Cho (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của (O') cắt (O) tại điểm thứ hai P. Tia PB cắt đường tròn (O') tại Q. Chứng minh rằng AQ song song với tiếp tuyến tại P của (O).



Lời giải.

Vì AP là tiếp tuyến của (O') nên

$$\widehat{Q} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{PAB}. \qquad (1)$$

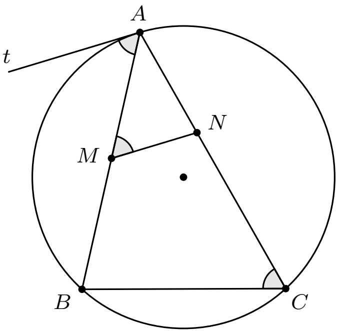
Vì Px là tiếp tuyến của (O) nên

$$\widehat{BPx} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{PB} = \widehat{PAB}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{Q} = \widehat{BPx}$, chính là điều cần chứng minh. □

Bài 2

Cho A, B, C là ba điểm trên (O). At là tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng song song với At cắt AB tại M, cắt AC tại N. Chứng minh rằng $AB \cdot AM = AC \cdot AN$



Lời giải.

Vì $MN \parallel At$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{MAt}$. Vì At là tiếp tuyến của (O) nên

$$\widehat{C} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{MAt} \implies \widehat{C} = \widehat{AMN}.$$

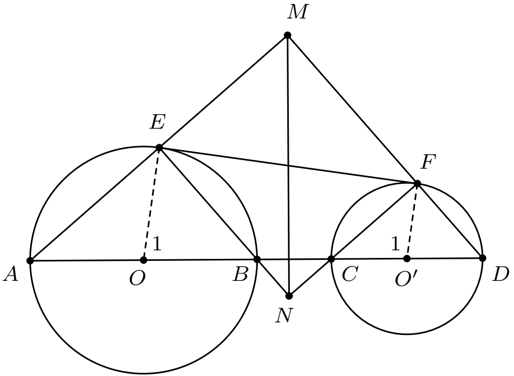
Do vậy $\triangle ABC \sim \triangle ANM$ (g.g), suy ra

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \implies AB \cdot AM = AC \cdot AN$$

$\square$

Bài 3a

Cho (O) và (O') ở ngoài nhau. OO' cắt (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự. Tiếp tuyến chung ngoài EF với $E \in (O)$, $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm AE với DF, N là giao điểm EB với FC. Chứng minh rằng $MENF$ là hình chữ nhật.

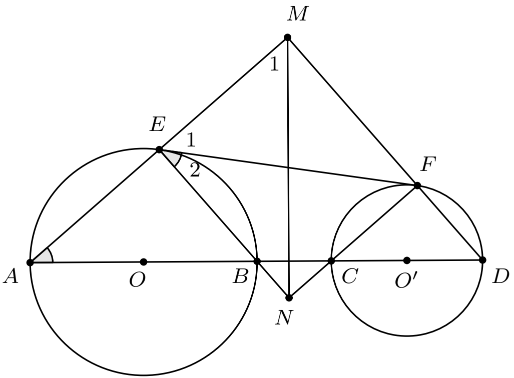


Lời giải.

Dễ thấy $\widehat{MEN} = \widehat{MFN} = 90°$. Ngoài ra $\widehat{O}_1 + \widehat{O'}_1 = 180°$ (do $EO \parallel FO'$) nên

$$\widehat{A} + \widehat{D} = \frac{1}{2}(\widehat{O}_1 + \widehat{O'}_1) = 90°,$$

suy ra $\widehat{AMD} = 90°$ nên $MENF$ là hình chữ nhật. □



Bài 3b

Chứng minh rằng MN vuông góc với AD.

Lời giải.

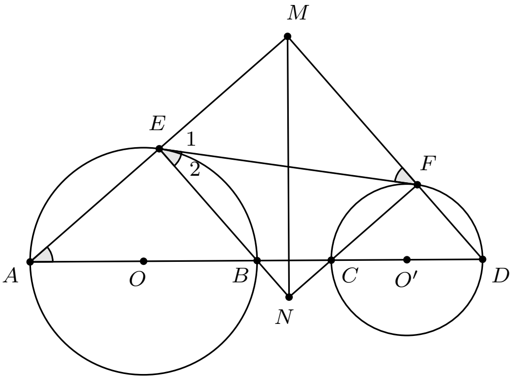
Vì $MENF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$. Ngoài ra EF là tiếp tuyến của (O) nên

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{EB} = \widehat{E_2} \implies \widehat{M_1} + \widehat{A} = \widehat{MEN} = 90^\circ.$$

Như vậy $MN \perp AD$. □

Bài 3c

Chứng minh rằng $ME \cdot MA = MF \cdot MD$



Lời giải.

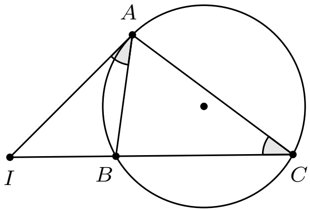
Có $\widehat{MFE} = \widehat{E}_2 = \widehat{A}$ nên $\triangle MEF \sim \triangle MDA$ (g.g), dẫn đến

$$\frac{ME}{MD} = \frac{MF}{MA} \implies ME \cdot MA = MF \cdot MD$$

□

Bài 4

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), tiếp tuyến tại A cắt BC ở I. Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.



Lời giải.

Vì $\widehat{IAB} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB} = \widehat{C}$ nên $\triangle IBA \sim \triangle IAC$(g.g). Suy ra

$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IA} \implies \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IA^2}. \tag{1}$$

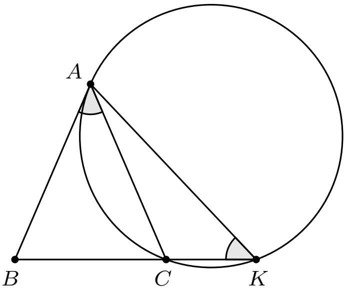
Ngoài ra IA là tiếp tuyến của (O) nên $IA^2 = IB \cdot IC$, do đó

$$\frac{IB^2}{IA^2} = \frac{IB^2}{IB \cdot IC} = \frac{IB}{IC}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 5

Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường trung trực của AB cắt BC ở K. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACK$ tiếp xúc với AB.



Lời giải.

Hai tam giác cân ABC có KAB cùng có chung góc ở đáy là $\widehat{B}$ nên

$$\triangle ABC \sim \triangle KAB(\text{g.g}) \implies \widehat{BAC} = \widehat{K}.$$

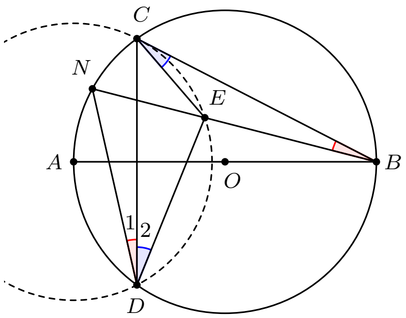
Mặt khác $\widehat{K} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}$ nên

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC},$$

do vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACK$. □

Bài 6a

Cho (O) có đường kính AB. Vẽ đường tròn tâm A cắt (O) ở C và D. Kẻ dây BN của (O), cắt đường tròn A tại điểm E bên trong (O). Chứng minh rằng $\widehat{CEN} = \widehat{EDN}$.



Lời giải.

Ta có $\widehat{CBE} = \widehat{D}_1$. Vì $AC \perp BC$ nên BC là tiếp tuyến của (A), do vậy trong (A) thì

$$\widehat{BCE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CE} = \widehat{D}_2.$$

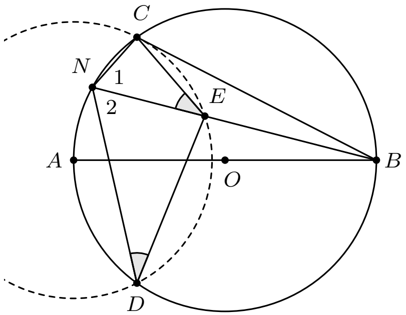
Suy ra

$$\widehat{CEN} = \widehat{CBE} + \widehat{BCE} = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = \widehat{EDN}.$$

□

Bài 6b

Chứng minh rằng $NC \cdot ND = NE^2$.



Lời giải.

Vì AO là đường trung trực của CD, mà $B \in AO$ nên $BC = BD$. Do vậy

$$\widehat{N}_1 = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD} = \widehat{N}_2.$$

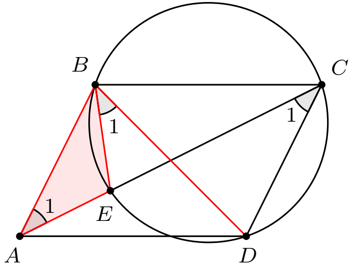
Kết hợp với câu a thì $\triangle NCE \sim \triangle NED$ (g.g), như vậy

$$\frac{NC}{NE} = \frac{NE}{ND} \implies NC \cdot ND = NE^2$$

$\square$

Bài 7

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A}$ nhọn. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ cắt AC ở E. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$.



Cách 1

Trong đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ ta có

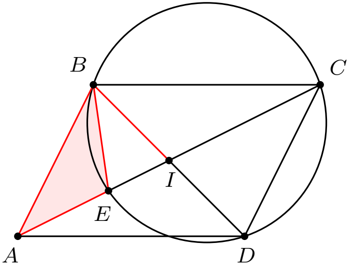
$$\widehat{B_1} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{ED} = \widehat{C_1}.$$

Mặt khác $AB \parallel CD$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$, do đó $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

Ngoài ra trong đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$ thì

$$\widehat{A_1} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BE} \implies \widehat{B_1} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BE}.$$

Do vậy ta có điều cần chứng minh.



Cách 2

Gọi I là giao điểm BD với AC. Trong đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ có hai dây BD, CE cắt nhau tại I nên

$$IE \cdot IC = IB \cdot ID$$

Mà $IA = IC$ và $IB = ID$ nên

$$IE \cdot IA = IB^2,$$

do vậy IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$.