

Ôn tập 9: Một số kết quả hay sử dụng trong hình học

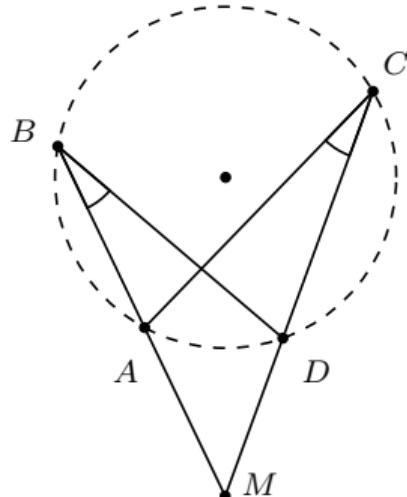
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

5/2023

Kết quả 1

Cho tứ giác $ABCD$, hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M . Khi đó
 $ABCD$ là tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$



Lời giải.

$\Rightarrow)$ Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{B} = \widehat{C}$. Do đó $\triangle MBD \sim \triangle MCA$ (g.g), suy ra

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA} \implies MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$\Leftarrow)$ Vì $MA \cdot MB = MC \cdot MD \implies \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$. Do đó $\triangle MBD \sim \triangle MCA$ (c.g.c), suy ra

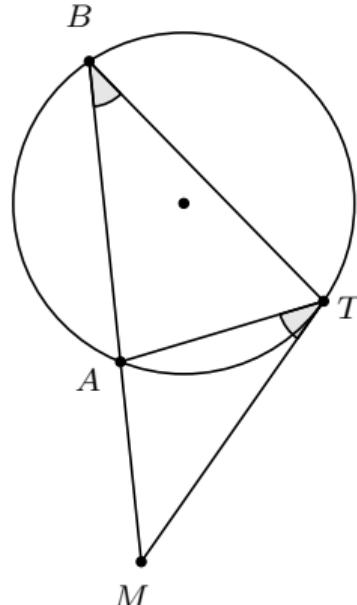
$$\widehat{B} = \widehat{C}$$

nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. □

Kết quả 2

Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , cát tuyến MAB sao cho A nằm giữa M và B . Điểm T thuộc đường tròn (O) , khi đó

$$MT \text{ là tiếp tuyến của } (O) \iff MT^2 = MA \cdot MB$$



Lời giải.

$\Rightarrow)$ Vì MT là tiếp tuyến nên $\widehat{MTA} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AT} = \widehat{B}$. Do đó $\triangle MAT \sim \triangle MTB$ (g.g), suy ra

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT} \implies MT^2 = MA \cdot MB$$

$\Leftarrow)$ Vì $MT^2 = MA \cdot MB \implies \frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}$. Do đó $\triangle MAT \sim \triangle MTB$ (c.g.c), suy ra

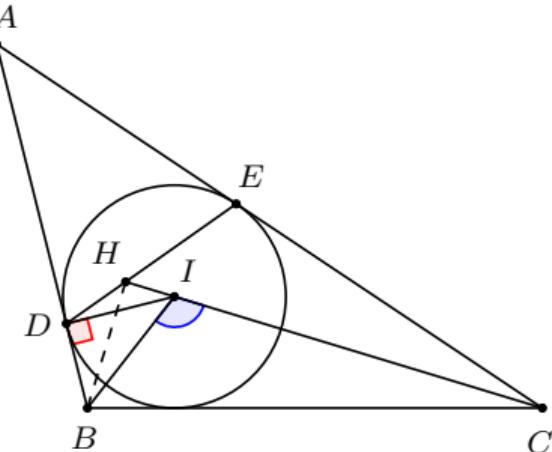
$$\widehat{MTA} = \widehat{B} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AT}$$

nên MT là tiếp tuyến.

□

Kết quả 3

Cho $\triangle ABC$ có I là tâm đường tròn nội tiếp. (I) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D, E . Gọi H là giao điểm CI với DE . Chứng minh rằng $CI \perp BH$.



Lời giải.

Xét $\triangle BIC$ ta có $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$. Xét $\triangle ADE$ cân tại A ta có $\widehat{ADE} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$. Do đó $\widehat{BIC} = \widehat{BDH}$ nên $BDHI$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

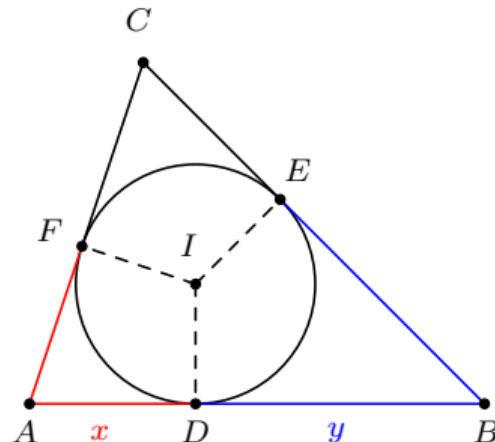
$$\widehat{BHI} = \widehat{BDI} = 90^\circ.$$

Do vậy có được điều cần chứng minh. □

Kết quả 4

Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ và tiếp xúc với AB tại D . Chứng minh rằng

$$AD = \frac{AB + AC - CB}{2}.$$



Lời giải.

Gọi E, F là tiếp điểm của (I) trên BC, CA . Ta có

$$AF = AD = x, \quad BD = BE = y \quad \text{và} \quad CE = CF.$$

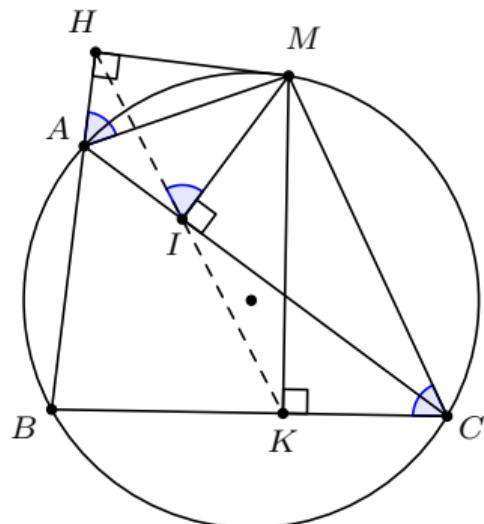
Do đó

$$\begin{aligned} AB + AC - CB &= (x + y) + (x + CF) - (y + CE) \\ &= 2x = 2AD. \end{aligned}$$

Suy ra điều cần chứng minh. □

Kết quả 5 (Đường thẳng Xim-xơn)

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) . Điểm M di chuyển trên đường tròn (O) . Các điểm H, K, I lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA . Chứng minh H, I, K thẳng hàng.



Lời giải.

Vì $\widehat{AHM} + \widehat{AIM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $AHMI$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{MIH} = \widehat{MAH}. \quad (1)$$

Vì $ABCM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MAH} = \widehat{MCB}$. (2)

Vì $\widehat{MIC} = 90^\circ = \widehat{MKC}$ nên $MIKC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{MIK} + \widehat{MCB} = 180^\circ. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) thì $\widehat{MIK} + \widehat{MIH} = 180^\circ$ nên H, I, K thẳng hàng. □