

# Đại số - Bài 3: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải phương trình vô tỉ

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Đặt một ẩn phụ

Yêu cầu: Trong chương 4; xem lại các ví dụ 4, 5, 6 của bài

Đại số - Bài 5: Phương trình quy về phương trình bậc hai - tiếp  
theo

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Đặt hai ẩn phụ

Với hệ thức  $x^2 + xy - 6y^2 = 0$  ta có

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0 \quad (y \neq 0).$$

Từ đây tìm được  $\frac{x}{y} \in \{-3, 2\}$  nên

$$x = -3y \quad \text{hoặc} \quad x = 2y.$$

## Ví dụ 1

Giải phương trình  $2x^2 - 6x - 4 + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 0$ .

Một số hướng tiếp cận

- Bình phương: xuất hiện bậc 4 (sử dụng khi bị bí, biết sử dụng MTCT để phân tích thành nhân tử)
- Liên hợp: chưa nhẩm được nghiệm
- Đánh giá bằng bất đẳng thức: chỉ sử dụng được khi có nghiệm đẹp (duy nhất)
- Đặt ẩn phụ

Nháp:  $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$ . Tìm  $m, n$  để

$$\begin{aligned}2x^2 - 6x - 4 &= m(x + 1) + n(x^2 + 1) \\ &= nx^2 + mx + m + n.\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{cases} n = 2 \\ m = -6 \\ m + n = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} m = -6 \\ n = 2 \end{cases}.$$

Lời giải.

ĐKXD:  $x \geq -1$ . Đặt  $a = x + 1$  và  $b = x^2 + 1$  thì  $a, b \geq 0$ . Ta có

$$\begin{aligned}2x^2 - 6x - 4 &= -6a + 2b \\ \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} &= \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Do vậy phương trình đề cho tương đương

$$-6a + 2b + \sqrt{ab} = 0.$$

Từ đây tìm được  $\sqrt{a} = \frac{-1}{2}\sqrt{b}$  (loại) hoặc  $\sqrt{a} = \frac{2}{3}\sqrt{b}$ . Do đó

$$x + 1 = \frac{4}{9}(x^2 + 1).$$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{9 - \sqrt{161}}{8}, \frac{9 + \sqrt{161}}{8} \right\}$ .



Đặt ẩn phụ không hoàn toàn (Delta chính phương)



## Ví dụ 2

Giải phương trình  $x^2 + 1 = (x + 1)\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ .

Lời giải.

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$  thì  $x^2 + 1 = t^2 + 2x - 2$ , do vậy

$$t^2 + 2x - 2 = (x + 1)t \iff t^2 - (x + 1)t + 2x - 2 = 0. \quad (*)$$

Xem đây là phương trình bậc hai ẩn  $t$  (tham số  $x$ ) ta có

$$\Delta_t = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

Như vậy (\*) có nghiệm

$$t_1 = \frac{x + 1 - (x - 3)}{2} = 2 \quad \text{và} \quad t_2 = \frac{x + 1 + (x - 3)}{2} = x - 1.$$

Vậy  $t = 2$  hoặc  $t = x - 1$ . Tìm được  $x \in \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ .

