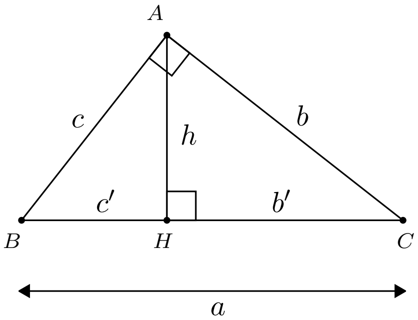
Hình học - Bài 1: Hệ thức về cạnh trong tam giác vuông

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

8/2022



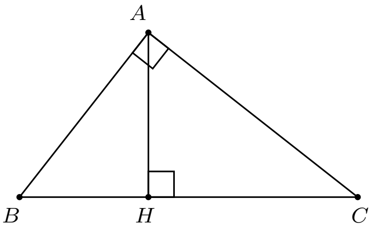
$\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH thì

1. $b^2 = ab', \; c^2 = ac'$.
2. $h^2 = b'c'$.
3. $ah = bc$.
4. $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Ví dụ

Cho tam giác vuông ABC với đường cao AH. Biết rằng

a) $AB = 6$ và $AC = 8$. Hãy tính BH và CH.



Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABC$ vuông tại A với đường cao AH ta có

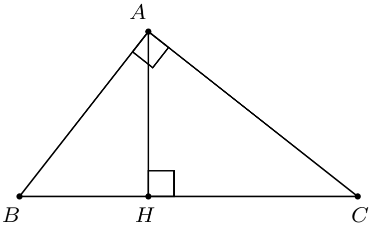
$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{AB^2}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{18}{5},$$
$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{AC^2}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{32}{5}.$$

$\square$

Ví dụ

Cho tam giác vuông ABC với đường cao AH. Biết rằng

b) $BH = 1$ và $CH = 4$. Hãy tính AB và AC.



Lời giải.

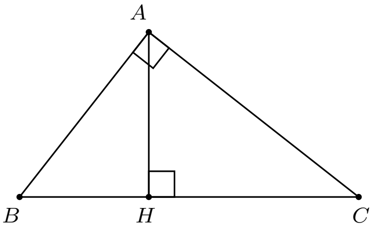
Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABC$ vuông tại A với đường cao AH ta có

$$AB = \sqrt{BH \cdot BC} = \sqrt{BH(BH + CH)} = \sqrt{5},$$
$$CH = \sqrt{CH \cdot BC} = \sqrt{CH(BH + CH)} = \sqrt{20}.$$

$\square$

Ví dụ

a) Một tam giác vuông có tỉ số các cạnh góc vuông bằng k. Chứng minh rằng tỉ số các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền là k^2 hoặc $\frac{1}{k^2}$.



Lời giải.

Giả sử $\dfrac{AB}{AC} = k$, áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABC$ vuông tại A với đường cao AH ta có

$$AB^2 = BH \cdot BC \quad \text{và} \quad AC^2 = CH \cdot BC$$

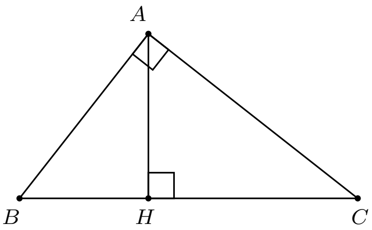
Do đó

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot BC} = \frac{BH}{CH}.$$

Vậy $\dfrac{BH}{CH} = k^2$. □

Ví dụ

b) Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $0,8$ và cạnh huyền dài 82cm. Hãy tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.



Lời giải.

Giả sử $\dfrac{AB}{AC} = 0,8$. Từ câu a suy ra

$$\frac{BH}{CH} = \frac{AB^2}{AC^2} = 0,8^2 = \frac{16}{25}.$$

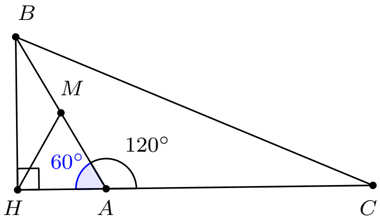
Do đó

$$\frac{BH}{16} = \frac{CH}{25} = \frac{BH+CH}{16+25} = 2.$$

Dẫn tới $BH = 32$cm và $CH = 50$cm. $\square$

Ví dụ

Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AB \cdot AC + AC^2$.



Lời giải

Kẻ $BH \perp AC$. Biến đổi

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + CH^2 = BH^2 + (AH + AC)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + 2AH \cdot AC + AC^2 \\ &= AB^2 + 2AH \cdot AC + AC^2 \end{aligned}$$

Gọi M là trung điểm AB, khi đó $HM = \frac{1}{2}AB = AM$ nên $\triangle HMA$ cân.
Ngoài ra $\widehat{BAH} = 60^\circ$ nên $\triangle HMA$ đều, do đó

$$AH = AM = \frac{AB}{2}.$$

Dẫn tới $BC^2 = AB^2 + 2AH \cdot AC + AC^2 = AB^2 + AB \cdot AC + AC^2$.