

# Chuyên đề - DS 4: Phương trình vô tỉ (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

### Bài 1a

Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$ .

Lời giải.

Phương trình tương đương  $|x - 2| + |x - 3| = 1$  (1).

- Với  $x < 2$  thì (1) tương đương

$$(2 - x) + (3 - x) = 1 \iff x = 2 \text{ (vô lí)}.$$

- Với  $2 \leq x \leq 3$  thì (1) tương đương

$$(x - 2) + (3 - x) = 1 \text{ (luôn đúng)}.$$

- Với  $x > 3$  thì (1)  $\iff (x - 2) + (x - 3) = 1 \iff x = 3$  (vô lí).

Vậy  $2 \leq x \leq 3$ . □

### Bài 1b

Giải phương trình  $\sqrt{x + \sqrt{6x - 9}} + \sqrt{x - \sqrt{6x - 9}} = \sqrt{6}$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $\begin{cases} x \geq 3/2 \\ x \geq \sqrt{6x - 9} \end{cases}$ . Bình phương hai vế phương trình ta có

$$\begin{aligned} 2x + 2\sqrt{x^2 - (6x - 9)} &= 6 \iff x + |x - 3| = 3 \\ &\iff |x - 3| = 3 - x. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta có  $|A| = A \iff A \geq 0$ , do đó

$$(1) \iff 3 - x \geq 0 \iff x \leq 3.$$

Vậy  $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ .

□

### Bài 1c

Giải phương trình  $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} = 1$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $x \geq 4$ . Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3} = \sqrt{x-4} + 1 &\iff x+3 = x-4 + 2\sqrt{x-4} + 1 \\ &\iff \sqrt{x-4} = 3 \\ &\iff x = 13.\end{aligned}$$



### Bài 1d

Giải phương trình  $\sqrt{10 - x} + \sqrt{x + 3} = 5$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $-3 \leq x \leq 10$ . Bình phương hai vế phương trình thì có được

$$\begin{aligned}10 - x + 2\sqrt{(10 - x)(x + 3)} + x + 3 &= 25 \iff \sqrt{(10 - x)(x + 3)} = 6 \\&\iff (10 - x)(x + 3) = 36 \\&\iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy  $x \in \{1, 6\}$ .

□

## Bài 2a

Giải phương trình  $(x - 2)(x + 2) + 4(x - 2)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = -3$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $\begin{cases} (x - 2)(x + 2) \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ . Đặt

$$y = (x - 2)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \quad (1)$$

thì

$$y^2 = (x - 2)(x + 2). \quad (2)$$

Ta có  $y^2 + 4y = -3 \iff y \in \{-3, -1\}$ . Vì  $y < 0$  nên từ (1) suy ra  $x < 2$ .

- Với  $y = -1 \stackrel{(2)}{\implies} x^2 = 5$ . Vì  $x < 2$  nên  $x = -\sqrt{5}$ .
- Với  $y = -3 \stackrel{(2)}{\implies} x^2 = 13$ . Vì  $x < 2$  nên  $x = -\sqrt{13}$ .

Vậy  $x \in \{-\sqrt{5}, -\sqrt{13}\}$ . □

## Bài 2b

Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - 9x + 4} + 3\sqrt{2x - 1} = \sqrt{2x^2 + 21x - 11}$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 21x - 11 \geq 0 \end{cases}$ . Đặt  $a = \sqrt{2x^2 - 9x + 4} \geq 0$  và  $b = \sqrt{2x - 1} \geq 0$  thì  
phương trình tương đương

$$\begin{aligned} a + 3b &= \sqrt{a^2 + 15b^2} \iff (a + 3b)^2 = a^2 + 15b^2 \\ &\iff b(a - b) = 0 \\ &\iff \begin{cases} b = 0 \\ a = b \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây tìm được  $x \in \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$ .

□

### Bài 2c

Giải phương trình  $\sqrt{x^2 + 6} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$ .

Lời giải.

ĐKXD:  $x^2 - 1 \geq 0$ . Theo đề ta thấy rằng

$$x = \sqrt{x^2 + 6} + 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0.$$

Dẫn đến

$$\sqrt{x^2 + 6} > x \geq x - 2\sqrt{x^2 - 1}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm. □

## Bài 2d

Giải phương trình  $\sqrt{x-7} + \sqrt{9-x} = x^2 - 16x + 66$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $7 \leq x \leq 9$ . Xét biểu thức ở vế trái ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &= x - 7 + 2\sqrt{(x-7)(9-x)} + 9 - x \\ &= 2 + 2\sqrt{(x-7)(9-x)} \\ &\leq 2 + ((x-7) + (9-x)) = 4 \end{aligned}$$

Vậy  $VT \leq 2$ . Ngoài ra

$$VP = (x-8)^2 + 2 \geq 2.$$

Dẫn đến  $VT \leq 2 \leq VP$  nên  $VT = VP = 2$ . Vậy dấu bằng phải xảy ra, khi đó

$$\begin{cases} x - 7 = 9 - x \\ x - 8 = 0 \end{cases} \iff x = 8.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 8$ .

□

### Bài 3a

Giải phương trình  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$ .

### Đáp số

$$x \in \left\{ -\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$$

### Bài 3b

Giải phương trình  $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $x \leq 12$ . Đặt

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{24+x} \\ b = \sqrt{12-x} \geq 0 \end{cases} \implies a^3 + b^2 = 36. \quad (1)$$

Ngoài ra để cho  $a + b = 6$ , thay  $b = 6 - a$  vào (1) có được

$$a^3 + (6-a)^2 = 36 \iff a(a-3)(a+4) = 0.$$

Từ đây tìm được  $x \in \{-88, -24, 3\}$ . □

### Bài 3c

Giải phương trình  $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} = 3$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $-1 \leq x \leq 1$ . Đặt

$$\begin{cases} a = \sqrt[4]{1+x} \geq 0 \\ b = \sqrt[4]{1-x} \geq 0 \end{cases} \implies a^4 + b^4 = 2.$$

Theo đề thì ta có  $ab + a + b = 3$ . Một cách áp dụng bất đẳng thức Cô-si có được

$$\begin{aligned} ab + a + b &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 + 1}{2} + \frac{b^2 + 1}{2} \\ &= a^2 + b^2 + 2 \\ &\leq \frac{a^4 + 1}{2} + \frac{b^4 + 1}{2} + 2 = 3. \end{aligned}$$

Vậy dấu bằng xảy ra nên ta có  $a = b = 1 \iff x = 0$ .

□