Ôn tập 6: Phương trình bậc hai chứa tham số

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1

Cho phương trình $x^2 + (3m+1)x + 4m - 1 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào giá trị của m.

Lời giải.

Gọi hai nghiệm là x_1 và x_2, theo hệ thức Vi-ét thì

$$x_1 + x_2 = -(3m+1) \tag{1}$$
$$x_1 x_2 = 4m - 1 \tag{2}$$

Lấy $4PT(1) + 3PT(2)$ thì

$$4(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 = -7.$$

□

Bài 2

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình

a) Có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' \geq 0$, tương đương

$$(m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) \geq 0 \iff m \geq \frac{1}{3}.$$

a) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm trái dấu là $P < 0$, tương đương

$$m^2 - 4m + 3 < 0 \iff (m-1)(m-3) < 0 \iff 1 < m < 3.$$

Vậy $1 < m < 3$. $\square$

Bài 2

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình

b) Có hai nghiệm âm.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $m \geq \frac{1}{3}$.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm âm là $P > 0$ và $S < 0$, tương đương

$$\begin{cases} m^2 - 4m + 3 > 0 \\ 2(m+1) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m < 1 \text{ hoặc } m > 3 \\ m < -1 \end{cases} \iff m < -1.$$

Vậy không tồn tại m. □

Bài 3a

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' = m^2 - m + 4 \geq 0$. Tuy nhiên

$$m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm với mọi m. Với x_1, x_2 là nghiệm thì theo Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = 2m \quad \text{và} \quad x_1 x_2 = m - 4.$$

Như vậy

$$26m = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (2m)^3 - 3(m-4) \cdot 2m,$$

từ đây tìm được $m \in \left\{\frac{-1}{4}, 0, 1\right\}$. $\square$

Bài 3b

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -10$.

Lời giải.

Đầu tiên ta cần $x_1x_2 \neq 0 \iff m - 4 \neq 0 \iff m \neq 4$. Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -10 &\implies x_1^2 + x_2^2 = -10x_1x_2 \\ &\implies (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2 = 0 \\ &\implies 4m^2 + 8(m-4) = 0. \end{aligned}$$

Từ đây tìm được $m \in \{-4, 2\}$ (thỏa mãn điều kiện). $\square$

Bài 4a

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 3$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0 \iff m > -6$. Ta có

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{4m^2 - 4(m^2 - m - 6)}. \end{aligned}$$

Cuối cùng tìm được $m = \frac{-15}{4}$ (thỏa mãn điều kiện). □

Bài 4b

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 8$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $m > -6$. Ta có

$$\begin{aligned}
|x_1| + |x_2| = 8 &\iff x_1^2 + 2|x_1x_2| + x_2^2 = 64 \\
&\iff (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 64 \\
&\iff 4m^2 - 2(m^2 - m - 6) + 2|m^2 - m - 6| = 64 \\
&\iff m^2 + m + |m^2 - m - 6| = 26.
\end{aligned}$$

Chia thành hai trường hợp

- Với $m^2 - m - 6 \geq 0$ thì $m^2 + m + (m^2 - m - 6) = 26 \iff m \in \{-4, 4\}$ (thỏa mãn).
- Với $m^2 - m - 6 < 0$ thì $m^2 + m - (m^2 - m - 6) = 26 \iff m = 10$ (không thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-4, 4\}$. $\square$

Bài 5a

Cho đường thẳng $(d): y=(m+2)x+3$ và parabol $(P): y=x^2$. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình

$$x^2=(m+2)x+3 \iff x^2-(m+2)x-3=0.$$

Phương trình này có

$$\Delta=(m+2)^2+12>0$$

nên luôn có hai nghiệm phân biệt, do vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. $\square$

Bài 5b

Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình

$$x^2 - (m+2)x - 3 = 0.$$

Gọi hai nghiệm là x_1 và x_2, theo hệ thức Vi-ét thì

$$x_1 + x_2 = m + 2 \quad \text{và} \quad x_1 x_2 = -3.$$

Vì x_1, x_2 là các số nguyên nên từ $x_1 x_2 = -3$ suy ra

$$(x_1, x_2) \in \{(-1, 3), (3, -1), (-3, 1), (1, -3)\}.$$

Do đó $m + 2 = -1 + 3$ hoặc $m + 2 = -3 + 1$, vậy $m \in \{-4, 0\}$. $\square$

Bài 6

Cho phương trình $x^2 - 2(m-3)x + 3m^2 - 8m + 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 1$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \iff -1 \leq m \leq 2$. Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2(m-3)$ và $x_1x_2 = 3m^2 - 8m + 5$. Với

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2(m-3) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{4m-11}{3} \\ x_2 = \frac{2m-7}{3} \end{cases}.$$

Ngoài ra

$$x_1x_2 = 3m^2 - 8m + 5 \implies \frac{4m-11}{3} \cdot \frac{2m-7}{3} = 3m^2 - 8m + 5$$

Từ đây tìm được $m \in \left\{\frac{-16}{19}, 2\right\}$ (thỏa mãn điều kiện). □