

Chuyên đề - HH 3: Áp dụng công thức diện tích (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

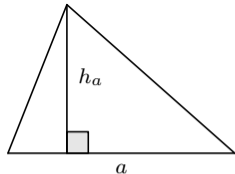
Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

Bài 1

Gọi h_a , h_b , h_c là ba cạnh đường cao của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$



Lời giải.

Ta có diện tích tam giác là

$$S = \frac{1}{2} h_a \cdot a \implies \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}.$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a < b + c$, tương đương

$$\frac{a}{2S} < \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} \iff \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

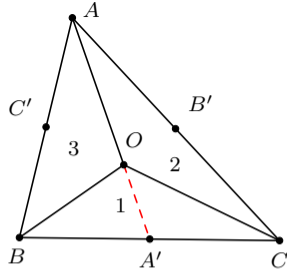


Bài 2a

Cho điểm O thuộc miền trong của tam giác ABC .

Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác theo thứ tự ở A', B', C' . Chứng minh rằng

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$



Lời giải.

Gọi S là diện tích $\triangle ABC$ và kí hiệu S_1, S_2, S_3 như hình. Ta có

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S}.$$

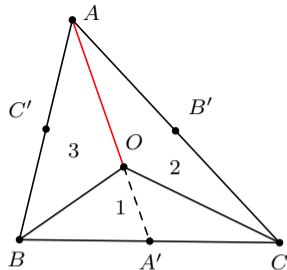
Hoàn toàn tương tự, suy ra

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = 1.$$



Bài 2b

Chứng minh rằng $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = 2$.



Lời giải.

Ta có

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{S_2}{S_{A'AC}} = \frac{S_3}{S_{A'AB}} = \frac{S_2 + S_3}{S_{A'AC} + S_{A'AB}} = \frac{S_2 + S_3}{S}.$$

Hoàn toàn tương tự, suy ra

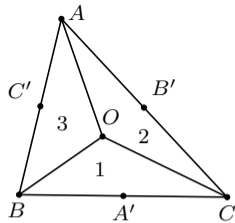
$$\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_3 + S_1}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = 2.$$



Bài 2c

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$$M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'}.$$



Lời giải.

Dựa vào hai ý trên ta có

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OA}{AA'} \cdot \frac{AA'}{OA'} = \frac{S_2 + S_3}{S} \cdot \frac{S}{S_1} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}.$$

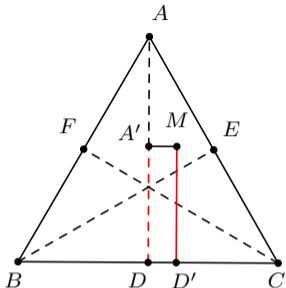
Hoàn toàn tương tự, suy ra

$$\begin{aligned} M &= \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_3 + S_1}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} \right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} \right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3} \right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$



Bài 3

Cho tam giác đều ABC có các đường cao AD, BE, CF . Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của điểm M (nằm bên trong $\triangle ABC$) trên AD, BE, CF . Chứng minh rằng khi M thay đổi vị trí trong tam giác thì tổng $A'D + B'E + C'F$ không đổi.



Lời giải.

Kẻ $MD' \perp BC$ thì $A'MD'D$ là hình chữ nhật nên $A'D = MD'$. Tương tự thì dẫn tới

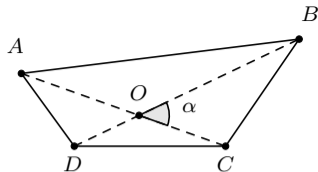
$$A'D + B'E + C'F$$

bằng tổng khoảng cách của M đến ba cạnh $\triangle ABC$. Vậy tổng khoảng cách này bằng chiều cao tam giác (không đổi). □

Bài 4a

Cho tứ giác $ABCD$, gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo. Chứng minh rằng

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \alpha.$$



Lời giải.

Gọi O là giao điểm AC với BD . Ta có

$$\begin{aligned} S_{BCD} &= S_{BCO} + S_{DCO} = \frac{1}{2}OB \cdot OC \sin \alpha + \frac{1}{2}OD \cdot OC \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}(OB + OD)OC \sin \alpha = \frac{1}{2}BD \cdot OC \sin \alpha \end{aligned}$$

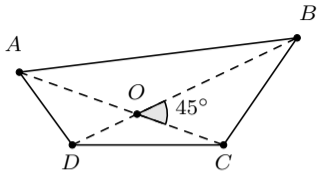
Tương tự thì $S_{BAD} = \frac{1}{2}BD \cdot OA \sin \alpha$, dẫn tới

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{BAD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \alpha$$



Bài 4b

Biết rằng $AC + BD = 12\text{cm}$ và $\alpha = 45^\circ$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của S_{ABCD} .



Lời giải.

Theo ý a ta có

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} AC \cdot BD$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$AC \cdot BD \leq \frac{(AC + BD)^2}{4} = 36 \implies S_{ABCD} \leq 9\sqrt{2}.$$

Vậy $\max S_{ABCD} = 9\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$, dấu bằng xảy ra $\iff AC = BD = 6\text{cm}$. □

Bài 5

Cho tam giác có độ dài các cạnh đều nhỏ hơn 4cm. Chứng minh rằng diện tích tam giác này nhỏ hơn 7cm^2 .

Lời giải.

Giả sử $\triangle ABC$ có góc \hat{A} nhỏ nhất, khi đó

$$180^\circ = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \geq 3\hat{A} \implies \hat{A} \leq 60^\circ.$$

Do vậy $\sin A \leq \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Diện tích tam giác là

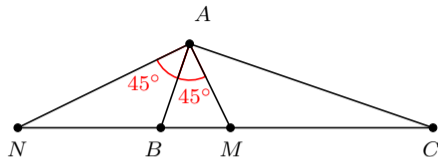
$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A < \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} < 7.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.



Bài 6

Cho tam giác ABC vuông tại A . Các đường phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của tam giác cắt đường thẳng BC tại M và N . Chứng minh rằng $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{\sqrt{2}}{AB}$.



Lời giải.

Ta có $S_{ABN} + S_{ABM} = S_{AMN}$ tương đương

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}AB \cdot AN \sin 45^\circ + \frac{1}{2}AB \cdot AM \sin 45^\circ &= \frac{1}{2}AM \cdot AN \\ \Leftrightarrow \frac{AB}{\sqrt{2}}(AM + AN) &= AM \cdot AN \end{aligned}$$

Hệ thức này tương đương với yêu cầu đề bài.

