Ôn tập 7: Đề HSG tỉnh Hòa Bình 2022-2023 - tiếp theo

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

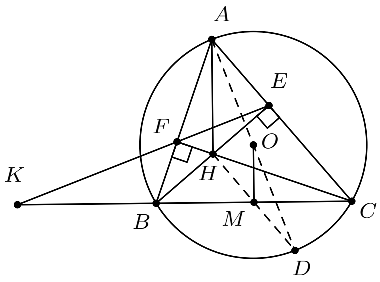
4/2023

Câu 4

Cho $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi K là giao điểm của EF với BC.

a) Chứng minh $BFEC$ là tứ giác nội tiếp, từ đó suy ra $KF \cdot KE = KB \cdot KC$

b) Tính tỉ số $\frac{OM}{AH}$.



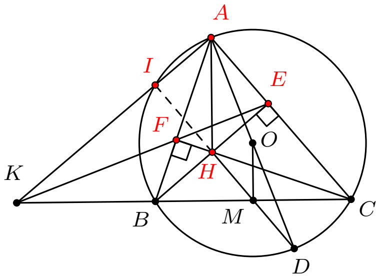
Lời giải.

a) $\widehat{BFC} = 90^\circ = \widehat{BEC}$ nên $BFEC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O). Khi đó $BHCD$ là hình bình hành nên M là trung điểm HD. Như vậy OM là đường trung bình của $\triangle AHD$ nên $\frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}$. □

Câu 4c

Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I (I khác A). Chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.



Lời giải

Vì $AIBC$ là tứ giác nội tiếp nên ta có $KI \cdot KA = KB \cdot KC$, kết hợp với câu a có được

$$KI \cdot KA = KE \cdot KF$$

Từ đây suy ra $IAEF$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác dễ thấy $AFHE$ là tứ giác nội tiếp nên 5 điểm A, I, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

Đường tròn này có đường kính AH nên

$$\widehat{AIH} = 90^\circ,$$

mà $\widehat{AID} = 90^\circ$ nên ba điểm I, H, D thẳng hàng. Ngoài ra M thuộc đường thẳng HD nên ba điểm M, H, I thẳng hàng (cùng thuộc HD).

Câu 5a

Giải phương trình $x^3 + x = (x+3)\sqrt{x+2}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq -2$. Biến đổi thành $x^3 + x - 2(x+3) = (x+3)(\sqrt{x+2} - 2)$, tương đương

$$(x-2)(x^2+2x+3) = \frac{(x+3)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}.$$

Thấy rằng $x = 2$ là nghiệm, xét $x \neq 2$ thì ta có

$$x^2 + 2x + 3 = \frac{x+3}{\sqrt{x+2}+2} \iff (x^2+2x+3)(\sqrt{x+2}+2) = x+3.$$

Vì $\sqrt{x+2} \geq 0$ nên

$$x + 3 \geq 2(x^2+2x+3) \iff 2x^2 + 3x + 3 \leq 0.$$

Vô lí vì $2x^2 + 3x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất. $\square$

Câu 5b

Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a + b = 4ab$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{1+b^2} + \dfrac{b}{1+a^2} \geq \dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Đặt $t = ab > 0$ thì $a + b = 4t$. Vì $16t^2 = (a+b)^2 \geq 4ab = 4t$ nên $t \geq \frac{1}{4}$. Quy đồng bất đẳng thức cần chứng minh ta có

$$5(a^3 + b^3 + a + b) \geq 4(1 + a^2)(1 + b^2). \tag{$*$}$$

Biến đổi $a^3 + b^3$ và $(1 + a^2)(1 + b^2)$ theo t thì $(*)$ tương đương

$$\begin{aligned} & 5\Big((64t^3 - 12t^2) + 4t\Big) \geq 4\Big(1 + (16t^2 - 2t) + t^2\Big) \\ \iff & (4t - 1)(20t^2 - 3t + 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Vì $20t^2 + 1 \geq 2\sqrt{20}t > 3t$ nên $20t^2 - 3t + 1 > 0$, ngoài ra $4t - 1 \geq 0$ nên bất đẳng thức trên đúng. Dẫn tới $(*)$ đúng nên bất đẳng thức ban đầu đúng. $\square$