

Hình học - Bài 8: Độ dài đường tròn, cung tròn (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Bài 1

Một máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là 1,672m và bánh xe trước có đường kính là 88cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Lời giải.

Chu vi bánh sau và bánh trước lần lượt là

$$C_{\text{sau}} = 1,672\pi \text{ (m)} \quad \text{và} \quad C_{\text{trước}} = 0,88\pi \text{ (m)}.$$

Bánh sau lăn được 10 vòng thì quãng đường đi được là $10C_{\text{sau}}$, khi đó số vòng lăn được của bánh trước là

$$\frac{10C_{\text{sau}}}{C_{\text{trước}}} = \frac{10 \times 1,672\pi}{0,88\pi} = 19 \text{ (vòng)}.$$



Bài 2

Một đường tròn (O) có chu vi 54cm. Hai điểm A, B thuộc đường tròn sao cho cung nhỏ AB có độ dài 20cm. Tính số đo \widehat{AOB} .

Lời giải.

Độ dài cung nhỏ AB là

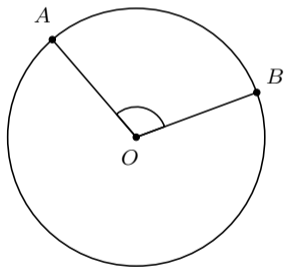
$$20 = \frac{\pi R \cdot \widehat{AOB}}{180} \quad (*)$$

Chu vi đường tròn là

$$54 = 2\pi R \implies \pi R = 27.$$

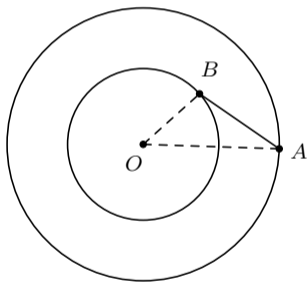
Do vậy từ $(*)$ suy ra

$$\widehat{AOB} = \frac{20 \times 180}{\pi R} = \frac{20 \times 180}{27} \approx 133,3^\circ$$



Bài 3

Cho hai đường tròn đồng tâm O . Lấy hai điểm bất kì: A thuộc đường tròn lớn (O, R) và B thuộc đường tròn nhỏ (O, r) . Chứng minh rằng $AB \geq R - r$.



Lời giải.

Với ba điểm O, A, B ta có

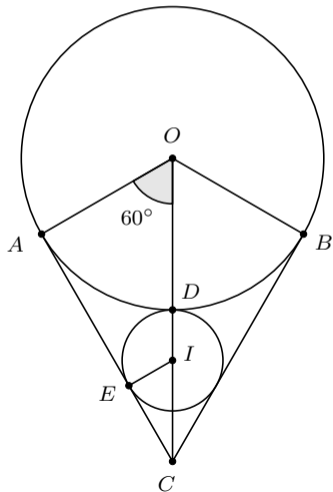
$$AB + BO \geq AO \iff AB + r \geq R.$$

Từ đây ta có điều cần chứng minh.



Bài 4a

Cho đường tròn (O, R) có cung AB bằng 120° . Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau tại C . Gọi (I, r) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn CA, CB và cung nhỏ AB . Chứng minh rằng $R = 3r$.



Lời giải.

Gọi D, E lần lượt là điểm tiếp xúc của (I) với \widehat{AB} và AC . Tam giác OAC vuông tại A nên

$$OC = \frac{OA}{\cos 60^\circ} = 2R \implies CD = OC - OD = R.$$

Tam giác IEC vuông tại E nên

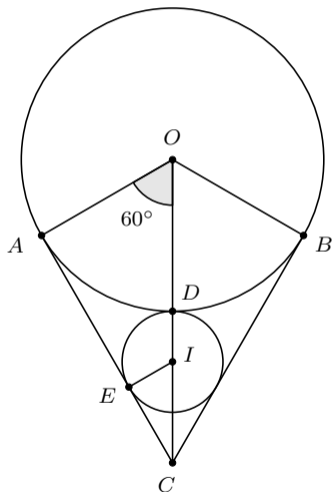
$$IC = \frac{IE}{\sin 30^\circ} = 2r \implies CD = IC + ID = 3r.$$

Do vậy $R = 3r$ (cùng bằng CD).



Bài 4b

So sánh chu vi đường tròn (I) với độ dài cung AB của đường tròn (O) .



Lời giải.

Chu vi của đường tròn (I) là

$$C_I = 2\pi r. \quad (1)$$

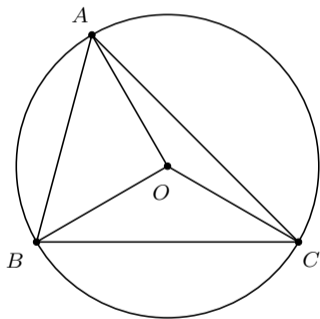
Độ dài cung AB là

$$l_{AB} = \frac{\pi \widehat{AOB}}{180} = \frac{2\pi R}{3}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), kết hợp với $R = 3r$ suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 5a

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) . Độ dài các cung AB, BC, CA theo thứ tự bằng $3\pi, 4\pi, 5\pi$. Tính bán kính đường tròn (O) .



Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn thì chu vi đường tròn bằng

$$\begin{aligned} 2\pi R &= l_{AB} + l_{BC} + l_{CA} \\ &= 3\pi + 4\pi + 5\pi \\ &= 12\pi. \end{aligned}$$

Do đó $R = 6$.



Bài 5b

Chứng minh rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$.

Lời giải.

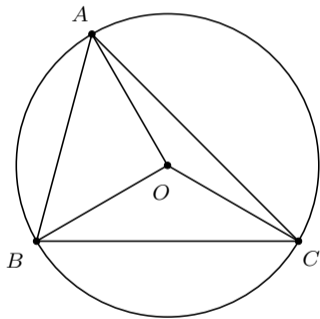
Số đo của cung tỉ lệ với độ dài cung nên

$$\frac{\text{sđ } \widehat{AB}}{3\pi} = \frac{\text{sđ } \widehat{BC}}{4\pi} = \frac{\text{sđ } \widehat{CA}}{5\pi}.$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{AOB}}{3} &= \frac{\widehat{BOC}}{4} = \frac{\widehat{COA}}{5} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA}}{3 + 4 + 5} \\ &= \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.\end{aligned}$$

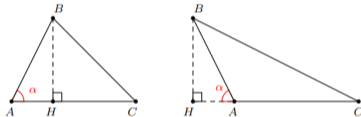
Do đó $\widehat{BOC} = 120^\circ$, ngoài ra thì $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và $\widehat{COA} = 150^\circ$.



Trong nội dung của "Chương 1 - Bài 3: Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông" có kết quả

Ví dụ

Chứng minh rằng diện tích của một tam giác không vuông bằng một nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.



Lời giải.

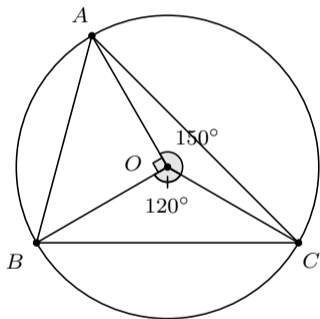
Gọi α là góc nhọn tạo bởi các đường thẳng AB, AC . Vẽ đường cao BH , khi đó $BH = AB \sin \alpha$. Do vậy

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \alpha.$$



Bài 5c

Tính diện tích tam giác ABC .



Lời giải.

Ta có

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}R^2 = 18$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$$

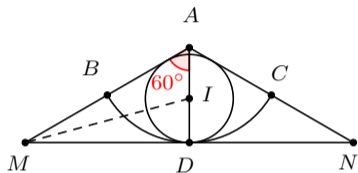
$$S_{OCA} = \frac{1}{2}R^2 \sin 30^\circ = 9.$$

Do đó $S_{ABC} = 27 + 9\sqrt{3}$ (đơn vị diện tích).



Bài 6

Cho hình quạt tròn có cung BC bằng 120° , tâm A và bán kính R . Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với cung BC và các đoạn AB, AC . Tính bán kính của (I) .



Lời giải

Gọi D là tiếp điểm của (I) với cung BC . Từ D kẻ tiếp tuyến với (I) cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Khi đó (I) là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMN$.

$AD = R$ nên áp dụng hệ thức lượng góc cho $\triangle ADM$ vuông tại D thì

$$AM = 2R \quad \text{và} \quad MD = R\sqrt{3}.$$

$\triangle AMD$ có đường phân giác MI nên

$$\frac{ID}{MD} = \frac{IA}{MA} = \frac{ID + IA}{MD + MA} = \frac{R}{R\sqrt{3} + 2R} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Do đó $ID = (2 - \sqrt{3})MD = (2\sqrt{3} - 3)R$.