

Đại số - Bài 4: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải hệ phương trình

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

5/2023

Ví dụ 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - x + y^2 - 1 = 0 \\ y - x = \sqrt{x + 2y - 1} \end{cases}$.

Lời giải

ĐKXD: $x + 2y \geq 1$, phương trình đầu tương đương

$$2x^2 - (3y + 1)x + y^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn x (tham số y) thì

$$\Delta_x = (3y + 1)^2 - 4 \cdot 2(y^2 - 1) = (y + 3)^2.$$

Từ công thức nghiệm của phương trình (1) ta có được

$$x = \frac{3y + 1 + (y + 3)}{2 \times 2} = y + 1 \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{3y + 1 - (y + 3)}{2 \times 2} = \frac{y - 1}{2}.$$

Lời giải.

- TH1: $x = y + 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có $-1 = \sqrt{3y}$ (vô nghiệm).
- TH2: $x = \frac{y-1}{2} \iff y = 2x + 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$x + 1 = \sqrt{5x + 1} \iff \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ (x + 1)^2 = 5x + 1 \end{cases} \iff x \in \{0, 3\}.$$

Với giá trị của x thì sẽ tìm được y . Vậy hệ có nghiệm

$$(x, y) \in \{(0, 1), (3, 7)\}.$$



Ví dụ 2

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - 2\sqrt{2xy - x - 4y + 2} = 4 \\ 2x + \sqrt{2y - 1} = 6 \end{cases}.$$

Lời giải

ĐKXD: $y \geq \frac{1}{2}$ và $2xy - x - 4y + 2 \geq 0$. Phương trình đầu tương đương

$$x + 2y - 2\sqrt{(x - 2)(2y - 1)} = 4. \quad (2)$$

Đặt $a = \sqrt{x - 2}$ và $b = \sqrt{2y - 1}$ thì $x + 2y = a^2 + b^2 + 3$, do đó

$$(2) \iff (a^2 + b^2 + 3) - 2ab = 4 \iff (a - b)^2 = 1.$$

Do đó $a = b + 1$ hoặc $a = b - 1$, nghĩa là

$$\sqrt{x - 2} = \sqrt{2y - 1} + 1 \quad \text{hoặc} \quad \sqrt{x - 2} = \sqrt{2y - 1} - 1.$$

Lời giải.

- TH1: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2y-1} + 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$2x + (\sqrt{x-2} - 1) = 6 \iff \sqrt{x-2} = 7 - 2x$$

$$\iff \begin{cases} 7 - 2x \geq 0 \\ x - 2 = (7 - 2x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{7}{2} \\ x \in \left\{3, \frac{17}{4}\right\} \end{cases}.$$

Như vậy $x = 3$, suy ra $y = \frac{1}{2}$.

- TH2: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2y-1} - 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$2x + \sqrt{x-2} = 5 \implies x = \frac{9}{4} \implies y = \frac{13}{8}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x, y) \in \left\{\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{9}{4}, \frac{13}{8}\right)\right\}$.

