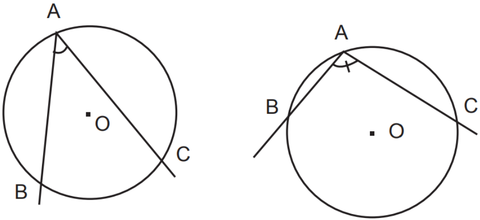
Hình học - Bài 2: Góc nội tiếp

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023



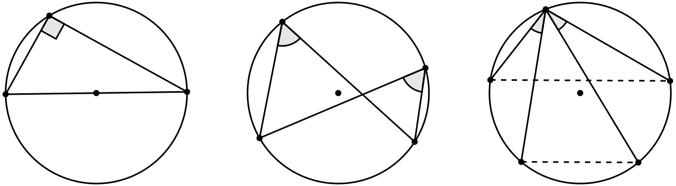
Định lí

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Hệ quả

Trong một đường tròn

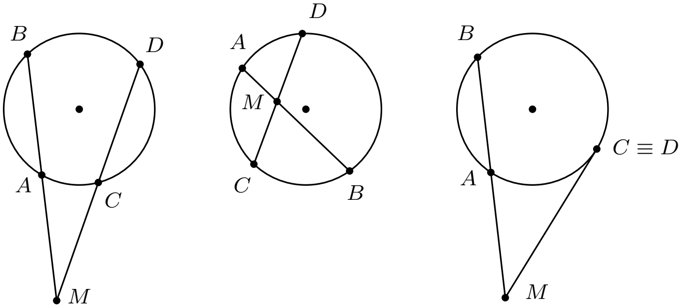
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

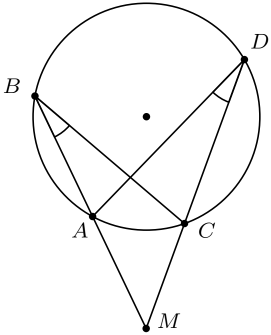


Ví dụ 1

Cho điểm M không thuộc đường tròn (O). Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D. Chứng minh rằng

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$





Lời giải.

Xét trường hợp điểm M nằm ngoài (O). Xét $\triangle MBC$ và $\triangle MDA$

$$\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \widehat{B} = \widehat{D} \; \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}\,\right) \end{cases}$$

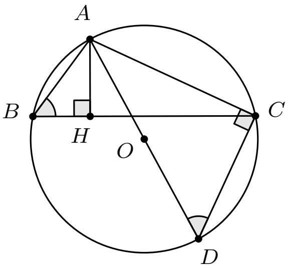
Do đó $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ (g.g), suy ra

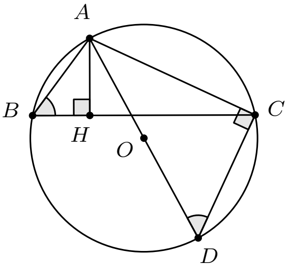
$$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA} \implies MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

Chứng minh tương tự cho trường hợp điểm M nằm trong (O). □

Ví dụ 2

$\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O, R) có $AB = 8,\ AC = 15$ và đường cao $AH = 5$ (điểm H nằm trên cạnh BC). Tính bán kính R.





Lời giải.

Kẻ đường kính AD. Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ADC$

$$\begin{cases} \widehat{AHB} = \widehat{ACD} = 90^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{D} \; \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}\,\right) \end{cases}$$

Do đó $\triangle ABH \sim \triangle ADC$ (g.g), suy ra

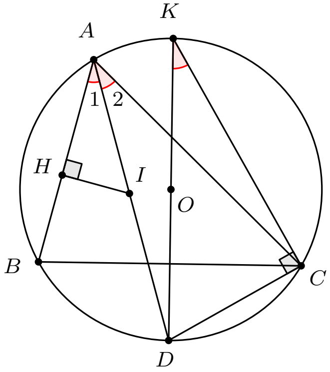
$$\frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AC} \implies \frac{8}{5} = \frac{2R}{15}.$$

Như vậy $R = 12$. □

Ví dụ 3

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O, R), gọi (I, r) là đường tròn nội tiếp của tam giác. H là tiếp điểm của AB với (I), D là giao điểm AI với (O), DK là đường kính của (O).

a) Chứng minh rằng $\triangle AHI \sim \triangle KCD$.



Lời giải.

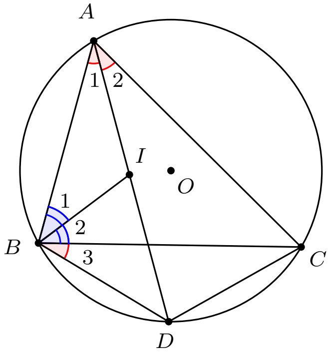
Dễ thấy $\widehat{AHI} = \widehat{DCK} = 90^\circ$. Ngoài ra

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} = \widehat{K}$$

nên $\triangle AHI \sim \triangle KCD$ (g.g). $\square$

Ví dụ 3

b) Chứng minh rằng $DB = DC = DI$.



Lời giải.

Ta có

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} = \widehat{B}_3.$$

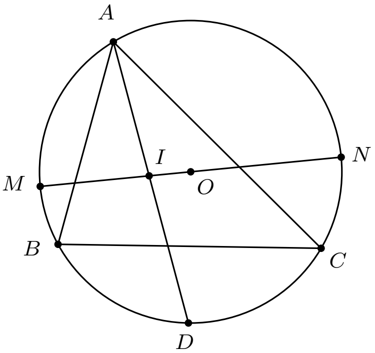
Biến đổi

$$\widehat{BID} = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 + \widehat{B}_2 = \widehat{IBD}.$$

Như vậy $\triangle BID$ cân tại D nên $DB = DI$, tương tự thì $DC = DI$. □

Ví dụ 3

c) Chứng minh rằng $IA \cdot ID = R^2 - OI^2$.



Lời giải.

Đường thẳng OI cắt (O) tại M, N sao cho M gần I hơn N. Ta có

$$R^2 - OI^2 = (R - OI)(R + OI) = IM \cdot IN$$

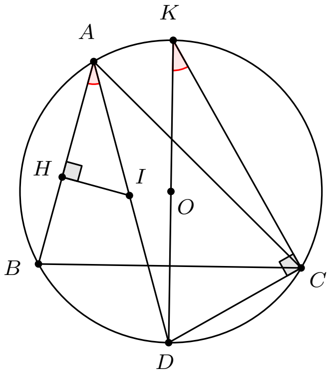
Mặt khác các điểm A, D, N, M cùng thuộc (O) và AD cắt MN tại I nên

$$IA \cdot ID = IM \cdot IN$$

Do đó ta có điều cần chứng minh. □

Ví dụ 3

d) (Định lí Ơ-le) Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 - 2Rr$.



Lời giải.

Theo câu c thì $R^2 - OI^2 = IA \cdot ID$. Theo câu a thì $\triangle AHI \sim \triangle KCD$, suy ra

$$\frac{IA}{IH} = \frac{DK}{DC} \implies IA \cdot DC = IH \cdot DK = 2Rr.$$

Mặt khác theo câu b thì $DC = DI$, do đó

$$R^2 - OI^2 = IA \cdot ID = IA \cdot DC = 2Rr.$$

$\square$