Đề kiểm tra lần 7

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 4 năm 2023

§1 Đề bài

Bài 1 (3 điểm)**.**

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 + \sqrt{4x+4\sqrt{x-2}-7}$ với $x \geq 2$.

b) Cho a, b, c là các số đôi một phân biệt. Tính giá trị biểu thức

$$B = \frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Bài 2 (3 điểm)**.** Cho phương trình $x^2+2(m-1)x+2m=0$ với m là tham số.

a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{11}{25}$.

b) Tìm tất cả số nguyên m để phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 3 (3 điểm)**.**

a) Giải phương trình $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5}-\dfrac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5}+\dfrac{1}{4}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{a}+\sqrt{b}+4\sqrt{ab}=16 \\ a+b=10 \end{cases}$.

Bài 4 (1 điểm)**.** Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B, C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO, cắt đường tròn (O) tại E và F (E nằm giữa K và F). Chứng minh rằng AE, AF là tiếp tuyến của đường tròn (O).

§2 Lời giải

Bài 1.

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 + \sqrt{4x+4\sqrt{x-2}-7}$ với $x \geq 2$.

b) Cho a, b, c là các số đôi một phân biệt. Tính giá trị biểu thức

$$B = \frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

Lời giải.
a) Biến đổi

$$\begin{aligned} A &= \left(x-2-2\sqrt{x-2}+1\right) + \sqrt{\left(2\sqrt{x-2}+1\right)^2} \\ &= x-1-2\sqrt{x-2}+\left(2\sqrt{x-2}+1\right) \\ &= x. \end{aligned}$$

b) Đặt $x = a-b, y = b-c$ và $z = c-a$ thì $x+y+z=0$. Do đó

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0,$$

như vậy $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$. Ngoài ra

$$\begin{aligned} a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) &= (a^2b-a^2c+b^2c-b^2a)+c^2(a-b) \\ &= ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b) \\ &= (a-b)(ab-c(a+b)+c^2) \\ &= (a-b)(b-c)(a-c) \\ &= -xyz. \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{x^3+y^3+z^3}{-xyz} = \frac{3xyz}{-xyz} = -3$. □

Bài 2. Cho phương trình $x^2+2(m-1)x+2m=0$ với m là tham số.

a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{11}{25}$.

b) Tìm tất cả số nguyên m để phương trình có nghiệm nguyên.

Lời giải.
Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' \geq 0$, tương đương

$$(m-1)^2-2m \geq 0 \iff m^2-4m+1 \geq 0. \tag{1}$$

a) Với hai nghiệm là x_1, x_2 thì theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1+x_2 = -2(m-1)$ và $x_1x_2 = 2m$. Như vậy để $x_1x_2 \neq 0$ thì ta phải có

$$2m \neq 0 \iff m \neq 0. \tag{2}$$

Biến đổi

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}=\frac{4(m-1)^2-4m}{4m^2}=\frac{m^2-3m+1}{m^2}.$$

Vậy ta có phương trình

$$\frac{m^2-3m+1}{m^2}=\frac{11}{25}\iff 14m^2-75m+25=0\iff (m-5)(14m-5)=0.$$

Do đó $m\in\left\{\frac{5}{14},5\right\}$, thấy rằng chỉ có $m=5$ thỏa mãn (1) và (2). Vậy $m=5$.

b) Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi Δ' là số chính phương. Đặt $m^2-4m+1=k^2$ với $k\in\mathbb{N}$ thì

$$(m-2)^2-3=k^2\iff (m-2-k)(m-2+k)=3.$$

Vì $m-2-k\le m-2+k$ và $3=1\times 3=(-1)\times(-3)$ nên

$m-2-k$	1	-3
$m-2+k$	3	-1
m	4	0

Như vậy $m\in\{0,4\}$ (thử lại thỏa mãn). □

Bài 3.

a) Giải phương trình $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5}-\dfrac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5}+\dfrac{1}{4}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b}+4\sqrt{ab}=16\\ a+b=10\end{cases}$.

Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x\notin\{2,3\}$. Dễ thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $x\neq 0$, khi đó phương trình tương đương

$$\frac{x-3+\frac{5}{x}}{x-4+\frac{5}{x}}-\frac{x-5+\frac{5}{x}}{x-6+\frac{5}{x}}+\frac{1}{4}=0.$$

Đặt $y=x+\frac{5}{x}$ thì ta có phương trình

$$\begin{aligned}\frac{y-3}{y-4}-\frac{y-5}{y-6}+\frac{1}{4}=0&\iff (y-3)(y-6)-(y-5)(y-4)+\frac{1}{4}(y-4)(y-6)=0\\&\iff y^2-10y+16=0\\&\iff (y-8)(y-2)=0.\end{aligned}$$

Như vậy $y\in\{2,8\}$.

- TH1: $y=2$ thì $x+\frac{5}{x}=2\iff x^2-2x+5=0$ (vô nghiệm).
- TH2: $y=8$ thì $x+\frac{5}{x}=8\iff x^2-8x+5=0\iff x=4\pm\sqrt{11}$ (thỏa mãn).

Vậy $x \in \{4 - \sqrt{11}, 4 + \sqrt{11}\}$.

b) ĐKXĐ: $a, b \geq 0$. Đặt $S = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ và $P = \sqrt{ab}$, thu được hệ mới tương đương

$$\begin{cases} S + 4P = 16 \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases}.$$

Thay $S = 16 - 4P$ vào phương trình thứ hai ta có

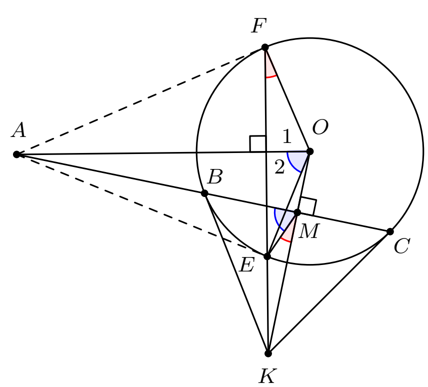
$$(16 - 4P)^2 - 2P = 10 \iff 8P^2 - 65P + 123 = 0 \iff (P-3)(8P-41) = 0.$$

Như vậy $P \in \left\{3, \frac{41}{8}\right\}$.

- TH1: $P = 3$ thì $S = 4$, khi đó $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 4X + 3 = 0$. Phương trình này có nghiệm $X_1 = 1$ và $X_2 = 3$ nên $(a, b) \in \{(1, 9), (9, 1)\}$.
- TH2: $P = \frac{41}{8}$ thì $S = \frac{-9}{2}$, khi đó $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ là hai nghiệm của phương trình $8X^2 + 36X + 41 = 0$, tuy nhiên phương trình này vô nghiệm.

Vậy $(a, b) \in \Big\{(1, 9), (9, 1)\Big\}$. □

Bài 4. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B, C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO, cắt đường tròn (O) tại E và F (E nằm giữa K và F). Chứng minh rằng AE, AF là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Lời giải.
Gọi M là giao điểm OK với BC, áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle OCK$ vuông tại C có đường cao CM thì

$$KM \cdot KO = KC^2$$

KC là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{KCE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{EC} = \widehat{KFC}$, dẫn tới $\triangle KCE \sim \triangle KFC$ (g.g) và suy ra

$$KE \cdot KF = KC^2$$

Do đó $KM \cdot KO = KE \cdot KF \iff \frac{KM}{KE} = \frac{KF}{KO}$, suy ra $\triangle KME \sim \triangle KFO$ (c.g.c). Dẫn đến $\widehat{KME} = \widehat{EFO}$ nên $EFOM$ là tứ giác nội tiếp. Ngoài ra

$$\widehat{AME} = 90^\circ - \widehat{KME} = 90^\circ - \widehat{EFO} = \widehat{O}_1.$$

Mà OA vuông góc dây EF nên OA là phân giác $\widehat{EOF}$, suy ra $\widehat{O}_2 = \widehat{O}_1$. Như vậy $\widehat{AME} = \widehat{O}_2$ nên $AOME$ là tứ giác nội tiếp.

Vậy các điểm A, F, O, M, E cùng thuộc một đường tròn (vì $EFMO$ và $AOME$ là các tứ giác nội tiếp). Vì $\widehat{AMO} = 90^\circ$ nên đường tròn này có đường kính AO, suy ra

$$\widehat{AEO} = \widehat{AFO} = 90^\circ.$$

Từ đây ta có được điều cần chứng minh. □