Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Nguyễn Thành Phát

Tháng 5 năm 2023

§ Ôn tập 9: Một số kết quả hay sử dụng trong hình học

Bài 1. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm) với đường tròn (O). Gọi H là giao điểm OA với BC, kẻ dây EF bất kì đi qua điểm H. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{EAF}$.

Bài 2. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm) với đường tròn (O). Kẻ dây BD của đường tròn (O) song song với AC, gọi E là giao điểm AD với đường tròn (O), và I là giao điểm BE với AC. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn AC.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $AC > AB$. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc với các cạnh AB, BC lần lượt ở D, E. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $AC,\ BC$. Chứng minh rằng ba đường thẳng $MN,\ AI$ và DE đồng quy.

Bài 4. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ và tiếp xúc với cạnh AB tại D. Biết rằng $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$, chứng minh rằng $\widehat{C}$ là góc vuông.

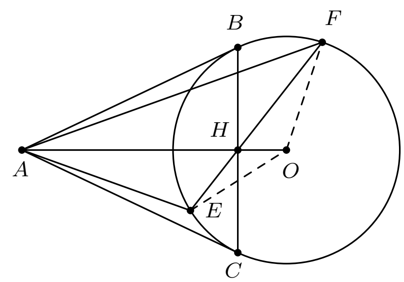
Bài 5. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm C tùy ý trên đường tròn đó (C khác A và B), trên nửa đường tròn (O) không chứa C lấy một điểm P tùy ý (P khác A và B). Gọi $Q,\ R,\ S$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên $AB,\ BC,\ CA$. Tìm vị trí của điểm P để tổng

$$\mathcal{K} = \frac{AB}{PQ} + \frac{BC}{PR} + \frac{CA}{PS}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

§ Lời giải

Bài 1. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm) với đường tròn (O). Gọi H là giao điểm OA với BC, kẻ dây EF bất kì đi qua điểm H. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{EAF}$.



Lời giải.
$BECF$ và $ABOC$ là tứ giác nội tiếp nên theo Kết quả 1 ta có

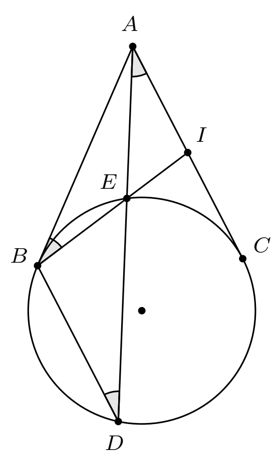
$$HE \cdot HF = HB \cdot HC = HA \cdot HO,$$

do vậy cũng theo Kết quả 1 thì $AEOF$ là tứ giác nội tiếp. Mà $OE = OF$ nên

$$\widehat{EAO} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{OE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{OF} = \widehat{FAO}.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh □

Bài 2. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm) với đường tròn (O). Kẻ dây BD của đường tròn (O) song song với AC, gọi E là giao điểm AD với đường tròn (O), và I là giao điểm BE với AC. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn AC.



Lời giải.
Vì $AI \parallel BD$ nên $\widehat{IAE} = \widehat{D}$, ngoài ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$\widehat{D} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{BE} = \widehat{ABE} \implies \widehat{IAE} = \widehat{ABE}.$$

Như vậy $\triangle IAE \sim \triangle IBA$ (g.g), suy ra

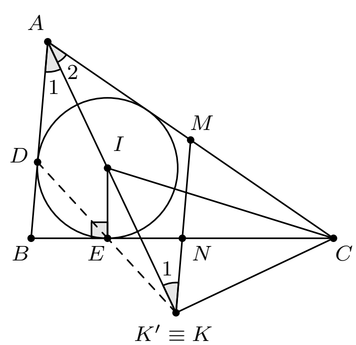
$$\frac{IA}{IE} = \frac{IB}{IA} \implies IA^2 = IB \cdot IE$$

Với IC là tiếp tuyến và cát tuyến IEB của đường tròn (O) thì theo Kết quả 2 ta có

$$IC^2 = IB \cdot IE$$

Do đó $IA = IC$ (cùng bằng $\sqrt{IB \cdot IE}$) □

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $AC > AB$. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc với các cạnh AB, BC lần lượt ở D, E. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $AC,\ BC$. Chứng minh rằng ba đường thẳng $MN,\ AI$ và DE đồng quy.



Lời giải.
Gọi K là giao điểm AI với MN. Vì $MN \parallel AB$ nên

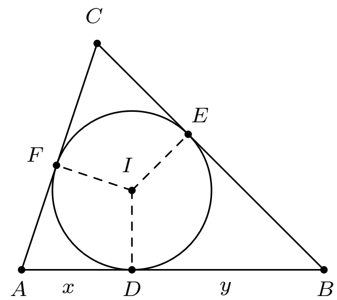
$$\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \implies MA = MK.$$

Vì M là trung điểm AC và $MK = \frac{1}{2}AC$ nên $\triangle ACK$ vuông tại K, suy ra $\widehat{AKC} = 90^\circ$.
Gọi K' là giao điểm DE với AI, theo Kết quả 3 thì $\widehat{AK'C} = 90^\circ$. Vậy $K,\ K'$ đều là các điểm nằm trên đường thẳng AI thỏa mãn

$$\widehat{AKC} = 90^\circ = \widehat{AK'C}$$

nên $K \equiv K'$. Nghĩa là MN, AI và DE đồng quy (tại K). □

Bài 4. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ và tiếp xúc với cạnh AB tại D. Biết rằng $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$, chứng minh rằng $\widehat{C}$ là góc vuông.



Lời giải.
Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$ và $AD = x, BD = y$. Theo Kết quả 4 thì

$$x = \frac{c+b-a}{2} \quad \text{và} \quad y = \frac{c+a-b}{2}.$$

Theo giả thiết thì $ab = 2xy = 2 \cdot \frac{c+b-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2}$, tương đương

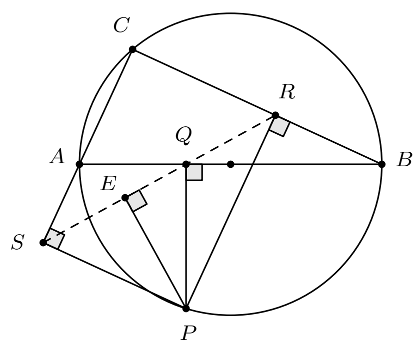
$$\begin{aligned} 2ab &= (c+b-a)(c+a-b) \\ &= c^2 - (a-b)^2 \\ &= c^2 - a^2 - b^2 + 2ab. \end{aligned}$$

Dẫn tới $a^2 + b^2 = c^2$ nên $\widehat{C} = 90^\circ$. □

Bài 5. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm C tùy ý trên đường tròn đó (C khác A và B), trên nửa đường tròn (O) không chứa C lấy một điểm P tùy ý (P khác A và B). Gọi $Q,\ R,\ S$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên $AB,\ BC,\ CA$. Tìm vị trí của điểm P để tổng

$$\mathcal{K} = \frac{AB}{PQ} + \frac{BC}{PR} + \frac{CA}{PS}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải.
Theo Kết quả 5 thì ba điểm $Q,\ R,\ S$ thẳng hàng. Gọi E là hình chiếu của P lên SR. Từ các tam giác đồng dạng $\triangle PAB \backsim \triangle PSR,\ \triangle PBC \backsim \triangle PQS,\ \triangle PCA \backsim \triangle PRQ$ thu được

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{AB}{PQ} + \frac{BC}{PR} + \frac{CA}{PS} \\ &= \frac{SR}{PE} + \frac{SQ}{PE} + \frac{RQ}{PE} = \frac{2SR}{PE}. \end{aligned}$$

Trong tam giác vuông PSR với đường cao PE có hệ thức lượng

$$\frac{1}{PE^2} = \frac{1}{PR^2} + \frac{1}{PS^2} \geq \frac{4}{PR^2 + PS^2} = \frac{4}{SR^2} \implies \frac{SR}{PE} \geq 2.$$

Do vậy

$$\mathcal{K} = \frac{2SR}{PE} \geq 4.$$

Vậy $\mathcal{K}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $PR = PS \iff \widehat{ABP} = 45^\circ$, nghĩa là P là điểm chính giữa cung AB không chứa C. $\square$