Chuyên đề - ĐS 8: Hệ phương trình đối xứng (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1a

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+y^2x=30 \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $S=x+y$ và $P=xy$, thu được

$$\begin{cases} S+P=11 \\ SP=30 \end{cases}.$$

Như vậy S,P là hai nghiệm của phương trình $t^2-11t+30=0$. Vì phương trình này có hai nghiệm 5 và 6 nên có hai trường hợp.

- TH1: $S=5, P=6$ thì tìm được $(x,y)\in\{(2,3),(3,2)\}$.
- TH2: $S=6, P=5$ thì tìm được $(x,y)\in\{(1,5),(5,1)\}$.

Vậy $(x,y)\in\Big\{(2,3),(3,2),(1,5),(5,1)\Big\}$. □

Bài 1b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x+y)(8+xy) = 2 \end{cases}.$

Lời giải.

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$, thu được

$$\begin{cases} S^3 - 3SP = 19 \\ S(8+P) = 2 \end{cases}.$$

Thay $SP = 2 - 8S$ vào phương trình đầu ta có

$$S^3 - 3(2 - 8S) = 19 \iff (S-1)(S^2 + S + 25) = 0 \iff S = 1.$$

Dẫn đến $P = -6$, nên

$$x + y = 1 \quad \text{và} \quad xy = -6.$$

Từ đây tìm được $(x, y) \in \Big\{(-2, 3), (3, -2)\Big\}$. $\square$

Bài 1c

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x-y) = 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $S = x - y$ và $P = xy$, để ý rằng $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$ nên

$$\begin{cases} S^3 + 3SP = 7 \\ SP = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} S^3 = 1 \\ SP = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} S = 1 \\ P = 2 \end{cases}.$$

Như vậy x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - t + 2 = 0$ (SAI). Ta có

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 1 \\ (y+1)y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 1 \\ y \in \{-2, 1\} \end{cases}.$$

Vậy $(x, y) \in \Big\{(-1, -2), (2, 1)\Big\}$. □

Bài 2a

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$.

Lời giải.

Trừ vế theo vế của phương trình ta có

$$(x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Chia thành hai trường hợp

- TH1: $x = y$ thì $(x, y) \in \{(0, 0), (5, 5)\}$.
- TH2: $x + y = 1$ thì $(x, y) \in \{(-1, 2), (2, -1)\}$.

Vậy $(x, y) \in \left\{(0, 0), (5, 5), (-1, 2), (2, -1)\right\}$. $\square$

Bài 2b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(2x+y) = 3 \\ y^2(2y+x) = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Trừ vế theo vế của phương trình ta có

$$(x-y)(2x^2+3xy+2y^2) = 0.$$

Thấy rằng $y \neq 0$ nên

$$2x^2+3xy+2y^2 = 2\left(x+\frac{3y}{4}\right)^2 + \frac{7y^2}{8} > 0.$$

Do đó $x = y$, từ đây tìm được $x = y = 1$. $\square$

Bài 2c

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x = \frac{x^2+2}{y^2} \\ 3y = \frac{y^2+2}{x^2} \end{cases}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $xy \neq 0$. Quy đồng hai phương trình và trừ vế theo vế ta có

$$(x-y)(x+y+3xy) = 0.$$

Từ giả thiết dễ thấy $x, y > 0$ nên

$$x + y + 3xy > 0.$$

Do đó $x = y$, từ đây tìm được $x = y = 1$. $\square$

Bài 3a

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[4]{y^3-1}+\sqrt{x}=3 \\ x^2+y^3=82 \end{cases}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $y^3 \geq 1$ và $x \geq 0$. Đặt $a=\sqrt{x}$ và $b=\sqrt[4]{y^3-1}$, thu được

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^4+(b^4+1)=82 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=81 \end{cases}.$$

Thấy rằng $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(S^2-2P)^2-2P^2$, do đó

$$\begin{cases} S=3 \\ (9-2P)^2-2P^2=81 \end{cases}.$$

Tìm được $P \in \{0, 18\}$. Từ đó ta có $(x, y) \in \left\{(0, \sqrt[3]{82}), (9, 1)\right\}$. □

Bài 3b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\frac{1}{y}=8 \end{cases}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $y \neq 0,\ x+\frac{1}{y} \geq 0$ và $x+y \geq 3$. Đặt $a=\sqrt{x+\frac{1}{y}}$ và $b=\sqrt{x+y-3}$, thu được

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^2+(b^2+3)=8 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}.$$

Như vậy $(a,b) \in \left\{(1,2),(2,1)\right\}$. Từ đó ta có

$$(x,y) \in \left\{(3,1),(5,-1),(4-\sqrt{10},3+\sqrt{10}),(4+\sqrt{10},3-\sqrt{10})\right\}.$$

□

Bài 3c

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}=8 \\ \sqrt{y+9}+\sqrt{x-7}=8 \end{cases}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x, y \geq 7$. Trừ vế theo vế của phương trình ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+9}-\sqrt{y+9}-\left(\sqrt{x-7}-\sqrt{y-7}\right)=0 \\ \iff & \frac{x-y}{\sqrt{x+9}+\sqrt{y+9}}-\frac{x-y}{\sqrt{x-7}+\sqrt{y-7}}=0 \\ \iff & (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}+\sqrt{y+9}}-\frac{1}{\sqrt{x-7}+\sqrt{y-7}}\right)=0. \end{aligned}$$

Dễ thấy $\sqrt{x+9}+\sqrt{y+9}>\sqrt{x-7}+\sqrt{y-7}$, do đó biểu thức trong ngoặc khác 0 (âm) nên phải có $x=y$.

Lời giải.

Như vậy có phương trình $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-7}=8$, tương đương

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x+9}-5)+(\sqrt{x-7}-3)=0 \\ \iff\ & (x-16)\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}+5}+\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\right)=0. \end{aligned}$$

Do đó $x=16$ nên $x=y=16$. $\square$

Bài 3d

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{10 - \frac{4}{y}} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{y}} + \sqrt{10 - \frac{4}{x}} = 5 \end{cases}.$

Lời giải

ĐKXĐ: $x, y \geq \frac{2}{5}$. Đặt $a = \frac{2}{\sqrt{x}}$ và $b = \frac{2}{\sqrt{y}}$, thu được

$$\begin{cases} 2a + \sqrt{10 - b^2} = 5 \\ 2b + \sqrt{10 - a^2} = 5 \end{cases}.$$

Trừ vế theo vế của phương trình ta có $2(a - b) + (\sqrt{10 - b^2} - \sqrt{10 - a^2}) = 0$

$$\iff (a - b)\left(2 + \frac{a + b}{\sqrt{10 - b^2} + \sqrt{10 - a^2}}\right) = 0.$$

Vì $a, b > 0$ nên $a = b$.

Lời giải.

Như vậy có phương trình $2a+\sqrt{10-a^2}=5 \iff \sqrt{10-a^2}=5-2a$. Tương đương

$$\begin{cases} 5-2a \geq 0 \\ 10-a^2=(5-2a)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leq \frac{5}{2} \\ 5a^2-20a+15=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a \leq \frac{5}{2} \\ a \in \{1,3\} \end{cases}$$
$$\iff a=1.$$

Từ đây tìm được $x=y=4$. □