Đại số - Bài 1: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải phương trình nghiệm nguyên (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Bài 1

Giải các phương trình nghiệm nguyên sau

a) $x^2 + y + 2 = xy$,

b) $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$,

c) $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 8y + 7 = 0$.

Lời giải.

a) $\Delta_x = (y-2)^2 - 12 = k^2$.

Đáp số là $(x, y) \in \Big\{(-2,-2), (0,-2), (2,6), (4,6)\Big\}$.

b) $\Delta_x = -3y^2 + 4 \geq 0$ nên $-1 \leq y \leq 1$.

Đáp số là $(x, y) \in \Big\{(0,-1), (1,-1), (0,0), (2,0), (1,1), (2,1)\Big\}$.

c) $\Delta'_x = -y^2 - 4y - 3 \geq 0$ nên $-3 \leq y \leq -1$.

Đáp số là $(x, y) \in \Big\{(-1,-3), (-1,-2), (1,-2), (1,-1)\Big\}$. $\square$

Bài 1d

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - y^2 = xy + 8$.

Lời giải.

Xem như là phương trình ẩn x (với tham số y), như vậy $\Delta_x = 5y^2 + 32$. Thấy rằng

$$5y^2 + 32 \equiv 2 \pmod 5.$$

NX: một số chính phương không thể chia 5 dư 2.
Dẫn đến Δ_x không thể là số chính phương nên không tồn tại x, y thỏa đề. $\square$

Chứng minh NX: Đặt $K = 5a + b$ với $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ thì

$$K^2 = 25a^2 + 10a + b^2 \equiv b^2 \pmod 5.$$

Ta có $b^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$ nên một số chính phương chia 5 chỉ có thể dư $0, 1$ hoặc 4.

Bài 2

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^3 - y^3 = (x + y - 2)^2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $x^3 \geq y^3 \implies x \geq y$. Đặt $x - y = d \geq 0$ và thay vào phương trình ta có $(y + d)^3 - y^3 = ((y + d) + y - 2)^2$. Tương đương

$$(3d - 4)y^2 + (3d^2 - 4d + 8)y + d^3 - d^2 + 4d - 4 = 0. \tag{$*$}$$

Vì $3d - 4 \neq 0$ nên có thể xem $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn y (tham số d). Khi đó

$$\begin{aligned} \Delta_y = -3d^4 + 4d^3 + 48d \geq 0 &\implies -3d^3 + 4d^2 + 48 \geq 0 \\ &\implies d^2(3d - 4) \leq 48. \end{aligned}$$

Nếu $d \geq 4$ thì $d^2(3d - 4) \geq 16 \times (12 - 4) > 48$. Do đó $d < 4$ nên $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Vậy

$$(x, y) \in \Big\{(1, -2), (1, 0), (1, 1), (8, 7)\Big\}.$$

$\square$

Bài 3a

Cho p là số nguyên tố thỏa mãn điều kiện: tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho

$$x^3 + y^3 - p = 6xy - 8.$$

Chứng minh rằng $x + y = p - 2$.

Hằng đẳng thức: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 8 - 6xy &= x^3 + y^3 + 2^3 - 3 \cdot 2xy \\ &= (x + y + 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y). \end{aligned}$$

Do đó

$$(x + y + 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y) = p.$$

Vì p là số nguyên tố và $x + y + 2 > 1$ nên $x + y + 2 = p$. $\square$

Bài 3b

Cho p là số nguyên tố thỏa mãn điều kiện: tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho

$$x^3 + y^3 - p = 6xy - 8.$$

Chứng minh rằng $p \leq 7$.

Lời giải.

Theo câu a thì $y = p - x - 2$, thay vào $x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y = 1$ ta có

$$3x^2 - 3(p-2)x + p^2 - 6p + 11 = 0.$$

Xem như đây là phương trình bậc hai ẩn x (tham số p) thì

$$\Delta_x = -3p^2 + 36p - 96 \geq 0 \implies (p-4)(p-8) \leq 0.$$

Do đó $4 \leq p \leq 8$, vì là số nguyên tố nên $p \leq 7$. $\square$

Bài 4a

Chứng minh rằng với $a \geq 10$ thì

$$(2a^2 - a - 6)^2 < 4(a^4 - a^3 - 5a^2 - 3a + 1) < (2a^2 - a - 5)^2.$$

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức bên phải như sau

$$(2a^2 - a - 5)^2 - 4(a^4 - a^3 - 5a^2 - 3a + 1) = a^2 + 22a + 21 > 0.$$

Để chứng minh bất đẳng thức bên trái, trước tiên ta có

$$4(a^4 - a^3 - 5a^2 - 3a + 1) - (2a^2 - a - 6)^2 = 3a^2 - 24a - 32.$$

Vì $a \geq 10$ nên

$$3a^2 - 24a = a(3a - 24) \geq 10 \times (30 - 24) > 32.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 4b

Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn $y^3 + y^2 + 3y + x^2 + 4x + 3 = 2y^2x$.

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$x^2 - 2x(y^2 - 2) + y^3 + y^2 + 3y + 3 = 0.$$

Xem như đây là một phương trình bậc hai theo ẩn x (tham số y), khi đó

$$\Delta'_x = y^4 - y^3 - 5y^2 - 3y + 1.$$

phải là số chính phương. Từ câu a ta thấy rằng với $y \geq 10$ thì $4\Delta'_x$ không thể là số chính phương nên Δ'_x cũng không thể là số chính phương. Do đó $y \leq 9$, từ đây tìm được

$$(x, y) \in \left\{(6, 3), (8, 3), (4, 5)\right\}.$$

□