

# Đại số - Bài 3: Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

## Bài 1

Rút gọn biểu thức

a)  $\frac{2\sqrt{2} + 2}{5\sqrt{2}},$

b)  $\frac{3}{\sqrt{3} + 1},$

c)  $\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$

d)  $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}.$

Đáp án

a)  $\frac{1}{5}(2 + \sqrt{2}),$

b)  $\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1),$

c)  $\sqrt{2},$

d)  $-\sqrt{5}.$

## Bài 2

So sánh  $a, b$  biết rằng  $a = \sqrt{2022} - \sqrt{2021}$  và  $b = \sqrt{2023} - \sqrt{2022}$ .

Lời giải.

Có

$$\begin{aligned}(\sqrt{2023} + \sqrt{2021})^2 &= 4044 + 2\sqrt{(2022+1) \times (2022-1)} \\&= 2 \times 2022 + 2\sqrt{2022^2 - 1} \\&< 4 \times 2022.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sqrt{2023} + \sqrt{2021} &< 2\sqrt{2022} \\ \iff \sqrt{2023} - \sqrt{2022} &< \sqrt{2022} - \sqrt{2021}.\end{aligned}$$

Vậy  $b < a$ .



### Bài 3a

Chứng minh đẳng thức  $\sqrt{10 + \sqrt{60}} - \sqrt{24} - \sqrt{40} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$ .

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40} &= 10 + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} \\&= 5 + 3 + 2 + 2(\sqrt{5}\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{5}) \\&= (\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})^2.\end{aligned}$$



### Bài 4a

Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$  với  $x > 3$ .

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+3+2\sqrt{(x-3)(x+3)}}{2(x-3)+\sqrt{(x-3)(x+3)}} \\ &= \frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}(2\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})} \\ &= \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}. \end{aligned}$$



### Bài 4b

Rút gọn biểu thức  $B = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x + 2)\sqrt{9 - x^2}}$  với  $0 < x < 3$ .

### Đáp án

$$B = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$$

### Bài 5a

Chứng minh rằng với mọi số  $a > 0$  thì  $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ .

Lời giải.

Ta có

$$\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2}{a} - \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a(a+1)}.$$

Mặt khác

$$\frac{2}{a} - \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a(a+1)} = \frac{2(a+1) - 2a - 2}{a(a+1)} = 0.$$

Do đó

$$\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}.$$



## Bài 5b

Tính giá trị của tổng

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}.$$

Lời giải.

Áp dụng câu a thu được

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 99 + \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \\ &= 99,99. \end{aligned}$$



## Bài 6

### Rút gọn biểu thức

$$M = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35} + \sqrt{36}}.$$

Lời giải.

Với mỗi số nguyên dương  $n$  thì  $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ . Do đó

$$\begin{aligned} M &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{36} - \sqrt{35}) \\ &= \sqrt{36} - \sqrt{1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

