

Đại số - Bài 5: Phương trình quy về phương trình bậc hai (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1

Giải các phương trình sau

a) $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0,$

b) $x^3 - x = \sqrt{2},$

c) $(x+2)^4 + (x+4)^4 = 82,$

d) $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40.$

Ý tưởng

a) $(x+1)(x^2 - 6x + 7) = 0.$ Đáp án: $x \in \{1, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}.$

b) $x^3 - 2\sqrt{2} - x + \sqrt{2} = 0.$ Đáp án: $x = \sqrt{2}.$

c) Đặt $y = x + 3.$ Đáp án: $x \in \{-5, -1\}.$

d) Đặt $y = x^2 + 14x.$ Đáp án: $x \in \{-10, -4\}.$

Bài 2

Giải các phương trình sau

a) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0,$

b) $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0.$

Lời giải.

a) Đặt $y = x^2 \geq 0$, phương trình trở thành

$$2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

Cuối cùng thì $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$

b) Đặt $y = x^2 - 4x + 2$, phương trình trở thành

$$y^2 + y - 6 = 0.$$

Cuối cùng thì $x \in \{0, 4\}.$



Bài 2c

Giải phương trình $(4x + 3)^2(x + 1)(2x + 1) = 810$.

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$(4x + 3)^2(4x + 4)(4x + 2) = 810 \times 8.$$

Đặt $y = 4x + 3$ thì phương trình trở thành

$$y^2(y + 1)(y - 1) = 6480 \iff y^4 - y^2 - 6480 = 0.$$

Vậy $x \in \{-3, \frac{3}{2}\}$. □

Bài 2d

Giải phương trình $2x^2 - 2x + \sqrt{(x+1)(x-2)} = 14$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \leq -1$ hoặc $x \geq 2$.

Đặt $t = \sqrt{(x+1)(x-2)} \geq 0$ thì $x^2 - x = t^2 + 2$. Phương trình tương đương

$$2(t^2 + 2) + t = 14 \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = -5/2 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Với $t = 2$ tìm được $x \in \{-2, 3\}$.



Bài 3

Giải các phương trình sau

a) $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6,$

b) $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1.$

Ý tưởng

a) Đặt $y = 2x + \frac{3}{x}$ thì phương trình trở thành $\frac{2}{y-5} + \frac{13}{y+1} = 3.$

Vậy $x \in \left\{ \frac{3}{4}, 2 \right\}.$

b) Đặt $y = x^2 + 3x$ thì phương trình trở thành $\frac{6}{y+2} + \frac{8}{y-4} = 1.$

Vậy $x \in \left\{ -3, 0, \frac{-3-\sqrt{73}}{2}, \frac{-3+\sqrt{73}}{2} \right\}.$

Bài 3c

Giải phương trình $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \neq -9$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{9x}{x+9}\right)^2 &= 40 \iff \left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 + 2\frac{9x^2}{x+9} = 40 \\ &\iff \left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40. \end{aligned}$$

Đặt $y = \frac{x^2}{x+9}$ thì ta có $y^2 + 18y = 40$. Vậy $x \in \{1 - \sqrt{19}, 1 + \sqrt{19}\}$.

□

Bài 3d

Giải phương trình $\frac{x(3-x)}{x+1} \left(x + \frac{3-x}{x+1} \right) = 2.$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \neq -1$, đặt $a = \frac{x(3-x)}{x+1}$ và $b = x + \frac{3-x}{x+1}$ thì theo đề ta có $ab = 2$. Mặt khác

$$a + b = \frac{x(3-x)}{x+1} + \left(x + \frac{3-x}{x+1} \right) = 3.$$

Vậy $ab = 2$ và $a + b = 3$, từ đây tìm được a và b . Vậy $x = 1$.

□

Bài 4a

Chứng minh rằng với $x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$ thì $4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}4x^3 + 3x &= 4 \cdot \frac{1}{8} \left(a - \frac{1}{a} \right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \\&= \frac{1}{2} \left(a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} \right) + \frac{3}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \\&= \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right).\end{aligned}$$



Bài 4b

Giải phương trình $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$.

Phân tích: Biểu diễn $\frac{3}{4}$ dưới dạng $\frac{1}{2}(h - \frac{1}{h})$ thì $h = 2$. Vậy với

$$k = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{h} - \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \right) \implies 4k^3 + 3k = \frac{1}{2} \left(h - \frac{1}{h} \right) = \frac{3}{4}.$$

Lời giải.

Thấy rằng $k = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)$ là một nghiệm của phương trình, ta sẽ chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

- Nếu $x > k$ thì $x^3 > k^3$ nên $4x^3 + 3x > 4k^3 + 3k = \frac{3}{4}$.
- Nếu $x < k$ thì $x^3 < k^3$ nên $4x^3 + 3x < 4k^3 + 3k = \frac{3}{4}$.

Vậy $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)$ là nghiệm duy nhất của phương trình. □