Hình học - Bài 5: Cung chứa góc (Bài tập)

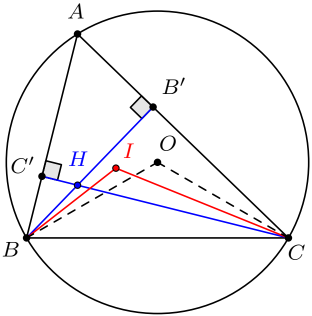
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Bài 1

I, O lần lượt là tâm nội tiếp, tâm ngoại tiếp của $\triangle ABC$ với $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi H là trực tâm tam giác. Chứng minh các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải.

Có $\widehat{BOC} =$ sđ $\overset{\frown}{BC} = 2\widehat{A} = 120^\circ$. Trong tứ giác $AB'HC'$ thì

$$\widehat{B'HC'} = 180^\circ - \widehat{A} = 120^\circ,$$

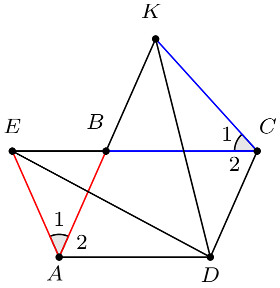
suy ra $\widehat{BHC} = 120^\circ$. Ngoài ra

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 120^\circ.$$

Vậy các điểm O, H, I cùng nhìn đoạn BC dưới một góc 120°; do đó các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn. $\square$

Bài 2a

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn. Đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC ở E. Đường tròn tâm C bán kính CB cắt AB ở K. Chứng minh rằng $DE = DK$.



Lời giải.

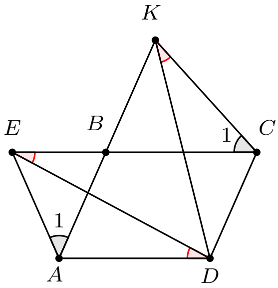
Hai tam giác cân ABE và CBK có hai góc ở đáy bằng nhau $(\widehat{ABE} = \widehat{CBK})$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$. Mặt khác

$$\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \implies \widehat{EAD} = \widehat{DCK}.$$

Do đó có được $\triangle EAD = \triangle DCK$ (c.g.c), suy ra $DE = DK$. $\square$

Bài 2b

Chứng minh rằng năm điểm A, C, D, E, K cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải.

Vì $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ nên A, C, E, K cùng thuộc một đường tròn. (1)

Theo câu a thì $\triangle EAD = \triangle DCK$ nên

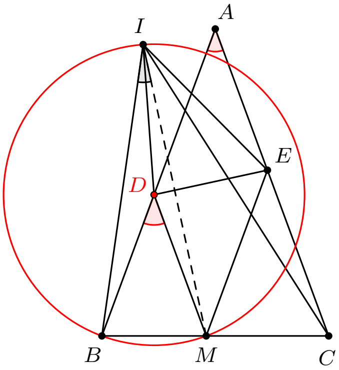
$$\widehat{CKD} = \widehat{ADE} = \widehat{CED},$$

do đó C, D, E, K cùng thuộc một đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 3

Qua điểm M thuộc cạnh đáy BC của $\triangle ABC$ cân, kẻ các đường thẳng song song với các cạnh bên; cắt AB, AC ở D, E. Gọi I là điểm đối xứng với M qua DE. Chứng minh rằng I thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



Lời giải.

Vì I, M đối xứng qua DE nên $DI = DM$, ngoài ra $DM \parallel AC$ nên $DM = DB$. Như vậy $DI = DM = DB$ nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle IBM$, suy ra

$$\widehat{BIM} = \frac{1}{2}\widehat{BDM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

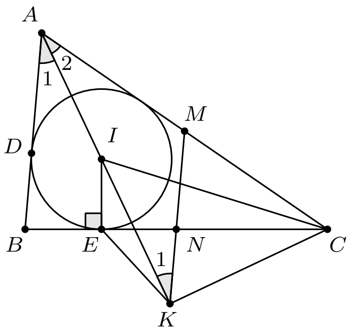
Tương tự thì $\widehat{MIC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, do đó

$$\widehat{BIC} = \widehat{BIM} + \widehat{MIC} = \widehat{BAC}.$$

Từ đây có điều cần chứng minh. □

Bài 4a

Cho $\triangle ABC$ có $AC > AB$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AB, BC ở D, E. Gọi M, N là trung điểm AC, BC. Gọi K là giao điểm của MN và AI. Chứng minh rằng I, E, K, C cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải.

Vì $MN \parallel AB$ nên

$$\widehat{K_1} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \implies MA = MK.$$

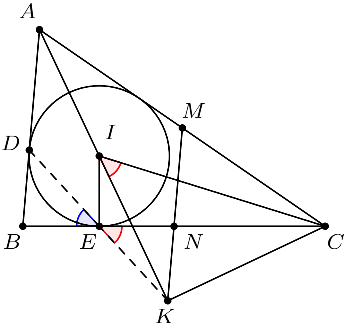
Vì M là trung điểm AC và $MK = \frac{1}{2}AC$ nên $\triangle ACK$ vuông tại K. Như vậy

$$\widehat{IKC} = 90^\circ = \widehat{IEC},$$

do đó I, E, K, C cùng thuộc một đường tròn. $\square$

Bài 4b

Chứng minh rằng ba điểm D, E, K thẳng hàng.



Lời giải.

Từ câu a suy ra $\widehat{KEC} = \widehat{KIC}$, ngoài ra dễ thấy

$$\widehat{KIC} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}.$$

Mặt khác $\triangle BDE$ cân tại B nên

$$\widehat{DEB} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}.$$

Vậy ta có $\widehat{KEC} = \widehat{DEB}$, do đó D, E, K thẳng hàng. $\square$