Hình học - Bài 6: Tứ giác nội tiếp (Bài tập)

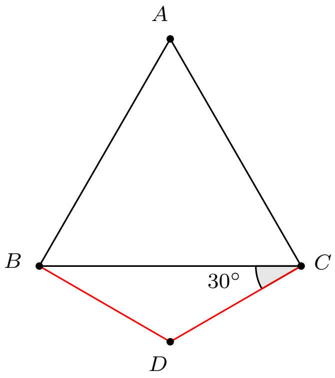
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1a

Cho $\triangle ABC$ đều. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A, lấy điểm D sao cho $DB = DC$ và $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Chứng minh rằng $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.



Lời giải.

Theo đề thì $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}60^\circ = 30^\circ$, do đó

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{DCB} = 90^\circ.$$

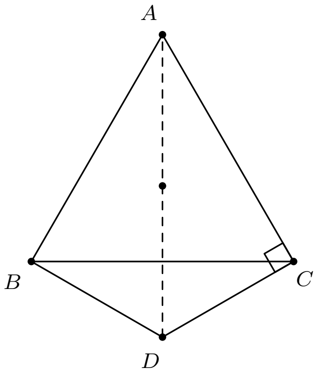
$\triangle DCB$ cân tại D nên $\widehat{DBC} = 30^\circ$, tương tự như trên thì $\widehat{ABD} = 90^\circ$. Như vậy

$$\widehat{ACD} + \widehat{ABD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

nên $ABDC$ là tứ giác nội tiếp. $\square$

Bài 1b

Xác định tâm của đường tròn đi qua các điểm A, B, D, C.

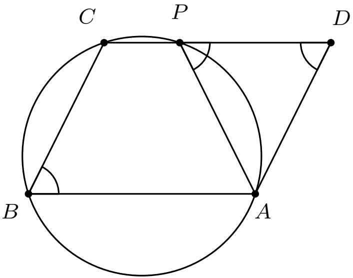


Lời giải.

Vì $\widehat{ACD} = 90^\circ$ nên AD là đường kính của tứ giác nội tiếp $ABDC$. Do vậy tâm của đường tròn cần xác định là trung điểm AD. $\square$

Bài 2

Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cắt CD tại P khác C. Chứng minh rằng $AP = AD$.



Lời giải.

Vì $ABCP$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{APD} = \widehat{B}.$$

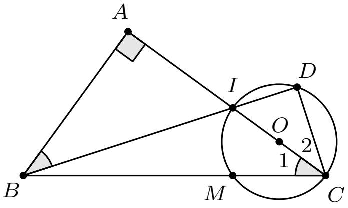
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\widehat{D} = \widehat{B} \text{ (cùng bù } \widehat{C}\text{)}.$$

Do đó $\widehat{APD} = \widehat{D}$, từ đây suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Bài 3a

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Lấy I trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{C}$. (O) có đường kính IC cắt BI ở D và cắt BC ở M. Chứng minh rằng CI là tia phân giác của $\widehat{DCM}$.



Lời giải.

Vì (O) có đường kính CI nên $\widehat{D} = 90^\circ$. Như vậy

$$\widehat{A} = 90^\circ = \widehat{D},$$

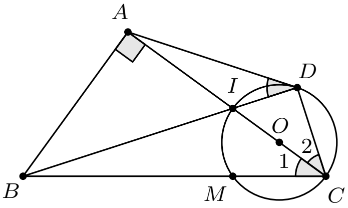
nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{C_2} = \widehat{ABD}.$$

Mặt khác theo giả thiết thì $\widehat{C_1} = \widehat{ABI}$. Do đó $\widehat{C_2} = \widehat{C_1}$ nên có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 3b

Chứng minh rằng DA là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Lời giải.

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{ADB} = \widehat{C_1}.$$

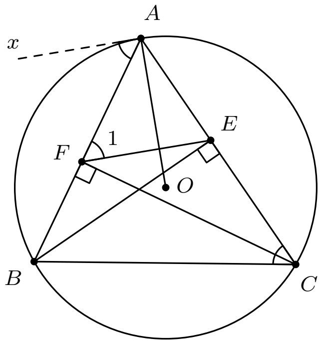
Ngoài ra theo câu a thì $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$, do đó

$$\widehat{ADB} = \widehat{C_2}.$$

Như vậy DA là tiếp tuyến của đường tròn (O). □

Bài 4

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao là BE và CF. Chứng minh rằng OA vuông với với EF.



Lời giải.

Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O), khi đó

$$\widehat{xAB} = \widehat{ACB}.$$

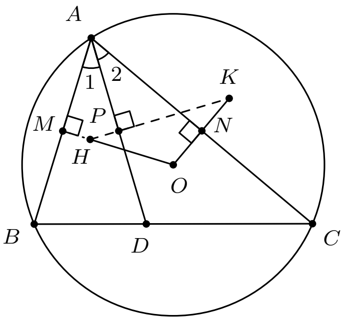
Mặt khác $BCFE$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{F_1} = \widehat{ACB}.$$

Do vậy $\widehat{xAB} = \widehat{F_1}$, dẫn đến $Ax \parallel EF$. Mà $AO \perp Ax$ nên $AO \perp EF$. □

Bài 5

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), đường phân giác AD. Gọi H, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng $OH = OK$.



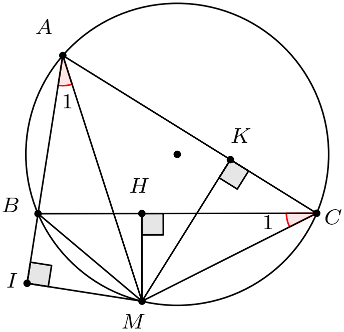
Lời giải.

Thấy rằng OH đi qua trung điểm M của AB, OK đi qua trung điểm N của AC và HK đi qua trung điểm P của AD.

Vì $AMHP$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{OHK} = \widehat{A}_1$. Vì $AKNP$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{OKH} = \widehat{A}_2$. Do đó $\widehat{OHK} = \widehat{OKH}$, suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Bài 6a

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), điểm M thuộc cung BC không chứa A. Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Chứng minh rằng $\frac{AI}{MI} = \frac{CH}{MH}$.



Lời giải.

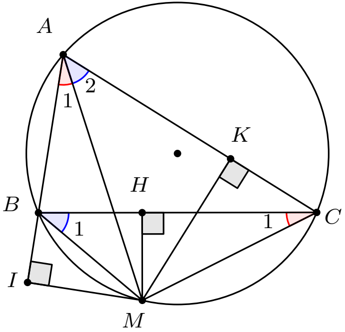
Thấy ngay $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$, do đó

$$\frac{AI}{MI} = \operatorname{cotg} \widehat{A}_1 = \operatorname{cotg} \widehat{C}_1 = \frac{CH}{MH}.$$

□

Bài 6b

Chứng minh rằng $\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{BC}{MH}$.



Lời giải.

Ta có

$$\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{AI - BI}{MI} + \frac{AK + CK}{MK}.$$

Thấy rằng $\frac{BI}{MI} = \operatorname{cotg} \widehat{IBM} = \operatorname{cotg} \widehat{ACM} = \frac{CK}{MK}$, do đó

$$\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{AI}{MI} + \frac{AK}{MK}.$$

Theo câu a thì $\frac{AI}{MI} = \frac{CH}{MH}$, tương tự $\frac{AK}{MK} = \frac{BH}{MH}$. Do đó

$$\frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK} = \frac{CH}{MH} + \frac{BH}{MH} = \frac{BC}{MH}.$$

□