Chuyên đề - HH 1: Giải toán bằng cách lập phương trình tìm cạnh (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

8/2022

Bài 1

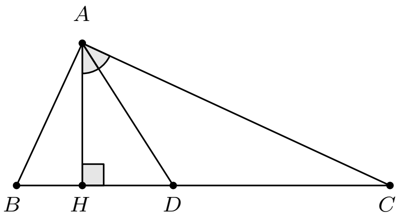
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH. Biết $AB = 40$ và $HC = 18$, hãy tính AH.

Đáp án

$AH = 32$.

Bài 2a

Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Tia phân giác $\widehat{HAC}$ cắt HC tại D. Chứng minh rằng tam giác ABD cân tại B.



Lời giải.

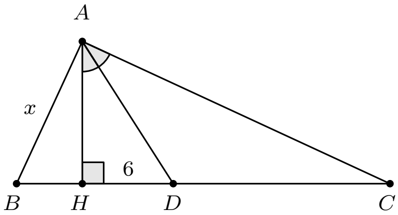
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{ADB} &= \widehat{DAC} + \widehat{C} \\ &= \widehat{DAH} + \widehat{BAH} \ (\widehat{C} \ \& \ \widehat{BAH} \text{ cùng phụ } \widehat{HAC}) \\ &= \widehat{BAD}\end{aligned}$$

Do vậy tam giác ABD cân tại B. □

Bài 2b

Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Tia phân giác $\widehat{HAC}$ cắt HC tại D. Biết $BC = 25$ và $DH = 6$. Hãy tính AB.



Lời giải.

Đặt $AB = x$, theo câu a thì

$$BD = AB = x \implies BH = BD - HD = x - 6.$$

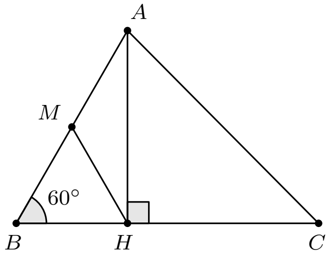
Ta có

$$AB^2 = BH \cdot BC \implies x^2 = (x-6)25$$

Từ đây tìm được $x = 10$ hoặc $x = 15$. $\square$

Bài 3a

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$ và đường cao AH.
Chứng minh rằng $AB = 2BH$.



Lời giải.

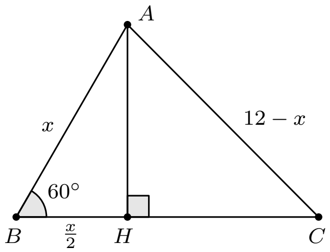
Gọi M là trung điểm AB, khi đó $HM = \frac{1}{2}AB = BM$ nên $\triangle HMB$ cân.
Ngoài ra $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\triangle HMB$ đều, do đó

$$AB = 2MB = 2BH.$$

□

Bài 3b

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$ và đường cao AH. Biết $BC = 8$ và $AB + AC = 12$. Hãy tính AB và AC.



Lời giải.

Đặt $AB = x$, từ câu a suy ra $BH = \frac{x}{2}$. Có

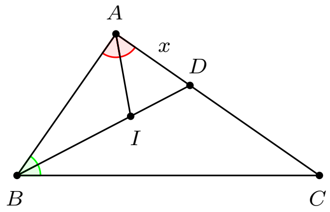
$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \implies AH^2 = \frac{3x^2}{4}.$$

Mặt khác

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \implies \frac{3x^2}{4} + \left(8 - \frac{x}{2}\right)^2 = (12 - x)^2.$$

Từ đây tìm được $x = 5$. Vậy $AB = 5$ và $AC = 7$. $\square$

Bài 4a



Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác ở góc A cắt BD ở I. Biết rằng $IB = 10\sqrt{5}$ và $ID = 5\sqrt{5}$. Đặt $AD = x$. Chứng minh $AB = 2x$, từ đó tìm x.

Lời giải.

$\triangle ABD$ có AI là đường phân giác nên

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BI}{DI} = 2 \implies AB = 2x.$$

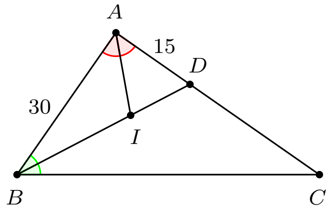
Ngoài ra

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \implies (2x)^2 + x^2 = (15\sqrt{5})^2.$$

Do đó $x = 15$. $\square$

Bài 4b

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác ở góc A cắt BD ở I. Biết rằng $IB = 10\sqrt{5}$ và $ID = 5\sqrt{5}$. Tính cạnh AC.



Lời giải.

$\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} = 2.$$

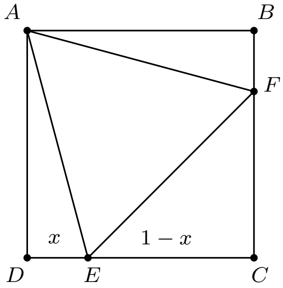
Đặt $CD = y$ thì $BC = 2y$. Ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \implies 30^2 + (y+15)^2 = (2y)^2.$$

Do đó $y = 25$ suy ra $AC = AD + CD = 40$. $\square$

Bài 5

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 1cm. Tính cạnh của tam giác đều AEF với E thuộc cạnh CD và F thuộc cạnh BC.



Lời giải

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle ABF$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông). Do đó

$$DE = BF = x \implies CE = CF = 1 - x.$$

Ta có $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 1 + x^2$. Ngoài ra

$$CE^2 + CF^2 = EF^2 \implies (1-x)^2 + (1-x)^2 = 1 + x^2.$$

Lời giải.

Ta có $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 1 + x^2$. Ngoài ra

$$CE^2 + CF^2 = EF^2 \implies (1-x)^2 + (1-x)^2 = 1 + x^2.$$

Tương đương

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= 0 \\ \iff \quad (x-2)^2 &= 3 \\ \iff \quad x - 2 &= \pm\sqrt{3} \\ \iff \quad x &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Vì $x < 1$ nên $x = 2 - \sqrt{3}$. Vậy

$$AE = \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

□