Đại số - Bài 2: Phương trình bậc hai (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Bài 1

Tìm m để phương trình

$$(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0 \tag{1}$$

có nghiệm.

Lời giải.

Với $m = -1$ thì (1) có nghiệm $x = -1$.

Với $m \neq -1$ thì (1) là phương trình bậc hai nên có nghiệm $\iff \Delta' \geq 0$, tương đương

$$\begin{aligned} 1 - (m+1)(m-1) \geq 0 &\iff m^2 \leq 2 \\ &\iff -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy (1) có nghiệm $\iff -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. $\square$

Bài 2a

Cho phương trình

$$mx^2 + 6(m-2)x + 4m - 7 = 0. \tag{2}$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì (2) phải là phương trình bậc hai, như vậy $m \neq 0$. Ngoài ra

$$\begin{aligned} \Delta' > 0 &\iff 9(m-2)^2 - m(4m-7) > 0 \\ &\iff (m-4)(5m-9) > 0 \\ &\iff \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < \frac{9}{5} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Vậy $m > 4$ hoặc $m < \frac{9}{5}$ $(m \neq 0)$. □

Bài 2b

Cho phương trình

$$mx^2 + 6(m-2)x + 4m - 7 = 0. \qquad (2)$$

Tìm m để phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

Với $m = 0$ thì (2) có nghiệm $x = \frac{-7}{12}$.

Với $m \neq 0$ thì (2) là phương trình bậc hai nên vô nghiệm $\iff \Delta' < 0$, tương đương

$$\begin{aligned} 9(m-2)^2 - m(4m-7) < 0 &\iff (m-4)(5m-9) < 0 \\ &\iff \frac{9}{5} < m < 4. \end{aligned}$$

Vậy (2) vô nghiệm $\iff \frac{9}{5} < m < 4$. □

Chú ý 1

Với số $a > 0$ thì

- $x^2 < a \iff -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,
- $x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$,
- $x^2 > a \iff x < -\sqrt{a}$ hoặc $x > \sqrt{a}$,
- $x^2 \geq a \iff x \leq -\sqrt{a}$ hoặc $x \geq \sqrt{a}$,

Chú ý 2

Với hai số a, b trong đó $a < b$ thì

- $(x-a)(x-b) < 0 \iff a < x < b$,
- $(x-a)(x-b) \leq 0 \iff a \leq x \leq b$,
- $(x-a)(x-b) > 0 \iff x < a$ hoặc $x > b$,
- $(x-a)(x-b) \geq 0 \iff x \leq a$ hoặc $x \geq b$.

Bài 3

Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a + b = 4\sqrt{ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Lời giải.

Chia hai vế của giả thiết cho b thu được

$$\frac{a}{b} + 1 = 4\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{a}{b}} > 0$ thì ta có $t^2 + 1 = 4t$, phương trình này có hai nghiệm

$$t_1 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{và} \quad t_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Vậy $\frac{a}{b} = t_1^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ hoặc $\frac{a}{b} = t_2^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. □

Bài 4a

Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi a, b

$$x^2 + (a+b)x - 2(a^2 - ab + b^2) = 0.$$

Lời giải.

Phương trình có nghiệm vì

$$\begin{aligned}
\Delta &= (a+b)^2 + 8(a^2 - ab + b^2) \\
&= 9a^2 - 6ab + 9b^2 \\
&= 6(a^2 + b^2) + 3(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= 6(a^2 + b^2) + 3(a-b)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Bài 4b

Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi a, b, c

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0.$$

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0.$$

Phương trình có nghiệm vì

$$\begin{aligned}\Delta' &= (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\\ &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\ &= \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0.\end{aligned}$$

$\square$

Bài 5

Chứng minh rằng nếu a, b, c là những số khác 0 thì tồn tại ít nhất một phương trình có nghiệm trong các phương trình sau:

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad bx^2 + 2cx + a = 0, \quad cx^2 + 2ax + b = 0.$$

Lời giải.

Biệt thức của ba phương trình trên lần lượt là

$$\Delta_1' = b^2 - ca, \quad \Delta_2' = c^2 - ab, \quad \Delta_3' = a^2 - bc.$$

Vì

$$\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

nên có ít nhất một biệt thức không âm trong ba biệt thức $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3'$. Do vậy có ít nhất một phương trình có nghiệm. □