Chuyên đề - ĐS 11: Đưa về một ẩn trong bất đẳng thức (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

5/2023

Bài 1

Cho a, b là các số không âm thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=(a^2+2b)(b^2+2a)+3ab.$$

Lời giải.

Đặt $t=ab$ thì $0 \leq t \leq 1$. Biến đổi

$$A=2(a^3+b^3)+a^2b^2+7ab=t^2-5t+16.$$

Ta sẽ chứng minh

- $A \geq 12 \iff (t-1)(t-4) \geq 0$ (đúng vì $t \leq 1$).
- $A \leq 16 \iff t(t-5) \leq 0$ (đúng vì $0 \leq t \leq 1$).

Vậy

$$\begin{aligned} \min A = 12 &\iff t=1 \iff a=b=1 \\ \max A = 16 &\iff t=0 \iff (a,b) \in \{(0,2),(2,0)\}. \end{aligned}$$

Bài 2

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+b=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}.$$

Lời giải.

Đặt $t=ab$ thì $0<t\le\frac{1}{4}$. Biến đổi

$$B=\frac{ab(a+b)+a+b}{a^2b^2+(a^2+b^2)+1}=\frac{t+1}{t^2-2t+2}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{t+1}{t^2-2t+2}\le\frac{4}{5}\iff(4t-1)(t-3)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $t\le\frac{1}{4}$. Vậy $\max B=\frac{4}{5}\iff a=b=\frac{1}{2}$. $\square$

Bài 3

Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq \frac{6}{x+y+z}.$$

Lời giải.

Đặt $t=x+y+z$ thì $t>0$. Ta có $xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{t^2}{3}$ nên

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq 1+\frac{3}{t^2/3}=1+\frac{9}{t^2}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$1+\frac{9}{t^2} \geq \frac{6}{t} \iff \left(1-\frac{3}{t}\right)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên ta có điều cần chứng minh. □

Bài 4

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a + b \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$D = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{25}{ab} + ab.$$

Phân tích: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \leq 4 - 2ab.$

Lời giải

Đặt $t = ab$ thì $0 < t \leq 1$. Ta có

$$D = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab} + \frac{25}{ab} + ab \geq \frac{1}{4 - 2t} + \frac{25}{t} + t.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{4 - 2t} + \frac{25}{t} + t \geq \frac{53}{2} \iff (t-1)(2t^2 - 55t + 100) \leq 0.$$

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh
$$(t-1)(2t^2-55t+100) \leq 0. \tag{$*$}$$

$2t^2-55t+100 = 2\left(t-\frac{55}{4}\right)^2 - \frac{2225}{8}$

Ta có $t \leq 1$ và
$$2t^2-55t+100 = 2t^2+45+55(1-t) > 0$$
nên $(*)$ đúng. Vậy $\min D = \frac{53}{2} \iff a=b=1.$ □

Ta có bất đẳng thức Cô-si

$$(m+n+p)^2 \geq 3(mn+np+pm).$$

Thay $m = xy, n = yz$ và $p = zx$ thì ta có kết quả sau

Tính chất

Với các số x, y, z bất kì thì

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z).$$

Bài 5

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$E = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{xyz} \geq 30.$$

Lời giải.

Đặt $t = xy+yz+zx$ thì $0 < t \leq \frac{1}{3}$. Ta có $xyz \leq \frac{(xy+yz+zx)^2}{3(x+y+z)} = \frac{t^2}{3}$ nên

$$E = \frac{1}{(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)} + \frac{1}{xyz} \geq \frac{1}{1-2t} + \frac{3}{t^2}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{1-2t} + \frac{3}{t^2} \geq 30 \iff (3t-1)(20t^2-3t-3) \geq 0.$$

Vì $t \leq \frac{1}{3}$ nên $20t^2 - t \leq \frac{20}{3}t - t = \frac{17}{3}t < 3$, vậy bất đẳng thức cuối đúng. $\square$

Bài 6a

Cho a, b là các số dương, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{a} - ab$. Biết rằng $a + b = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = ab$ thì $0 < t \leq 1$. Biến đổi

$$\begin{aligned} F &= \frac{(a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2}{ab} - ab = \frac{\left((a+b)^2 - 2ab\right)^2 - 2a^2b^2}{ab} - ab \\ &= \frac{16}{t} + t - 16. \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{16}{t} + t - 16 \geq 1 \iff (t-1)(t-16) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $t \leq 1$. Vậy $\min F = 1 \iff a = b = 1$. □

Bài 6b

Cho $a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = \dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{a} - ab$, biết rằng $a - b = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = ab$ thì $t > 0$. Biến đổi

$$F = \frac{(a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2}{ab} - ab = \frac{\left((a-b)^2 + 2ab\right)^2 - 2a^2b^2}{ab} - ab$$
$$= \frac{16}{t} + t + 16.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$\frac{16}{t} + t \geq 2\sqrt{\frac{16}{t} \cdot t} = 8 \implies F \geq 24.$$

Vậy $\min F = 24 \iff t = 4 \iff a = \sqrt{5} + 1$ và $b = \sqrt{5} - 1$. $\square$

Bài 7

Cho x, y, z là các số (có thể âm hoặc dương) thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$G = \frac{(x+y+z)^2}{2} + 4(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

<u>Ghi chú:</u> $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Lời giải

Đặt $t = x + y + z$, theo giả thiết thì

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{2}{t} \implies t > 0.$$

Do vậy

$$G = \frac{t^2}{2} + \frac{8}{t}.$$

Lời giải.

Do vậy

$$G = \frac{t^2}{2} + \frac{8}{t}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số ta có

$$G = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{t} + \frac{4}{t} \geq 3\sqrt[3]{\frac{t^2}{2} \cdot \frac{4}{t} \cdot \frac{4}{t}} = 6.$$

Vậy $\min G = 6$, dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $x = y = 1$ và $z = 0$. $\square$