Chuyên đề - ĐS 3: Phương trình bậc cao

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

Phương trình tích

Tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 1

Giải phương trình $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Phân tích: $1 - 2 + 1 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = 1$. Ta sẽ phân tích $x^3 - 2x + 1$ xuất hiện nhân tử $x - 1$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} x^3 - 2x + 1 &= x^3 - x^2 + x^2 - x - x + 1 \\ &= (x^3 - x^2) + (x^2 - x) - (x - 1) \\ &= x^2(x - 1) + x(x - 1) - (x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 1). \end{aligned}$$

Do đó

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{c} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$\square$

Tổng đan dấu các hệ số của phương trình bằng 0 thì có nghiệm $x = -1$.

Ví dụ 2

Giải phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2x + 7 = 0$.

Phân tích: $2 - (-3) + 2 - 7 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = -1$. Ta sẽ phân tích $2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ xuất hiện nhân tử $x + 1$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}2x^3-3x^2+2x+7&=2x^3+2x^2-5x^2-5x+7x+7\\&=2x^2(x+1)-5x(x+1)+7(x+1)\\&=(x+1)(2x^2-5x+7)\end{aligned}$$

Do đó

$$2x^3-3x^2+2x+7=0 \iff \left[\begin{array}{l} x+1=0\\ 2x^2-5x+7=0\end{array}\right. \iff x=-1.$$

□

Ví dụ 3

Giải phương trình $2x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$.

Phân tích: Sử dụng MTCT thấy rằng $x = \frac{-1}{2}$ là nghiệm. Ta sẽ phân tích $2x^3 - x^2 + 3x + 2$ xuất hiện nhân tử $2x + 1$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + 3x + 2 &= 2x^3 + x^2 - 2x^2 - x + 4x + 2 \\ &= x^2(2x+1) - x(2x+1) + 2(2x+1) \\ &= (2x+1)(x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

Do đó

$$2x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \end{array}\right. \iff x = \frac{-1}{2}.$$

□

Một số dạng cơ bản

Ví dụ 4

Giải phương trình $(x-6)^4+(x-8)^4=16$.

Ghi chú: $(a+b)^4=(a^2+2ab+b^2)^2=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Lời giải.

Đặt $y=\frac{x-6+x-8}{2}=x-7$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned}(y+1)^4+(y-1)^4=16 &\iff y^4+6y^2-7=0\\ &\iff (y^2-1)(y^2+7)=0\\ &\iff y^2=1.\end{aligned}$$

Do đó $y\in\{-1,1\}$ nên $x\in\{6,8\}$. $\square$

Ví dụ 5

Giải phương trình $(x^2-1)(x^2+4x+3)=192$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(x^2-1)(x^2+4x+3) &= (x-1)(x+1)\cdot(x+1)(x+3)\\ &= (x^2+2x-3)(x^2+2x+1).\end{aligned}$$

Đặt $y=x^2+2x-3$ thì phương trình trở thành

$$y(y+4)=192 \iff (y-12)(y+16)=0.$$

Từ đây tìm được $x\in\{-5,3\}$. $\square$

Phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

với $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2$.

Cách giải

Đặt $d = kb$ thì $e = k^2a$, chia hai vế cho x^2 ta có

$$ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e}{x^2} = 0 \iff a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0. \tag{1}$$

Đặt $y = x + \frac{k}{x} \implies x^2 + \frac{k^2}{x^2} = y^2 - 2k$. Khi đó

$$(1) \iff a(y^2 - 2k) + by + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc 2 theo ẩn y.

Ví dụ 6

Giải phương trình $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

Lời giải.

Thấy rằng $x = 0$ không phải nghiệm của phương trình, do vậy $x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho x^2 ta có

$$x^2 + 3x + 4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \iff \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, do đó

$$(y^2 - 2) + 3y + 4 = 0 \iff (y + 1)(y + 2) = 0.$$

Suy ra $y = -1$ hoặc $y = -2$.

- Với $y = -1$ thì $x + \frac{1}{x} = -1 \iff x^2 + x + 1 = 0$ (vô nghiệm).
- Với $y = -2$ thì $x + \frac{1}{x} = -2 \iff (x + 1)^2 = 0$ nên $x = -1$.

$\square$

Các ví dụ khác

Ví dụ 7

Giải phương trình $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x=1$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2+x+1$ thì $x^2+x=t-1$, khi đó phương trình tương đương

$$t^2-3(t-1)=1 \iff (t-1)(t-2)=0.$$

Từ đây tìm được $x\in\left\{-1,0,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. □

Ví dụ 8

Giải phương trình $2(x^2-x+1)^2+5(x+1)^2=11(x^3+1)$.

Lời giải.

Thấy rằng $x=-1$ không phải nghiệm của phương trình, do vậy $x\neq -1$. Chia hai vế của phương trình cho x^3+1 ta có

$$\frac{2(x^2-x+1)}{x+1}+\frac{5(x+1)}{x^2-x+1}=11.$$

Đặt $y=\frac{x^2-x+1}{x+1}$, do đó

$$2y+\frac{5}{y}=11 \iff (y-5)(2y-1)=0.$$

Từ đây tìm được $x\in\left\{\frac{1}{2},1,3\pm\sqrt{13}\right\}$. $\square$