Ôn tập 2: Đề HSG tỉnh Quảng Bình 2022-2023

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Bài 1a

Rút gọn biểu thức

$$A=\left(\frac{2}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}}{4x-1}+\frac{1}{2\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2}.$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x\geq 0$ và $x\neq\left\{\frac{1}{4},1\right\}$. Biến đổi

$$\begin{aligned}A&=\frac{2(2\sqrt{x}-1)-5\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}\cdot\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1}\\&=\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}\cdot\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\\&=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}.\end{aligned}$$

□

Bài 1b

Tính giá trị biểu thức A khi $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Đặt $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}, b = \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ thì $x = a + b$, do đó

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 40 + 6x.$$

Ngoài ra

$$x^3 - 6x - 40 = 0 \iff (x-4)(x^2+4x+10) = 0.$$

Vì $x^2 + 4x + 10 = (x+2)^2 + 6 \geq 6 > 0$ nên

$$x = 4 \implies A = \frac{5}{3}.$$

□

Bài 2a

Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 1$. Đặt $y = \sqrt{x-1} \geq 0$ thì phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x \cdot y^2 - 4 = 2y(1-x) &\iff (xy^2 + 2xy) = 2y + 4 \\ &\iff (y+2)(xy-2) = 0. \end{aligned}$$

Vì $y + 2 > 0$ nên $xy - 2 = 0$. Mặt khác

$$x = y^2 + 1 \implies (y^2+1)y - 2 = 0.$$

Từ đây tìm được $y = 1$ nên $x = 2$ (thỏa mãn). $\square$

Bài 3

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2023$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{\frac{yz}{y + 2022z}} + y\sqrt{\frac{zx}{z + 2022x}} + z\sqrt{\frac{xy}{x + 2022y}} \leq \frac{2023}{\sqrt{3}}.$$

Bất đẳng thức Sơ-vác (Schwarz) dạng mẫu

Cho số nguyên $n \geq 1$. Với các số dương $a_1, \ldots, a_n$ và $x_1, \ldots, x_n$ thì

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff \frac{a_1}{x_2} = \frac{a_2}{x_2} = \cdots = \frac{a_n}{x_n}$.

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{y}+\frac{2022}{z}=\frac{1}{y}+\underbrace{\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{z}}_{2022 \text{ lần}}\geq\frac{2023^2}{y+2022z},$$

tương đương

$$\frac{z+2022y}{2023^2}\geq\frac{yz}{y+2022z} \iff x\sqrt{\frac{yz}{y+2022z}}\leq\frac{x\sqrt{z+2022y}}{2023}.$$

Tương tự thì ta đánh giá được vế trái của bất đẳng thức như sau

$$VT\leq\frac{x\sqrt{z+2022y}+y\sqrt{x+2022z}+z\sqrt{y+2022x}}{2023}.$$

Lời giải.

Tương tự thì

$$VT \leq \frac{x\sqrt{z+2022y}+y\sqrt{x+2022z}+z\sqrt{y+2022x}}{2023}=\frac{A}{2023}.$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki thì

$$\begin{aligned}A^2 &\leq (x+y+z)\big(x(z+2022y)+y(x+2022z)+z(y+2022x)\big)\\ &= 2023^2(xy+yz+zx)\\ &\leq 2023^2\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{2023^4}{3}.\end{aligned}$$

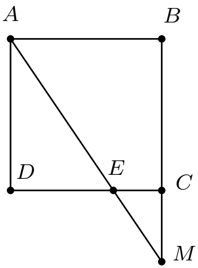
Do đó

$$VT \leq \frac{A}{2023} \leq \frac{\frac{2023^2}{\sqrt{3}}}{2023}=\frac{2023}{\sqrt{3}}.$$

$\square$

Bài 4a

Hình vuông $ABCD$ có cạnh a. E di động trên CD, M là giao điểm AE với BC. Chứng minh rằng $BM \cdot DE = a^2$.



Lời giải.

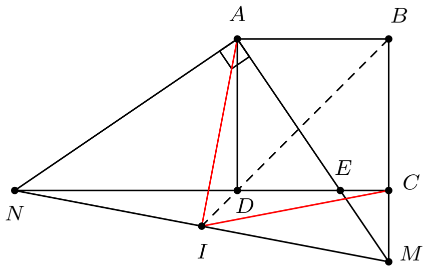
Vì $\triangle ADE \sim \triangle MBA$ (g.g) nên

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BA}{BM} \implies DE \cdot BM = AD \cdot BA = a^2.$$

□

Bài 4b

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AE cắt CD tại N, I là trung điểm MN. Chứng minh $AI \perp MN$ và I nằm trên đường thẳng cố định khi E di động trên cạnh CD.



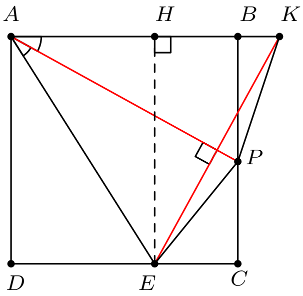
Lời giải.

Chứng minh được $\triangle ABM = \triangle ADN$ (cạnh góc vuông-góc nhọn) nên $AM = AN$.
Do vậy $\triangle AMN$ vuông cân tại A nên $AI \perp MN$.

Vì $AI = \frac{1}{2}MN = CI$ nên I nằm trên đường trung trực của đoạn CA, chính là BD.
Vậy $I \in BD$. $\square$

Bài 4c

Đường phân giác của $\widehat{BAE}$ cắt cạnh BC tại P.
Chứng minh rằng $AP \leq 2EP$.



Lời giải.

Qua E kẻ đường thẳng vuông góc AP cắt AB tại K. Vì $PE = PK$ $(?)$ nên

$$2EP = EP + PK \geq EK.$$

Ngoài ra $\triangle EKH = \triangle APB$ (cạnh góc vuông-góc nhọn) nên $EK = AP$. $\square$

Bài 5

Cho số nguyên $n > 1$. Chứng minh rằng $P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không phải là số chính phương.

Lời giải.

Ta có

$$P = n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2).$$

Để P là số chính phương thì $n^2 - 2n + 2$ phải là số chính phương. Tuy nhiên

$$(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$$

nên $n^2 - 2n + 2$ không thể là số chính phương. $\square$