

Đại số - Bài 3: Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Bài 1

Rút gọn biểu thức

$$\text{a)} \quad \frac{2\sqrt{2} + 2}{5\sqrt{2}},$$

$$\text{b)} \quad \frac{3}{\sqrt{3} + 1},$$

$$\text{c)} \quad \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}},$$

$$\text{d)} \quad \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}.$$

Đáp án

$$\text{a)} \quad \frac{1}{5}(2 + \sqrt{2}),$$

$$\text{b)} \quad \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1),$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{2},$$

$$\text{d)} \quad -\sqrt{5}.$$

Bài 2

So sánh a, b biết rằng $a = \sqrt{2022} - \sqrt{2021}$ và $b = \sqrt{2023} - \sqrt{2022}$.

Lời giải.

Có

$$\begin{aligned}(\sqrt{2023} + \sqrt{2021})^2 &= 4044 + 2\sqrt{(2022 + 1) \times (2022 - 1)} \\&= 2 \times 2022 + 2\sqrt{2022^2 - 1} \\&< 4 \times 2022.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sqrt{2023} + \sqrt{2021} &< 2\sqrt{2022} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2023} - \sqrt{2022} &< \sqrt{2022} - \sqrt{2021}.\end{aligned}$$

Vậy $b < a$.



Bài 3a

Chứng minh đẳng thức $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} 10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40} &= 10 + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} \\ &= 5 + 3 + 2 + 2(\sqrt{5}\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$



Bài 4a

Rút gọn biểu thức $A = \frac{x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6 + \sqrt{x^2 - 9}}$ với $x > 3$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} A &= \frac{x + 3 + 2\sqrt{(x - 3)(x + 3)}}{2(x - 3) + \sqrt{(x - 3)(x + 3)}} \\ &= \frac{\sqrt{x + 3}(\sqrt{x + 3} + 2\sqrt{x - 3})}{\sqrt{x - 3}(2\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 3})} \\ &= \sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}}. \end{aligned}$$



Bài 4b

Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x + 2)\sqrt{9 - x^2}}$ với $0 < x < 3$.

Đáp án

$$B = \sqrt{\frac{3 + x}{3 - x}}$$

Bài 5a

Chứng minh rằng với mọi số $a > 0$ thì $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2}{a} - \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a(a+1)}.$$

Mặt khác

$$\frac{2}{a} - \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a(a+1)} = \frac{2(a+1) - 2a - 2}{a(a+1)} = 0.$$

Do đó

$$\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}.$$



Bài 5b

Tính giá trị của tổng

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}.$$

Lời giải.

Áp dụng câu a thu được

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 99 + \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \\ &= 99,99. \end{aligned}$$



Bài 6

Rút gọn biểu thức

$$M = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35} + \sqrt{36}}.$$

Lời giải.

Với mỗi số nguyên dương n thì $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Do đó

$$\begin{aligned} M &= (\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + \cdots + (\sqrt{36} - \cancel{\sqrt{35}}) \\ &= \sqrt{36} - \sqrt{1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

