Đại số - Bài 4: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải hệ phương trình (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

5/2023

Bài 1a

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases}.$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 1, y \geq \frac{1}{4}$. Từ phương trình đầu ta có

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 0 \implies \sqrt{x} = 2\sqrt{y} \implies x = 4y.$$

Như vậy phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = 2 \implies x = 2.$$

Tìm được nghiệm của hệ là $x = 2$ và $y = \frac{1}{2}$. $\square$

Bài 1b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 1, y \geq 0$. Xem phương trình đầu là phương trình bậc hai ẩn x (tham số y) thì tìm được

$$x = -y \quad \text{hoặc} \quad x = 2y + 1.$$

Loại trường hợp $x = -y$, thay $x = 2y + 1$ vào phương trình thứ hai ta có

$$\sqrt{2y}(y+1) = 2y + 2 \implies y = 2.$$

Tìm được nghiệm của hệ là $x = 5$ và $y = 2$. □

Bài 1c

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x = 2y + y\sqrt{3x-y} + 3y^2 \\ \sqrt{3x-y} - 4 = 6x + 3y \end{cases}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $3x - y \geq 0$. Từ phương trình đầu ta có

$$3y^2 + y\sqrt{3x-y} - 2(3x-y) = 0. \quad (3y^2 + yz - 2z^2 = 0)$$

Tới đây tìm được $y = -\sqrt{3x-y}$ hoặc $y = \frac{2}{3}\sqrt{3x-y}$. Xét trường hợp

$$y = -\sqrt{3x-y} \iff \begin{cases} y \leq 0 \\ 3x = y^2 + y \end{cases}.$$

Từ đây thay vào phương trình thứ hai thì

$$-y - 4 = 2(y^2+y) + 3y \overset{y\leq 0}{\Longrightarrow} y \in \{-2, -1\}.$$

Trường hợp còn lại tương tự (vô nghiệm). Tìm được $(x, y) \in \left\{\left(\frac{2}{3}, -2\right), (0, -1)\right\}$. $\square$

Bài 1d

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{1+x}+\sqrt{1-y}=2 \\ x^2-y^4+9y=x(9+y-y^3) \end{cases}.$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq -1, y \leq 1$. Xem phương trình sau là phương trình bậc hai ẩn x (tham số y) thì tìm được

$$x = y \quad \text{hoặc} \quad x = 9 - y^3.$$

Trường hợp $x = y$ dễ dàng tìm được $x = 0$. Với trường hợp $x = 9 - y^3$ ta có

$$\sqrt{10-y^3}+\sqrt{1-y}=2.$$

Phương trình này vô nghiệm. Thật vậy, vì $y \leq 1$ nên

$$\sqrt{10-y^3}+\sqrt{1-y} \geq \sqrt{9}+0=3>2.$$

Tìm được nghiệm của hệ là $x = y = 0$. □

Bài 2a

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - x\sqrt{\frac{y^2+2}{x}} = 2x - 2 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{2}$. Chia hai vế của phương trình đầu cho x ta có

$$\frac{y^2+2}{x} - \sqrt{\frac{y^2+2}{x}} = 2.$$

Từ đây tìm được $\sqrt{\frac{y^2+2}{x}} = 2 \implies y^2 = 4x - 2$. Như vậy phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{4x-1} + \sqrt{2x-1} = 1 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Tìm được nghiệm của hệ là $x = \frac{1}{2}$ và $y = 0$. $\square$

Bài 2b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{-2xy-2}+\sqrt{x-2}=2xy+9 \\ 2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6 \end{cases}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 2, xy \leq -1$. Xét phương trình sau ta có

$$2x^2y^2+(x^2-7)xy-2x^2+6=0.$$

Xem đây là phương trình bậc hai ẩn xy (tham số x) tìm được

$$xy=2 \quad \text{hoặc} \quad xy=\frac{3-x^2}{2}.$$

Loại trường hợp $xy=2$, thay $2xy=3-x^2$ vào phương trình thứ nhất ta có

$$\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}+x^2=12.$$

Lời giải.

Thay $2xy = 3 - x^2$ vào phương trình thứ nhất ta có

$$\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}+x^2=12.$$

Nếu $x > 3$ thì

$$\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}+x^2>\sqrt{9-5}+\sqrt{3-2}+9=12 \text{ (vô lí)}.$$

Tương tự khi $x < 3$, do đó $x = 3$. Tìm được nghiệm của hệ là $x = 3$ và $y = -1$. $\square$

Bài 2c

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + x + 3 = 0 \\ (x+1)^2 + 3y + 2(xy - \sqrt{x^2y + 2y}) = -3 \end{cases}.$

<u>Phân tích:</u> $\left(x^2 + 2 - 2\sqrt{y(x^2+2)} + 3y\right) + 2x + 2xy + 2 = 0$

Lời giải.

ĐKXĐ: $y \geq 0$. Lấy $PT(2) - 2PT(1)$ ta có

$$3y - 2\sqrt{y(x^2+2)} - x^2 - 2 = 0.$$

Tìm được $\sqrt{y} = \sqrt{x^2+2}$ hoặc $\sqrt{y} = \frac{-1}{3}\sqrt{x^2+2}$ (loại). Như vậy $y = x^2 + 2$, thay vào phương trình thứ nhất ta có

$$x^2 + x(x^2+2) + x + 3 = 0 \implies x = -1.$$

Tìm được nghiệm của hệ là $x = -1$ và $y = 3$. $\square$

Bài 2d

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{2023}{81} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}.$

Lời giải.

Giả sử hệ có nghiệm. Phương trình thứ hai tương đương

$$y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0. \tag{$*$}$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn y (với tham số x), ta có

$$\Delta_y = -3x^2 + 4x.$$

Vì $(*)$ có nghiệm nên $\Delta_y \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Tương tự thì $1 \leq y \leq \frac{7}{3}$. Do đó

$$x^4 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{697}{81} < \frac{2023}{81}.$$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm. □