

# Đề kiểm tra lần 1

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 9 năm 2022

## §1 Đề bài

**Bài 1** (2 điểm).

- a) Chứng minh rằng  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$  là số vô tỉ.
- b) Tìm một phương trình bậc hai có dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  và  $abc \neq 0$  sao cho  $\sqrt{5} - 1$  là một nghiệm của phương trình.

**Bài 2** (2 điểm). Rút gọn các biểu thức sau

- a)  $A = \sqrt{3 - \sqrt{5}} (\sqrt{10} - \sqrt{2}) (3 + \sqrt{5})$ .
- b)  $B = \sqrt{6 + \sqrt{24} - \sqrt{12} - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ .

**Bài 3** (2 điểm). Với  $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2} - \sqrt{\sqrt{5}+2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$ , hãy tính giá trị biểu thức  $C = \frac{2x}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$ .

**Bài 4** (3 điểm).

- a) Gọi  $\alpha$  là góc nhọn thỏa mãn  $2\alpha = 45^\circ$ . Chứng minh rằng  $\tan \alpha = \sqrt{2} - 1$ .
- b) Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Biết rằng  $BC = 4$  và  $AB + AC = 6$ . Hãy tính  $AB$ .
- c) Biết  $\tan x = \frac{1}{3}$ . Hãy tính giá trị biểu thức  $D = \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ .

**Bài 5** (1 điểm).

- a) Chứng minh rằng với số nguyên dương  $n$  bất kì thì  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ .
- b) Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2022\sqrt{2021}} < 2.$$

## §2 Lời giải

### Bài 1.

- a) Chứng minh rằng  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$  là số vô tỉ.  
 b) Tìm một phương trình bậc hai có dạng  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  và  $abc \neq 0$  sao cho  $\sqrt{5} - 1$  là một nghiệm của phương trình.

Lời giải.

a) Giả sử  $\sqrt{5} + \sqrt{2} = m$  là số hữu tỉ. Khi đó

$$7 + 2\sqrt{10} = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = m^2 \implies \sqrt{10} = \frac{m^2 - 7}{2}.$$

Vì  $\frac{m^2 - 7}{2} \in \mathbb{Q}$  nên  $\sqrt{10} = \frac{m^2 - 7}{2} = \frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$  sao cho  $\text{UCLN}(a, b) = 1$ . Từ  $a^2 = 10b^2$  dẫn đến

$$a^2 : 2 \implies a : 2.$$

Do vậy  $a = 2c$  với  $c \in \mathbb{N}^*$ , suy ra  $(2c)^2 = 10b^2$ , tương đương

$$2c^2 = 5b^2 \implies b^2 : 2 \implies b : 2.$$

Điều này mâu thuẫn vì  $\text{UCLN}(a, b) = 1$ . Vậy  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$  là số vô tỉ.

b) Đặt  $x = \sqrt{5} - 1$ , khi đó  $x + 1 = \sqrt{5}$ . Suy ra

$$(x + 1)^2 = 5 \iff x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Vậy  $\sqrt{5} - 1$  là nghiệm của phương trình  $x^2 + 2x - 4 = 0$ . □

### Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

- a)  $A = \sqrt{3 - \sqrt{5}} (\sqrt{10} - \sqrt{2}) (3 + \sqrt{5})$ .  
 b)  $B = \sqrt{6 + \sqrt{24} - \sqrt{12} - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ .

Lời giải.

a) Biến đổi

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3 + \sqrt{5}} (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \sqrt{3 - \sqrt{5}} \sqrt{3 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot 2 \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} (\sqrt{5} - 1) \cdot 2 \\ &= 4 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

b) Biến đổi

$$\begin{aligned} 6 + \sqrt{24} - \sqrt{12} - \sqrt{8} &= 6 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ &= 3 + 2 + 1 + 2(\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)^2. \end{aligned}$$

Do vậy  $B = \sqrt{3} - 1$ . □

**Bài 3.** Với  $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2} - \sqrt{\sqrt{5}+2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$ , hãy tính giá trị biểu thức  $C = \frac{2x}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$ .

Lời giải.

Có được

$$x^2 = \frac{(\sqrt{5}-2) - 2\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} + (\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-1} = 2.$$

Vì  $x < 0$  nên  $x = -\sqrt{2}$ . Do vậy

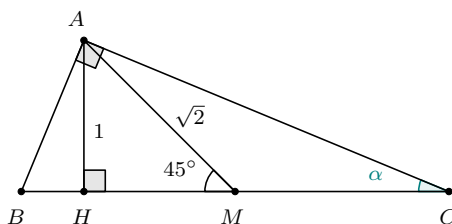
$$C = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-2}{1+2}\right)^2}} = -3. \quad \text{□}$$

**Bài 4.**

- Gọi  $\alpha$  là góc nhọn thỏa mãn  $2\alpha = 45^\circ$ . Chứng minh rằng  $\tan \alpha = \sqrt{2} - 1$ .
- Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Biết rằng  $BC = 4$  và  $AB + AC = 6$ . Hãy tính  $AB$ .
- Biết  $\tan x = \frac{1}{3}$ . Hãy tính giá trị biểu thức  $D = \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ .

Lời giải.

a) Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{C} = \alpha$  và  $BC = 2\sqrt{2}$ . Gọi  $AH, AM$  lần lượt là đường cao và đường trung tuyến của tam giác.

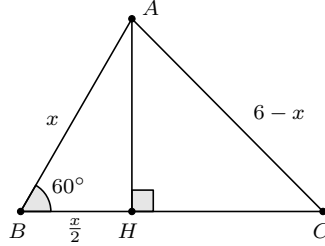


Dễ thấy  $\widehat{AMH} = 45^\circ$  và  $AM = \frac{BC}{2} = \sqrt{2}$ . Dẫn tới

$$AH = AM \sin \widehat{AMH} = 1 \quad \text{và} \quad HM = AM \cos \widehat{AMH} = 1.$$

Suy ra  $\tan \alpha = \frac{HA}{HC} = \frac{HA}{MC+HM} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$ .

b) Kẻ đường cao  $AH$ .



Đặt  $AB = x$ , khi đó

$$BH = AB \cos 60^\circ = \frac{x}{2} \quad \text{và} \quad AH = AB \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Sử dụng định lý Py-ta-go cho  $\triangle ACH$  vuông tại  $H$  thì

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \implies \frac{3x^2}{4} + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = (6-x)^2.$$

Từ đây tìm được  $x = \frac{5}{2}$ . Vậy  $AB = \frac{5}{2}$ .

c) Vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  nên

$$D = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

Khi đó

$$D = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 1} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \frac{-1}{2}.$$

□

### Bài 5.

a) Chứng minh rằng với số nguyên dương  $n$  bất kì thì  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ .

b) Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2022\sqrt{2021}} < 2.$$

Lời giải.

a) Biến đổi

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

Ngoài ra

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < 2.$$

Do đó

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = \sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < 2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

b) Áp dụng câu a có được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2022\sqrt{2021}} &< 2 \left( \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cdots + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2022}} \right) \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2022}} \right) \\ &< 2. \end{aligned}$$

□