Chuyên đề - ĐS 8: Hệ phương trình đối xứng

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Phương trình $f(x,y)=0$ được gọi là **đối xứng** nếu $f(x,y)$ có thể biểu diễn thông qua $S=x+y$ và $P=xy$.

Ví dụ

- $x^2+xy+y^2=0,\ x^3+y^3=0$ là các phương trình đối xứng vì

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= (x+y)^2-xy = S^2-P \\ x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) = S(S^2-3P). \end{aligned}$$

- $x^2=y,\ x^3=x+y$ không phải phương trình đối xứng.

Hệ đối xứng loại I

Hệ đối xứng loại I gồm các phương trình đối xứng.

Cách giải

- Đặt ẩn $S = x + y$ và $P = xy$,
- Giải hệ theo hai ẩn S và P.

Ví dụ 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6 \\ x + y - xy = 5 \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$, thu được hệ mới tương đương

$$\begin{cases} (S^2 - 2P) - 2S = 6 \\ S - P = 5 \end{cases}.$$

Thay $P = S - 5$ vào phương trình đầu ta có

$$S^2 - 2(S-5) - 2S = 6 \iff S^2 - 4S + 4 = 0 \iff S = 2.$$

Dẫn đến $P = -3$, nên

$$x + y = 2 \quad \text{và} \quad xy = -3.$$

Từ đây tìm được $(x, y) \in \{(-1, 3), (3, -1)\}$. □

Hệ đối xứng loại II

Hệ đối xứng loại II gồm các phương trình không đối xứng.

Cách giải

- Trừ vế theo vế để xuất hiện nhân tử $x - y$,
- Sau khi xuất hiện nhân tử chung $x - y$, chia ra các trường hợp để xử lí.

Ví dụ 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y = 5x - 3 \\ y^2 + x = 5y - 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Trừ vế theo vế hai phương trình ta có

$$\begin{aligned}(x^2 + y) - (y^2 + x) = (5x - 3) - (5y - 3) &\iff (x^2 - y^2) - (x - y) = 5(x - y) \\ &\iff (x - y)(x + y - 1) = 5(x - y) \\ &\iff (x - y)(x + y - 6) = 0.\end{aligned}$$

Chia thành hai trường hợp

- TH1: $x = y$, khi đó $x^2 + x = 5x - 3$. Từ đây tìm được $x \in \{1, 3\}$. Vậy $(x, y) \in \{(1, 1), (3, 3)\}$.
- TH2: $x + y = 6$, khi đó $x^2 + (6 - x) = 5x - 3$. Từ đây tìm được $x = 3$. Vậy $x = y = 3$.

Cuối cùng thì $(x, y) \in \{(1, 1), (3, 3)\}$. $\square$