

Đại số - Bài 4: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai - tiếp theo (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Bài 1

Rút gọn rồi tính giá trị các biểu thức sau

a) $\sqrt{-9a} - \sqrt{9 + 12a + 4a^2}$ tại $a = -9$,

b) $1 + \frac{3m}{m-2} \sqrt{m^2 - 4m + 4}$ tại $m = \frac{3}{2}$,

c) $\sqrt{1 - 10x + 25x^2} - 4x$ tại $x = \sqrt{2}$.

Lời giải.

a) $A = 3\sqrt{-a} + |2a + 3| = 24$,

b) $B = 1 + \frac{3m}{m-2} \cdot |m-2| \stackrel{m \leq 2}{=} 1 - 3m = \frac{-7}{2}$,

c) $C = |1 - 5x| - 4x \stackrel{x > 1/5}{=} (5x - 1) - 4x = x - 1 = \sqrt{2} - 1$.



Bài 2a

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0$. Tìm các số nguyên x để E là số nguyên.

Lời giải.

Ta có $A = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}+2}$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên \sqrt{x} là số nguyên hoặc là số vô tỉ.

Để $\frac{6}{\sqrt{x}+2}$ là số nguyên thì \sqrt{x} không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $\sqrt{x} + 2$ là ước nguyên của 6, ngoài ra $\sqrt{x} + 2 \geq 2$ nên $\sqrt{x} + 2 \in \{2, 3, 6\}$.

$\sqrt{x} + 2$	2	3	6
x	0	1	16
A	4	3	2

Vậy $x \in \{0, 1, 16\}$.



Bài 2b

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0$. Tìm các số x để E là số nguyên.

Lời giải.

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ nên

$$1 < A = 1 + \frac{6}{\sqrt{x} + 2} \leq 4.$$

Do $A \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \{2, 3, 4\}$.

A	2	3	4
\sqrt{x}	4	1	0
x	16	1	0

Vậy $x \in \{0, 1, 16\}$.



Bài 3a

Rút gọn biểu thức $B = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1}}$ với $1 < x < 2$.

Lời giải.

Biến đổi

$$B = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{|\sqrt{x-1} - 1|}.$$

Vì $1 < x < 2$ nên $\sqrt{x-1} < 1$. Do đó

$$B = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{1 - \sqrt{x-1}} = 1.$$



Bài 3b

Rút gọn biểu thức $C = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ với $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ và $a > b > 0$.

Lời giải.

Biến đổi

$$C = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{2} = x + \sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

Thay $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ vào thu được

$$\begin{aligned} C &= \frac{a^2 + b^2}{2ab} + \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2ab} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2ab}} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2ab} + \frac{(a-b)(a+b)}{2ab} = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$



Bài 3c

Rút gọn biểu thức $D = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$ với $x > 2$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}} \cdot (2x - 1) \\ &= \frac{x + |x - 2|}{x + |x - 1|} \cdot (2x - 1) \\ &= 2x - 2. \end{aligned}$$

Vì $D > 0$ nên $D = \sqrt{2x - 2}$.



Bài 4

Cho $x \geq 2$, chứng minh $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x + 4}{\sqrt{x}}}.$

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} VT^2 &= 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x - \frac{x^2 - 4}{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + 2\sqrt{\frac{4}{x}} \\ &= \frac{2x + 4}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$



Bài 5

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$E = a + b - \sqrt{\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}{c^2 + 1}}.$$

Lời giải.

Có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$. Tương tự thì

$$b^2 + 1 = (b + c)(b + a) \quad \text{và} \quad c^2 + 1 = (c + a)(c + b).$$

Dẫn đến

$$E = a + b - \sqrt{\frac{(a + b)\cancel{(a + c)}\cancel{(b + c)}(b + a)}{\cancel{(c + a)}\cancel{(c + b)}}} = a + b - (a + b) = 0.$$



Bài 6

Cho $a = \sqrt{2} - 1$. Hãy viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ với m là số tự nhiên.

Lời giải.

Có

$$a^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}.$$

Và

$$\begin{aligned} a^3 &= (\sqrt{2} - 1)^3 \\ &= (\sqrt{2})^3 - 3 \times (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 1 \\ &= 5\sqrt{2} - 7 \\ &= \sqrt{50} - \sqrt{49}. \end{aligned}$$



Bài 7a

Chứng minh rằng $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} < 2$ trong đó vế trái có 20 dấu căn.

Lời giải.

Đặt $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ với biểu thức có n dấu căn. Thấy rằng

$$a_1 = \sqrt{2} < 2$$

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

$$a_3 = \sqrt{2 + a_2} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

$$\vdots$$

$$a_{20} = \sqrt{2 + a_{19}} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Vậy $a_{20} < 2$.



Bài 7b

Chứng minh rằng $\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} > \frac{1}{4}$ trong đó tử số có 20 dấu căn và mẫu số có 19 dấu căn.

Lời giải.

Ta cần chứng minh $\frac{2 - a_{20}}{2 - a_{19}} > \frac{1}{4}$, biết rằng

$$a_{20} = \sqrt{2 + a_{19}} \implies a_{19} = a_{20}^2 - 2.$$

Do vậy

$$\frac{2 - a_{20}}{2 - a_{19}} > \frac{1}{4} \iff \frac{2 - a_{20}}{2 - (a_{20}^2 - 2)} > \frac{1}{4} \iff \frac{1}{a_{20} + 2} > \frac{1}{4},$$

tương đương $a_{20} + 2 < 4 \iff a_{20} < 2$ (đúng theo câu a). □