Ôn tập 1: Đề HSG quận Cầu Giấy 2022-2023

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

11/2022

Bài 1.1

Cho biểu thức

$$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x - 11\sqrt{x} + 10}{\sqrt{x} - 1}.$$

a) Tìm điều kiện của x để P có nghĩa và rút gọn P.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x > 0$ và $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (2\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} - 10) \\ &= x - 4\sqrt{x} + 9. \end{aligned}$$

□

Bài 1.1

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{\dfrac{P}{\sqrt{x}-2}}$.

Lời giải.

Vì $P = (\sqrt{x}-2)^2 + 5 > 0$ nên điều kiện để A có nghĩa là $x > 4$. Ta có

$$A = \sqrt{\frac{x - 4\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x}-2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 5}{\sqrt{x}-2}}$$
$$= \sqrt{\sqrt{x} - 2 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}} \geq \sqrt{2\sqrt{5}}.$$

Vậy $\min A = \sqrt{2\sqrt{5}}$, dấu bằng xảy ra $\iff \sqrt{x} - 2 = \frac{5}{\sqrt{x}-2} \iff x = (2+\sqrt{5})^2$. □

Bài 1.2

Cho ba số x, y, z đôi một phân biệt thỏa mãn $x+y+z=0$. Tính

$$Q = \frac{2022(x-y)(y-z)(z-x)}{2xy^2+2yz^2+2zx^2+3xyz}.$$

Lời giải.

Vì $x+y+z=0$ nên $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Do đó mẫu số bằng

$$\begin{aligned} 2xy^2+2yz^2+2zx^2+x^3+y^3+z^3 &= y^2(2x+y)+z^2(2y+z)+x^2(2z+x) \\ &= y^2(x-z)+z^2(y-x)+x^2(z-y) \\ &= (x-y)(y-z)(z-x). \end{aligned}$$

Do đó $Q=2022$. $\square$

Bài 2.1

Giải phương trình $x^2 + 7x + 6 = (x+4)\sqrt{x^2 + 3x + 6}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x + 6} \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$t^2 + 4x = (x+4)t \iff (t-x)(t-4) = 0.$$

Từ đây tìm được $x \in \{-5, 2\}$. $\square$

Bài 2.2

Chứng minh rằng với k là số nguyên không chia hết cho $2,\ 3,\ 5$ thì $241k^4 - 1 \vdots 240$.

Lời giải

Vì $241k^4 - 1 = 240k^4 + (k^4 - 1)$ nên chỉ cần chứng minh

$$k^4 - 1 = (k^2 - 1)(k^2 + 1) = (k - 1)(k + 1)(k^2 + 1)$$

chia hết cho $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

- Vì k lẻ nên $k - 1, k + 1, k^2 + 1$ chẵn. Ngoài ra $k - 1, k + 1$ là hai số chẵn liên tiếp nên có một số chia hết cho 4, giả sử là $k - 1$. Khi đó

$$\begin{cases} k - 1 \vdots 4 \\ k + 1 \vdots 2 \\ k^2 + 1 \vdots 2 \end{cases} \implies k^4 - 1 \vdots 2^4$$

Lời giải.

- $k-1, k, k+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3, mà $k \not\vdots\, 3$ nên $k-1$ hoặc $k+1$ chia hết cho 3. Do vậy

$$(k-1)(k+1) \,\vdots\, 3 \implies k^4 - 1 \,\vdots\, 3$$

Vì không chia hết cho 5 nên k có dạng $5n+1, 5n+2, 5n+3$ hoặc $5n+4$.

- Nếu $k = 5n+1$ thì $k-1 \,\vdots\, 5 \implies k^4 - 1 \,\vdots\, 5$
- Nếu $k = 5n+2$ thì $k^2+1 = 5(5n^2+4n+1) \,\vdots\, 5 \implies k^4 - 1 \,\vdots\, 5$
- Nếu $k = 5n+3$ thì $k^2+1 = 5(5n^2+6n+2) \,\vdots\, 5 \implies k^4 - 1 \,\vdots\, 5$
- Nếu $k = 5n+4$ thì $k+1 \,\vdots\, 5 \implies k^4 - 1 \,\vdots\, 5$

Vì $2^4,\ 3,\ 5$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $k^4 - 1 \,\vdots\, 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ $\square$

Bài 3.1

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $x^3 + 3y^2 + 4xy + 4x + 10y - 12 = 0$.

Lời giải.

Có

$$12 = x^3 + 3y^2 + 4xy + 4x + 10y \geq 10y \implies y \in \{0, 1\}.$$

Chia thành hai trường hợp

- Với $y = 0$ thì $x^3 + 4x - 12 = 0$, thấy rằng x chẵn nên đặt $x = 2z$ $(z \in \mathbb{N})$. Khi đó

  $$(2z)^3 + 4 \cdot 2z - 12 = 0 \iff 2z^3 + 2z - 3 = 0.$$

  Điều này vô lí vì $2z^3 + 2z - 3$ là số lẻ.
- Với $y = 1$ thì $x^3 + 8x + 1 = 0$ (vô lí vì $x^3 + 8x + 1 \geq 1 > 0$).

Vậy không tồn tại x, y thỏa đề. $\square$

Bài 3.2

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{1}{16a} + \dfrac{1}{4b} + \dfrac{1}{c}$.

Bất đẳng thức Sơ-vác (Schwarz) dạng mẫu

Với a, b, c, x, y, z là các số dương thì

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Sơ-vác dạng mẫu ta có

$$A = \frac{\frac{1}{4^2}}{a} + \frac{\frac{1}{2^2}}{b} + \frac{1^2}{c} \geq \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^2}{a+b+c} = \frac{49}{32}.$$

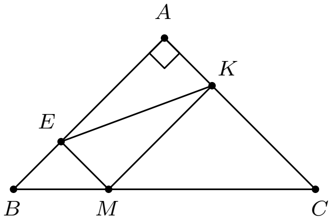
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1/4}{a} = \frac{1/2}{b} = \frac{1}{c} \\ a+b+c=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2/7 \\ b = 4/7 \\ c = 8/7 \end{cases}.$$

$\square$

Bài 4a

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. M di chuyển trên cạnh BC. Gọi E, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC. Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2KE^2$.



Lời giải.

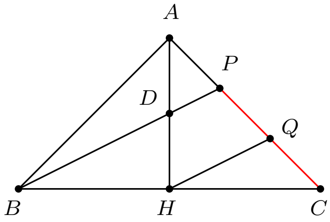
Thấy rằng $\triangle BME, \triangle CMK$ vuông cân và $AKME$ là hình chữ nhật. Biến đổi

$$
\begin{aligned}
MB^2 + MC^2 &= (\sqrt{2}ME)^2 + (\sqrt{2}MK)^2 \\
&= 2(ME^2 + MK^2) \\
&= 2KE^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Bài 4b

Vẽ đường cao AH, D là trung điểm AH, BD giao AC tại P. Chứng minh rằng $PC = 2PA$.



Cách 1

Gọi Q là trung điểm PC, khi đó HQ là đường trung bình $\triangle CBP$ nên

$$HQ \parallel BP \implies HQ \parallel DP.$$

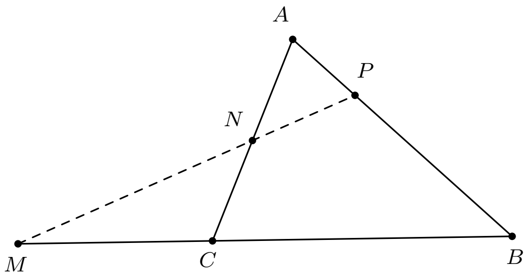
Mà D là trung điểm AH nên P là trung điểm AQ. Do vậy

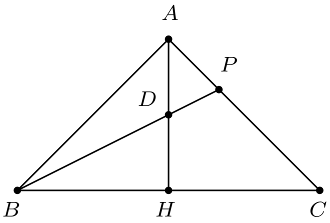
$$AP = PQ = QC \implies PC = 2PA.$$

Định lí Mê-nê-la-uýt (Menelaus)

Cho $\triangle ABC$ và ba điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$





Cách 2

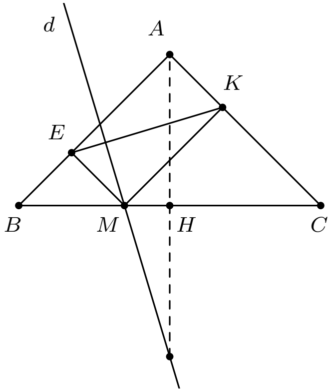
Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt cho $\triangle AHC$ với ba điểm thẳng hàng B, D, P ta có

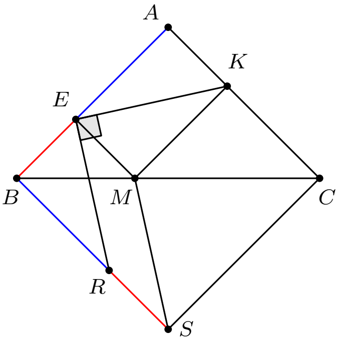
$$1 = \frac{BC}{BH} \cdot \frac{DH}{DA} \cdot \frac{PA}{PC} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{PA}{PC}$$

Do đó $PC = 2PA$.

Bài 4c

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với KE. Chứng minh rằng d luôn đi qua một điểm cố định.





Lời giải

Gọi S là điểm đối xứng của A qua BC, khi đó $ABSC$ là hình vuông và S là điểm cố định. Ta sẽ chứng minh $MS \perp EK$.
Kẻ đường thẳng vuông góc với EK tại E và cắt BS tại R. Vì

$$\begin{cases} AK = BE\ (= EM) \\ \widehat{AKE} = \widehat{BER}\ (= 90^\circ - \widehat{AEK}) \end{cases}$$

nên $\triangle AKE = \triangle BER$.

Do vậy $AE = BR$, dẫn đến

$$BE = AB - AE = BS - BR = RS \implies EM = RS.$$

Mà $EM \parallel RS$ (cùng vuông góc AB) nên $EMSR$ là hình bình hành

$$\implies MS \parallel ER \overset{ER \perp EK}{\Longrightarrow} MS \perp EK \implies S \in d.$$

Bài 5

Có ba loại tắc kè, trong đó 2021 xanh, 2022 đỏ, 2023 vàng. Khi hai con khác màu gặp nhau thì cả hai cùng biến thành màu còn lại. Hỏi có khi nào tất cả tắc kè cùng màu không?

X	2021	2020	2022	2021	2020
Đ	2022	2021	2020	2019	2021
V	2023	2025	2024	2026	2025

Lời giải.

X	2	1	0	2	1
Đ	0	2	1	0	2
V	1	0	2	1	0

Tại mọi thời điểm thì có một loại có số tắc kè chia 3 dư 0, một loại có số tắc kè chia 3 dư 1 và loại còn lại có số tắc kè chia 3 dư 2.

Giả sử tất cả tắc kè cùng X thì số tắc kè của Đ và V là 0. Nên số tắc kè của hai loại này chia 3 đều dư 0 (vô lí). $\square$