Đề kiểm tra lần 6

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 3 năm 2023

§1 Đề bài

Bài 1 (3 điểm)**.**

a) Xác định hệ số a của parabol $y = ax^2$, biết rằng parabol đi qua điểm $A(-\sqrt{3}, 9)$.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc parabol nói trên, biết rằng khoảng cách từ M đến trục hoành gấp ba lần khoảng cách từ M đến trục tung.

Bài 2 (3 điểm)**.**

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$ và $3a+c = b$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c = 0$ có nghiệm.

b) Tìm các giá trị của m để hai phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 - x - m = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

Bài 3 (3 điểm)**.** Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại A cắt BC ở I.

a) Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

b) Tính IA và IC, biết rằng $AB = 20\text{cm},\ AC = 28\text{cm}$ và $BC = 24\text{cm}$.

Bài 4 (1 điểm)**.** Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 5$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

a) Chứng minh rằng $1 \leq x, y, z \leq \frac{7}{3}$.

b) Chứng tỏ $x^3 + y^3 + z^3 \geq 17$.

§2 Lời giải

Bài 1.

a) Xác định hệ số a của parabol $y = ax^2$, biết rằng parabol đi qua điểm $A(-\sqrt{3}, 9)$.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc parabol nói trên, biết rằng khoảng cách từ M đến trục hoành gấp ba lần khoảng cách từ M đến trục tung.

Lời giải.
a) Vì parabol đi qua điểm $A(-\sqrt{3}, 9)$ nên

$$9 = a(-\sqrt{3})^2 \implies a = 3.$$

b) Với $M(x_M, y_M)$ thì theo đề $|y_M| = 3|x_M|$, mặt khác $y_M = 3x_M^2$ suy ra

$$y_M = 3 \cdot \frac{y_M^2}{9} = \frac{y_M^2}{3} \implies y_M \in \{0, 3\}.$$

Từ đây tìm được ba điểm thỏa đề là $(0,0)$, $(1,3)$ và $(-1,3)$. □

Bài 2.

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$ và $3a + c = b$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

b) Tìm các giá trị của m để hai phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 - x - m = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

Lời giải.
a) Phương trình có

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3a + c)^2 - 4ac = 9a^2 + 2ac + c^2 = 8a^2 + (a + c)^2 \geq 0,$$

do vậy phương trình có nghiệm.

b) Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 - x_0 - m = 0 \end{cases} \implies (m+1)x_0 + 1 + m = 0.$$

Với $m = -1$ thì cả hai phương trình đều là $x^2 - x + 1 = 0$, và cùng vô nghiệm nên trường hợp này không thỏa mãn . Do đó $m \neq -1$, suy ra $x_0 = -1$. Dẫn tới

$$\begin{cases} 1 - m + 1 = 0 \\ 1 + 1 - m = 0 \end{cases} \implies m = 2.$$

Vậy $m = 2$ (thử lại thỏa mãn). □

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại A cắt BC ở I.

a) Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

b) Tính IA và IC, biết rằng $AB = 20\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$ và $BC = 24\text{cm}$.

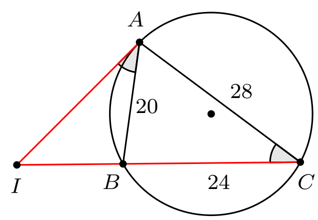
Lời giải.
a) Vì $\widehat{IAB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \widehat{C}$ nên $\triangle IBA \sim \triangle IAC$(g.g). Suy ra

$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IA} \implies \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IA^2}. \quad (1)$$

Ngoài ra IA là tiếp tuyến của (O) nên $IA^2 = IB \cdot IC$, do đó

$$\frac{IB^2}{IA^2} = \frac{IB^2}{IB \cdot IC} = \frac{IB}{IC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.



b) Đặt $IA = a$ và $IC = c$. Vì $\triangle IBA \sim \triangle IAC$ nên

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IB}{IA} = \frac{AB}{AC} \implies \frac{a}{c} = \frac{c-24}{a} = \frac{20}{28}.$$

Như vậy có hệ phương trình hai ẩn

$$\begin{cases} 28a = 20c \\ 28(c-24) = 20a \end{cases}.$$

Từ đây tìm được $a = 35$ và $c = 49$. Vậy $IA = 35\text{cm}$ và $IC = 49\text{cm}$. $\square$

Bài 4. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 5$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

a) Chứng minh rằng $1 \le x, y, z \le \frac{7}{3}$.

b) Chứng tỏ $x^3 + y^3 + z^3 \ge 17$.

Lời giải.
a) Biến đổi

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} = \frac{(5-z)^2 - (9-z^2)}{2} = z^2 - 5z + 8.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì $(x+y)^2 \ge 4xy$, do đó $(5-z)^2 \ge 4(z^2 - 5z + 8)$, tương đương

$$3z^2 - 10z + 7 \le 0 \iff (z-1)(3z-7) \le 0 \iff 1 \le z \le \frac{7}{3}.$$

Hoàn toàn tương tự thì $1 \leq x, y \leq \frac{7}{3}$.

b) Tính được $xy + yz + zx = \frac{1}{2}\left((x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) = 8$. Do đó

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 5,$$

như vậy $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 5$.

Theo câu a thì $x, y, z \geq 1$ nên $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 0$, tương đương

$$xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1 \geq 0 \iff xyz \geq 4.$$

Do đó $x^3 + y^3 + z^3 \geq 17$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có một số bằng 1 và hai số bằng 2. $\square$