

Đại số - Bài 3: Hệ phương trình bậc nhất

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023

Ví dụ 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 3xy \\ 3x + 4y = 2xy \end{cases}$.

Lời giải.

Nếu $xy = 0$ thì dễ thấy $x = y = 0$. Xét $xy \neq 0$, chia các vế của hệ cho xy ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 3 \\ \frac{3}{y} + \frac{4}{x} = 2 \end{cases}. \quad (1)$$

Đặt $a = \frac{1}{x}$ và $b = \frac{1}{y}$ thì

$$(1) \iff \begin{cases} -a + b = 3 \\ 4a + 3b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1/2 \end{cases}.$$

Vậy $(x, y) \in \{(0, 0), (-1, \frac{1}{2})\}$.



Ví dụ 2

Cho các số a, b, c đôi một phân biệt. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a^2x + ay + z = 5 & (2) \\ b^2x + by + z = 5 & (3) \\ c^2x + cy + z = 5 & (4) \end{cases}$$

Lời giải

Lấy $PT(2) - PT(3)$ ta có

$$(a^2 - b^2)x + (a - b)y = 0 \iff (a + b)x + y = 0.$$

Tương tự thì

$$(b + c)x + y = 0.$$

Lời giải.

Ta có

$$(a + b)x + y = 0 \quad (5)$$

$$(b + c)x + y = 0. \quad (6)$$

Lấy $PT(5) - PT(6)$ thì

$$(a - c)x = 0 \iff x = 0.$$

Thay $x = 0$ vào (5) suy ra $y = 0$. Thay $x = y = 0$ vào (2) thì $z = 5$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x, y, z) = (0, 0, 5).$$



Ví dụ 3

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 2 \\ y^2 + yz + yx = 3 \\ z^2 + zx + zy = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

Cộng cả ba phương trình ta có

$$(x + y + z)^2 = 9 \implies x + y + z \in \{3, -3\}.$$

Để ý rằng $x^2 + xy + xz = x(x + y + z)$. Từ đó tìm được

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right), \left(\frac{-2}{3}, -1, \frac{-4}{3} \right) \right\}.$$

