Hình học - Bài 6: Tứ giác nội tiếp - tiếp theo (Bài tập)

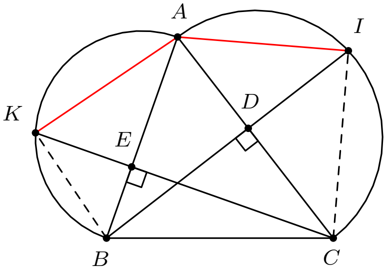
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1

Cho $\triangle ABC$ nhọn có các đường cao BD, CE. Vẽ ở phía ngoài tam giác các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AC, AB. Gọi I, K lần lượt là giao điểm BD, CE với các nửa đường tròn. Chứng minh rằng $AI = AK$.



Lời giải.

$\triangle ABK$ vuông tại K có đường cao KE nên

$$AK^2 = AE \cdot AB$$

Tương tự thì $AI^2 = AD \cdot AC$

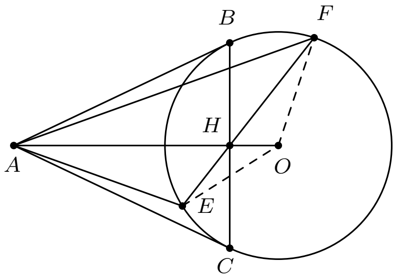
Ngoài ra $\widehat{BEC} = \widehat{BDC}$ nên $BEDC$ là tứ giác nội tiếp, do đó

$$AE \cdot AB = AD \cdot AC,$$

từ đây có được $AI = AK$. $\square$

Bài 2

Từ điểm A ở bên ngoài (O), vẽ các tiếp tuyến AB, AC. Gọi H là giao điểm OA với BC. Kẻ dây EF bất kì đi qua H. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của $\widehat{EAF}$.



Lời giải.

$BECF$ và $ABOC$ là tứ giác nội tiếp nên

$$HE \cdot HF = HB \cdot HC = HA \cdot HO,$$

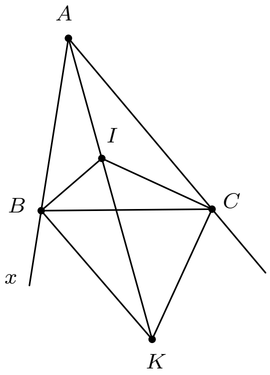
do vậy $AEOF$ là tứ giác nội tiếp. Mà $OE = OF$ nên

$$\widehat{EAO} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{OE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{OF} = \widehat{FAO}.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh $\square$

Bài 3a

Cho $\triangle ABC$ có I là tâm đường tròn nội tiếp và K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A. Chứng minh rằng $BICK$ là tứ giác nội tiếp.



Lời giải.

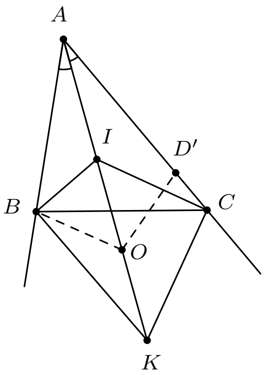
Vì BI, BK là phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{ABC}$ nên

$$\widehat{IBK} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{xBC} = 90^\circ.$$

Tương tự thì $\widehat{ICK} = 90^\circ$, do đó $BICK$ là tứ giác nội tiếp. $\square$

Bài 3b

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BICK$. Chứng minh rằng $AB = AD$ với D là giao điểm AC và (O).



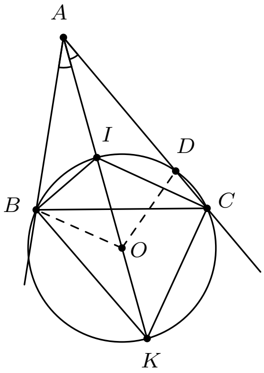
Lời giải.

Thấy rằng O là trung điểm IK. Lấy điểm D' trên cạnh AC sao cho $AB = AD'$.

Thấy rằng $\triangle OAB = \triangle OAD'$ (c.g.c), dẫn đến $OB = OD'$. Như vậy D' thuộc (O), do đó $D' \equiv D$. Vậy $AB = AD' = AD$. $\square$

Bài 3c

Chứng minh rằng $AI \cdot AK = AB \cdot AC$



Lời giải.

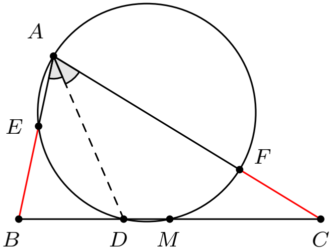
Vì $IKCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$AI \cdot AK = AD \cdot AC$$

Ngoài ra theo câu b thì $AB = AD$ nên ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài 4

Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM và đường phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$ cắt AB, AC lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng $BE = CF$.



Lời giải.

$AEDM$ là tứ giác nội tiếp nên $BE \cdot BA = BD \cdot BM$

$AFMD$ là tứ giác nội tiếp nên $CF \cdot CA = CD \cdot CM$

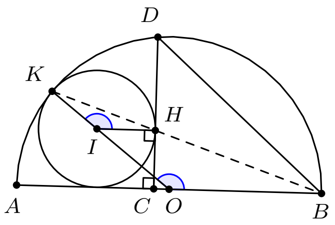
Do đó

$$\frac{BE}{CF} \cdot \frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{\cancel{BM}}{\cancel{CM}}$$

Vì AD là tia phân giác nên $\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD}$, suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Bài 5a

Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB. Điểm C thuộc OA, đường vuông góc với AB tại C cắt (O) ở D. (I) tiếp xúc với (O) và tiếp xúc với CA, CD. Chứng minh K, H, B thẳng hàng với K là tiếp điểm (I) và (O), H là hình chiếu của I trên CD.



Lời giải.

Vì $IH \parallel OB$ (cùng vuông góc CD) nên

$$\widehat{KIH} = \widehat{KOB}.$$

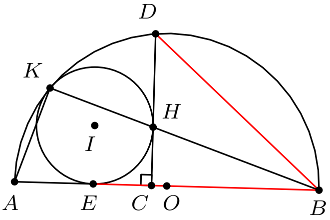
Như vậy hai tam giác cân KIH và KOB có góc ở đỉnh bằng nhau nên hai góc ở đáy cũng bằng nhau, nghĩa là

$$\widehat{OKH} = \widehat{OKB}.$$

Do đó K, H, B thẳng hàng. □

Bài 5b

Chứng minh rằng $BD = BE$ với E là tiếp điểm trên AC của đường tròn (I).



Lời giải.

Vì BE là tiếp tuyến của (I) nên

$$BE^2 = BH \cdot BK$$

$\triangle ABD$ vuông tại D có đường cao DC nên

$$BD^2 = BC \cdot BA$$

Mặt khác $\widehat{HKA} + \widehat{HCA} = 180^\circ$ nên $AKHC$ là tứ giác nội tiếp, do vậy

$$BH \cdot BK = BC \cdot BA$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh. $\square$