Đại số - Bài 3: Nghiệm của phương trình bậc hai

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Với số hữu tỉ $x \neq 0$, ta gọi $\frac{a}{b}$ là **dạng phân số** của x nếu $x = \frac{a}{b}$ và

$$a \in \mathbb{Z}\ (a \neq 0), \quad b \in \mathbb{N}^* \quad \text{và} \quad \text{ƯCLN}(a, b) = 1.$$

Ví dụ

- $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{24}{30} = \frac{-4}{-5}$ có dạng phân số $\frac{4}{5}$
- $-1,2 = \frac{-12}{10} = \frac{120}{-100} = \frac{6}{-5}$ có dạng phân số $\frac{-6}{5}$

Chú ý

Đây là kí hiệu trong lớp với nhau, không được sử dụng bên ngoài.

Tính chất

Với các số nguyên a, b, c thì

$$\begin{cases} ab \,\vdots\, c \\ \text{ƯCLN}(a, c) = 1 \end{cases} \implies b \,\vdots\, c$$

Ví dụ

$$\begin{cases} 60 = 5 \times 12 \,\vdots\, 6 \\ \text{ƯCLN}(5, 6) = 1 \end{cases} \implies 12 \,\vdots\, 6, \qquad \begin{cases} 60 = 3 \times 20 \,\vdots\, 6 \\ \text{ƯCLN}(3, 6) = 3 \end{cases} \implies \cancel{20 \,\vdots\, 6}$$

Ví dụ 1

Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ với m, n là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó là số nguyên.

Lời giải.

Nếu phương trình có nghiệm $x_0 = 0$ thì thỏa mãn. Giả sử phương trình có nghiệm hữu tỉ $x_0 \neq 0$, với $\frac{a}{b}$ là dạng phân số. Ta có

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + m \cdot \frac{a}{b} + n = 0 \implies a^2 = -b(ma + nb).$$

Như vậy $a^2 \vdots b$, mà ƯCLN$(a, b) = 1$ nên $1 \vdots b$, do đó $b = 1$. Như vậy

$$x_0 = a \in \mathbb{Z}$$

nên có được điều cần chứng minh. □

Điều kiện để có nghiệm nguyên

Cho các số $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ thì Δ là số chính phương.

Chứng minh.

Vì phương trình có nghiệm

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{Q}$$

nên $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$. Mà $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{Z}$ nên Δ phải là số chính phương. $\square$

Ví dụ 2

Tìm các số nguyên n để phương trình $x^2 - (4+n)x + 2n = 0$ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì

$$\Delta = (4+n)^2 - 4 \cdot 2n = n^2 + 16$$

phải là số chính phương. Đặt $n^2 + 16 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$(n-k)(n+k) = -16 = -1 \times 16 = -2 \times 8 = -4 \times 4.$$

Vì $n - k \leq n + k$ và $n - k \equiv n + k \pmod 2$ nên

$n-k$	-2	-8	-4
$n+k$	8	2	4
n	3	-3	0

Như vậy $n \in \{-3, 0, 3\}$ (thử lại thỏa mãn). □

Ví dụ 3

Tìm các số a để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung

$$x^2 + ax + 8 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + x + a = 0.$$

Lời giải.

Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 8 = 0 \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \implies (a-1)x_0 + 8 - a = 0.$$

Vì $a = 1$ không thỏa mãn nên $a \neq 1$, do đó $x_0 = \frac{a-8}{a-1}$. Suy ra

$$\left(\frac{a-8}{a-1}\right)^2 + \frac{a-8}{a-1} + a = 0 \implies (a+6)(a^2 - 6a + 12) = 0.$$

Như vậy $a = -6$ (thử lại thỏa mãn). □