Chuyên đề - ĐS 10: Hệ phương trình thuần nhất

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Cho các biểu thức

$$A = x^2 - 2xy, \quad B = x^3 + 3x^2y - xy^2, \quad C = x + 5x^3y - y^4.$$

Khi đó

- A là biểu thức đồng bậc 2, vì mỗi hạng tử đều có bậc hai.
- B là biểu thức đồng bậc 3, vì mỗi hạng tử đều có bậc ba.
- C không phải biểu thức đồng bậc; vì x có bậc một, còn x^3y và y^4 có bậc bốn.

Kí hiệu $f_k(x,y)$ là một biểu thức đồng bậc k (xem hằng số là đồng bậc 0). Khi đó hệ phương trình

$$\begin{cases} f_m(x,y) = f_n(x,y) \\ f_p(x,y) = f_q(x,y) \end{cases}$$

được gọi là **hệ thuần nhất** nếu $m+p=n+q$.

Cách giải

Ta có

$$f_m(x,y)f_p(x,y) = f_n(x,y)f_q(x,y).$$

Khi đó

- $f_m(x,y)f_p(x,y)$ và $f_n(x,y)f_q(x,y)$ là các biểu thức đồng bậc $m+p$.
- Xét $y \neq 0$ và đặt $t = \frac{x}{y}$ thì được phương trình theo ẩn t.

Ví dụ 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $2(x^2 + 2xy + 3y^2) = 9(2x^2 + 2xy + y^2)$, tương đương

$$16x^2 + 14xy + 3y^2 = 0. \tag{1}$$

Trường hợp $y = 0$ thì hệ vô nghiệm. Do đó $y \neq 0$, đặt $t = \frac{x}{y}$ thì từ (1) ta có

$$16t^2 + 14t + 3 = 0.$$

Tìm được $t \in \left\{\frac{-3}{8}, \frac{-1}{2}\right\}$. Do đó ta có

$$(x, y) \in \left\{\left(\frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}}\right), (-1, 2), (1, -2)\right\}.$$

□

Ví dụ 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2 - 3y = x - 3xy \\ x^3 - x^2 = y^2 - 3y^3 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 5x^2 + 3xy = x + 3y \\ x^3 + 3y^3 = x^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow (5x^2 + 3xy)(x^2 + y^2) = (x^3 + 3y^3)(x + 3y). \qquad (2)$$

Trường hợp $y = 0$ thì $x = 0$. Xét $y \neq 0$, khi đó (2) tương đương

$$\left(\frac{5x^2}{y^2} + \frac{3x}{y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = \left(\frac{x^3}{y^3} + 3\right)\left(\frac{x}{y} + 3\right).$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì ta có phương trình $(5t^2 + 3t)(t^2 + 1) = (t^3 + 3)(t + 3)$. Cuối cùng thì

$$(x, y) \in \left\{(0, 0), (-1, 1)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$