Ôn tập 3: Đề HK I trường Amsterdam 2022-2023

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Bài 1a

Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{4-x}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$. Tìm x để $A = \dfrac{-3}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{4-x} = \frac{-3}{5} &\iff 3x - 5\sqrt{x} - 12 = 0 \\ &\iff (\sqrt{x}-3)(3\sqrt{x}+4) = 0.\end{aligned}$$

Vì $3\sqrt{x}+4 > 0$ nên $\sqrt{x} - 3 = 0 \iff x = 9$ (thỏa mãn). $\square$

Bài 1

Cho biểu thức $B = \dfrac{x}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$.

b) Rút gọn biểu thức $P = B : A$.

c) Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

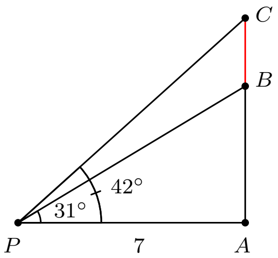
Biến đổi được

$$P = (\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x}) = -x+\sqrt{x}+2 = -\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

Vậy $\max P = \frac{9}{4} \iff x = \frac{1}{4}$. □

Bài 2

Một người muốn làm biển quảng cáo cho cửa hàng. Biết rằng từ điểm P cách cửa hàng 7m thì người đó lần lượt nhìn thấy mái nhà, điểm trên cùng của biển quảng cáo dưới một góc là $31^\circ, 42^\circ$ so với phương ngang. Tính chiều cao của biển quảng cáo theo đơn vị m (lấy xấp xỉ đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).



Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} BC &= AC - AB \\ &= AP\operatorname{tg}42^\circ - AP\operatorname{tg}31^\circ \\ &= 7(\operatorname{tg}42^\circ - \operatorname{tg}31^\circ) \\ &\approx 2,1 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

□

Bài 3a

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d_m) có phương trình $y = mx - 2m + 1$ (với m là tham số). Tìm m để (d_m) song song với đường thẳng $y = -x + 3m$.

Lời giải.

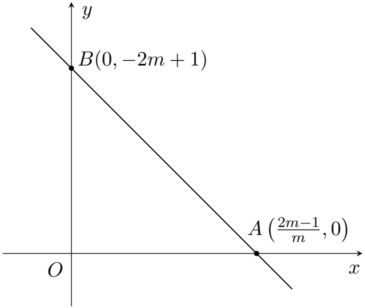
Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m = -1 \\ -2m + 1 \neq 3m \end{cases} \iff m = -1.$$

□

Bài 3b

Tìm m để (d_m) cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B sao cho $\sin\widehat{BAO} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.



Lời giải.

Có được $A\left(\frac{2m-1}{m}, 0\right)$ và $B(0, -2m+1)$ nên

$$OA = \frac{|2m-1|}{|m|} \quad \text{và} \quad OB = |2m-1|.$$

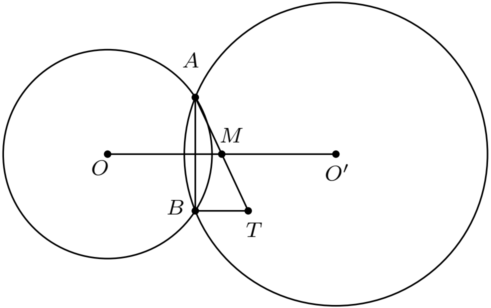
Theo đề thì

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{OB}{AB} = \frac{(2m-1)^2}{\sqrt{\frac{(2m-1)^2}{m^2} + (2m-1)^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Từ đây tìm được $m^2 = \frac{1}{4}$ nên $m \in \left\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. $\square$

Bài 4a

(O) và (O') cắt nhau tại A, B. Gọi M là trung điểm OO' và T là điểm đối xứng với A qua M. Chứng minh rằng $TB \parallel OO'$.



Lời giải.

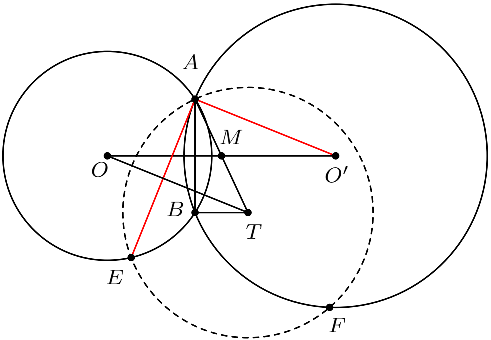
Vì $MB = MA = \frac{AT}{2}$ nên $\triangle ABT$ vuông tại B, do đó

$$TB \perp AB \implies TB \parallel OO'.$$

□

Bài 4b

Đường tròn (T, TA) cắt $(O), (O')$ lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng AE là tiếp tuyến của (O').



Lời giải.

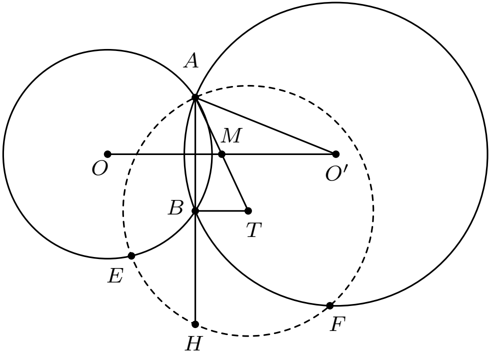
Vì M là trung điểm AT lẫn OO' nên $AOTO'$ là hình bình hành, do đó

$$O'A \parallel OT \overset{OT \perp AE}{\Longrightarrow} O'A \perp AE.$$

$\square$

Bài 4c

Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ luôn đi qua một điểm cố định khác A, khi hai (O) và (O') thay đổi nhưng luôn đi qua A và B.

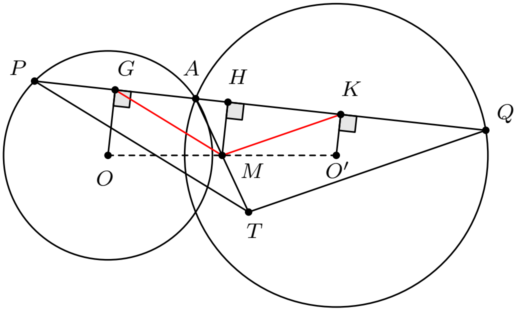


Lời giải.

Gọi giao điểm AB với (T) là H. Vì BT vuông góc với dây AH $(TB \perp AB)$ nên B là trung điểm AH. Vậy H là điểm đối xứng của A qua B nên cố định. $\square$

Bài 4d

Lấy điểm P bất kì thuộc (O), AP cắt (O') tại Q. Chứng minh rằng $TP = TQ$.



Lời giải.

Gọi G, H, K lần lượt là hình chiếu của O, M, O' trên PQ. Vì M là trung điểm OO' và MH song song hai đáy nên MH là đường trung bình của hình thang $GOO'K$, do đó H là trung điểm GK.

$$\implies \triangle MGK \text{ cân tại } M \implies MG = MK.$$

Dẫn đến $PT = 2MG = 2MK = TQ$. □

Bài 5a

Giải phương trình $x+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+4$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 1$. Đặt $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} \geq 0$ thì

$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{y^2}{2} \implies \frac{y^2}{2}=y+4.$$

Do đó $y=4$, suy ra

$$\sqrt{x^2-1}=8-x \iff \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x^2-1=(8-x)^2 \end{cases}.$$

Cuối cùng thì $x=\frac{65}{16}$. $\square$

Bài 5b

Cho các số $x, y, z > 0$ thỏa mãn $z = (x - 2y)(y - 2x)$. Chứng minh rằng

$$\frac{9}{xy + xz} + \frac{9}{xy + yz} + \frac{x^3 + y^3}{z} \geq \frac{11}{2}. \tag{1}$$

Lời giải

Áp dụng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ thì

$$VT(1) \geq \frac{36}{2xy + z(x + y)} + \frac{x^3 + y^3}{z}. \tag{2}$$

Theo giả thiết thì $z = -2(x^2 + y^2) + 5xy \leq -2 \cdot 2xy + 5xy = xy$, do đó

$$VP(2) \geq \frac{36}{2xy + xy(x + y)} + \frac{x^3 + y^3}{xy}. \tag{3}$$

Lời giải

Dẫn đến

$$VP(2) \geq \frac{36}{2xy + xy(x+y)} + \frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{36}{xy(x+y+2)} + \frac{x^3+y^3}{xy}. \tag{3}$$

Áp dụng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ và $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ thì

$$VP(3) \geq \frac{36}{\frac{(x+y)^2}{4}(x+y+2)} + x + y. \tag{4}$$

Đặt $t = x + y$ thì

$$VP(4) = \frac{144}{t^2(t+2)} + t$$

Dự đoán: $\frac{144}{t^2(t+2)} + t = \frac{11}{2} \iff t = 4$, khi đó $\frac{144}{t^2(t+2)} = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = x + y$ thì

$$\begin{aligned}
VP(4) &= \frac{144}{t^2(t+2)} + t \\
&= \left(\frac{144}{t^2(t+2)} + \frac{3t}{8} + \frac{3t}{8} + \frac{t+2}{4}\right) - \frac{1}{2} \\
&\geq 4\sqrt[4]{\frac{144}{t^2(t+2)} \cdot \frac{3t}{8} \cdot \frac{3t}{8} \cdot \frac{t+2}{4}} - \frac{1}{2} \\
&= 4 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}.
\end{aligned}$$

□