

Đề kiểm tra lần 8

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 5 năm 2023

§1 Đề bài

Bài 1 (3 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m+1)x + 3$ với m là tham số.

- Tìm tọa độ điểm A thuộc parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng OA bằng $2\sqrt{5}$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - 2mx_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 2$.

Bài 2 (3 điểm).

- Tìm hai số nguyên x, y trong đó $y > 0$ sao cho $2x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 4y = 20$.
- Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì và đường tròn (O) có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho

$$MA + MB + MC + MD \geq 4.$$

Bài 3 (3 điểm). Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Hai đường cao BE, CF của tam giác cắt nhau tại H . Gọi K là giao điểm của EF với BC . Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I (I khác A). Chứng minh rằng

- $IAEF$ là tứ giác nội tiếp.
- Ba điểm I, H, D thẳng hàng với D là điểm đối xứng của điểm A qua điểm O .

Bài 4 (1 điểm). Cho hai số không âm x, y thỏa mãn $x + y = 2$.

- Chứng minh rằng $0 \leq xy \leq 1$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $H = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$.

§2 Lời giải

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m+1)x + 3$ với m là tham số.

- Tìm tọa độ điểm A thuộc parabol (P) sao cho độ dài đoạn thẳng OA bằng $2\sqrt{5}$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - 2mx_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 2$.

Lời giải.

a) Gọi tọa độ điểm $A(x_A, y_A)$. Theo đề thì $OA = 2\sqrt{5}$, ngoài ra

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \implies x_A^2 + y_A^2 = 20.$$

Vì A thuộc (P) nên $y_A = x_A^2$, do đó có phương trình

$$y_A + y_A^2 = 20 \iff (y_A - 4)(y_A + 5) = 0.$$

Suy ra $y_A = -5$ (loại vì không tồn tại x_A) hoặc $y_A = 4$. Do vậy $x_A \in \{-2, 2\}$. Vậy có hai điểm thỏa đề là $A_1(-2, 4)$ và $A_2(2, 4)$.

b) Hoành độ x_1, x_2 của hai giao điểm là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 = 2(m+1)x + 3 \iff x^2 - 2(m+1)x - 3 = 0. \quad (1)$$

Vì x_1 là nghiệm của (1) nên $x_1^2 - 2mx_1 = 2x_1 + 3$. Do đó ta có

$$\underbrace{x_1^2 - 2mx_1}_{2x_1+3} + 2x_2 - x_1x_2 = 2 \iff 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 + 1 = 0. \quad (2)$$

Theo hệ thức Vi-ét thì $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ và $x_1x_2 = -3$, dẫn đến

$$(2) \implies 2 \cdot 2(m+1) + 3 + 1 = 0 \implies m = -2.$$

Vậy $m = -2$ (thử lại thỏa mãn). □

Bài 2.

- Tìm hai số nguyên x, y trong đó $y > 0$ sao cho $2x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 4y = 20$.
- Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì và đường tròn (O) có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho

$$MA + MB + MC + MD \geq 4.$$

Lời giải.

a) Phương trình tương đương

$$2x^2 + 2(y+3)x + y^2 + 4y - 20 = 0. \quad (*)$$

Xem như đây là một phương trình bậc hai theo ẩn x (tham số y), ta có

$$\Delta'_x = (y+3)^2 - 2(y^2 + 4y - 20) = -y^2 - 2y + 49.$$

Vì phương trình có nghiệm nên $\Delta'_x \geq 0$, do đó

$$\begin{aligned} y^2 + 2y - 49 \leq 0 &\iff (y+1)^2 \leq 50 \\ &\iff -\sqrt{50} \leq y+1 \leq \sqrt{50} \\ &\iff \underbrace{-1-\sqrt{50}}_{-8,07} \leq y \leq \underbrace{-1+\sqrt{50}}_{6,07}. \end{aligned}$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ và $y > 0$ nên $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ta có bảng giá trị của Δ'_x như sau

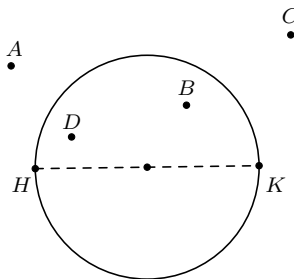
y	1	2	3	4	5	6
Δ'_x	46	41	34	25	14	1

Vì $(*)$ có nghiệm nguyên nên Δ'_x phải là số chính phương, do đó $y \in \{4, 6\}$.

- Với $y = 4$ thì ta có $2x^2 + 14x + 12 = 0 \iff x \in \{-6, -1\}$.
- Với $y = 6$ thì ta có $2x^2 + 18x + 40 = 0 \iff x \in \{-5, -4\}$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x, y) \in \{(-6, 4), (-1, 4), (-5, 6), (-4, 6)\}$.

b) Gọi HK là một đường kính của đường tròn (O) .



Ta có $HA + KA \geq HK = 2$, tương tự thì

$$HB + KB \geq 2, \quad HC + KC \geq 2 \quad \text{và} \quad HD + KD \geq 2.$$

Suy ra $(HA + HB + HC + HD) + (KA + KB + KC + KD) \geq 8$.

- Nếu $HA + HB + HC + HD \geq 4$ thì điểm M cần tìm là H .
- Nếu $HA + HB + HC + HD < 4$ thì $KA + KB + KC + KD \geq 4$, điểm M cần tìm là K .

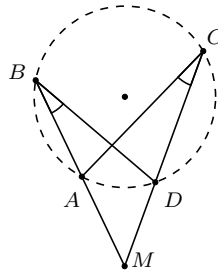
□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Hai đường cao BE, CF của tam giác cắt nhau tại H . Gọi K là giao điểm của EF với BC . Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I (I khác A). Chứng minh rằng

- $IAEF$ là tứ giác nội tiếp.
- Ba điểm I, H, D thẳng hàng với D là điểm đối xứng của điểm A qua điểm O .

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$, hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M . Chứng minh rằng

- Nếu $ABCD$ là tứ giác nội tiếp thì $MA \cdot MB = MC \cdot MD$
- Nếu $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.



Chứng minh.

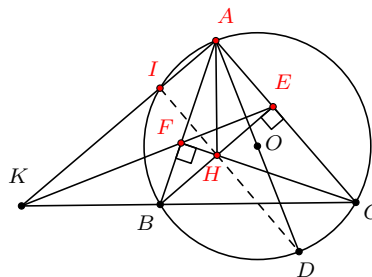
- Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{B} = \widehat{C}$. Do đó $\triangle MBD \sim \triangle MCA$ (g.g), suy ra

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

- Vì $MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$. Do đó $\triangle MBD \sim \triangle MCA$ (c.g.c), suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

□

Vậy Bổ đề được chứng minh, ta quay lại bài toán ban đầu.



Lời giải.

- $\widehat{BFC} = 90^\circ = \widehat{BEC}$ nên $BFEC$ là tứ giác nội tiếp, theo Bổ đề 1 thì $KE \cdot KF = KB \cdot KC$. Vì $AIBC$ là tứ giác nội tiếp nên theo Bổ đề 1 ta có $KI \cdot KA = KB \cdot KC$, do đó

$$KI \cdot KA = KE \cdot KF$$

Từ đây theo Bổ đề 2 thì $IAEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $AFHE$ là tứ giác nội tiếp. Kết hợp với câu a suy ra 5 điểm A, I, F, H, E cùng thuộc một đường tròn. Đường tròn này có đường kính AH nên

$$\widehat{AIH} = 90^\circ.$$

Vì AD là đường kính của (O) nên $\widehat{AID} = 90^\circ$. Do vậy ba điểm I, H, D thẳng hàng. \square

Bài 4. Cho hai số không âm x, y thỏa mãn $x + y = 2$.

a) Chứng minh rằng $0 \leq xy \leq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $H = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$.

Lời giải.

a) Ta có

$$x, y \geq 0 \implies xy \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff x = 0$ hoặc $y = 0$. Theo định lí Cô-si thì

$$xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = 1.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff x = y = 1$.

b) Đặt $t = xy$ thì $0 \leq t \leq 1$. Biến đổi

$$H = x^2y^2 + (x^2 + y^2) + 1 = t^2 + (4 - 2t) + 1 = t^2 - 2t + 5.$$

Ta sẽ chứng minh $4 \leq t^2 - 2t + 5 \leq 5$ với $0 \leq t \leq 1$, thật vậy

- $t^2 - 2t + 5 \geq 4 \iff (t - 1)^2 \geq 0$ (luôn đúng).
- $t^2 - 2t + 5 \leq 5 \iff t(t - 2) \leq 0$ (đúng vì $t \geq 0$ và $t - 2 < 0$).

Vậy $\min H = 4$ và $\max H = 5$. Trong đó

$$\begin{aligned} H = 4 &\iff t = 1 \iff x = y = 1, \\ H = 5 &\iff t = 0 \iff (x, y) \in \{(0, 2), (2, 0)\}. \end{aligned}$$

\square