Đại số - Bài 5: Căn bậc ba, căn bậc n

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Căn bậc ba của một số a là

$$\sqrt[3]{a} = x \iff x^3 = a.$$

Căn bậc n (với số nguyên $n \geq 3$) của một số a

- Với $n = 2k+1$ thì $\sqrt[2k+1]{a} = x \iff x^{2k+1} = a$,
- Với $n = 2k$ thì phải có $a \geq 0$, khi đó $\sqrt[2k]{a} = x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^{2k} = a \end{cases}$.

Tính chất

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \quad \text{và} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Ngoài ra

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m} \quad \text{và} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Ví dụ

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{4},\ \sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}.$

Ví dụ 1

Rút gọn $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$.

Phân tích: tìm a, b sao cho $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$, khi đó

$$\begin{aligned} 10+6\sqrt{3} &= (a+b\sqrt{3})^3 \\ &= a^3 + 3a^2 \cdot b\sqrt{3} + 3a \cdot (b\sqrt{3})^2 + (b\sqrt{3})^3 \\ &= a^3 + 9ab^2 + 3(a^2b + b^3)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dẫn tới $\begin{cases} a^3 + 9ab^2 = 10 \\ 3(a^2b + b^3) = 6 \end{cases}$

Lời giải.

Biến đổi

$$10+6\sqrt{3} = 1 + 3\sqrt{3} + 3 \times (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = (1+\sqrt{3})^3.$$

Do đó $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$. $\square$

Ví dụ 2

Lập một phương trình bậc ba với các hệ số nguyên sao cho $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là một nghiệm.

<u>Giải thích đề:</u> tìm các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn

$$am^3 + bm^2 + cm + d = 0$$

với $m = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Lời giải.

Áp dụng hằng đẳng thức $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ ta được

$$\begin{aligned} m^3 &= (\sqrt{5}+2) - (\sqrt{5}-2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \times m \\ &= 4 - 3\sqrt[3]{1} \times m = 4 - 3m. \end{aligned}$$

Vậy m là một nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$. $\square$

Ví dụ 3

Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

Cách 1

Ta có

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} = 1+\sqrt{2}.$$

Tương tự thì $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$. Do đó

$$A = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2.$$

Cách 2

Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a+b)ab$ ta có

$$\begin{aligned} A^3 &= (7+5\sqrt{2}) + (7-5\sqrt{2}) + 3A\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})} \\ &= 14 - 3A. \end{aligned}$$

Do vậy $A^3 + 3A - 14 = 0$, tương đương

$$\begin{aligned} & A^3 - 8 + 3A - 6 = 0 \\ \iff & (A-2)(A^2+2A+4) + 3(A-2) = 0 \\ \iff & (A-2)(A^2+2A+7) = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Vì $A^2 + 2A + 7 = (A+1)^2 + 6 > 0$ nên phương trình

$$(1) \iff A = 2.$$