

# Hình học - Bài 5: Đường tròn nội tiếp, bàng tiếp tam giác (Bài tập)

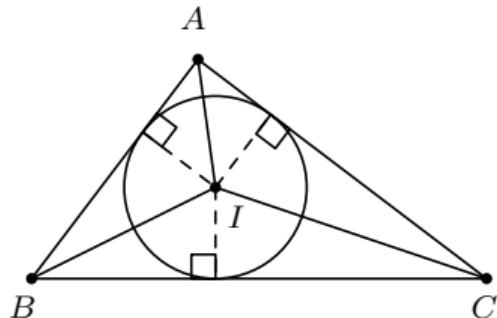
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

## Bài 1

Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có diện tích bằng  $24\text{cm}^2$  và  $BC = 10\text{cm}$ . Tính bán kính của đường tròn nội tiếp.



Lời giải

Đặt  $r$  bán kính của đường tròn nội tiếp thì

$$S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} = \frac{r(a+b+c)}{2}.$$

Theo đề thì

$$\begin{cases} bc = 2S_{ABC} = 48 \\ b^2 + c^2 = BC^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow b + c = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc} = 14.$$

Do vậy  $r = \frac{2S_{ABC}}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 24}{10+14} = 2$ .

## Chú ý

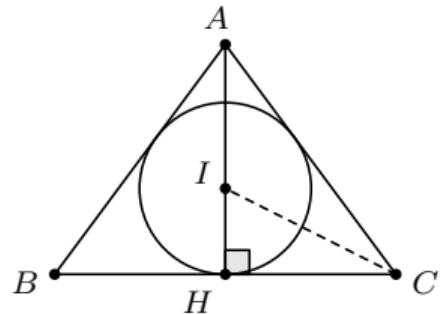
$\triangle ABC$  có  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp thì

$$S_{ABC} = \frac{r(AB + BC + CA)}{2}.$$

### Bài 2a

Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 40\text{cm}$  và  $BC = 48\text{cm}$ .

Gọi  $O, I$  theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.



Lời giải.

Kẻ  $AH \perp BC$ , tính được  $AH = 32$ . Vì  $CI$  là tia phân giác  $\widehat{ACH}$  nên

$$\frac{IH}{CH} = \frac{AI}{AC} \iff \frac{IH}{24} = \frac{32 - IH}{40}.$$

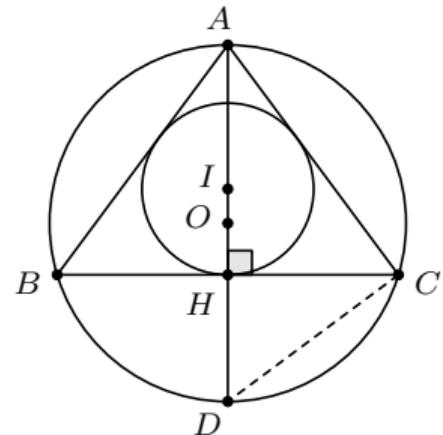
Tính được  $IH = 12$  (cm).

□

## Bài 2

Tính

- b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp,
- c) Khoảng cách  $OI$ .



Lời giải.

- b) Kẻ đường kính  $AD$  của  $(O)$ . Áp dụng hệ thức lượng cho  $\triangle ACD$  vuông tại  $C$  có đường cao  $CH$  thì

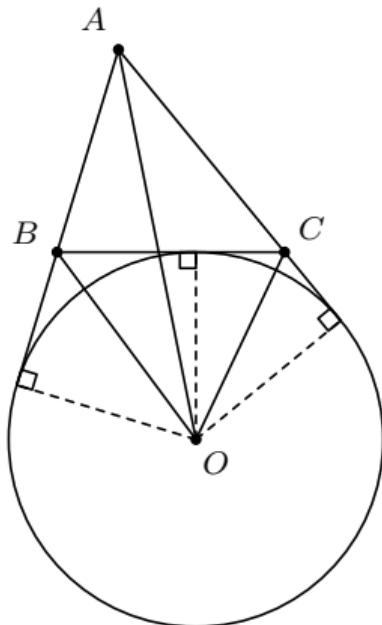
$$AD = \frac{AC^2}{AH} = 50 \implies OA = 25 \text{ (cm)}.$$

- c) Vì  $OH = AH - OA = 7$  nên

$$OI = IH - OH = 5 \text{ (cm)}.$$

### Bài 3a

Chứng minh rằng  $S = R_a(p - a) = R_b(p - b) = R_c(p - c)$ .



Lời giải.

Gọi  $O$  là tâm đường tròn bàng tiếp góc  $A$ . Có

$$\begin{aligned}S &= S_{ABO} + S_{ACO} - S_{BCO} \\&= \frac{1}{2}R_a(c + b - a) \\&= R_a\left(\frac{a + b + c}{2} - a\right) \\&= R_a(p - a).\end{aligned}$$

Tương tự thì  $S = R_b(p - b) = R_c(p - c)$ . □

### Bài 3b

Chứng minh rằng  $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$ .

Lời giải.

Theo câu a thì  $\frac{1}{R_a} = \frac{p-a}{S}$ . Hoàn toàn tương tự có được

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} &= \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} \\&= \frac{3p - (a+b+c)}{S} \\&= \frac{a+b+c}{2S} \quad (\text{vì } a+b+c = 2p) \\&= \frac{1}{r}.\end{aligned}$$



### Bài 3c

Chứng minh rằng  $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}$ .

Lời giải.

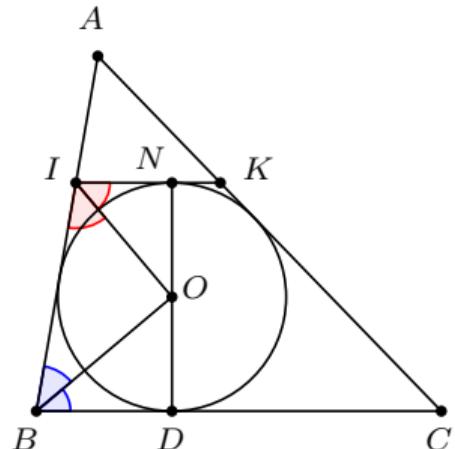
Chú ý rằng  $h_a a = h_b b = h_c c = 2S$ . Biến đổi

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a} &= \frac{c}{2S} + \frac{b}{2S} - \frac{a}{2S} \\ &= \frac{p-a}{S} \\ &= \frac{1}{R_a}.\end{aligned}$$



### Bài 4a

Đường tròn  $(O, r)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  và tiếp xúc  $BC$  tại  $D$ . Vẽ đường kính  $DN$  của  $(O)$ , tiếp tuyến tại  $N$  của  $(O)$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $I, K$ . Chứng minh rằng  $NI \cdot DB = NK \cdot DC = r^2$ .



Lời giải.

Vì  $IN \parallel BD$  (cùng vuông góc  $ND$ ) nên

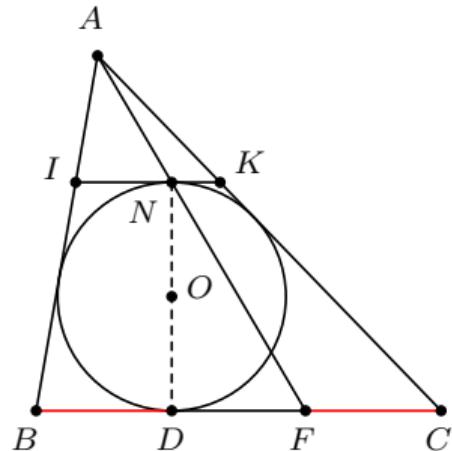
$$\widehat{NIB} + \widehat{IBD} = 180^\circ \implies \widehat{NIO} + \widehat{OBD} = 90^\circ.$$

Do đó  $\widehat{NIO} = \widehat{BOD}$  (cùng phụ  $\widehat{OBD}$ ), suy ra  $\triangle NIO \sim \triangle DOB$  (g.g). Do đó

$$\frac{NI}{NO} = \frac{DO}{DB} \implies NI \cdot DB = NO \cdot DO = r^2.$$

## Bài 4b

Gọi  $F$  là giao điểm  $AN$  với  $BC$ , chứng minh  $BD = CF$ .



Lời giải.

Từ câu a có được

$$\frac{NK}{BD} = \frac{NI}{CD} = \frac{NK + NI}{BD + CD} = \frac{IK}{BC}.$$

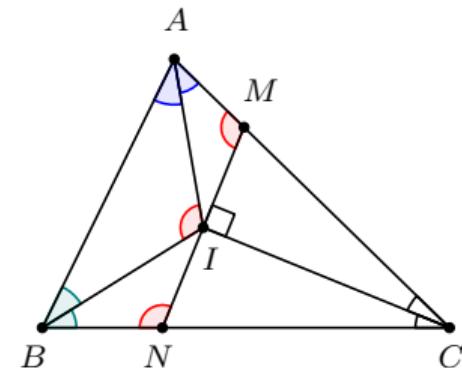
Mặt khác vì  $IK \parallel BC$  nên

$$\frac{NK}{CF} = \frac{AK}{AC} = \frac{IK}{BC}.$$

Do vậy  $BD = CF$ . □

### Bài 5a

Cho  $\triangle ABC$  có đường tròn nội tiếp ( $I$ ). Đường vuông góc với  $CI$  tại  $I$  cắt  $AC, AB$  theo thứ tự ở  $M, N$ . Chứng minh rằng  $AM \cdot BN = IM^2 = IN^2$ .



Lời giải.

Chứng minh được

$$\widehat{AMI} = \widehat{AIB} = \widehat{INB} \left( = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2} \right).$$

Do đó  $\triangle IMA \sim \triangle BIA$  (g.g) và  $\triangle BIA \sim \triangle BNI$  (g.g). Suy ra  $\triangle IMA \sim \triangle BNI$

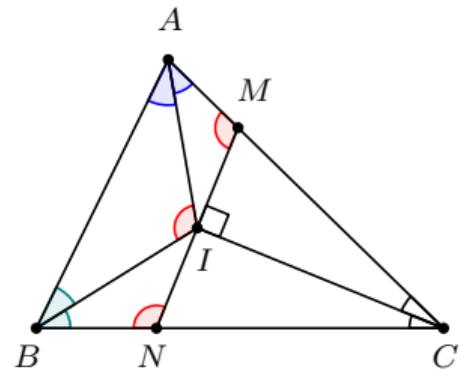
$$\Rightarrow \frac{IM}{BN} = \frac{AM}{IN} \Rightarrow AM \cdot BN = IM \cdot IN.$$

Mà  $IM = IN$  nên  $AM \cdot BN = IM^2 = IN^2$ .

□

### Bài 5b

Chứng minh rằng  $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ .

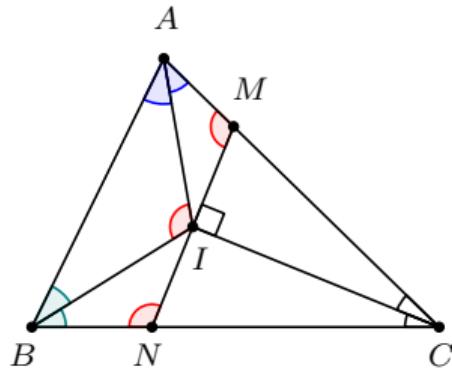


Lời giải

Vì  $\triangle IMA \sim \triangle BIA$  nên

$$IA^2 = AB \cdot AM \implies \frac{IA^2}{bc} = \frac{AM}{b}.$$

Tương tự thì  $\frac{IB^2}{ca} = \frac{BN}{a}$ .



Lời giải  
Biến đổi

$$\begin{aligned}
 IC^2 &= CM^2 - IM^2 \\
 &= CM \cdot CN - AM \cdot BN \text{ (câu a)} \\
 &= (b - AM)(a - BN) - AM \cdot BN \\
 &= ab - aAM - bBN.
 \end{aligned}$$

Do vậy

$$\frac{IC^2}{ab} = 1 - \frac{AM}{b} - \frac{BN}{a} = 1 - \frac{IA^2}{bc} - \frac{IB^2}{ca}.$$

Vậy có được đẳng thức cần chứng minh.