Đại số - Bài 4: Hệ thức Vi-ét - tiếp theo (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Bài 1

Tìm hai số a, b biết rằng

a) $a + b = 32$ và $ab = 231$,

b) $a + b = -8$ và $ab = -105$,

c) $a + b = 2$ và $ab = 9$,

d) $a + b = 2$ và $ab = -1$.

Lời giải.

a) 11 và 21,

b) 7 và -15,

c) Không tồn tại hai số,

d) $1 + \sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$.

$\square$

Bài 2

Lập một phương trình bậc hai có các nghiệm bằng

a) $\sqrt{3}$ và $2\sqrt{3}$,

b) $1+\sqrt{5}$ và $1-\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=6.$$

Vậy $\sqrt{3}$ và $2\sqrt{3}$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-3\sqrt{3}x+6=0$.

b) $x^2-2x-4=0$. $\square$

Bài 3a

Lập một phương trình có các hệ số hữu tỉ và có nghiệm $1+\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $x = 1+\sqrt{2}$ thì $x-1=\sqrt{2}$. Suy ra

$$(x-1)^2 = 2 \iff x^2-2x-1=0.$$

Vậy $1+\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình $x^2-2x-1=0$. $\square$

Bài 3b

Lập một phương trình có các hệ số hữu tỉ và có nghiệm $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ thì $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Suy ra

$$(x^2 - 5)^2 = 24 \iff x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. $\square$

Bài 4a

Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng bình phương các nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{1}$$

Lời giải.

Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = -1$. Như vậy

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \\ x_1^2 \cdot x_2^2 &= (x_1x_2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Vậy x_1^2 và x_2^2 là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 - 6X + 1 = 0.$$

$\square$

Bài 4b

Lập phương trình bậc hai có các nghiệm bằng nghịch đảo các nghiệm của phương trình

$$x^2 + mx - 2 = 0. \tag{2}$$

Lời giải.

Gọi hai nghiệm của (2) là x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1 x_2 = -2$. Như vậy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{-1}{2}.$$

Vậy $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 - \frac{m}{2} X - \frac{1}{2} = 0 \iff 2X^2 - mX - 1 = 0.$$

$\square$

Bài 5a

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ và $xy + yz + zx = 4$. Tính $x + y + z$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ &= 8 + 2 \times 4 \\ &= 16.\end{aligned}$$

Vì $x + y + z > 0$ nên $x + y + z = 4$. $\square$

Bài 5b

Chứng tỏ $x, y, z \leq \frac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$xy = 4 - z(x + y) = 4 - z(4 - z) = z^2 - 4z + 4.$$

Như vậy

$$x + y = 4 - z \quad \text{và} \quad xy = z^2 - 4z + 4.$$

Vì tồn tại x, y nên $(4 - z)^2 \geq 4(z^2 - 4z + 4)$, tương đương

$$z(3z - 8) \leq 0 \iff 0 \leq z \leq \frac{8}{3}.$$

Hoàn toàn tương tự thì $x, y \leq \frac{8}{3}$. $\square$

Bài 5c

Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{32}{27}$.

Lời giải.

Từ câu b suy ra $(3x-8)(3y-8)(3z-8) \leq 0$, khai triển vế trái thì bất đẳng thức tương đương

$$27xyz - 72(xy+yz+zx) + 192(x+y+z) - 512 \leq 0.$$

Thay $xy+yz+zx = x+y+z = 4$ thì ta có

$$27xyz - 72 \times 4 + 192 \times 4 - 512 \leq 0 \iff xyz \leq \frac{32}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng $\frac{2}{3}$ và một số bằng $\frac{8}{3}$. $\square$

Bài 6

Cho hai số x, y thỏa mãn $x + y = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x^3 + y^3.$$

Lời giải.

Đặt $S = x + y, P = xy$ thì từ giả thiết ta có

$$S = S^2 - 3P \iff P = \frac{S^2 - S}{3}.$$

Thấy rằng $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = S^2$. Vì $S^2 \geq 4P$ nên

$$S^2 \geq 4 \cdot \frac{S^2 - S}{3} \iff S(S - 4) \leq 0 \iff 0 \leq S \leq 4.$$

Như vậy $A = S^2 \leq 16$, dấu bằng xảy ra $\iff x = y = 2$. $\square$