

# Đại số - Bài 4: Hệ thức Vi-ét - tiếp theo

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

### Định lí

Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Điều kiện để có hai số đó là  $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$ . (ý nghĩa là  $(a + b)^2 \geq 4ab$ )

### Ví dụ 1

Tìm hai số biết rằng

a) Tổng  $S = 2$  và tích  $P = 6$ ,

b) Tổng  $S = 1$  và tích  $P = -6$ .

Lời giải.

a) Vì  $S^2 = 4 < 24 = 4P$  nên không có hai số thỏa đề.

b) Hai số là nghiệm của của phương trình  $x^2 - x - 6 = 0$ . Có  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25$  nên phương trình có nghiệm

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2 \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3.$$

Vậy hai số cần tìm là  $-2$  và  $3$ .



## Ví dụ 2

Cho phương trình

$$x^2 + 5x - 1 = 0. \quad (*)$$

Lập một phương trình có các nghiệm là lập phương các nghiệm của (\*).

Ý nghĩa đề bài: Cần tìm phương trình có hai nghiệm là  $x_1^3$  và  $x_2^3$ .

### Cách 1

Thấy rằng (\*) có hai nghiệm  $x_1 = \frac{-5+\sqrt{29}}{2}$  và  $x_2 = \frac{-5-\sqrt{29}}{2}$ . Khi đó

$$x_1^3 = -5 + \frac{29\sqrt{29}}{8} \quad \text{và} \quad x_2^3 = -5 - \frac{29\sqrt{29}}{8}.$$

Vì  $x_1^3 + x_2^3 = -10$  và  $x_1^3 \cdot x_2^3 = -1$  nên  $x_1^3$  và  $x_2^3$  là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 + 10X - 1 = 0.$$

## Cách 2

Gọi hai nghiệm của (\*) là  $x_1, x_2$  thì  $x_1 + x_2 = -5$  và  $x_1 x_2 = -1$ . Như vậy

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -10$$

$$x_1^3 \cdot x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = -1.$$

Vậy  $x_1^3$  và  $x_2^3$  là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 + 10X - 1 = 0.$$

### Ví dụ 3

Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 5$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Chứng minh rằng  $1 \leq x, y, z \leq \frac{7}{3}$ .

Lời giải.

Ta có  $x^2 + y^2 = 9 - z^2$ , tương đương

$$(x + y)^2 - 2xy = 9 - z^2 \iff (5 - z)^2 - 2xy = 9 - z^2.$$

Dẫn đến  $xy = z^2 - 5z + 8$ , như vậy ta có

$$x + y = 5 - z \quad \text{và} \quad xy = z^2 - 5z + 8.$$

Vì tồn tại  $x, y$  nên  $(5 - z)^2 \geq 4(z^2 - 5z + 8)$ , tương đương

$$3z^2 - 10z + 7 \leq 0 \iff (z - 1)(3z - 7) \leq 0 \iff 1 \leq z \leq \frac{7}{3}.$$

Hoàn toàn tương tự thì  $1 \leq x, y \leq \frac{7}{3}$ .

