Đại số - Bài 1: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải phương trình nghiệm nguyên

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

3/2023

Trong nội dung của "Chương 4 - Bài 3: Nghiệm của phương trình bậc hai" có kết quả

Điều kiện để có nghiệm nguyên

Cho các số $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ thì Δ là số chính phương.

Chứng minh.

Vì phương trình có nghiệm

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{Q}$$

nên $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$. Mà $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{Z}$ nên Δ phải là số chính phương. $\square$

Ví dụ 1

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + 4y = 3$.

Lời giải

Phương trình tương đương

$$x^2 + 2(2y+1)x + 3y^2 + 4y - 3 = 0.$$

Xem như đây là một phương trình bậc hai theo ẩn x với tham số y, ta có

$$\Delta'_x = (2y+1)^2 - (3y^2 + 4y - 3) = y^2 + 4.$$

Phương trình có nghiệm nguyên $\iff$ Δ'_x phải là số chính phương. Đặt $y^2 + 4 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$(y-k)(y+k) = -4.$$

Lời giải.

Đặt $y^2+4=k^2$ với $k\in\mathbb{N}$ thì

$$(y-k)(y+k)=-4.$$

Vì $y-k\le y+k$ và $y-k\equiv y+k \pmod 2$ nên

$y-k$	-2	2	-4	-1
$y+k$	2	-2	1	4
y	0			

Với $y=0$ thì ta có $x^2+2x=3$, do đó $x\in\{-3,1\}$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x,y)\in\Big\{(-3,0),(1,0)\Big\}.$$

$\square$

Ví dụ 2

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y + 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình tương đương

$$2y^2 - 2y(x+2) + x^2 - 2x + 6 = 0.$$

Xem như đây là một phương trình bậc hai theo ẩn y với tham số x, ta có

$$\Delta'_y = (x+2)^2 - 2(x^2 - 2x + 6) = -x^2 + 8x - 8.$$

Lời giải.

Ta có

$$\Delta'_y = -x^2 + 8x - 8.$$

Vì phương trình có nghiệm nên $\Delta'_y \geq 0$, do đó

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 8 \leq 0 &\iff (x-4)^2 \leq 8 \\ &\iff -\sqrt{8} \leq x - 4 \leq \sqrt{8} \\ &\iff \underbrace{4 - \sqrt{8}}_{1{,}17} \leq x \leq \underbrace{4 + \sqrt{8}}_{6{,}83}. \end{aligned}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Với mỗi giá trị của x thì thay vào để tìm y ta có

$$(x, y) \in \left\{(2, 1), (2, 3), (6, 3), (6, 5)\right\}.$$

$\square$

Chú ý

Khi hệ số cao nhất của Δ âm, ví dụ như

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -x^2 + 2x + 3\\ \Delta_2 &= -3y^2 + 5\\ \Delta_3 &= -y^3 + 2y^2 - y - 4.\end{aligned}$$

Ta thường xử lí bằng cách sử dụng tính chất $\Delta \geq 0$.