

Đại số - Bài 2: Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

8/2022

Bài 1

Rút gọn

a) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$,

b) $\frac{\sqrt{a^4(a-b)^2}}{a-b}$ với $a > b$,

c) $ab^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < 0$ và $b \neq 0$,

d) $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1, b < 0$.

Đáp án

a) $\frac{a}{2}$

b) a^2

c) $-\sqrt{3}$

d) $\frac{-(2a+3)}{b}$

Bài 2

Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}},$

b) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}},$

c) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}.$

Đáp án

a) $\sqrt{10} - 1$

b) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5} - 2) - (\sqrt{5} + 2) = -4$

Bài 2d

Rút gọn biểu thức $D = \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$.

Cách 1

Biến đổi

$$D^2 = (4 - \sqrt{7}) - 2\sqrt{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} + (4 + \sqrt{7}) = 8 - 2 \cdot 3 = 2.$$

Vì $\sqrt{4 - \sqrt{7}} < \sqrt{4 + \sqrt{7}}$ nên $D < 0$, do vậy $D = -\sqrt{2}$.

Cách 2

Biến đổi

$$D\sqrt{2} = \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = (\sqrt{7} - 1) - (\sqrt{7} + 1) = -2.$$

Suy ra $D = -\sqrt{2}$.

Bài 2e

Rút gọn biểu thức $E = \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(\sqrt{3} + 2)}} \\ &= \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$



Bài 2f

Rút gọn biểu thức $F = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{4 + \sqrt{15}}(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}\sqrt{4 + \sqrt{15}} \\ &= \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \\ &= 2. \end{aligned}$$



Bài 4a

Chứng minh $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Lời giải.

Giả sử $\sqrt{5} - \sqrt{2} = a$ là số hữu tỉ. Khi đó

$$7 - 2\sqrt{10} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = a^2.$$

Suy ra

$$\sqrt{10} = \frac{7 - a^2}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Mặt khác vì 10 không phải là số chính phương nên $\sqrt{10}$ là số vô tỉ (mâu thuẫn).
Vậy $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ là số vô tỉ. □

Bài 5a

Lập một phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sao cho $1 + \sqrt{3}$ là một nghiệm của phương trình.

Lời giải.

Đặt $x = 1 + \sqrt{3}$, khi đó $x - 1 = \sqrt{3}$. Suy ra

$$(x - 1)^2 = 3 \iff x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Vậy $1 + \sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$.



Bài 5b

Lập một phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sao cho $3 - 3\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình.

Đáp án

$$x^2 - 6x - 9 = 0$$

Bài 6

Biết rằng có một cách tính 998^2 như sau:

$$998^2 = (998^2 - 4) + 4 = (998 - 2)(998 + 2) + 4 = 996 \cdot 1000 + 4 = 996000 + 4 = 996004.$$

Tìm tổng các chữ số của x , trong đó $\sqrt{x} = 99 \dots 996$ (có 50 chữ số 9).

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} x &= (x - 16) + 16 = (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4) + 16 \\ &= \underbrace{99 \dots 992}_{50 \text{ số } 9} \times \underbrace{100 \dots 00}_{51 \text{ số } 0} + 16 = \underbrace{99 \dots 99200 \dots 00}_{50 \text{ số } 9 \text{ \& } 51 \text{ số } 0} + 16 \\ &= \underbrace{99 \dots 99200 \dots 0016}_{50 \text{ số } 9 \text{ \& } 49 \text{ số } 0} \end{aligned}$$

Vậy tổng các chữ số của x bằng $9 \times 50 + 2 + 1 + 6 = 459$.

