Đại số - Bài 2: Ứng dụng phương trình bậc hai để giải bất đẳng thức

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Ví dụ 1

Cho hai số x, y thỏa mãn $x^2 - x + y^2 - y = xy$. Chứng minh rằng $(x-1)^2 \leq \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Giả thiết tương đương

$$y^2 - (x+1)y + x^2 - x = 0.$$

Xem như đây là một phương trình bậc hai theo ẩn y (với tham số x), ta có

$$\Delta_y = (x+1)^2 - 4(x^2 - x) = -3x^2 + 6x + 1.$$

Vì phương trình có nghiệm nên $\Delta_y \geq 0$, tương đương

$$3x^2 - 6x - 1 \leq 0 \iff 3(x-1)^2 \leq 4.$$

Từ đây ta có điều cần chứng minh. $\square$

Ví dụ 2

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Cách 1

Biến đổi

$$A = \frac{3x^2 + 3x + 3 - 2x^2 - 4x - 2}{x^2 + x + 1} = 3 - \frac{2(x+1)^2}{x^2 + x + 1} \leq 3.$$

Do đó $\max A = 3$, dấu bằng xảy ra $\iff x = -1$.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2(x-1)^2}{3(x^2 + x + 1)} \geq \frac{1}{3}.$$

Do đó $\min A = \frac{1}{3}$, dấu bằng xảy ra $\iff x = 1$.

Cách 2

Biến đổi $A = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \iff A(x^2+x+1) = x^2 - x + 1$, tương đương

$$(A-1)x^2 + (A+1)x + A - 1 = 0. \qquad (*)$$

Nếu $A = 1$ thì dễ thấy $x = 0$. Xét $A \neq 1$, xem $(*)$ là một phương trình bậc hai theo ẩn x (với tham số A), ta có

$$\Delta_x = -3A^2 + 10A - 3.$$

Để biểu thức A xác định thì $(*)$ phải có nghiệm. Khi đó $\Delta_x \geq 0$, tương đương

$$3A^2 - 10A + 3 \leq 0 \iff (3A-1)(A-3) \leq 0 \iff \frac{1}{3} \leq A \leq 3.$$

Tìm được $\max A = 3 \iff x = -1$ và $\min A = \frac{1}{3} \iff x = 1$.

Định lí

Cho hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- $x \geq \beta$ hoặc
- $x \leq \gamma$ hoặc
- $\beta \leq x \leq \gamma$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của $f(x)$ thuộc tập hợp sau

$$S = \left\{ f(\beta), f(\gamma), f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right\}. \quad f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Nghĩa là

$$f(x) \geq \min S \quad \text{hoặc} \quad f(x) \leq \max S.$$

Chú ý

Định lí được sử dụng để nháp, không được sử dụng trong bài làm.

Ví dụ 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 4x^2 - 12x + 2$ với $x \leq -1$.

Nháp: $f(x) = (2x-3)^2 - 7$. Như vậy cần quan tâm

$$f(-1) \quad \text{và} \quad \cancel{f\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Do vậy $f(x) \geq f(-1) = 18$.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $4x^2 - 12x + 2 \geq 18$, tương đương

$$4x^2 - 12x - 16 \geq 0 \iff x^2 - 3x - 4 \geq 0 \iff (x+1)(x-4) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì $x \leq -1$.
Vậy $\min f(x) = 18$, dấu bằng xảy ra $\iff x = -1$. $\square$

Ví dụ 4

Tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ với $-3 \leq x \leq 0$.

Nháp: $f(x) = -(x-1)^2 + 3$. Như vậy cần quan tâm

$$f(-3), \quad f(0) \quad \text{và} \quad \cancel{f(1)}.$$

$\max\{f(-3), f(0)\} = \max\{-13, 2\} = 2$ nên $f(x) \leq 2$.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $-x^2 + 2x + 2 \leq 2$, tương đương

$$x^2 - 2x \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0.$$

Vì $x \leq 0$ nên $x - 2 < 0$, suy ra $x(x-2) \leq 0$. Như vậy bất đẳng thức cuối đúng.
Vậy $\max f(x) = 2$, dấu bằng xảy ra $\iff x = 0$. $\square$