Hình học - Bài 2: Dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Nguyễn Thành Phát

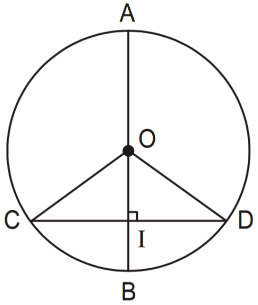
Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

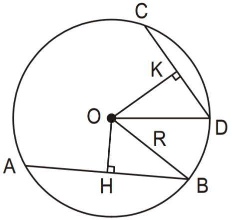
Đường tròn (O) có đường kính AB và dây CD có trung điểm I.

- $AB \perp CD \implies I \in AB$.
- $I \in AB$ và $O \notin CD \implies AB \perp CD$.



Với AB, CD là hay dây của đường tròn (O). Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, CD. Khi đó

$$OH^2 + \frac{AB^2}{4} = OK^2 + \frac{CD^2}{4}.$$



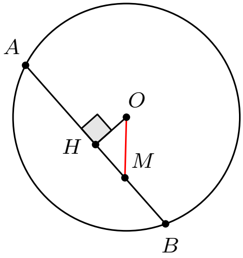
Định lí

Trong một đường tròn

- Hai dây bằng nhau $\iff$ chúng cách đều tâm.
- Với hai dây không bằng nhau, dây lớn hơn $\iff$ nó gần tâm hơn.

Ví dụ 1

Cho đường tròn (O) và điểm M nằm trong đường tròn. Chứng minh rằng dây đi qua M và có độ dài ngắn nhất chính là dây vuông góc với OM.



Lời giải.

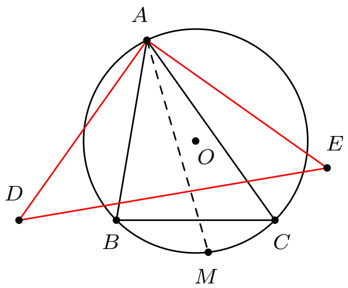
Với dây AB bất kì đi qua M của (O), kẻ $OH \perp AB$. Khi đó

$$AB \text{ nhỏ nhất} \iff OH \text{ lớn nhất.}$$

Tuy nhiên $OH \leq OM$. Vậy AB nhỏ nhất $\iff H \equiv M \iff AB \perp OM$. $\square$

Ví dụ 2

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB, AC. Tìm vị trí M để độ dài DE lớn nhất.

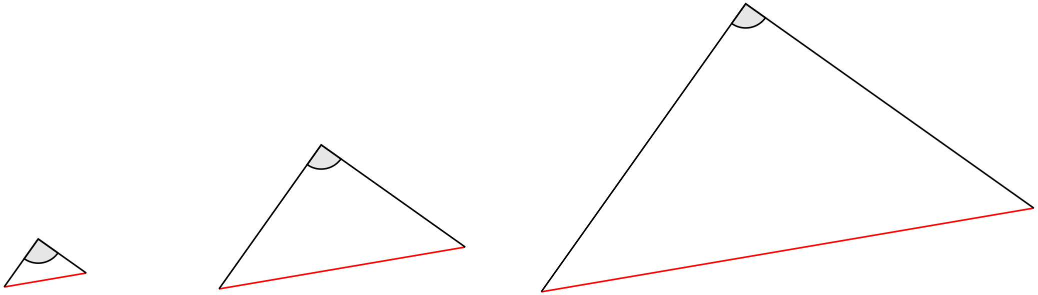


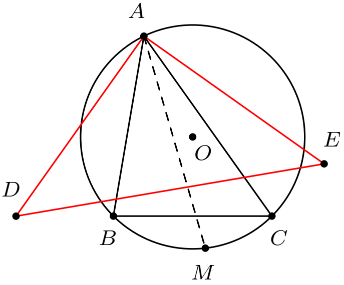
Lời giải

Ta có $AD = AM = AE$ và

$$\widehat{DAE} = \widehat{DAM} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC}.$$

Vậy $\triangle ADE$ cân tại A và có $\widehat{DAE}$ không đổi.



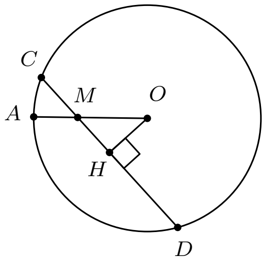


Lời giải.

Vậy $\triangle ADE$ cân tại A và có $\widehat{DAE}$ không đổi.
Do đó DE lớn nhất $\iff AD = AM$ lớn nhất $\iff AM$ là đường kính của (O). $\square$

Ví dụ 3

Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = 11$cm. Điểm M thuộc đoạn OA sao cho $OM = 7$cm, qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính độ dài MC và MD biết $MC < MD$.



Lời giải.

Kẻ $OH \perp CD$ thì $HD = \frac{CD}{2} = 9$. Ta có

$$OH^2 = OD^2 - HD^2 = 40 \implies MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = 3.$$

Do đó $MD = MH + HD = 12$cm và $MC = CD - MD = 6$cm. $\square$