

Chuyên đề - ĐS 10: Hệ phương trình thuần nhất (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

4/2023

Bài 1a

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$.

Lời giải.

Trường hợp $y = 0$ vô nghiệm nên $y \neq 0$. Ta có

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \implies 6(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(8x + 2y).$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì có phương trình

$$6(t^3 - 1) = (t^2 - 3)(8t + 2) \implies t \in \{-4, 0, 3\}.$$

Từ đây tìm được

$$(x, y) \in \left\{ \left(-4\sqrt{\frac{6}{13}}, \sqrt{\frac{6}{13}} \right), \left(4\sqrt{\frac{6}{13}}, -\sqrt{\frac{6}{13}} \right), (-3, -1), (3, 1) \right\}.$$



Bài 1b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5 + y^5 = 1 \\ x^9 + y^9 = x^4 + y^4. \end{cases}$

Lời giải.

Trường hợp $y = 0$ thì $x = 1$. Xét $y \neq 0$, ta có

$$x^9 + y^9 = (x^4 + y^4)(x^5 + y^5).$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì có

$$t^9 + 1 = (t^4 + 1)(t^5 + 1) \implies t \in \{-1, 0\}.$$

Từ đây tìm được

$$(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}.$$



Bài 1c

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = xy + 2y \\ 2x^3 + 3xy^2 = 2y^2 + 3x^2y \end{cases}$.

Lời giải.

Trường hợp $y = 0$ thì $x = 0$. Xét $y \neq 0$, ta có

$$\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 2y \\ 2x^3 - 3x^2y + 3xy^2 = 2y^2 \end{cases} \implies (2x^3 - 3x^2y + 3xy^2)2y = 2y^2(x^2 - xy + 2y^2).$$

Suy ra $2x^3 - 3x^2y + 3xy^2 = y(x^2 - xy + 2y^2)$. Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì có

$$2t^3 - 3t^2 + 3t = t^2 - t + 2 \implies t = 1.$$

Từ đây tìm được

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}.$$



Bài 1d

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 \\ y^4 + y = x \end{cases}$.

Lời giải.

Trường hợp $y = 0$ thì vô nghiệm nên $y \neq 0$. Ta có

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 \\ y^4 = x - y \end{cases} \implies (x+y)(x^2+y^2)(x-y) = 15y^4.$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì có

$$(t+1)(t^2+1)(t-1) = 15 \implies t \in \{-2, 2\}.$$

Từ đây tìm được

$$(x, y) \in \left\{ (2\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{3}), (2, 1) \right\}.$$



Bài 2a

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) \end{cases}$.

Lời giải.

Thay $3 = x^2 - xy + y^2$ vào phương trình sau ta có

$$2x^3 - 9y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Trường hợp $y = 0$ vô nghiệm nên $y \neq 0$. Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì có

$$2t^3 - 9 = (t - 1)(t^2 + t + 1) \implies t = 2.$$

Từ đây tìm được

$$(x, y) \in \{(-2, -1), (2, 1)\}.$$



Bài 2b

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3y^3 = 2x^3 + y^3 \\ x + y = 2xy^3 \end{cases}$.

Lời giải.

Trường hợp $xy = 0$ thì có nghiệm $x = y = 0$. Xét $xy \neq 0$, hệ tương đương

$$\begin{cases} 3 = \frac{2}{y^3} + \frac{1}{x^3} \\ \frac{1}{y^3} + \frac{1}{xy^2} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 + 2b^3 = 3 \\ ab^2 + b^3 = 2 \end{cases}$$

với $a = \frac{1}{x}$ và $b = \frac{1}{y}$. Từ đây có một hệ đẳng cấp, tìm được

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), \square, \square\}.$$



Bài 2c

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4(x^2 + y^2) = \frac{13}{y} + \frac{14}{x} \\ 2(x^2 - y^2) = \frac{13}{y} - \frac{14}{x} \end{cases}$.

Lời giải.

Lần lượt cộng hai vế và trừ hai vế ta có

$$\begin{cases} 6x^2 + 2y^2 = \frac{26}{y} \\ 2x^2 + 6y^2 = \frac{28}{x} \end{cases} \implies \begin{cases} y(3x^2 + y^2) = 13 \\ x(x^2 + 3y^2) = 14 \end{cases}.$$

Từ đây có một hệ đẳng cấp, tìm được

$$x = 2 \quad \text{và} \quad y = 1.$$



Bài 2d

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 3 \\ 2\sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 1 \end{cases}.$$

Lời giải.

ĐKXD: $x, y > 0$. Ta có
$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \\ 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases}.$$
 Lần lượt cộng hai vế và trừ hai vế thu được

$$\begin{cases} \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = 2 \\ \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{x+y} \end{cases} \implies \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{4}{x+y}.$$

Tương đương $\frac{9}{4x} - \frac{1}{4y} = \frac{4}{x+y}$. Tìm được $x = y = 1$. □