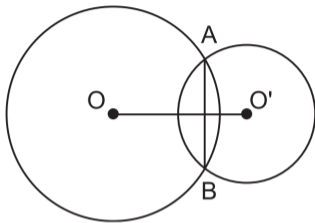


Hình học - Bài 6: Vị trí tương đối của hai đường tròn

Nguyễn Thành Phát

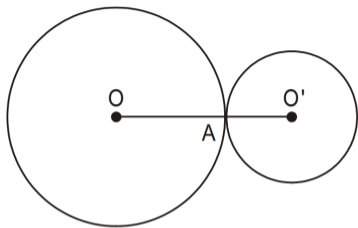
Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

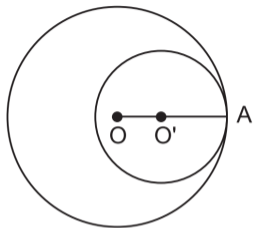


Hai đường tròn **cắt nhau** nếu có hai điểm chung (gọi là A, B).

- A, B gọi là giao điểm.
- Đoạn thẳng AB gọi là dây chung.
- OO' (đường nối tâm) là đường trung trực của AB .



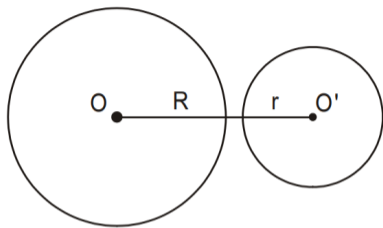
Hình: Tiếp xúc trong



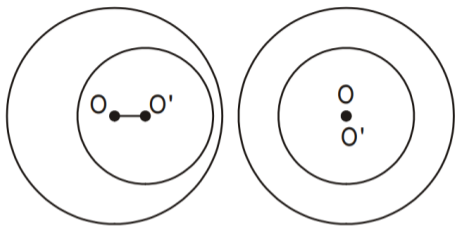
Hình: Tiếp xúc ngoài

Hai đường tròn **tiếp xúc** nếu chỉ có một điểm chung (gọi là A).

- A gọi là tiếp điểm.
- A thuộc đường thẳng OO' .



Hình: Hai đường tròn ở ngoài nhau

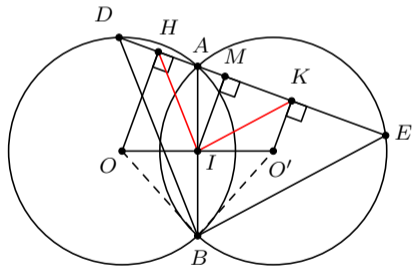


Hình: Đường tròn (O) đựng đường tròn (O')

Hai đường tròn **không giao nhau** nếu không có điểm chung. Nếu hai tâm trùng nhau thì gọi là hai đường tròn đồng tâm.

Ví dụ 1

Cho hai đường tròn (O) , (O') có cùng bán kính, cắt nhau tại A và B . Kẻ cát tuyến chung DAE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Chứng minh rằng $BD = BE$.



Lời giải.

Gọi I là giao điểm AB với OO' thì $IO = IO'$.

Kẻ $OH, IM, O'K$ vuông góc HK . Hình thang $HOO'K$ có I là trung điểm OO' và IM song song hai đáy nên

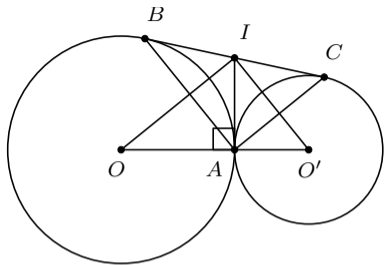
$$M \text{ là trung điểm } HK \implies IH = IK.$$

Do đó $BD = 2IH = 2IK = BE$.



Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O)$ và $C \in (O')$.

- Tính \widehat{BAC} .
- Tính BC .



Lời giải.

- a) Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A cắt BC tại I thì $IA = IB = IC$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A , do vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
- b) Chứng minh được $\widehat{OIO'} = 90^\circ$. Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle IOO'$ vuông tại I có đường cao IA thì

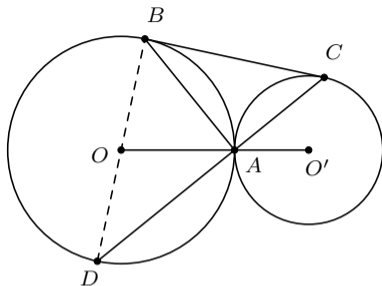
$$AI^2 = AO \cdot AO' = RR'.$$

Do đó $BC = 2AI = 2\sqrt{RR'}$.



Ví dụ 2

- c) Gọi D là giao điểm CA với (O) , trong đó $D \neq A$. Chứng minh rằng B, O, D thẳng hàng.



Lời giải.

Theo câu a thì

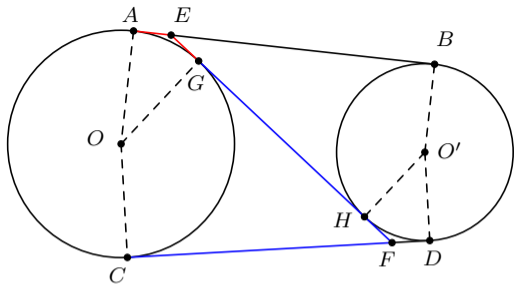
$$\widehat{BAC} = 90^\circ \implies \widehat{BAD} = 90^\circ.$$

$\triangle ABD$ vuông tại A và nội tiếp đường tròn (O) nên BD là đường kính, do đó ba điểm B, O, D thẳng hàng.



Ví dụ 3

Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB, CD với $A, C \in (O)$ và $B, D \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong cắt AB, CD tại E, F . Chứng minh rằng $AB = EF$.



Lời giải.

Gọi tiếp điểm của EF với $(O), (O')$ là G, H . Ta có

$$\begin{aligned} AB + CD &= (\textcolor{red}{AE} + EB) + (\textcolor{blue}{CF} + FD) \\ &= (\textcolor{red}{AE} + \textcolor{blue}{CF}) + (EB + FD) \\ &= (\textcolor{red}{EG} + \textcolor{blue}{GF}) + (EH + HF) \\ &= EF + EF = 2EF. \end{aligned}$$

Mặt khác $AB = CD$ (đối xứng nhau qua OO') nên $AB = EF$.

