

Chuyên đề - ĐS 3: Phương trình bậc cao (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

Bài 1

Giải các phương trình sau

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0,$

b) $x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = 0,$

c) $x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0,$

d) $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0.$

Gợi ý

a) $(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 0,$

b) $(x + 1)(x^2 + 3x - 1) = 0,$

c) $(x + 5)(x - 3)^2 = 0,$

d) $(x - 1)(x + 1)(2x - 1)(3x + 1) = 0.$

Bài 2

Giải các phương trình sau

a) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16,$

b) $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24.$

Đáp án

a) $x \in \{-5, -3\},$

b) $x \in \{-3, 2\}.$

Bài 2c

Giải phương trình $2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9$.

Lời giải.

Nhân 8 vào hai vế ta được

$$8x(8x - 1)^2(8x - 2) = 72.$$

Đặt $y = 8x - 1$ thì ta có

$$(y + 1)y^2(y - 1) = 72 \iff y^2 = 9.$$

Từ đây tìm được $x \in \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$.



Bài 2d

Giải phương trình $(2x - 1)(4x + 5)(8x + 3)(16x - 15) = 99x^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= [(2x - 1)(16x - 15)] \cdot [(4x + 5)(8x + 3)] \\ &= (32x^2 - 46x + 15)(32x^2 + 52x + 15) \end{aligned}$$

Vậy phương trình $\iff (32x^2 - 46x + 15)(32x^2 + 52x + 15) = 99x^2$, vì $x = 0$ không phải nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta có

$$\left(32x - 46 + \frac{15}{x}\right) \left(32x + 52 + \frac{15}{x}\right) = 99.$$

Đặt $y = 32x + \frac{15}{x}$ thì có phương trình $(y - 46)(y + 52) = 99$. Từ đây tìm được

$$y \in \{-53, 47\} \implies x \in \left\{ \frac{-53 \pm \sqrt{889}}{64}, \frac{15}{32}, 1 \right\}.$$

Bài 2

Giải các phương trình sau

$$\text{e)} \quad 3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0, \quad \text{f)} \quad 3x^4 + 4x^3 - 27x^2 + 8x + 12 = 0.$$

Đáp án

a) Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ tìm được $y \in \{1, \frac{10}{3}\}$. Vậy

$$x \in \left\{ \frac{1}{3}, 3 \right\}.$$

b) Đặt $y = x + \frac{2}{x}$ tìm được $y \in \left\{ \frac{-13}{3}, 3 \right\}$. Vậy

$$x \in \left\{ \frac{-13 \pm \sqrt{97}}{6}, 1, 2 \right\}.$$

Bài 3

Giải các phương trình sau

$$\text{a)} \quad (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0, \quad \text{b)} \quad x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42.$$

Đáp án

a) Đặt $y = x^2 - 5x$ thì có phương trình $y^2 + 10y + 24 = 0$. Tìm được

$$x \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

b) Đặt $y = x^2 + x$ thì có phương trình $y(y + 1) = 42$. Tìm được

$$x \in \{-3, 2\}.$$

Bài 3c

Giải phương trình $(x - 3)^4 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$.

Lời giải.

Đặt $y = (x - 3)^2$ thì $x^2 - 6x = y - 9$, khi đó phương trình

$$\iff y^2 - 15(y - 9 + 10) = 1 \iff (y + 1)(y - 16) = 0.$$

Vì $y \geq 0$ nên chỉ nhận nghiệm $y = 16$, khi đó

$$|x - 3| = 4 \iff x \in \{-1, 7\}.$$



Bài 3d

Giải phương trình $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$.

Lời giải.

Thấy rằng $x = 0$ không phải nghiệm nên $x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho x^2 có được

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 + \frac{3(x^2 + 1)}{x} + 2 = 0.$$

Đặt $y = \frac{x^2+1}{x}$ thì có phương trình $y^2 + 3y + 2 = 0 \iff y \in \{-2, -1\}$.

- Với $y = -2 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$.
- Với $y = -1 \iff x^2 + x + 1 = 0$. Tuy nhiên phương trình này vô nghiệm vì

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.



Bài 4a

Giải phương trình $\frac{10x^4}{(1+x^2)^2} - \frac{3x^2}{1+x^2} = 1$.

Lời giải.

Đặt $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ thì có phương trình

$$10y^2 - 3y = 1 \iff (2y - 1)(5y + 1) = 0.$$

Vì $y \geq 0$ nên chỉ nhận nghiệm $y = \frac{1}{2}$. Từ đây tìm được $x \in \{-1, 1\}$.



Bài 4b

Giải phương trình $\frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+4x+2}{x^2+2x}$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \notin \{-2, -1, 0\}$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \frac{x+(x+1)}{x(x+1)} + \frac{(x+1)+(x+2)}{(x+1)(x+2)} &= \frac{(x^2+2x)+x+(x+2)}{x(x+2)} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 1. \end{aligned}$$

Vậy $x = 1$.



Bài 4c

Giải phương trình $\frac{1}{2x^2 - x + 1} + \frac{3}{2x^2 - x + 3} = \frac{10}{2x^2 - x + 7}$.

Lời giải.

Đặt $y = 2x^2 - x + 1$ thì có

$$\frac{1}{y} + \frac{3}{y+2} = \frac{10}{y+6} \iff y^2 - y - 2 = 0.$$

Từ đây tìm được $x \in \left\{ \frac{-1}{2}, 1 \right\}$.



Bài 4d

Giải phương trình $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \neq -1$. Biến đổi

$$VT = \left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 2x \frac{x}{x+1} = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1}.$$

Do vậy khi đặt $y = \frac{x^2}{x+1}$ thì ta có phương trình

$$y^2 + 2y = 15 \iff (y+5)(y-3) = 0.$$

Cuối cùng tìm được $x \in \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \right\}$.

