

Chuyên đề - ĐS 2: Chứng minh bất đẳng thức (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Bài 1

Chứng minh rằng với số x bất kì thì

a) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 \geq 0,$ b) $x^3 + 4x + 1 > 3x^2$ với $x > 0.$

Lời giải.

a) $VT = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) = (y - 3)(y + 3)$ với $y = x^2 - 7x + 9.$

b) Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$x^3 + 4x \geq 2\sqrt{x^3 \cdot 4x} = 4x^2 > 3x^2.$$

Do đó $VT > 3x^2 + 1 > 3x^2.$



Bài 2a

Chứng minh rằng với a, b là các số bất kì thì $a^2 + b^2 \geq ab$.

Lời giải sai: $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq ab$.

Lời giải.

Cách 1: $a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$.

Cách 2: Biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 \geq ab &\iff 2a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 0 \\ &\iff (a - b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cách 3: Sử dụng hai bất đẳng thức là

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ a^2 + b^2 \geq 0 \end{cases} \implies 2(a^2 + b^2) \geq 2ab \implies a^2 + b^2 \geq ab.$$



Bài 2b

Chứng minh rằng với a, b là các số bất kì thì $2(a^4 + b^4) \geq (a + b)(a^3 + b^3)$.

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned} 2(a^4 + b^4) - (a + b)(a^3 + b^3) &= a^4 + b^4 - a^3b - b^3a \\ &= a^3(a - b) - b^3(a - b) \\ &= (a^3 - b^3)(a - b) \\ &= (a^2 + ab + b^2)(a - b)^2. \end{aligned}$$

Tương tự bài 2a, chứng minh được $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ nên

$$2(a^4 + b^4) - (a + b)(a^3 + b^3) \geq 0.$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh. □

Bài 2c

Chứng minh rằng với a, b là các số bất kì thì $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$.

Lời giải.

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + 2 &= (a^4 + 1) + (b^4 + 1) \\ &\geq 2a^2 + 2b^2 \\ &\geq 4ab. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\iff \begin{cases} a^2 = b^2 = 1 \\ a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases}$

□

Bài 2d

Chứng minh rằng với $a, b \geq 0$ thì $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

Lời giải.

Biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} 4(a^3 + b^3) &\geq (a + b)^3 \\ \iff 4(a + b)(a^2 - ab + b^2) &\geq (a + b)^3 \\ \iff 4(a^2 - ab + b^2) &\geq (a + b)^2 \\ \iff 3(a - b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$



Bài 3

Chứng minh rằng với a, b, c là các số bất kì thì

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$ b) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$

Lời giải.

a) Cộng từng vế các bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca.$

b) Áp dụng câu a ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Lại áp dụng câu a ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a + b + c).$$



Bài 3c

Chứng minh rằng với a, b, c là các số bất kì thì $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$.

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$\begin{aligned} VT &= \left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &\geq a + b + c. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\iff a = b = c = \frac{1}{2}$.

□

Bài 3d

Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$.

Lời giải.

Biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + abc &\geq ab(a + b + c) \\ \iff a^3 + b^3 &\geq ab(a + b) \\ \iff (a + b)(a^2 - ab + b^2) &\geq ab(a + b) \\ \iff a^2 - ab + b^2 &\geq ab \\ \iff (a - b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$



Bài 4a

Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 1$.

Lời giải.

Với số nguyên k bất kì thì

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1. \end{aligned}$$



Bài 4b

Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$, khi đó

$$3S = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} 2S &= 3S - S = \left(1 + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{3^{n-1}}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} < 1 \end{aligned}$$

Do vậy $S < \frac{1}{2}$.

□