Ôn tập 4: Phương trình & bất đẳng thức

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Bài 1a

Giải phương trình $\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}+\sqrt{x+9-6\sqrt{x}}=1.$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 0$, phương trình tương đương

$$|\sqrt{x}-2|+|\sqrt{x}-3|=1.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}|\sqrt{x}-2|+|\sqrt{x}-3| &= |2-\sqrt{x}|+|\sqrt{x}-3| \\ &\geq \left|(2-\sqrt{x})+(\sqrt{x}-3)\right|=1.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra

$$\iff (2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3) \geq 0 \iff 2 \leq \sqrt{x} \leq 3 \iff 4 \leq x \leq 9.$$

Vậy $4 \leq x \leq 9$. □

Bài 1b

Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$.

<u>Bài cũ:</u>

$$\sqrt{A}=B \iff \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}.$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 2$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2} &\iff 2x-1=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})^2 \\ &\iff \sqrt{(x+1)(x-2)}=0.\end{aligned}$$

Do vậy $x=2$. $\square$

Bài 1c

Giải phương trình $1+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x+3}$.

Lời giải.

Lập phương hai vế có được

$$\begin{aligned}x+3&=(1+\sqrt[3]{x-16})^3\\&=1+(x-16)+3\cdot1\cdot\sqrt[3]{x-16}\cdot(1+\sqrt[3]{x-16})\\&=x-15+3\sqrt[3]{x-16}\cdot\sqrt[3]{x+3}\end{aligned}$$

tương đương với

$$\sqrt[3]{(x-16)(x+3)}=6.$$

Từ đây tìm được $x\in\{-11,24\}$. $\square$

Bài 1d

Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=2x+3$.

<u>Phân tích:</u> Có hai nghiệm $x=0$ và $x=1$ nên cần phân tích ra nhân tử x^2-x.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq \frac{-1}{3}$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned} (x+1-\sqrt{3x+1})+(x+2-\sqrt{5x+4}) &= 0 \\ \iff \frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}} &= 0 \\ \iff (x^2-x)\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Do vậy $x \in \{0,1\}$. □

Bài 1e

Giải phương trình $\sqrt[3]{x+4}+3\sqrt[4]{x-3}=5$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 3$.

- Nếu $3 \leq x < 4$ thì

$$\sqrt[3]{x+4}+3\sqrt[4]{x-3} < \sqrt[3]{4+4}+3\sqrt[4]{4-3}=5.$$

- Nếu $x > 4$ thì

$$\sqrt[3]{x+4}+3\sqrt[4]{x-3} > \sqrt[3]{4+4}+3\sqrt[4]{4-3}=5.$$

Với $x=4$ thì thỏa đề, vậy $x=4$. □

Bài 2a

Cho các số dương a, b, c có tích bằng 1, chứng minh

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{c} = 8\sqrt{abc} = 8.$$

$\square$

Bài 2b

Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cô-si thì $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$, tương tự thì ta có

$$\begin{aligned} 2VT &= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \\ &\geq 2c + 2a + 2b \\ &= 2(a + b + c). \end{aligned}$$

□

Bài 2c

Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng có ít nhất một bất đẳng thức sai trong các bất đẳng thức sau

$$a + \frac{1}{b} < 2, \quad b + \frac{1}{c} < 2, \quad c + \frac{1}{a} < 2.$$

Lời giải.

Giả sử cả ba bất đẳng thức đều đúng, khi đó ta có

$$a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} < 6.$$

Điều này vô lí vì

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} &= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

□

Bài 3a

Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \dfrac{(a-b)^2}{8b}$.

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} < \frac{(a-b)^2}{8b} &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b} \\
\iff \frac{1}{2} &< \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8b} \\
\iff 4b &< (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \\
\iff 2\sqrt{b} &< \sqrt{a}+\sqrt{b}.
\end{aligned}$$

Bát đẳng thức cuối luôn đúng nên ta có điều cần chứng minh. □

Bài 3b

Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1.$$

Chứng minh rằng $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+d}=1-\frac{d}{1+d}&=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\\&\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, nhân bốn bất đẳng thức thu được điều cần chứng minh. $\square$