Đại số - Bài 1: Phương trình bậc nhất hai ẩn

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y có dạng

$$ax + by = c,$$

trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

Ví dụ

Các phương trình

- $3x - y = 2$,
- $2x = 3$,
- $5y = 4$,

là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

Cặp số (x_0, y_0) thỏa mãn

$$ax_0 + by_0 = c$$

được gọi là **nghiệm** của phương trình $ax + by = c$.

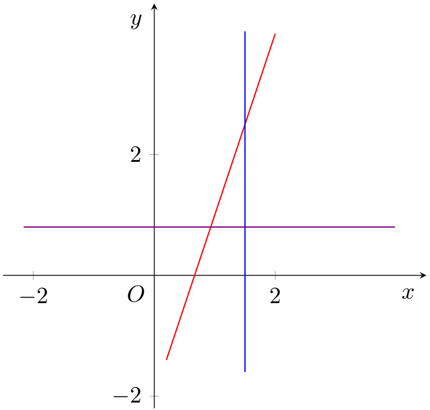
Ví dụ

Phương trình

- $3x - y = 2$ có nghiệm $(1 + t, 1 + 3t)$ với t tùy ý.
- $2x = 3$ có nghiệm $\left(\frac{3}{2}, y\right)$ với y tùy ý.
- $5y = 4$ có nghiệm $\left(x, \frac{4}{5}\right)$ với x tùy ý.

Phương trình $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm được biểu diễn bởi đường thẳng $(d) : ax + by = c$.

- Nếu $ab \neq 0$ thì (d) là đồ thị của hàm số $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, (d) cắt cả hai trục tọa độ.
- Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì đường thẳng $(d) : x = \frac{c}{a}$ song song với trục tung.
- Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng $(d) : y = \frac{c}{b}$ song song với trục hoành.



Hình: Đường thẳng biểu diễn nghiệm của $3x - y = 2$, $2x = 3$ và $5y = 4$

Ví dụ 1

Cho đường thẳng $(m-2)x+(m-1)y=1$ với m là tham số.

a) Chứng minh đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Giả sử với mọi giá trị của m thì đường thẳng luôn đi qua điểm cố định là $N(x_0, y_0)$. Khi đó

$$(m-2)x_0+(m-1)y_0=1 \iff m(x_0+y_0)-(2x_0+y_0+1)=0, \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vì hệ thức trên đúng với mọi m nên

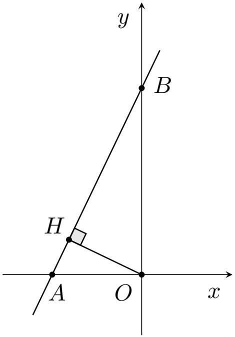
$$\begin{cases} x_0+y_0=0 \\ 2x_0+y_0+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=1 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $N(-1,1)$. $\square$

Ví dụ 1

Cho đường thẳng $(m-2)x+(m-1)y=1$ với m là tham số.

b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng là lớn nhất.



Lời giải

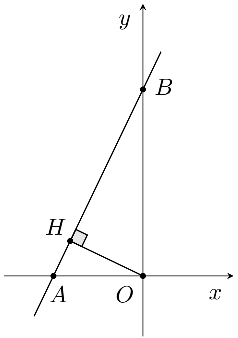
Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng.

- Nếu $m=2$ thì $y=1$ nên $h=1$.
- Nếu $m=1$ thì $x=-1$ nên $h=1$.

Xét $m \notin \{1,2\}$. Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng với trục hoành và trục tung.

Với $y=0$ thì $x=\frac{1}{m-2}$ nên

$$A\left(\frac{1}{m-2},0\right) \implies OA=\frac{1}{|m-2|}.$$



Lời giải

Tương tự thì $OB = \frac{1}{|m-1|}$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}\\ &= (m-2)^2 + (m-1)^2\\ &= 2m^2 - 6m + 5\\ &= 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Do đó $h^2 \leq 2 \iff h \leq \sqrt{2}$.

Vậy $\max h = \sqrt{2} \iff m = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 2

Giải phương trình nghiệm nguyên $3x - 5y = 8$ với điều kiện $10 \le y \le 20$.

Lời giải.

Theo đề thì $5y + 8 \vdots 3$, mặt khác

$$5y + 8 = 3(2y + 3) - (y + 1) \implies y + 1 \vdots 3 \implies y = 3k - 1.$$

Vì $10 \le y \le 20$ nên $4 \le k \le 7$.

k	4	5	6	7
$y = 3k - 1$	11	14	17	20
$x = (5y + 8)/3$	21	26	31	36

Vậy $(x, y) \in \{(21, 11), (26, 14), (31, 17), (36, 20)\}$. $\square$