

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Nguyễn Thành Phát

Tháng 11 năm 2022

§ Chuyên đề - ĐS 5: Bất đẳng thức Cô-si

Bài 1.

a) Chứng minh rằng $x^3 \geq 3x - 2$ với mọi $x > 0$.

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$.

Bài 2. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$9(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài 3.

a) Tìm hai số nguyên m, n sao cho bất đẳng thức

$$m \cdot \frac{a^4}{b} + n \cdot b^3 \geq 4a^3$$

đúng với mọi $a, b > 0$.

b) Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng $\frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} \geq a^3 + b^3 + c^3$.

Bài 4.

a) Chứng minh rằng $(1 + x^2)(1 + y^2) \geq (x + y)^2$ với mọi $x, y > 0$.

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq 4\sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Bài 5. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng

a) $b\sqrt{a} + a\sqrt{c} + c\sqrt{b} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

b) $\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq \frac{3}{4}$.