Hình học - Bài 6: Tứ giác nội tiếp

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

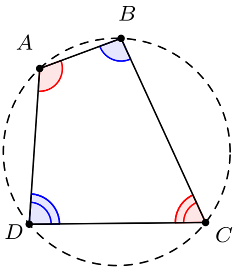
2/2023

Một tứ giác có bốn đỉnh cùng nằm trên đường tròn được gọi là **tứ giác nội tiếp**.

Định lí

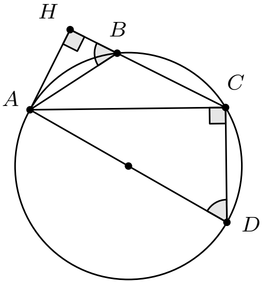
Cho tứ giác $ABCD$, khi đó

$$ABCD \text{ là tứ giác nội tiếp} \iff \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ hoặc } \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ.$$



Ví dụ 1

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O, R) có $AB = 8, AC = 15$ và đường cao $AH = 5$ (điểm H nằm ngoài cạnh BC). Tính bán kính R.



Lời giải.

Kẻ đường kính AD, vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{D} + \widehat{ABC} = 180^\circ \implies \widehat{D} = \widehat{ABH}.$$

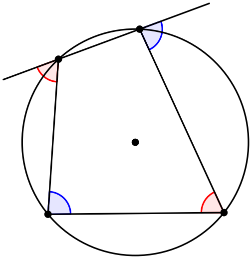
Từ đây dễ thấy $\triangle ADC \sim \triangle ABH$ (g.g), do vậy

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AH} \implies \frac{2R}{15} = \frac{8}{5}.$$

Như vậy $R = 12$. $\square$

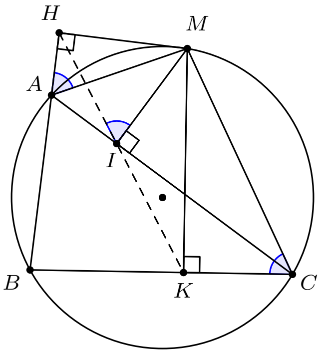
Chú ý

Trong một tứ giác nội tiếp thì góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó.



Ví dụ 2 (Đường thẳng Xim-xơn)

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Điểm M di chuyển trên đường tròn. Các điểm H, K, I lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Chứng minh H, I, K thẳng hàng.



Lời giải.

Vì $\widehat{AHM} + \widehat{AIM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $AHMI$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{MIH} = \widehat{MAH}. \tag{1}$$

Vì $ABCM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MAH} = \widehat{MCB}$. $\quad (2)$

Vì $\widehat{MIC} = 90^\circ = \widehat{MKC}$ nên $MIKC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{MIK} + \widehat{MCB} = 180^\circ. \tag{3}$$

Từ $(1), (2), (3)$ thì $\widehat{MIK} + \widehat{MIH} = 180^\circ$ nên H, I, K thẳng hàng. $\square$