Đề kiểm tra lần 5

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 2 năm 2023

§1 Đề bài

Bài 1 (3 điểm)**.** Cho $x > 0,\ x \neq 1$ và biểu thức

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{2x - 2\sqrt{x} + 1}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm tất cả giá trị thực của x để P là một số nguyên.

Bài 2 (3 điểm)**.**

a) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$.

b) Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước trong 1 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Nếu vòi (I) chảy trong 3 giờ rồi dừng, sau đó vòi (II) chảy trong 2 giờ, như vậy sau 5 giờ mới được $\frac{4}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Bài 3 (3 điểm)**.**

a) Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 4$cm, dây $CD \parallel AB$ với C thuộc cung nhỏ AD. Tính độ dài các cạnh của hình thang $ABDC$ biết chu vi hình thang bằng 10cm.

b) Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở M, N, K. Tính giá trị

$$T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF}.$$

Bài 4 (1 điểm)**.** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3x^3 = 3y^2 + 3y + 1 \\ 3y^3 = 3z^2 + 3z + 1 \\ 3z^3 = 3x^2 + 3x + 1 \end{cases}.$$

§2 Lời giải

Bài 1. Cho $x > 0,\ x \neq 1$ và biểu thức

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{2x - 2\sqrt{x} + 1}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm tất cả giá trị thực của x để P là một số nguyên.

Lời giải.
a) Biến đổi

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + 2x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

b) Ta có $P < 2$, thật vậy

$$\frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} < 2 \iff \sqrt{x} + 2 < 2(x + \sqrt{x} + 1) \iff 2x + \sqrt{x} > 0,$$

bất đẳng thức cuối luôn đúng do $x > 0$. Vì $P \in \mathbb{Z}$ và $0 < P < 2$ nên $P = 1$. Do đó

$$\frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} = 1 \iff x = 1 \text{ (không thỏa mãn)}.$$

Vậy không tồn tại x thỏa đề. □

Bài 2.

a) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$.

b) Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước trong 1 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Nếu vòi (I) chảy trong 3 giờ rồi dừng, sau đó vòi (II) chảy trong 2 giờ, như vậy sau 5 giờ mới được $\frac{4}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Lời giải.
a) Ta thấy rằng $-3y^2 - 1 < 2y^2 + 1 \leq 3y^2 + 1$ tương đương với

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 < y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \leq y^3 + 3y^2 + 3y + 1$$

Theo giả thiết thì $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$, như vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3 \iff y - 1 < x \leq y + 1.$$

Vì x, y là số nguyên nên $x \in \{y, y+1\}$.

- Nếu $x = y$ thì $y^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \implies y = -1$, suy ra $x = -1$.
- Nếu $x = y + 1$ thì $(y+1)^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \implies y = 0$, suy ra $x = 1$.

Vậy $(x, y) \in \{(-1, -1), (1, 0)\}$.

b) Gỉa sử vòi (I) chảy một mình trong x (giờ) sẽ đầy bể thì trong 1 giờ thì sẽ chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi (II) chảy một mình trong y (giờ) sẽ đầy bể thì trong 1 giờ thì sẽ chảy được $\frac{1}{y}$ bể. Theo giả thiết đề cho thì

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10} \quad \text{và} \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{4}{5}.$$

Từ đây tìm được $x = 5$ và $y = 10$. Vậy vòi (I) chảy một mình trong 5 giờ sẽ đầy bể, vòi (II) chảy một mình trong 10 giờ sẽ đầy bể. □

Bài 3.

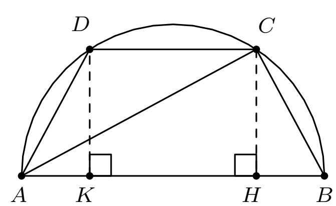
a) Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 4$cm, dây $CD \parallel AB$ với C thuộc cung nhỏ AD. Tính độ dài các cạnh của hình thang $ABDC$ biết chu vi hình thang bằng 10cm.

b) Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở M, N, K. Tính giá trị

$$T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF}.$$

Lời giải.

a) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C, D lên AB.



Vì hai dây AB, CD song song nên $ABCD$ là hình thang cân, đặt $BC = AD = x$. Suy ra

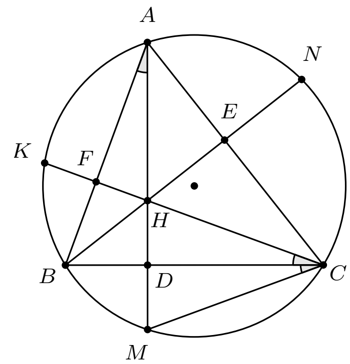
$$KH = CD = 6 - 2x \implies BH = \frac{AB - KH}{2} = x - 1.$$

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle CAB$ vuông tại C có đường cao CH thì

$$BC^2 = BH \cdot AB \implies x^2 = (x-1) \cdot 4$$

Tìm được $x = 2$ nên $BC = AD = DC = 2$cm.

b) Trước tiên ta sẽ chứng minh $DM = DH$.



Ta có

$$\widehat{HCD} = \widehat{BAD}\ (= 90^\circ - \widehat{ABC})$$
$$= \widehat{DCM}\ (= \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{BM}\ ).$$

Do đó $\triangle HCD = \triangle MCD$ (cạnh góc vuông-góc nhọn), dẫn đến $DM = DH$. Do vậy

$$\frac{AM}{AD} = 1 + \frac{DM}{AD} = 1 + \frac{HD}{AD} = 1 + \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}.$$

Tương tự thì

$$\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}} \quad \text{và} \quad \frac{CK}{CF} = 1 + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}.$$

Cộng ba phân thức trên có được

$$T = 3 + \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 4.$$

□

Bài 4. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3x^3 = 3y^2 + 3y + 1 \\ 3y^3 = 3z^2 + 3z + 1 \\ 3z^3 = 3x^2 + 3x + 1 \end{cases}.$$

Lời giải.
Vì $3y^2 + 3y + 1 > 0$ nên $3x^3 > 0$, suy ra $x > 0$; tương tự thì $y, z > 0$. Ta đánh số phương trình của hệ như sau

$$3x^3 = 3y^2 + 3y + 1, \tag{1}$$
$$3y^3 = 3z^2 + 3z + 1, \tag{2}$$
$$3z^3 = 3x^2 + 3x + 1. \tag{3}$$

Lấy (1) trừ (2), lấy (2) trừ (3) thu được

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=(y-z)(y+z+1), \tag{4}$$
$$(y-z)(y^2+yz+z^2)=(z-x)(z+x+1). \tag{5}$$

Vì $x, y, z > 0$ nên

- Nếu $x > y$ thì từ (4) suy ra $y > z$, từ (5) suy ra $z > x$ (vô lí).
- Nếu $x < y$ thì từ (4) suy ra $y < z$, từ (5) suy ra $z < x$ (vô lí).

Do đó $x = y$, từ đây dễ thấy $x = y = z$. Như vậy ta có phương trình $3x^3 = 3x^2 + 3x + 1$, tương đương

$$4x^3 = (x+1)^3 \iff x\sqrt[3]{4} = x+1 \iff x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

Vậy $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$. $\square$