Đề kiểm tra lần 3

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Tháng 11 năm 2022

§1 Đề bài

Bài 1 (3 điểm)**.**

a) Cho đường thẳng $y = (m-2)x + 2m - 1$, chứng minh rằng đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

b) Chứng minh rằng bốn điểm $A(-1,-4)$, $B(0,-1)$, $C(1,2)$ và $D(2,5)$ thẳng hàng.

Bài 2 (3 điểm)**.**

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 9x + 4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2 + 21x - 11}$.

Bài 3 (3 điểm)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm.

a) Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác theo thứ tự ở A', B', C'. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'}.$$

b) Biết rằng đường tròn (O) có đường kính AD. Chứng minh rằng $AH = 2OM$ với M là trung điểm BC.

Bài 4 (1 điểm)**.**

a) Tìm hai số m, n biết rằng với mọi số a, b thì

$$2a^2 + 5ab + 2b^2 = m(a+b)^2 + n(a-b)^2.$$

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{2x^2 + 5xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 5yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 5zx + 2x^2}.$$

§2 Lời giải

Bài 1.

a) Cho đường thẳng $y = (m-2)x + 2m - 1$, chứng minh rằng đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

b) Chứng minh rằng bốn điểm $A(-1,-4)$, $B(0,-1)$, $C(1,2)$ và $D(2,5)$ thẳng hàng.

Lời giải.
a) Giả sử với mọi giá trị của m thì đường thẳng luôn đi qua điểm cố định là $N(x_0, y_0)$. Khi đó

$$y_0 = (m-2)x_0 + 2m - 1 \iff m(x_0+2) - (2x_0 + y_0 + 1), \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vì hệ thức trên đúng với mọi m nên

$$\begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $N(-2,3)$.

b) Gọi đường thẳng đi qua hai điểm A, B là $y = ax + b$ thì

$$\begin{cases} -a + b = -4 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng $y = 3x - 1$ đi qua hai điểm A, B. Vì

$$2 = 3 \times 1 - 1 \quad \text{và} \quad 5 = 3 \times 2 - 1$$

nên hai điểm C, D cũng thuộc đường thẳng này. Vì bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường thẳng nên chúng thẳng hàng. □

Bài 2.

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 9x + 4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2 + 21x - 11}$.

Lời giải.
a) Có $1 + c^2 = (ab + bc + ca) + c^2 = (c+a)(c+b)$, hoàn toàn tương tự thì

$$1 + a^2 = (a+b)(a+c) \quad \text{và} \quad 1 + b^2 = (b+c)(b+a).$$

Do vậy

$$\begin{aligned}VT &= \frac{a-b}{(c+a)(c+b)} + \frac{b-c}{(a+b)(a+c)} + \frac{c-a}{(b+c)(b+a)}\\ &= \frac{(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2-a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0.\end{aligned}$$

b) ĐKXĐ: $2x^2 - 9x + 4 \geq 0, 2x - 1 \geq 0$ và $2x^2 + 21x - 11 \geq 0$. Đặt

$$a = \sqrt{2x^2 - 9x + 4} \geq 0 \quad \text{và} \quad b = \sqrt{2x-1} \geq 0$$

thì phương trình tương đương

$$\begin{aligned}a + 3b = \sqrt{a^2 + 15b^2} &\iff (a+3b)^2 = a^2 + 15b^2\\ &\iff b(a-b) = 0\\ &\iff \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = b \end{array}\right. .\end{aligned}$$

Từ đây tìm được $x \in \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$. □

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm.

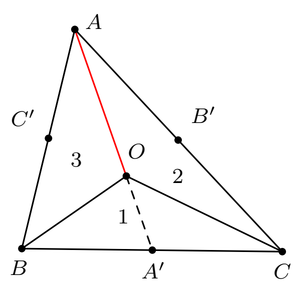
a) Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác theo thứ tự ở A', B', C'. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'}.$$

b) Biết rằng đường tròn (O) có đường kính AD. Chứng minh rằng $AH = 2OM$ với M là trung điểm BC.

Lời giải.

a) Gọi S là diện tích $\triangle ABC$ và kí hiệu S_1, S_2, S_3 như hình



Ta có

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{S_2}{S_{A'AC}} = \frac{S_3}{S_{A'AB}} = \frac{S_2+S_3}{S_{A'AC}+S_{A'AB}} = \frac{S_2+S_3}{S}.$$

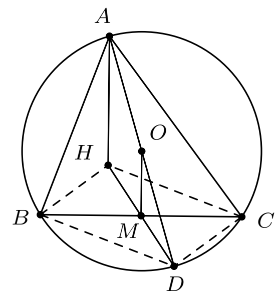
Hoàn toàn tương tự thì $\frac{OB}{BB'} = \frac{S_3+S_1}{S}$ và $\frac{OC}{CC'} = \frac{S_1+S_2}{S}$ nên

$$P = \frac{S_2+S_3}{S} + \frac{S_3+S_1}{S} + \frac{S_1+S_2}{S} = 2.$$

b) Vì H là trực tâm nên $BH \perp AC$. Vì AD là đường kính nên $CD \perp AC$. Do đó

$$BH \parallel CD \text{ (cùng vuông góc } AC).$$

Hoàn toàn tương tự thì $BD \parallel CH$, vậy $BHCD$ là hình bình hành.



Vì M là trung điểm BC, ngoài ra $BHCD$ là hình bình hành nên M cũng là trung điểm HD. $\triangle AHD$ có M, O lần lượt là trung điểm HD, AD nên theo định lí đường trung bình thì $AH = 2OM$. □

Bài 4.

a) Tìm hai số m, n biết rằng với mọi số a, b thì

$$2a^2 + 5ab + 2b^2 = m(a+b)^2 + n(a-b)^2.$$

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{2x^2 + 5xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 5yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 5zx + 2x^2}.$$

Lời giải.
a) $m = \frac{9}{4}$ và $n = \frac{-1}{4}$ vì

$$\begin{aligned} 2a^2 + 5ab + 2b^2 &= \frac{9}{4}(a^2 + 2ab + b^2) - \frac{1}{4}(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \frac{9}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2. \end{aligned}$$

b) Dựa vào ý a thì ta có $2x^2 + 5xy + 2y^2 \leq \sqrt{\frac{9}{4}(x+y)^2} = \frac{3}{2}(x+y)$. Tương tự thì

$$\sqrt{2y^2 + 5yz + 2z^2} \leq \frac{3}{2}(y+z) \quad \text{và} \quad \sqrt{2z^2 + 5zx + 2x^2} \leq \frac{3}{2}(z+x).$$

Do đó

$$M \leq \frac{3}{2}(x+y) + \frac{3}{2}(y+z) + \frac{3}{2}(z+x) = 3(x+y+z) = 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff x = y = z = \frac{1}{3}$. □