

Đại số - Bài 4: Hệ thức Vi-ét (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

2/2023

Bài 1

Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình (nếu có)

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$,

c) $2x^2 + 13x + 8 = 0$,

b) $5x^2 + 3x - 1 = 0$,

d) $4x^2 - 11x + 8 = 0$.

Lời giải.

a) $P = \frac{2}{3} > 0$ và $S = \frac{7}{2}$ nên hai nghiệm dương.

b) $P = \frac{-1}{3}$ nên hai nghiệm trái dấu.

c) $P = 4$ và $S = \frac{-13}{2}$ nên hai nghiệm âm.

d) $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.



Bài 2

Tìm m để phương trình $(m - 1)x^2 - 2x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và cùng dấu.

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' = 1 - 3(m - 1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m \neq 1 \\ m < \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vì phương trình có hai nghiệm cùng dấu nên

$$P = \frac{3}{m - 1} > 0 \iff m > 1.$$

Vậy $1 < m < \frac{4}{3}$.



Bài 3

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2x^2 - 8x - 7 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$

b) $x_1^3 + x_2^3.$

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét thì $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = \frac{-7}{2}$. Khi đó

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{4}{\frac{-7}{2}} = \frac{-8}{7}.$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 106.$



Bài 3

c) $x_1^4 + x_2^4$,

d) $|x_1 - x_2|$.

Lời giải.

c) Biến đổi

$$\begin{aligned}x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \\&= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \frac{1009}{2}.\end{aligned}$$

d) Biến đổi

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \\&= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{30}.\end{aligned}$$



Bài 4

Cho biết phương trình $x^2 - (m + 2)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Lập một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m .

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét thì

$$x_1 + x_2 = m + 2 \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = 2m - 1. \quad (2)$$

Lấy $2PT(1) - PT(2)$ thì

$$2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2(m + 2) - (2m - 1) = 5.$$

Vậy $2x_1 + 2x_2 = x_1 x_2 + 5$.



Bài 5

Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{5}$.

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm thỏa đề thì trước tiên $\Delta' \geq 0$ và $x_1x_2 \neq 0$, khi đó

$$\begin{cases} (m-2)^2 - (m^2 + 2m - 3) \geq 0 \\ m^2 + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m < \frac{7}{6} \\ m \notin \{-3, 1\} \end{cases}. \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{5} \iff (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1x_2} - \frac{1}{5} \right) = 0.$$

■ Nếu $x_1 + x_2 = 0$ thì $2(m-2) = 0 \iff m = 2$ (không thỏa $(*)$).

■ Nếu $x_1x_2 = 5$ thì $m^2 + 2m - 3 = 5 \iff m = 2$ (loại) hoặc $m = -4$ (nhận).

Vậy $m = -4$.



Bài 6

Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $3m^2 = 16n$. Chứng minh rằng trong hai nghiệm của phương trình, có một nghiệm gấp ba lần nghiệm kia.

Lời giải.

Gọi hai nghiệm là x_1 và x_2 , khi đó theo hệ thức Vi-ét thì

$$x_1 + x_2 = -m \quad \text{và} \quad x_1 x_2 = n.$$

Theo giả thiết thì $3m^2 = 16n \iff 3(x_1 + x_2)^2 = 16x_1 x_2$, tương đương

$$3x_1^2 - 10x_1 x_2 + 3x_2^2 = 0 \iff (x_1 - 3x_2)(x_2 - 3x_1) = 0.$$

Vậy có điều cần chứng minh.



Bài 7

Biết rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và phương trình $cx^2 + dx + a = 0$ có hai nghiệm x_3, x_4 . Chứng minh rằng $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 4$.

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét thì

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{và} \quad x_3x_4 = \frac{a}{c}.$$

Ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 2|x_1x_2| + 2|x_3x_4|. \quad (1)$$

Ngoài ra

$$|x_1x_2| + |x_3x_4| = \left| \frac{c}{a} \right| + \left| \frac{a}{c} \right| \geq 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh. □