

# Chuyên đề - ĐS 2: Chứng minh bất đẳng thức (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

## Bài 1

Chứng minh rằng với số  $x$  bất kì thì

a)  $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+9 \geq 0$ ,    b)  $x^3+4x+1 > 3x^2$  với  $x > 0$ .

Lời giải.

a)  $VT = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) = (y - 3)(y + 3)$  với  $y = x^2 - 7x + 9$ .

b) Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$x^3 + 4x \geq 2\sqrt{x^3 \cdot 4x} = 4x^2 > 3x^2.$$

Do đó  $VT > 3x^2 + 1 > 3x^2$ .



## Bài 2a

Chứng minh rằng với  $a, b$  là các số bất kì thì  $a^2 + b^2 \geq ab$ .

Lời giải sai:  $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq ab$ .

Lời giải.

Cách 1:  $a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ .

Cách 2: Biến đổi tương đương

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 \geq ab &\iff 2a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 0 \\&\iff (a - b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Cách 3: Sử dụng hai bất đẳng thức là

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ a^2 + b^2 \geq 0 \end{cases} \implies 2(a^2 + b^2) \geq 2ab \implies a^2 + b^2 \geq ab.$$



## Bài 2b

Chứng minh rằng với  $a, b$  là các số bất kì thì  $2(a^4 + b^4) \geq (a + b)(a^3 + b^3)$ .

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}2(a^4 + b^4) - (a + b)(a^3 + b^3) &= a^4 + b^4 - a^3b - b^3a \\&= a^3(a - b) - b^3(a - b) \\&= (a^3 - b^3)(a - b) \\&= (a^2 + ab + b^2)(a - b)^2.\end{aligned}$$

Tương tự bài 2a, chứng minh được  $a^2 + ab + b^2 \geq 0$  nên

$$2(a^4 + b^4) - (a + b)(a^3 + b^3) \geq 0.$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.



## Bài 2c

Chứng minh rằng với  $a, b$  là các số bất kì thì  $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$ .

Lời giải.

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 + 2 &= (a^4 + 1) + (b^4 + 1) \\&\geq 2a^2 + 2b^2 \\&\geq 4ab.\end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \iff \begin{cases} a^2 = b^2 = 1 \\ a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases}$$



## Bài 2d

Chứng minh rằng với  $a, b \geq 0$  thì  $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$ .

Lời giải.

Biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} & 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \\ \iff & 4(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)^3 \\ \iff & 4(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)^2 \\ \iff & 3(a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$



### Bài 3

Chứng minh rằng với  $a, b, c$  là các số bất kì thì

$$\text{a) } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \qquad \text{b) } a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Lời giải.

a) Cộng từng vế các bất đẳng thức  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ,  $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ,  $c^2 + a^2 \geq 2ca$ .

b) Áp dụng câu a ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Lại áp dụng câu a ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc = abc(a + b + c).$$



### Bài 3c

Chứng minh rằng với  $a, b, c$  là các số bất kì thì  $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$ .

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$\begin{aligned} VT &= \left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &\geq a + b + c. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra  $\iff a = b = c = \frac{1}{2}$ .



### Bài 3d

Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì  $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$ .

Lời giải.

Biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + abc &\geq ab(a + b + c) \\ \iff a^3 + b^3 &\geq ab(a + b) \\ \iff (a + b)(a^2 - ab + b^2) &\geq ab(a + b) \\ \iff a^2 - ab + b^2 &\geq ab \\ \iff (a - b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$



### Bài 4a

Cho số nguyên dương  $n$ . Chứng minh rằng  $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 1$ .

Lời giải.

Với số nguyên  $k$  bất kì thì

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned} VT &= \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1. \end{aligned}$$



### Bài 4b

Cho số nguyên dương  $n$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2}$ .

Lời giải.

Đặt  $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ , khi đó

$$3S = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} 2S &= 3S - S = \left(1 + \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{3^{n-1}}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3^n} < 1 \end{aligned}$$

Do vậy  $S < \frac{1}{2}$ .

