Hình học - Bài 4: Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau (Bài tập)

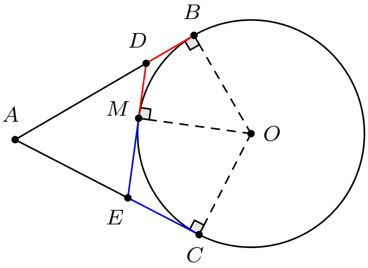
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Bài 1

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng chu vi $\triangle ADE$ bằng $2AB$.



Lời giải.

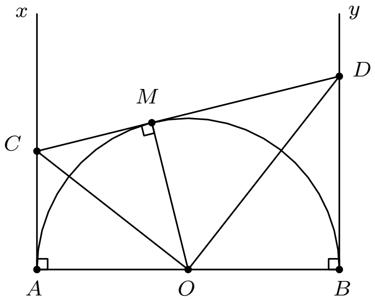
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $DM = DB$ và $EM = EC$. Chu vi $\triangle ADE$ bằng

$$\begin{aligned} AD + DE + EA &= AD + (DM + ME) + EA \\ &= (AD + DB) + (CE + EA) \\ &= AB + AC \\ &= 2AB. \end{aligned}$$

□

Bài 2a

Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By theo thứ tự tại C, D. Chứng minh rằng OC vuông góc OD.



Lời giải.

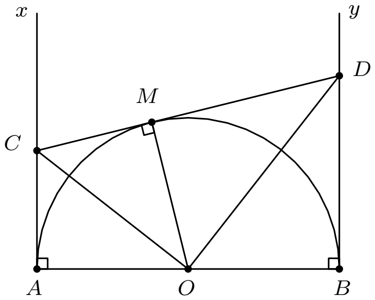
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì OC, OD lần lượt là phân giác của $\widehat{AOM}, \widehat{BOM}$. Ngoài ra

$$\widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ$$

nên $OC \perp OD$. □

Bài 2b

Chứng minh rằng $CD = AC + BD$.



Lời giải.

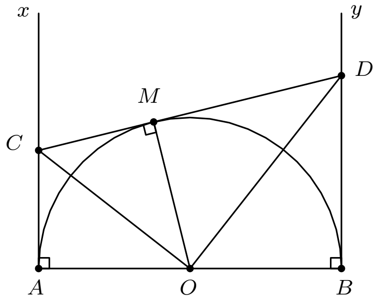
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $AC = CM$ và $BD = MD$, do đó

$$AC + BD = CM + MD = CD.$$

□

Bài 2c

Chứng minh rằng tích $AC \cdot BD$ không đổi khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn.



Lời giải.

Ta có

$$AC \cdot BD = CM \cdot MD$$

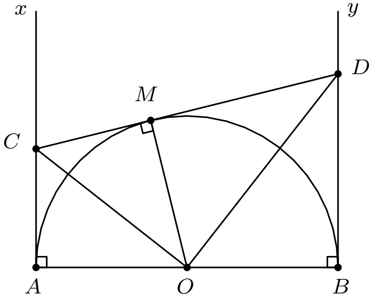
Ngoài ra $\triangle OCD$ vuông tại O có đường cao OM nên

$$CM \cdot MD = OM^2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Vậy $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$ (không đổi). $\square$

Bài 2d

Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển thì diện tích tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất khi nó là hình chữ nhật.



Lời giải.

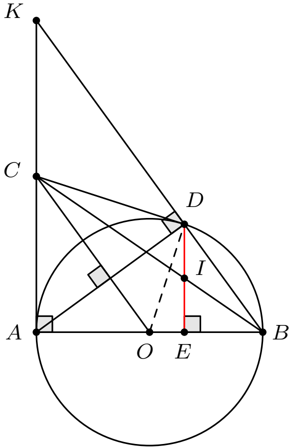
Diện tích tứ giác $ACDB$ là

$$S = \frac{AB}{2}(AC + BD) \geq \frac{AB}{2} 2\sqrt{AC \cdot BD}$$
$$= AB\sqrt{\frac{AB^2}{4}} = \frac{AB^2}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff$ $AC = BD$ $\iff$ $ACDB$ là hình chữ nhật. □

Bài 3

Cho đường tròn (O) có đường kính AB, D là một điểm nằm trên đường tròn. Các tiếp tuyến của đường tròn tại A, D cắt nhau ở C. Gọi E là hình chiếu của D trên AB, gọi I là giao điểm BC với DE. Chứng minh rằng $DI = IE$.



Lời giải.

Gọi K là giao điểm AC với BD. Vì $OC \parallel BK$ (cùng vuông góc AD) và O là trung điểm AB nên C là trung điểm AK (tính chất đường trung bình).

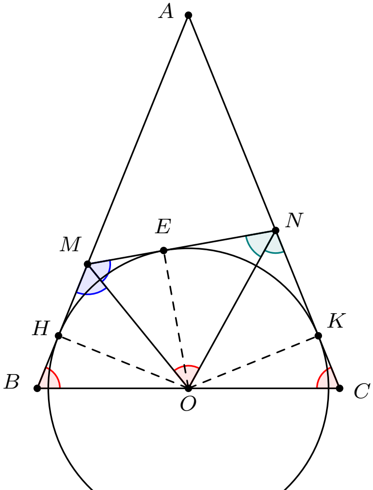
Mặt khác vì $ED \parallel AK$ nên

$$\frac{ID}{CK} = \frac{IE}{CA} \left(= \frac{BI}{BC} \right).$$

Do đó $DI = IE$. □

Bài 4a

Cho $\triangle ABC$ cân tại A, O là trung điểm BC. Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB, AC tại H, K. Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh AB, AC ở M, N. Cho biết $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$, tính $\widehat{MON}$.



Lời giải.

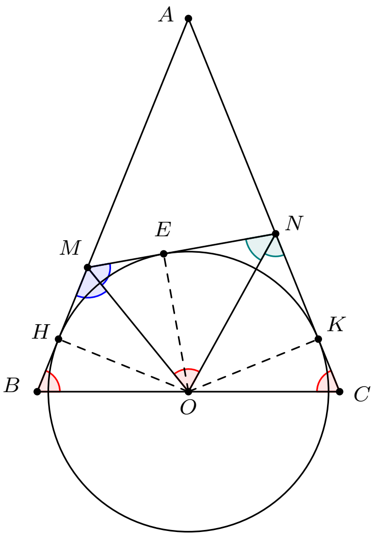
Gọi các tiếp điểm H, E, K như hình vẽ. Có

$$\widehat{MON} = \frac{\widehat{HOK}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \widehat{B} = \alpha.$$

□

Bài 4b

Chứng minh rằng OM, ON chia tứ giác $BMNC$ thành ba tam giác đồng dạng.



Lời giải.

Với việc MO là tia phân giác $\widehat{BMN}$ nên

$$\triangle BMO \sim \triangle OMN \text{ (g.g)}$$

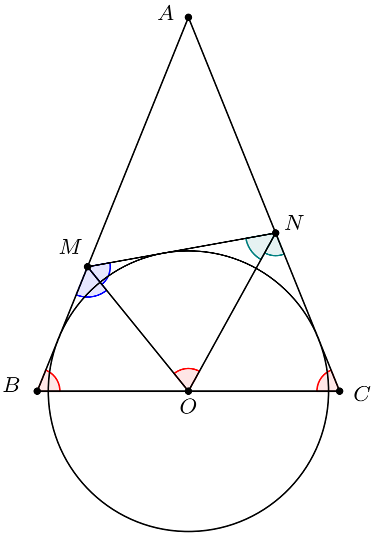
Hoàn toàn tương tự thì

$$\triangle OMN \sim \triangle CON \text{ (g.g)}$$

□

Bài 4c

Cho $BC = 2a$, tính tích $BM \cdot CN$



Lời giải.

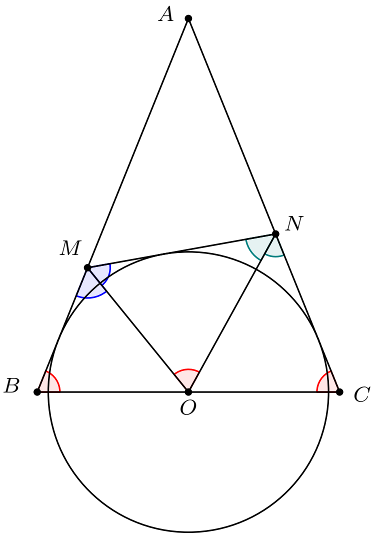
Theo câu b thì $\triangle BMO \sim \triangle CON$ nên

$$\frac{BM}{BO} = \frac{CO}{CN},$$

suy ra $BM \cdot CN = BO \cdot CO = a^2$. □

Bài 4d

Tiếp tuyến MN ở vị trí nào thì $BM + CN$ nhỏ nhất.



Lời giải.

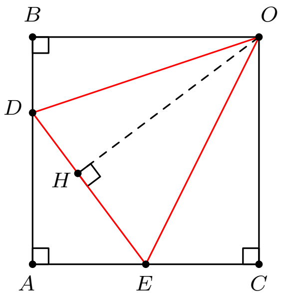
Ta có

$$BM + CN \geq 2\sqrt{BM \cdot CN} = 2a.$$

Dấu bằng xảy ra $\iff BM = CN$, khi đó tiếp tuyến $MN \parallel BC$. $\square$

Bài 5

Cho đường tròn (O) có bán kính 6cm. Một điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho các tiếp tuyến AB, AC vuông góc với nhau (B, C là các tiếp điểm). Trên hai đoạn thẳng AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $AD = 4$cm và $AE = 3$cm. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} S_{ODE} &= S_{OBAC} - S_{OBD} - S_{OCE} - S_{ADE} \\ &= 36 - 6 - 9 - 6 = 15. \end{aligned}$$

Mặt khác $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = 5$ nên kẻ $OH \perp DE$ thì

$$OH = \frac{2S_{ODE}}{DE} = 6 \text{ (cm)}.$$

Vì OH bằng bán kính đường tròn (O) nên DE là tiếp tuyến của (O).