

Chuyên đề - ĐS 6: Liên hợp trong giải phương trình (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

Bài 1a

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} + x = 5$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \geq \frac{-1}{3}$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3x+1} - 2) + (\sqrt{x+3} - 2) + x - 1 = 0 \\ \iff & \frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} + x - 1 = 0 \\ \iff & (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Biểu thức trong ngoặc dương nên $x = 1$.



Bài 1b

Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{5x+3} = 4$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \geq -3$, phương trình $\iff (\sqrt{x+3} - 2) + (\sqrt[3]{5x+3} - 2) = 0$

$$\iff \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{x-1}{\sqrt[3]{(5x+3)^2} + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4} = 0$$

$$\iff (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(5x+3)^2} + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4} \right) = 0.$$

Biểu thức trong ngoặc dương nên $x = 1$.

□

Chú ý

Đặt $a = \sqrt[3]{5x+3}$ và $b = 2$ thì

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(5x+3)^2} + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4 &= a^2 + ab + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\iff a + \frac{b}{2} = \frac{3b^2}{4} = 0 \iff a = b = 0$. Vì $b \neq 0$ nên

$$\sqrt[3]{(5x+3)^2} + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4 > 0.$$

Bài 1c

Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} + 6 = \sqrt[3]{5-x} - x$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \iff (\sqrt[3]{x+2} + 1) + (2 - \sqrt[3]{5-x}) + (x+3) = 0$$

$$\iff (x+3) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2}} + 1 \right) = 0.$$

Biểu thức trong ngoặc dương nên $x = -3$.

□

Bài 2a

Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt[3]{x-1} + x + 4 = 0$,

Phân tích: $x = -4$ là nghiệm, biến đổi phương trình

$$\iff (\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{5}) - (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{5}) + (x+4) = 0$$

tương đương

$$(x+4) \left(\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+3)^2} - \sqrt[3]{5(2x+3)} + \sqrt[3]{25}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{5(x-1)} + \sqrt[3]{25}} + 1 \right) = 0.$$

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \iff (\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt[3]{x-1}) + (x+4) = 0$$

$$\iff \frac{x+4}{\sqrt[3]{(2x+3)^2} + \sqrt[3]{(2x+3)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} + (x+4) = 0$$

$$\iff (x+4) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2} + \sqrt[3]{(2x+3)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} + 1 \right) = 0.$$

Biểu thức trong ngoặc dương nên $x = -4$.

□

Bài 2b

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + 2x = \sqrt{x-4} - 5$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 4$, phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4}) + (2x + 5) = 0 \\ \iff & (2x + 5) \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4}} + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Biểu thức trong ngoặc dương và $2x + 5 > 0$ nên phương trình vô nghiệm. □

Bài 2c

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 2} + x^2 = \sqrt{2x - 2} + 1$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 1$.

- Thấy rằng $x = 1$ là nghiệm.
- Xét $x > 1$ thì phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{2x - 2}) + (x^2 - 1) = 0 \\ \iff & (x-1) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{2x - 2}} + x + 1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Vì $x > 1$ nên $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Bài 3a

Giải phương trình $6 + 3\sqrt{x - 2} = 2x + \sqrt{x + 6}$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $x \geq 2$, phương trình $\iff (3\sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 6}) - 2(x - 3) = 0$

$$\iff (x - 3) \left(\frac{8}{3\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 6}} - 2 \right) = 0.$$

Trường hợp $x \neq 3$ cần quan tâm đến phương trình

$$\frac{8}{3\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 6}} - 2 = 0 \iff 3\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 6} = 4.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \left\{ 3, \frac{11-3\sqrt{5}}{2} \right\}$. □

Bài 3b

Giải phương trình $\frac{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 + x + 2}$.

Lời giải

Biến đổi vế trái của phương trình như sau

$$VT = \frac{(x+3)(x^2+2x+3) - (5x+7)}{x^2+2x+3} = x+3 - \frac{5x+7}{x^2+2x+3}.$$

Do vậy phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x+3 - \frac{5x+7}{x^2+2x+3} &= \sqrt{x^2+x+2} \iff x+3 - \sqrt{x^2+x+2} = \frac{5x+7}{x^2+2x+3} \\ &\iff \frac{5x+7}{x+3+\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{5x+7}{x^2+2x+3}. \end{aligned}$$

Lời giải.

Xét trường hợp $x \neq -\frac{7}{5}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+3+\sqrt{x^2+x+2}} &= \frac{1}{x^2+2x+3} \\ \iff x+3+\sqrt{x^2+x+2} &= x^2+2x+3 \\ \iff \sqrt{x^2+x+2} &= x^2+x. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \left\{-\frac{7}{5}, -2, 1\right\}$.

□

Bài 3c

Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$.

Lời giải.

ĐKXD: $2 \leq x \leq 4$, phương trình $\iff (\sqrt{x-2} - 1) + (\sqrt{4-x} - 1) = 2x^2 - 5x - 3$

$$(x-3) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} - 2x - 1 \right)}_A = 0.$$

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \leq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{4-x}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \quad \text{và} \quad 2x+1 \geq 5$$

nên $A \leq 1 - (\sqrt{2} - 1) - 5 < 0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$. □