Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

Nguyễn Thành Phát

Tháng 2 năm 2023

§ Ôn tập 5: Đề HSG thành phố Đà Nẵng 2022-2023

Bài 1.

a) Tính $A = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$.

b) Tính diện tích của một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và chu vi bằng 48m.

Lời giải.
a) Biến đổi

$$A = (3 + \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - 2) + (5 - 2\sqrt{5}) = 6.$$

b) Đặt chiều rộng là a thì chiều dài là $3a$. Theo đề thì

$$(a + 3a) \cdot 2 = 48 \implies a = 6.$$

Diện tích bằng $a \cdot 3a = 108$ (m^2). □

Bài 2. Cho biểu thức $B = \left(2 + \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right) : \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{4}{x + 4\sqrt{x} + 3}\right)$ với $x \geq 0$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tìm giá trị của x thỏa mãn $(2 + B + 2 + 3)(2^2 + B^2 + 2^2 + 3^2)^2 = 2023$.

Lời giải.
a) Biến đổi

$$\begin{aligned} B &= (2 + \sqrt{x} - 2) : \frac{2(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+3) + 4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \sqrt{x} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = x + \sqrt{x}. \end{aligned}$$

b) Vì $B \geq 0$ nên ta có

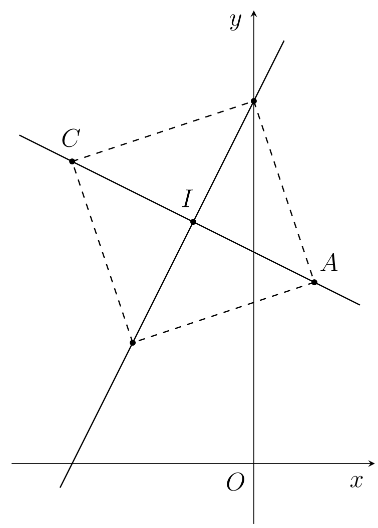
$$(2 + B + 2 + 3)(2^2 + B^2 + 2^2 + 3^2)^2 \geq (2 + 0 + 2 + 3)(2^2 + 0 + 2^2 + 3^2)^2 = 2023.$$

Như vậy dấu bằng xảy ra, do đó $B = 0 \iff x = 0$. □

Bài 3. Trên mặt phẳng tọa độ, cho hình vuông $ABCD$. Biết điểm $A(1,3)$ và các điểm B, D nằm trên đường thẳng $y = 2x + 6$.

a) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm A và C.

b) Tính diện tích hình vuông $ABCD$.



Lời giải.
a) Đường thẳng đi qua hai điểm A, C chính là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BD. Vì vuông góc với BD đường thẳng này có dạng $y = \frac{-1}{2}x + c$, ngoài ra $A(1,3)$ thuộc đường thẳng này nên

$$3 = \frac{-1}{2} \cdot 1 + c \implies c = \frac{7}{2}.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$.

b) Gọi giao điểm của AC với BD là I. Tọa độ của I chính là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Như vậy $I(-1,4)$, do đó tính được $AI = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$. Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng

$$AB^2 = (AI\sqrt{2})^2 = 2 \cdot AI^2 = 10.$$

□

Bài 4.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y = -2 \\ 3x^2 + |y| = 15 \end{cases}$.

b) Tìm số chính phương có 4 chữ số mà khi cộng số đó với 2023 ta cũng được một số chính phương.

Lời giải.
a) Lấy phương trình thứ hai trừ đi 3 lần phương trình thứ nhất thu được $|y| - 6y = 21$.

- Nếu $y \geq 0$ thì phương trình trở thành $y - 6y = 21 \iff y = \frac{-21}{5} < 0$ (vô lí).
- Nếu $y < 0$ thì phương trình trở thành $-y - 6y = 21 \iff y = -3$. Từ đây tìm được $x^2 = 4$ nên $x \in \{-2, 2\}$.

Vậy $(x, y) \in \{(-2, -3), (2, -3)\}$.

b) Gọi số cần tìm là x^2 ($x \in \mathbb{N}$), theo đề thì $x^2 + 2023 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$. Ta có

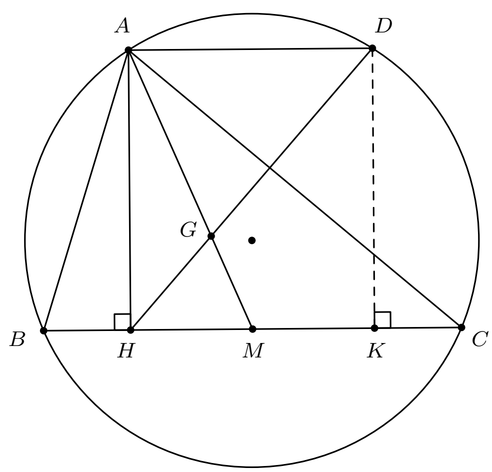
$$(y - x)(y + x) = 2023 = 1 \times 2023 = 7 \times 289 = 17 \times 119.$$

Từ đây có các trường hợp sau

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 2023 \end{cases}, \quad \begin{cases} y - x = 7 \\ y + x = 289 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y - x = 17 \\ y + x = 119 \end{cases}.$$

Tuy nhiên theo đề thì x^2 có 4 chữ số nên chỉ có số $51^2 = 2601$ thỏa đề. □

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB < AC$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến BC và M là trung điểm của BC. Lấy điểm D trên (O) sao cho AD song song với BC. Gọi G là giao điểm của AM và HD. Tính tỉ số $\frac{GH}{GD}$.



Lời giải.
Gọi K là hình chiếu của D lên BC. Vì $AD \parallel BC$ nên $ABCD$ là hình thang cân, do đó $BH = CK$ nên M là trung điểm HK. Dễ thấy $ADKH$ là hình chữ nhật nên $HK = AD$. Như vậy theo định lí Ta-lét cho $HM \parallel AD$ thì

$$\frac{GH}{GD} = \frac{HM}{AD} = \frac{HM}{HK} = \frac{1}{2}.$$

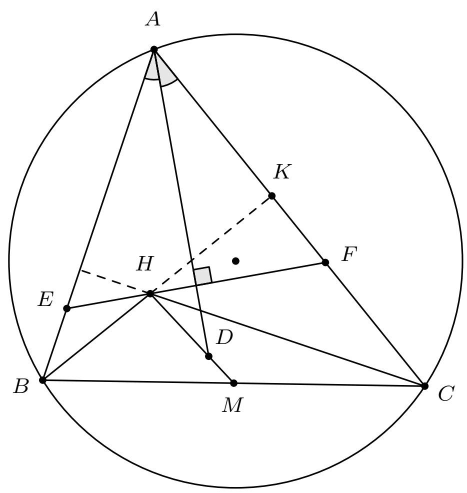
□

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H, nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Đường phân giác của góc BAC cắt MH tại D. Đường thẳng qua H, vuông góc với AD lần lượt cắt AB, AC tại E và F.

a) Chứng minh rằng $HE \cdot HC = HF \cdot HB$

b) Gọi K là chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC. Chứng minh rằng HF là phân giác của góc KHC.

c) Chứng minh rằng DF vuông góc với AC.



Lời giải.
a) Vì EF vuông góc với đường phân giác $\widehat{A}$ nên $\triangle AEF$ cân tại A, do vậy $\widehat{BEH} = \widehat{CFH}$. Mặt khác $\widehat{EBH} = \widehat{FCH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) nên $\triangle BEH \sim \triangle CFH$ (g.g), dẫn đến

$$\frac{HE}{HB} = \frac{HF}{HC} \implies HE \cdot HC = HF \cdot HB$$

b) Theo ý trên thì $\triangle BEH \sim \triangle CFH$, do đó

$$\widehat{CHF} = \widehat{BHE} = \widehat{KHF}.$$

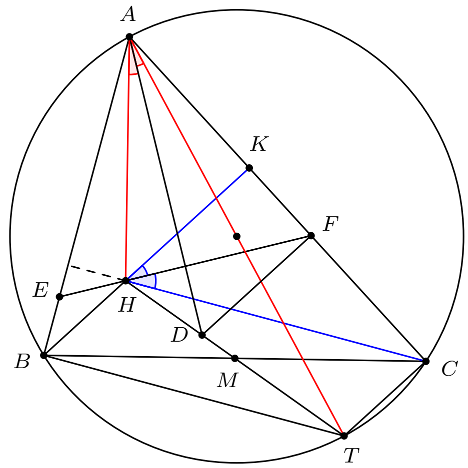
Như vậy HF là phân giác của $\widehat{KHC}$.

c) Theo ý b thì HF là đường phân giác trong của $\triangle KHC$ nên

$$\frac{FK}{FC} = \frac{HK}{HC}. \tag{1}$$

Kẻ đường kính AT của đường tròn (O), thấy rằng

$$\begin{aligned}\widehat{CAT} &= \widehat{CBT}\ (= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{CT}\,)\\ &= \widehat{HCB}\ (CH \parallel BT)\\ &= \widehat{BAH}\ (= 90^\circ - \widehat{ABC}).\end{aligned}$$



Do đó AD là đường phân giác của $\widehat{HAT}$, như vậy ta có

$$\frac{DH}{DT} = \frac{AH}{AT}. \tag{2}$$

Chứng minh được $\triangle AHK \sim \triangle ATB$ (g.g) nên

$$\frac{AH}{AT} = \frac{HK}{BT}. \tag{3}$$

Ngoài ra chứng minh được $BHCT$ là hình bình hành nên $BT = HC$, kết hợp với $(1), (2)$ và (3) suy ra

$$\frac{FK}{FC} = \frac{DH}{DT}.$$

Trong hình thang $HKCT$ (HK và CT cùng vuông góc AC), các điểm D và F nằm ở hai cạnh bên sao cho $\frac{FK}{FC} = \frac{DH}{DT}$, khi đó $DF \parallel HK$ (kết quả này người đọc cần chứng minh cụ thể hơn). Mà $HK \perp AC$ nên $DF \perp AC$. $\square$