

Chuyên đề - HH 4: Cực trị đối với đường tròn

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

12/2022

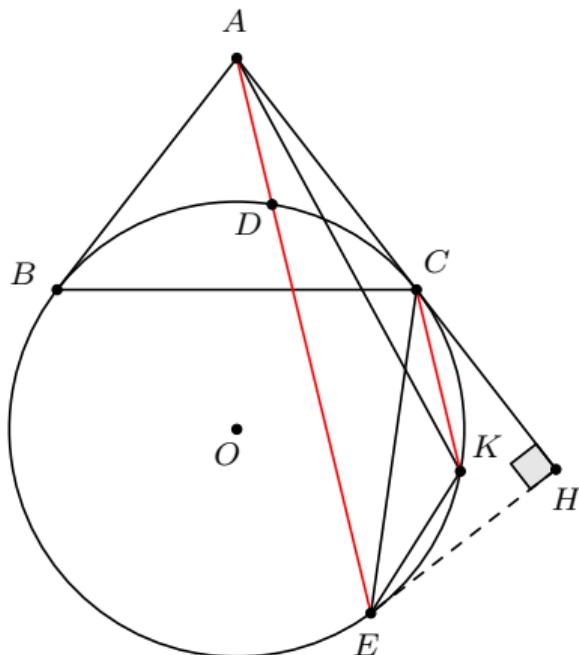
- Các bất đẳng thức đại số

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2, \quad \dots$$

- Đường kính là dây lớn nhất. Quan hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.

Ví dụ 1

Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại B, C . Qua A vẽ cát tuyến ADE , vẽ dây CK song song DE . Xác định vị trí cát tuyến để $\triangle AKE$ có diện tích lớn nhất.



Lời giải.

Kẻ $EH \perp AC$, vì $CK \parallel AE$ nên

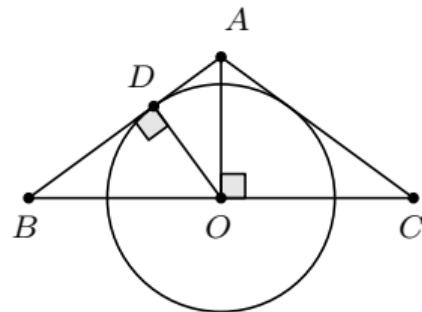
$$S_{AKE} = S_{ACE} = \frac{1}{2}AC \cdot EH$$

Ngoài ra $EH \leq EC \leq 2R$ với R là bán kính của đường tròn (O) .

Vậy $\max S_{AKE} = AC \cdot R \iff CE \perp CA$. □

Ví dụ 2

Cho điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) , đường thẳng vuông góc với OA tại O cắt các tiếp tuyến của (O) kẻ từ A tại B và C . Xác định vị trí của A để diện tích $\triangle ABC$ nhỏ nhất.



Lời giải.

Gọi D là điểm tiếp xúc giữa AB với (O, R) . Ta có

$$S_{ABC} = 2S_{ABO} = DO \cdot AB = R \cdot AB$$

Ngoài ra

$$AB = AD + DB \geq 2\sqrt{AD \cdot DB} = 2DO.$$

Vậy $\min S_{ABC} = 2R^2 \iff \widehat{BAO} = 45^\circ \iff AO = R\sqrt{2}$.

□