

# Chuyên đề - DS 4: Phương trình vô tỉ

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

10/2022

### Ví dụ 1

Giải phương trình  $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$ .

#### Lời giải

ĐKXD:  $x \geq 1$  và  $x \geq 2\sqrt{x - 1}$ . Biến đổi

$$x + 2\sqrt{x - 1} = (\sqrt{x - 1} + 1)^2 \quad \text{và} \quad x - 2\sqrt{x - 1} = (\sqrt{x - 1} - 1)^2.$$

Do đó phương trình tương đương

$$\sqrt{x - 1} + 1 + |\sqrt{x - 1} - 1| = 2 \iff \sqrt{x - 1} + |\sqrt{x - 1} - 1| = 1. \quad (1)$$

Lời giải.

Do đó phương trình tương đương

$$\sqrt{x-1} + |\sqrt{x-1} - 1| = 1. \quad (1)$$

Chia thành hai trường hợp sau:

- Nếu  $\sqrt{x-1} > 1 \iff x > 2$  thì

$$(1) \iff \sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1} - 1) = 1 \iff x = 2 \text{ (loại)}.$$

- Nếu  $\sqrt{x-1} \leq 1 \iff 1 \leq x \leq 2$  thì

$$(1) \iff \sqrt{x-1} + (1 - \sqrt{x-1}) = 1 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy  $1 \leq x \leq 2$ .

□

Nâng lũy thừa

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = (g(x))^3.$$

## Ví dụ 2

Giải phương trình  $3 + \sqrt{2x - 3} = x$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $x \geq \frac{3}{2}$ . Phương trình tương đương

$$\sqrt{2x - 3} = x - 3. \quad (1)$$

Ta phải có  $x \geq 3$ , khi đó (1) tương đương

$$2x - 3 = (x - 3)^2 \iff (x - 2)(x - 6) = 0 \iff \begin{cases} x = 2 \text{ (loại)} \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy  $x = 6$ .



### Ví dụ 3

Giải phương trình  $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1$ .

Lời giải.

Lập phương hai vế ta có phương trình

$$\iff (2x+1) + x + 3\sqrt[3]{(2x+1)x} \cdot (\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x}) = 1. \quad (1)$$

Thay  $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1$  vào (1) ta có

$$\begin{aligned} 3x + 1 + 3\sqrt[3]{x(2x+1)} &= 1 \iff \sqrt[3]{x(2x+1)} = -x \\ &\iff x(2x+1) = -x^3 \\ &\iff x(x+1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Khi đó  $x = 0$  (thỏa đề) hoặc  $x = -1$  (không thỏa đề). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 0$ . □

Đặt ẩn phụ

#### Ví dụ 4

Giải phương trình  $3x^2 + 21x + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = -16$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $x^2 + 7x + 7 \geq 0$ . Đặt  $y = \sqrt{x^2 + 7x + 7} \geq 0$  thì  $x^2 + 7x = y^2 - 7$ . Khi đó phương trình

$$\iff 3(y^2 - 7) + 2y = -16 \iff \begin{cases} y = -5/3 \text{ (loại)} \\ y = 1 \end{cases}$$

Với  $y = 1$  tìm được  $x \in \{-6, -1\}$ .

□

#### Chú ý

Vì tìm được  $y = 1 > 0$  nên chắc chắn điều kiện  $x^2 + 7x + 7 \geq 0$  được thỏa mãn. Do vậy  $x$  tìm được chắc chắn thỏa mãn ĐKXĐ.

Đánh giá bằng bất đẳng thức

## Ví dụ 5

Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$ .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} \\ &\geq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5. \end{aligned}$$

Ngoài ra

$$VP = 5 - (x+1)^2 \leq 5.$$

Vậy cả hai vế của phương trình đều bằng 5. Dấu bằng xảy ra

$$\iff x = -1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  $x = -1$ . □

## Ví dụ 6

Giải phương trình  $\frac{x}{\sqrt{3x-2}} + \frac{\sqrt{3x-2}}{x} = 2$ .

Lời giải.

ĐKXĐ:  $x > \frac{2}{3}$ . Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$VT \geq 2 \sqrt{\frac{x}{\sqrt{3x-2}} \cdot \frac{\sqrt{3x-2}}{x}} = 2.$$

Vì dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra nên ta có

$$\frac{x}{\sqrt{3x-2}} = \frac{\sqrt{3x-2}}{x} \iff x = \sqrt{3x-2}.$$

Từ đây tìm được  $x \in \{1, 2\}$ .

□