Chuyên đề - ĐS 1: Biến đổi biểu thức

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

8/2022

Một số hằng đẳng thức với hai số (a, b)

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Một số hằng đẳng thức với ba số (x, y, z)

- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
- $(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$
- $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

Ví dụ

Chứng minh rằng

a) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3-3abc &= \big((a+b)^3-3ab(a+b)\big)+c^3-3abc\\
&= \big((a+b)^3+c^3\big)-3ab(a+b+c)\\
&= (a+b+c)\big((a+b)^2-(a+b)c+c^2\big)-3ab(a+b+c)\\
&= (a+b+c)\big((a^2+2ab+b^2)-(ac+bc)+c^2-3ab\big)\\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ

Chứng minh rằng

b) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

Lời giải.

Biến đổi

$$\begin{aligned}
VT &= \big((a+b+c)^3 - a^3\big) - (b^3 + c^3)\\
&= (b+c)\big((a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2\big) - (b+c)(b^2 - bc + c^2)\\
&= (b+c)(3a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 2bc) - (b+c)(b^2 - bc + c^2)\\
&= (b+c)\big((3a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 2bc) - (b^2 - bc + c^2)\big)\\
&= (b+c)(3a^2 + 3ab + 3ac + 3bc)\\
&= (b+c)3(a+b)(a+c) = VP
\end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ

Áp dụng ví dụ trước, hãy phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

b) $B = 8(x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3$

Lời giải.

a) Đặt $a = x-y, b = y-z$ và $c = z-x$. Khi đó $a+b+c = 0$ và $A = a^3+b^3+c^3$, biến đổi

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (\underbrace{a+b+c}_{0})(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0.$$

Do đó $a^3+b^3+c^3 = 3abc$, suy ra

$$A = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

$\square$

Chú ý

$$a + b + c = 0 \implies a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Ví dụ

Áp dụng ví dụ trước, hãy phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

b) $B = 8(x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3$

Lời giải.

b) Đặt $a = x+y, b = y+z$ và $c = z+x$. Khi đó

$$\begin{aligned} B &= (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\ &= 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &= 3(x+2y+z)(y+2z+x)(z+2x+y) \end{aligned}$$

□

Ví dụ

Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \quad \text{và} \quad abc=1.$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có ít nhất một số bằng 1.

Phân tích

Cần chứng minh $(a-1)(b-1)(c-1)=0$, tương đương

$$abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0.$$

Ví dụ

Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \quad \text{và} \quad abc=1.$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có ít nhất một số bằng 1.

Lời giải.

Theo giả thiết thì $abc=1$ và

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=ab+bc+ca.$$

Do đó

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0.$$

$\square$

Ví dụ

Cho a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0.$$

Lời giải.

Có $1 + c^2 = (ab + bc + ca) + c^2 = (c + a)(c + b)$, hoàn toàn tương tự thì

$$1 + a^2 = (a + b)(a + c) \quad \text{và} \quad 1 + b^2 = (b + c)(b + a).$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \text{BT} &= \frac{a-b}{(c+a)(c+b)} + \frac{b-c}{(a+b)(a+c)} + \frac{c-a}{(b+c)(b+a)} \\ &= \frac{(a^2-b^2) + (b^2-c^2) + (c^2-a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0. \end{aligned}$$

□

Chú ý

$$ab + bc + ca = k \implies \begin{cases} a^2 + k = (a+b)(a+c) \\ b^2 + k = (b+c)(b+a) \\ c^2 + k = (c+a)(c+b) \end{cases}$$

Ví dụ

Cho $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}.$$

Lời giải.

Theo giả thiết thì $\frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$, tương đương

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) - abc = 0 \iff (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

Nếu $a + b = 0$ thì $a = -b \implies a^{2023} = -b^{2023}$, khi đó

$$\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}.$$

Tương tự cho trường hợp $b + c = 0$ và $c + a = 0$. $\square$

Chú ý

- $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c} \implies (a+b)(b+c)(c+a)=0$
- $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$