# Hình học - Bài 2: Góc nội tiếp (Bài tập)

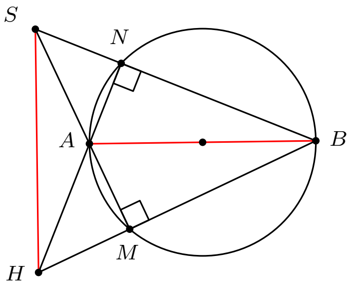
Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

1/2023

## Bài 1

Cho $(O)$ có đường kính $AB$ và điểm $S$ nằm ngoài $(O)$. $SA, SB$ lần lượt cắt $(O)$ tại $M, N$. Gọi $H$ là giao điểm của $BM$ và $AN$. Chứng minh rằng $SH \perp AB$.




### Lời giải.

Có $HN \perp SB$ và $SM \perp HB$ vì

$$\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

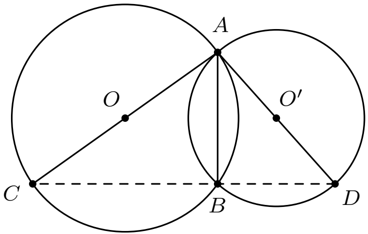
Như vậy $HN, SM$ là hai đường cao của $\triangle SBH$. Mà $HN$ cắt $SM$ tại $A$ nên $A$ là trực tâm của $\triangle SBH$

$$\implies BA \perp SH.$$

□

## Bài 2

Cho $(O)$ và $(O')$ cắt nhau tại $A$ và $B$. Vẽ các đường kính $AC$ và $AD$ của hai đường tròn. Chứng minh rằng $C, B, D$ thẳng hàng.




### Lời giải.

Vì là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ.$$

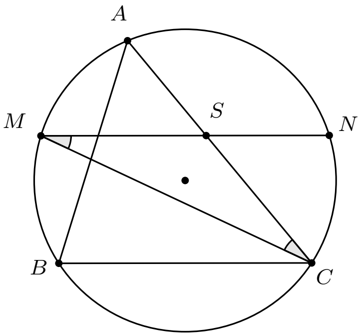
Do đó

$$\widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$$

nên $C, B, D$ thẳng hàng. □

## Bài 3

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp $(O)$. Gọi $M$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$, vẽ dây $MN \parallel BC$. Gọi giao điểm $MN$ với $AC$ là $S$. Chứng minh rằng $SM = SC$.




### Lời giải.

Vì $M$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ nên $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.
Mặt khác $MN \parallel BC$ nên

$$\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{NC} \implies \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{NC}.$$

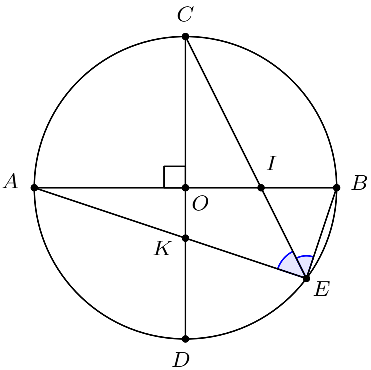
Do đó ta có

$$\widehat{SCM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{NC} = \widehat{SMC}$$

nên $SM = SC$. □

## Bài 4

Cho $(O, R)$ có hai đường kính $AB, CD$ vuông góc với nhau. Gọi $I$ là trung điểm $OB$, tia $CI$ cắt $(O)$ ở $E$, $EA$ cắt $CD$ ở $K$. Chứng minh rằng $OK = \frac{1}{3}R$.




### Lời giải.

Vì $\triangle AOK \sim \triangle AEB$ (g.g) nên

$$\frac{OK}{OA} = \frac{EB}{EA}. \tag{1}$$

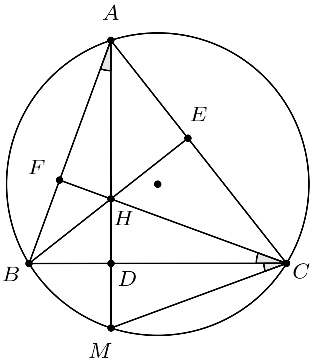
Vì $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$ nên $\widehat{AEC} = \widehat{CEB}$. $\triangle AEB$ có đường phân giác $EI$ nên

$$\frac{EB}{EA} = \frac{IB}{IA} = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Từ $(1)$ và $(2)$ có được điều cần chứng minh. □

## Bài 5a

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp $(O)$, các đường cao $AD, BE, CF$ cắt $(O)$ theo thứ tự ở $M, N, K$. Chứng minh rằng $DM = DH$ với $H$ là trực tâm $\triangle ABC$.




### Lời giải.

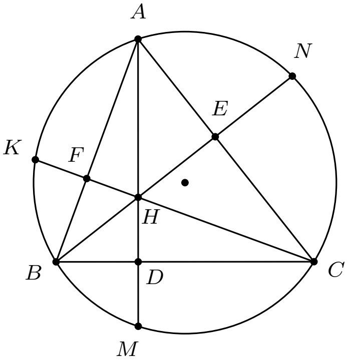
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{HCD} &= \widehat{BAD}\ (= 90^\circ - \widehat{B})\\ &= \widehat{DCM}\ \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BM}\right).\end{aligned}$$

Do đó $\triangle HCD = \triangle MCD$ (cạnh góc vuông-góc nhọn), dẫn đến $DM = DH$. □

## Bài 5b

Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{AD} + \dfrac{BN}{BE} + \dfrac{CK}{CF} = 4.$




### Lời giải.

Ta có

$$\frac{AM}{AD} = 1 + \frac{DM}{AD} = 1 + \frac{HD}{AD} = 1 + \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}.$$

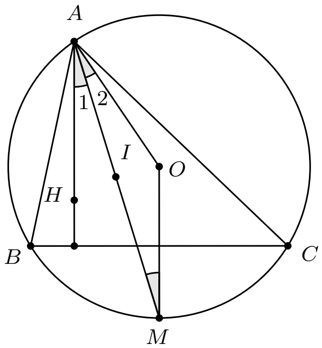
Tương tự thì

$$\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}} \quad \text{và} \quad \frac{CK}{CF} = 1 + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}.$$

Cộng ba phân thức trên thu được điều cần chứng minh. $\square$

## Bài 6a

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp $(O)$. Gọi $H$ là trực tâm, $I$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Chứng minh rằng $AI$ là tia phân giác của $\widehat{OAH}$.




### Lời giải.

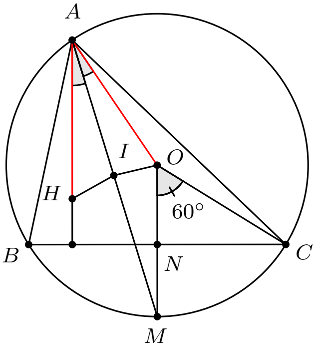
Gọi $M$ là giao điểm $AI$ với $(O)$. Vì $M$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ nên

$$OM \perp BC \implies AH \parallel OM.$$

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{M}$. Mặt khác $\widehat{A_2} = \widehat{M}$ nên có được điều cần chứng minh. $\square$

## Bài 6b

Biết rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$, chứng minh $IH = IO$.




### Lời giải.

Gọi $N$ là trung điểm $BC$ thì $AH = 2ON$. Ta có

$$\widehat{NOC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$$

nên $ON = OC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}OC$. Do đó

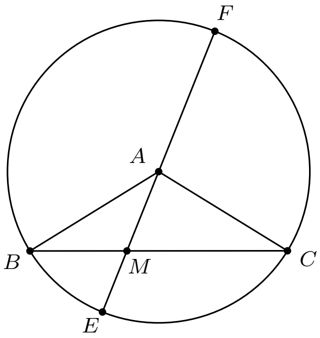
$$AH = 2ON = OC = OA.$$

Như vậy $\triangle AHI = \triangle AOI$ (c.g.c) nên $IH = IO$. $\square$

## Bài 7

Cho $\triangle ABC$ cân tại $A$, điểm $M$ thuộc cạnh $BC$. Chứng minh rằng

$$AB^2 - AM^2 = MB \cdot MC$$




### Lời giải.

Vẽ đường tròn $(A, AB)$ cắt $AM$ tại $E, F$ sao cho $E$ gần $M$ hơn $F$. Khi đó

$$\begin{aligned} AB^2 - AM^2 &= (AB - AM)(AB + AM) \\ &= (AE - AM)(AF + AM) \\ &= ME \cdot MF \end{aligned}$$

Mặt khác $ME \cdot MF = MB \cdot MC$ nên có điều cần chứng minh. $\square$