

Hình học - Bài 3: Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông (Bài tập)

Nguyễn Thành Phát

Lớp 9 (chuyên) - Trung tâm Thành Nhân

9/2022

Bài 1

Giải tam giác ABC vuông tại A , biết rằng

a) $b = 10$ và $\widehat{C} = 30^\circ$,

b) $c = 10$ và $\widehat{C} = 45^\circ$,

c) $a = 20$ và $\widehat{B} = 35^\circ$,

d) $c = 21$ và $b = 18$.

Đáp số

a) $\widehat{B} = 60^\circ$; $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ và $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

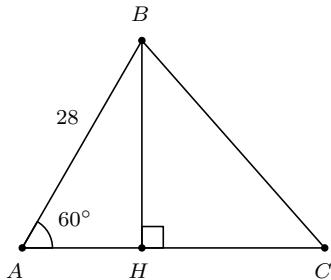
b) $\widehat{B} = 45^\circ$; $b = 10$ và $a = 10\sqrt{2}$.

c) $\widehat{C} = 55^\circ$; $b \approx 11,47$ và $c \approx 16,38$.

d) $a = 3\sqrt{85}$, $\widehat{B} \approx 41^\circ$ và $\widehat{C} \approx 49^\circ$.

Bài 2

Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 28\text{cm}$ và $AC = 35\text{cm}$. Kẻ đường cao BH . Tính BH và BC .



Lời giải.

$BH = AB \sin A = 14\sqrt{3}$, ngoài ra

$$AH = AB \cos A = 14 \implies CH = AC - AH = 21.$$

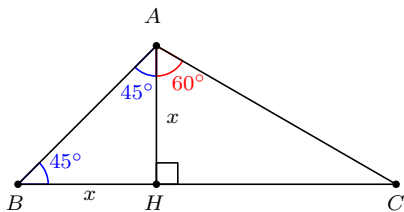
Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle BHC$ vuông tại H thì

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = 7\sqrt{21} \text{ (cm)}.$$



Bài 3

Tam giác ABC có $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$ và $BC = 4\text{cm}$. Tính AB và AC .



Lời giải.

Kẻ đường cao AH , khi đó $\widehat{BAH} = 45^\circ$ và $\widehat{CAH} = 60^\circ$. Đặt $AH = x$ thì

$$BH = x \quad \text{và} \quad CH = AH \operatorname{tg} 60^\circ = x\sqrt{3}.$$

$$\text{Do } BH + HC = BC \text{ nên } x + x\sqrt{3} = 4 \implies x = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = 2(\sqrt{3}-1).$$

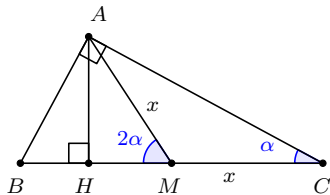
Dẫn tới

$$AB = x\sqrt{2} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \text{ (cm)} \quad \text{và} \quad AC = 2x = 4\sqrt{3} - 4 \text{ (cm)}.$$



Bài 4a

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$ và $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$. Gọi AH, AM lần lượt là đường cao và đường trung tuyến của tam giác. Chứng minh rằng $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.



Lời giải.

Đặt $AM = MC = x$. Thấy rằng

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AC}, \quad \cos \alpha = \frac{HC}{AC} \quad \text{và} \quad \sin(2\alpha) = \frac{AH}{x}.$$

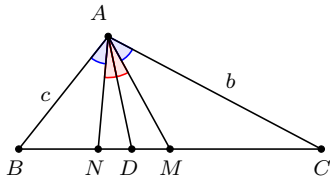
Khi đó

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2AH \cdot HC}{AC^2} = \frac{2AH \cdot \cancel{HC}}{BC \cdot \cancel{HC}} = \frac{2AH}{2x} = \sin(2\alpha).$$



Bài 5

Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$, đường phân giác AD và đường trung tuyến AM . Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N . Tính tỉ số $\frac{BN}{CN}$ theo b, c .



Lời giải.

Biến đổi

$$\frac{BN}{CM} = \frac{S_{ABN}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AN \cdot \sin \widehat{BAN}}{\frac{1}{2}AC \cdot AM \cdot \sin \widehat{CAM}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{AN}{AM} \quad (1)$$

Tương tự thì

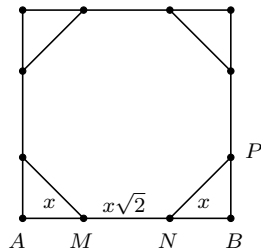
$$\frac{BM}{NC} = \frac{S_{ABM}}{S_{ANC}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{AM}{AN} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) thu được $\frac{BN}{CN} = \frac{BN}{CM} \cdot \frac{BM}{NC} = \frac{c^2}{b^2}$.



Bài 6

Cho hình vuông có cạnh 1cm. Người ta cắt đi ở mỗi góc của hình vuông một tam giác vuông cân để được một bát giác đều. Tính tổng diện tích của bốn tam giác bị cắt đi.



Lời giải.

Đặt $AM = BN = x$, khi đó $MN = NP = x\sqrt{2}$. Từ

$$AM + MN + NB = AB \implies x + x\sqrt{2} + x = 1.$$

Suy ra $x = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Vậy diện tích của bốn tam giác bằng

$$4 \cdot \frac{x^2}{2} = 2 \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$