Teorie grafů

Mějme strom T se sudým počtem vrcholu (je sudého řádu). Cílem je ukázat, že pro T existuje faktor F, kde všechny vrcholy grafu F jsou lichého stupně (budeme říkat lichý faktor).

Důkaz existence faktoru F

Graf T je strom sudého řádu.

$$G = (V, E)$$
$$|V| \equiv 0 \pmod 2$$

Jelikož počet vrcholů je sudý, tak graf T musí mít sudý počet lichých stupní. Pokud by počet lichých stupní byl lichý, potom bychom porušili princip sudosti, jenž uvádí, že:

$$\sum_{v \in V(T)} \deg(v) = 2|E|.$$

Dokažme si, že stupňová posloupnosti s lichým počtem lichých stupní neexistuje. Mějme libovolný graf G sudého řádu.

$$G = (V, E) \quad |V| = n = 2k, k \in \mathbb{Z}$$
$$D_G = (d_1, d_2, ..., d_n)$$
$$k_e = \left|\{d \in D : d \equiv 0 \pmod 2\}\right|$$
$$k_o = \left|\{d \in D : d \equiv 1 \pmod 2\}\right|$$
$$k_o \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow k_e \equiv 1 \pmod 2$$
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = k_e \cdot \text{sudá} + k_o \cdot \text{lichá} = \text{sudá} + \text{lichá} = \underline{\text{lichá}}$$

Součet stupní vrcholů vyšel lichý. To je dle principu sudosti nepřípustné, takový graf neexistuje. Stupňová posloupnost se tedy bude vždy skládat ze sudého počtu lichých stupní a sudého počtu sudých stupní.

Pro hledaní lichého faktoru F stromu T si pomožme tím, že si představíme jeho stupňovou posloupnost. Je nutné podotknout, že jedna posloupnost může popisovat více stromů. To nám však nevadí, jelikož pracujeme se stromy obecně, nikoliv s konkretními stromy.

Pokud se tato posloupnost skládá z lichých čísel, tak jsme jsme našli lichý faktor F grafu T. Faktorem F je totiž strom G samotný.

Pokud tato posloupnost obsahuje sudá čísla, budeme hodnoty této posloupnosti postupně po párech dekrementovat, dokud nedostaneme lichou posloupnost. Dekrementujeme po párech, jelikož jedna hrana grafu je incidentní se dvěma vrcholy grafu.

Všechna kombinace dekrementace ve stupňovové posloupnosti jsou znázorněna zde:

$$(..., \text{lichá}, ..., \text{lichá}, ...) \overset{(-1)}{\Rightarrow} (..., \text{sudá}, ..., \text{sudá}, ...)$$
$$(..., \text{sudá}, ..., \text{sudá}, ...) \overset{(-1)}{\Rightarrow} (..., \text{lichá}, ..., \text{lichá}, ...)$$
$$(..., \text{lichá}, ..., \text{sudá}, ...) \overset{(-1)}{\Rightarrow} (..., \text{sudá}, ..., \text{lichá}, ...)$$
$$(..., \text{sudá}, ..., \text{lichá}, ...) \overset{(-1)}{\Rightarrow} (..., \text{lichá}, ..., \text{sudá}, ...).$$

> **Poznámka**
>
> Mějme na paměti, že stupně rovno jedné nesmíme snižovat. Tyto stupně odpovídají stupňům listů, jehož incidentní hrany musí být ve faktoru F. Pokud bychom tyto hrany odstranili, listy by byly stupně nula - nula není liché číslo.

Nakonec se nám vždy podaří lichou posloupnost(i) dostat. Bez ohledu na to jakým způsobem provedeme postupné snížování stupňí v posloupnosti, je zaručeno, že jedním z těchto vysledných posloupností je právě ona posloupnost faktoru F grafu G.

Toto postupné snižování sekvence a vysledné nalezení sekvence s lichými hodnotami, funguje, jelikož víme že počet vrcholů je sudý. Fakt, že existuje sudý počet lichých a sudých stupňů se po jakékoli dekrementaci, nemění (není porušen princip sudosti).

Pro strom T sudého stupně skutečně existuje lichý faktor F. □

Důkaz jednoznačnosti faktoru F

Existenci faktoru F jsme si odůvodnili. Nyní si dokážme, že takových faktorů F grafu G, kde jsou všechny vrcholy lichého stupně, je právě jeden jediný.

Předpokladejme, že existují dva liché faktory grafu G. Mějme faktory F_1, F_2, pro které tvrdíme, že jsou od sebe odlišné. Tedy musí platit, že mají alespoň jednu hranu, která náleží pouze jim a ne druhému.

$$\exists e \in E(F_1), e \notin E(F_2)$$

Z těchto dvou faktoru můžeme vytvořit nový graf, který obsahuje všechny vrcholy stromu T, které jsou spojeny pouze těmi hranami, které se objevují právě v jednom z faktoru, nikoli v obou.

$$(V(T), E(F_1) \oplus E(F_2)) \quad \text{nebo také} \quad (V(T), E(F_1) \Delta E(F_2))$$
$$\text{zkráceně potom}$$
$$F_1 \Delta F_2$$

Při rozhodování, zda hranu e do $F_1 \Delta F_2$ zahrneme, postupujeme takto:

hrana e je zahrnuta v F_1	hrana e je zahrnuta v F_2	hrane e je zahrnuta v $F_1 \Delta F_2$
ano	ano	ne
ne	ano	ano
ano	ne	ano
ne	ne	ne

nebo stručněji:

$e \in E(F_1)$	$e \in E(F_2)$	$e \in E(F_1) \Delta E(F_2)$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Pokud je hrana e obsažena v obou faktorech, tak se vyruší. přičemž zahrneme všechny hrany incidentní s v v F_2 ($E^v_{F_2}$). Obou jich je lichý počet, proto stupeň vrcholu v je sudý. Tedy:

$$\begin{aligned} |E_{F_1}^v| + |E_{F_2}^v| &= \deg_{F_1 \Delta F_2}(v) \\ \text{liché} + \text{liché} &= \underline{\text{sudé}}. \end{aligned}$$

Pokud se všechny hrany $E_{F_1}^v$ shodují s hranami $E_{F_2}^v$, tak nezahrneme ani jednu z nich - zahrneme 0 hran (sudý počet).

Pokud si některé hrany nachází $E_{F_1}^v$ a přitom také v $E_{F_2}^v$, tak tyto hrany do $F_1 \Delta F_2$ nezahrneme. Nýbrž zahrneme zbytek hran, kterých musí být sudý počet.

Víme totiž, že pokud je počet hran v $E_{F_1}^v \setminus E_{F_2}^v$ lichý, tak počet hran náležící oběma faktorům, $|E_{F_1 \cap F_2}^v|$, je sudý. Tedy hran v $E_{F_2}^v \setminus E_{F_1}^v$ musí být lichý počet.

$$\begin{aligned} |E_{F_1}^v \setminus E_{F_2}^v| + |E_{F_2}^v \setminus E_{F_1}^v| &= \deg_{F_1 \Delta F_2}(v) \\ \text{liché} + \text{liché} &= \underline{\text{sudé}}. \end{aligned}$$

Pokud je $|E_{F_1}^v \setminus E_{F_2}^v|$ sudé, tak je $|E_{F_1 \Delta F_2}^v|$ liché, tedy $|E_{F_2}^v \setminus E_{F_1}^v|$ je sudé.

$$\begin{aligned} |E_{F_1}^v \setminus E_{F_2}^v| + |E_{F_1}^v \setminus E_{F_2}^v| &= \deg_{F_1 \Delta F_2}(v) \\ \text{sudé} + \text{sudé} &= \underline{\text{sudé}}. \end{aligned}$$

Pro:

$$\begin{aligned} T &= (V_T, E_T) \text{ je strom, kde } |V_T| \equiv 0 \pmod 2, \\ F_1 &= \left(V_T, E_{F_1} \subseteq E_T\right), \text{ kde } \forall v \in V(F_1), \deg_{F_1}(v) \equiv 1 \pmod 2, \\ F_2 &= \left(V_T, E_{F_2} \subseteq E_T\right), \text{ kde } \forall v \in V(F_2), \deg_{F_2}(v) \equiv 1 \pmod 2, \end{aligned}$$

platí, že:

$$\forall v \in V(F_1 \Delta F_2), \deg_{F_1 \Delta F_2}(v) \equiv 0 \pmod 2.$$

> ⓘ **Poznámka**
>
> Obecný vzorec pro určení sudosti a lichosti stupně libovolého vrcholu v v symetrické diferenci faktorů S_1 a S_2 stromu T je:
>
> $$\deg_{S_1 \Delta S_2}(v) = \left(\deg_{S_1}(v) + \deg_{S_2}(v)\right) \bmod 2.$$

Z toho plyne, že stupně vrcholů $F_1 \Delta F_2$ jsou všechny sudé. Můžou tedy nabývat hodnot $2k, k \in \mathbb{N}_0$ - to je včetně nuly. Uvažíme-li, že vrcholy nejsou stupně 0, dostaneme vrcholy, které jsou nuceny mít stupeň alespoň 2. Pokud by měli všechny vrcholy stupeň rovno dvěma, takový graf by spadal do třídy grafů zvané jako cesty. Cesty jsou cyklické - stromy jsou jsou acyklické - je zde kontradikce. Ve stromě T jsme našli cyklus - není možné. Je zjevné, že jakýkoliv graf s vyššími stupněmi vrcholů taktéž obsahuje cyklus. Tedy jedinou přípustnou možností je, že stupně vrcholů $F_1 \Delta F_2$ jsou nulové, tedy $F_1 \Delta F_2$ je nulový graf. Z toho plyne, že fakory F_1 a F_2 popisují stejný graf.

$$F_1 \Delta F_2 = \emptyset \to F_1 = F_2$$

Došli jsme k závěru, že pro strom sudého řádu existuje právě jeden lichý faktor. □