Formulace a popis úloh

Nechť máme tři čtyřstenné kostky A, B a C, jejichž čísla na stěnnách jsou definovaná množinami takto:

$$A = \{1, 4, 4, 4\}$$
$$B = \{2, 2, 5, 5\}$$
$$C = \{3, 3, 3, 6\}$$

Zvolme si dvě kostky X, Y a hoďme s nimi. Když jsou kostky vrženy současně, řekneme, že kostka X je lepší než kostka Y, pokud pravděpodobnost, že hodnota na kostce X bude vyšší než hodnota na kostce Y, je větší než 50%.

Tuto skutečnost zapíšeme jako $X > Y$. Pravděpodobnost výhry kostky X nad kostkou Y označíme potom jako $P(X > Y)$.

Úlohy jsou následující:

1. **Prokázání netranzitivity**

   První úkolem je ukázat, že vztahy mezi kostkami nejsou tranzitivní, to znamená, že vztahy mezi kostkami jsou tzv. cyklické[1] Tvrdíme totiž, že platí $B > A$, $C > B$ a současně $A > C$. To znamená, že žádná kostka není "nejlepší" ve všech případech.

   Pro každou dvojici kostek vypočítáme pravděpodobnost vítězství jedné kostky nad druhou, konkrétně $P(B > A)$, $P(C > B)$ a $P(A > C)$, a ověříme, že všechny tyto pravděpodobnosti jsou větší než $\frac{1}{2}$.

2. **Kombinatorická analýza možných konfigurací**

   V druhém úkolu máme stanovit celkový počet možných konfigurací čísel tří kostek. Čísla na stěny kostek vybíráme z množiny $[1, 6]$, přičemž se čísla mohou opakovat. Kostky jsou navíc rozlišitelné (např. barvou).

3. **Maximalizace pravděpodobností**

   Poslední úloha spočívá v nalezení největší hodnoty parametru p při volné konfiguraci čísel na kostkách (dle druhé úlohy), přičemž parametr p musí splňovat:

   $$P(B > A) \geq p$$
   $$P(C > B) \geq p$$
   $$P(A > C) > p$$

   To vyžaduje navržení algoritmu, který systematicky prověří všechny možné konfigurace čísel na kostkách, vypočítá odpovídající pravděpodobnosti a maximalizuje p.

[1] Wikipedia, *Intransitivity*: https://en.wikipedia.org/wiki/Intransitivity