Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Diskrétní matematika

Semestrální projekt – zadání 9

Příklad	Poznámky
1	
2	

Jméno: Phat Tran Dai
Osobní číslo: TRA0163

Datum: 01. 12. 2024

Abstrakt

Tato práce se zaměřuje na dvě matematické úlohy z oblasti kombinatoriky a teorie grafů. První část se věnuje analýze netranzitivních vlastností čtyřstěnných kostek a výpočtům pravděpodobností jejich vzájemných výher. Navíc zkoumá celkový počet možných konfigurací čísel na kostkách a při daných podmínek maximalizuje pravděpodobnosti jejich vztahů. Druhá část se zabývá důkazem existence jednoznačného faktoru ve stromech se sudým počtem vrcholů, kde všechny vrcholy faktoru mají lichý stupeň.

Obsah

Úvod

V této práci se zaměřuji na dvě konkrétní úlohy. První úloha pojednává o kombinatorických vlastnostech netranzitivních kostek, které vykazují překvapivé neintuitivní pravděpodobnostní vztahy. Druhá úloha pochází z oblasti teorie grafů. Zabývá se faktory stromů se sudým počtem vrcholů a hledáním jednoznačného faktoru s lichými stupni vrcholů.

Kombinatorická část práce se zabývá výpočty pravděpodobností výher mezi kostkami, rozmístěními čísel na čtyřstenných kostkách a maximalizací pravděpodobnostní hranice při splnění daných podmínek.

V části teorie grafů se pak zabývám důkazem existence faktoru s lichými stupni ve stromech se sudým počtem vrcholů. Dokážu také jednoznačnost tohoto faktoru.

Kombinatorika

1.1. Formulace a popis úloh

Nechť máme tři čtyřstenné kostky A, B a C, jejichž čísla na stěnnách jsou definovaná množinami takto:

$$A = \{1, 4, 4, 4\}$$
$$B = \{2, 2, 5, 5\}$$
$$C = \{3, 3, 3, 6\}$$

Zvolme si dvě kostky X, Y a hoďme s nimi. Když jsou kostky vrženy současně, řekneme, že kostka X je lepší než kostka Y, pokud pravděpodobnost, že hodnota na kostce X bude vyšší než hodnota na kostce Y, je větší než 50%.

Tuto skutečnost zapíšeme jako $X > Y$. Pravděpodobnost výhry kostky X nad kostkou Y označíme potom jako $P(X > Y)$.

Úlohy jsou následující:

1. **Prokázání netranzitivity**

   První úkolem je ukázat, že vztahy mezi kostkami nejsou tranzitivní, to znamená, že vztahy mezi kostkami jsou tzv. cyklické[1] Tvrdíme totiž, že platí $B > A$, $C > B$ a současně $A > C$. To znamená, že žádná kostka není „nejlepší“ ve všech případech.

   Pro každou dvojici kostek vypočítáme pravděpodobnost vítězství jedné kostky nad druhou, konkrétně $P(B > A)$, $P(C > B)$ a $P(A > C)$, a ověříme, že všechny tyto pravděpodobnosti jsou větší než $\frac{1}{2}$.

2. **Kombinatorická analýza možných konfigurací**

   V druhém úkolu máme stanovit celkový počet možných konfigurací čísel tří kostek. Čísla na stěny kostek vybíráme z množiny $[1, 6]$, přičemž se čísla mohou opakovat. Kostky jsou navíc rozlišitelné (např. barvou).

3. **Maximalizace pravděpodobností**

   Poslední úloha spočívá v nalezení největší hodnoty parametru p při volné konfiguraci čísel na kostkách (dle druhé úlohy), přičemž parametr p musí splňovat:

$$P(B > A) \geq p$$
$$P(C > B) \geq p$$
$$P(A > C) > p$$

   To vyžaduje navržení algoritmu, který systematicky prověří všechny možné konfigurace čísel na kostkách, vypočítá odpovídající pravděpodobnosti a maximalizuje p.

[1] Wikipedia, *Intransitivity*: https://en.wikipedia.org/wiki/Intransitivity

1.2. Netranzitivita kostek

Cílem této části je analyzovat vlastnosti tří čtyřstěnných kostek A, B a C a ukázat, že vykazují netranzitivní chování. To znamená, že pravděpodobnosti výhry při „souboji“ mezi jednotlivými kostkami splňují vztahy:

$$\begin{aligned} P(B > A) &> 0.5 \\ P(C > B) &> 0.5 \\ P(A > C) &> 0.5 \end{aligned}$$

Pro každý pár kostek X a Y definujeme pravděpodobnost $P(X > Y)$ jako pravděpodobnost, že při hodu kostkami X a Y padne na kostce X vyšší číslo než na kostce Y.

Každá kostka má čtyři stěny, takže celkový počet možných kombinací výsledků při „souboji“ dvou kostek je $4 \cdot 4 = 16$, což odpovídá mohutnosti množiny kartezského součinu $X \times Y$ kostek X a Y. Pravděpodobnost se vypočítá jako podíl počtu případů, kdy padlé číslo na kostce X je větší než číslo na kostce Y a celkového počtu možných kombinací výsledků.

$$P(X > Y) = \frac{\Big|\{(x, y) \in X \times Y : x > y\}\Big|}{|X \times Y|}$$

V této části postupně určíme pravděpodobnosti $P(B > A)$, $P(C > B)$ a $P(A > C)$.

1.2.1. Výpočet $P(B > A)$

První varianta řešení

Pravděpodobnostní prostor Ω je kartezský součin čísel na kostkách B a A:

$$B = \{2, 2, 5, 5\} \quad A = \{1, 4, 4, 4\} \quad \Omega = \Big\{(b, a) : b \in B, a \in A\Big\} \Leftrightarrow B \times A$$

$$\begin{aligned} \Omega = \Big\{&(2, 1), (2, 1), (5, 1), (5, 1), \\ &(2, 4), (2, 4), (5, 4), (5, 4), \\ &(2, 4), (2, 4), (5, 4), (5, 4), \\ &(2, 4), (2, 4), (5, 4), (5, 4)\Big\} \end{aligned}$$

Z rozepsané Ω vidíme, že počet případů, kdy kostka B vyhraje nad A je vyšší (10) než počet, kdy prohraje (6). Pravděpodobnost vypočteme jako:

$$P(B > A) = \frac{2 + 4 \cdot 2}{|\Omega|} = \frac{10}{16} = \underline{\underline{0.625}}$$

Vidíme, že pravděpodobnost výhry kostky B nad kostkou A je vyšší než 50%. To znamená, že kostka B je lepší než A. $\square$

Druhá varianta řešení

Pravděpodobnostním prostorem je stále $\Omega = B \times A$. Využijeme toho, že se kostky skládají ze dvou různých čísel. Pokud hodnota kostky A je 1, pak kostka B vyhraje vždy a to bez ohledu na její vrženou hodnotu. Pokud padla na kostce A hodnota 4, pak B vyhraje pouze tehdy, když bude vržena hodnota 5. To zapišeme a vypočítáme následovně:

$$P(B > A) = \frac{P(A=1) \cdot P(B > A = 1) \cdot |\Omega| + P(A=4) \cdot P(B > A = 4) \cdot |\Omega|}{|\Omega|}$$

$$= |\Omega| \; \frac{P(A=1) \cdot P(B > 1) + P(A=4) \cdot P(B > 4)}{|\Omega|}$$

$$= P(A=1) \cdot P(B > 1) + P(A=4) \cdot P(B > 4) \tag{1.1}$$

$$= P(A=1) \cdot P(B) + P(A=4) \cdot P(B=5)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = \underline{\underline{0.625}}$$

Protože $P(B > A) = \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$, je kostka B lepší než kostka A. $\square$

Zbývalé pravděpodobnosti $P(C > B)$ a $P(A > C)$ bychom mohli vypočítat obdobně jako $P(B > A)$. Lze to ale udělat lépe? Všiměte si Rovnice (1.1). Její tvar můžeme využitím zákonu celkové pravděpodobnosti[2] zobecnit.

1.2.2. Výpočet pomocí zákonu celkové pravděpodobnosti

Zákon celkové pravděpodobnosti uvádí, že mame-li událost E, která závisí na známých podmínkách, tak její pravděpodobnost lze vyjádřit jako:

$$P(E) = \sum_{i=0}^{n} P(C_i) \cdot P(E|C_i)$$

kde C_i jsou disjunktní podmínky pokrývající celý pravdepodobnostní prostor Ω, tedy:

$$\bigcup_{i=0}^{n} C_i = \Omega \quad \text{a} \quad C_i \cap C_j = \emptyset \;\; \text{pro} \;\; i \neq j$$

[2]Wikipedia, *Law of total probability*: https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_total_probability

Zkoumanými událostmi jsou v našem případě $X > Y$ (kostka X vyhraje nad kostkou Y). Disjunktní podmínky C_i odpovídají výsledkům hodů kostky Y, která může nabývat hodnot $y_0, y_1, ..., y_n$. Podmínky $Y = y_i$ jsou disjunktní, protože platí:

$$\bigcup_{i=0}^{n}(Y = y_i) = \Omega_{XY} \quad \text{a} \quad (Y = y_i) \cap \left(Y = y_j\right) = \emptyset \;\; \text{pro} \;\; i \neq j$$

Padne-li na kostce Y např. 1 nemůže zároveň padnout 3 nebo 5 apod. Obecný vzorec pro výpočet pravděpodobnosti $P(X > Y)$ je:

$$P(X > Y) = \sum_{y \in Y} P(Y = y) \cdot P(X > y)$$

1.2.3. Aplikace vzorce na $P(C > B)$ a $P(A > C)$

Pro připomenutí, množiny A, B a C jsou definované jako:

$$A = \{1, 4, 4, 4\} \quad B = \{2, 2, 5, 5\} \quad C = \{3, 3, 3, 6\}$$

Výpočty pravděpodobností pomocí odvozeného vzorce

$$\begin{aligned}
P(C > B) &= \sum_{b \in B} P(B = b) \cdot P(C > b) \\
&= P(B = 2) \cdot P(C > 2) + P(C = 5) \cdot P(C > 5) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = \underline{\underline{0.625}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A > C) &= \sum_{c \in C} P(C = c) \cdot P(A > c) \\
&= P(C = 3) \cdot P(A > 3) + P(C = 6) \cdot P(A > 6) \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{0}{4} = \frac{9}{16} = \underline{\underline{0.5625}}
\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že $B > A$, $C > B$ a $A > C$. $\square$

1.3. Různá rozmístění čísel na kostkách

Kostky A, B a C jsou rozlišitelné (například mají odlišné barvy). Zajímá nás, jaký je počet různých konfigurací čísel, pokud vybíráme čísla z množiny z množiny $[1, 6]$ s možností opakovaní.

Počet způsobů, jak vybrat čtyři čísla z šesti (s možností opakování), je:

$$C^*(6,4) = \binom{9}{4} = 126$$

Proto možných konfigurací čísel na třech kostkách je:

$$\Big[C^*(6,4)\Big]^3 = 126^3 = \underline{\underline{2000376}} \tag{1.2}$$

Jiná úvaha (kuličky a přehrádky)
Počet různých konfigurací pro jednu kostku lze také vyjádřit jako:

$$\underbrace{\binom{6}{4}\binom{3}{3}}_{a} + \underbrace{\binom{6}{3}\binom{3}{2}}_{b} + \underbrace{\binom{6}{2}\binom{3}{1}}_{c} + \underbrace{\binom{6}{1}\binom{3}{0}}_{d} = 126 \tag{1.3}$$

Vysvětlení členů:

a) *Vybereme čtyři různá čísla z šesti možných.*
Umístíme tři oddělovače mezi čtyřmi stěnami kostky (kuličky). Vzniklé čtyři přehrádky naplníme těmito vybranými čísly.

b) *Vybereme tři čísla z šesti možných.*
Zvolíme dvě pozice ze tří, kam umístit dva oddělovače mezi čtyřmi stěnami. Vzniklé tři přehrádky naplníme těmito čísly.

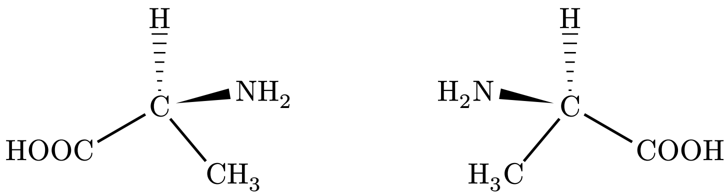
c) *Vybereme dvě čísla z šesti možných.*
Zvolíme jednu ze tří pozic, kam umístíme jeden oddělovač. Vzniklé dvě přehrádky naplníme těmito čísly.

d) *Vybereme jedno číslo z šesti možných.*
Máme pouze jednu přehrádku, kterou naplníme tímto číslem.

Enantiomorfy kostek

Výpočet konfigurací podle Rovnice (1.3) platí pouze za předpokladu, nebereme-li v úvahu různá rozmístění pevně zvolených čísel na kostce. Pokud máme 4 různá čísla, lze je na čtyřstěnnou kostku rozmístit dvěma různými způsoby, neboť každá konfigurace má svůj zrcadlový obraz, který s ní není totožný. Tento obraz se nazývá tvz. jako chirální enantiomorf[3].

Podobný jev lze pozorovat v chemii u enantiomérů, což představuje analogii k našim kostkám.



Obrázek 1.1: L-alanin a D-alanin (enantioméry)

Pokud bychom chtěli být zcela přesní, je třeba výpočet podle Rovnice (1.3) upravit následujícím způsobem:

$$\underbrace{2 \cdot \binom{6}{4}}_{\text{korekce}} + \binom{6}{3}\binom{3}{1} + \binom{6}{2}\binom{3}{1} + \binom{6}{1}$$

Tento výpočet se dále rozepíše jako:

$$\begin{aligned} &2 \cdot 15 + 20 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 6 \\ &= 30 + 60 + 45 + 6 = \underline{141} \end{aligned}$$

Pro tři kostky tedy bude možných konfigurací:

$$(141)^3 = \underline{\underline{2803221}}$$

[3]Wikipedia, *Chiralita*: https://cs.wikipedia.org/wiki/Chiralita

1.4. Sestavení algoritmu

Cílem je maximalizovat p tak, aby současně platily:

$$\begin{cases} P(B > A) & \geq & p \\ P(C > B) & \geq & p \\ P(A > C) & > & p \end{cases}$$

pričemž hodnoty pravděpodobnosti $P(X > Y)$ manipulujeme volným výběrem čísel čtyř stěn kostek z množiny čísel $[1, 6]$ (s možností opakování).

Algoritmus jsem se rozhodl implementovat v programovacím jazyce Rust[4]. Celý zdrojový kód naleznete zde[5].

Základní idea algoritmu

1. Nejprve se vygenerují všechny číselné kombinace kostky. K vygenerovaní těchto kombinací jsem si napsal pomocnou funkci `fn generate_dice`, ve které volám funkci `fn combinations_with_replacement` z knihovny `itertools`.

```rust
fn generate_dice(sides: usize) -> Vec<Vec<usize>> {
    (1..=6).combinations_with_replacement(sides).collect()
}
```

Seznam 1.1: Funkce `fn generate_dice`

2. Vypočítání pravděpodobnosti $P(X > Y)$ zajišťuje následující funkce:

```rust
fn pairwise_probability(x: &[usize], y: &[usize]) -> f64 {
    let mut wins = 0;              // Count the number of pairs where x > y
    for &xi in x.iter() {          // Loop through each element in x and y
        for &yi in y.iter() {
            if xi > yi {
                wins += 1;         // Increment wins if xi is greater than yi
            }
        }
    }
    let omega = (x.len() * y.len()) as f64; // Size of the probability space
    wins as f64 / omega                     // Return computed probability
}
```

Seznam 1.2: Funkce `fn pairwise_probability`

3. Použitím tří vnořených cyklů se prověří, jestli pro stávající p platí, že $P(B > A) \geq p$, $P(C > B) \geq p$ a $P(A > C) > p$ pro některou z kombinací kostek A, B a C.

[4] Programovací jazyk Rust: https://www.rust-lang.org/
[5] GitHub repozitář se zdrojovým kódem: https://github.com/phatt-23/Projekt-9-DIM/blob/master/program/src/main.rs

```rust
for a in &dice {           // Check all combinations of A, B, C
    for b in &dice {
        for c in &dice {
            if pairwise_probability(b, a) >= p    // P(B > A) >= p
              && pairwise_probability(c, b) >= p  // P(C > B) >= p
              && pairwise_probability(a, c) > p   // P(A > C) >  p
            { /* ... do something */ }
        }
    }
}
```

Seznam 1.3: Kód na prověřování podmínek

Implementace algoritmu

Celý algoritmus (jeho naivní varianta) je zde:

```rust
fn find_max_p_naive(side_count: usize) -> f64 {
    println!("Finding maximal p:");
    let mut max_p = 0.0;                  // Holds the maximum p
    let dice = generate_dice(side_count); // Create all the dice combinations
    let omega_size = side_count.pow(2);
    let increment = 1.0 / omega_size as f64; // p grows by this step

    for step in 0..=omega_size {          // Iterate from 0 to |Omega|
        let p = step as f64 * increment;  // Incrementing by 1/|Omega|
        let mut valid = false;            // No valid configs yet found
        println!("Testing for p = {}:", p);

        'outer:                           // Tag to jump to from within the loop
        for a in &dice {                  // Test out every single combination
            for b in &dice {
                for c in &dice {
                    // Get the probabilities of P(B > A), P(C > B), P(A > C)
                    let ba = pairwise_probability(b, a);
                    let cb = pairwise_probability(c, b);
                    let ac = pairwise_probability(a, c);
                    if ba >= p && cb >= p && ac >= p { // Check them against p
                        valid = true; // This p has a valid configuration
                        println!("A={:?}, B={:?}, C={:?}", a, b, c);
                        break 'outer; // Jump out of loops (to the 'outer tag)
                    }
                }
            }
        }
        // If for current p config doesnt exist, then return the last valid p
        if !valid {
            println!("No valid configurations!");
            return max_p;
        }

        max_p = p; // If configuration exists assign to max_p
    }
    max_p          // By default return max_p found
}
```

Seznam 1.4: Naivní varianta funkce `fn find_max_p`

Tato naivní varianta algoritmu je velmi neefektivní, neboť opakovaně počítá pravděpodobnosti mezi týmiž kostkami. V důsledku je alogitmus znatelně pomalý.

Je zřejmé, že by algoritmu přispělo prvně předpočítat pravděpodobnosti všech kombinací dvou kostek. Vypočtené hodnoty se uloží do matice (pole polí). Konkrétně se použije dynamické pole `Vec<T>` ze standardní knihovny jazyka Rust.

Pro naplnění tohoto pole předpočtenými hodnotami pravděpodobností, jsem si napsal následující funkci, která vrací matici pravděpobností kombinací kostek X a Y (obětuje se paměť pro rychlejší vyhledání hodnot pravděpodobností):

```rust
fn precompute_probabilities_vec(dice: &Vec<Vec<usize>>) -> Vec<Vec<f64>> {
    let size = dice.len();
    // Matrix of X and Y
    let mut cache: Vec<Vec<f64>> = vec![vec![0.0; size]; size];

    for (i, x) in dice.iter().enumerate() {
        for (j, y) in dice.iter().enumerate() {
            // Insert P(X>Y) at [i,j]
            cache[i][j] = pairwise_probability(x, y);
        }
    }

    cache // Return the matrix of computed probabilities of X and Y
}
```

Seznam 1.5: Funkce `fn precompute_probabilities_vec`

a využil ji v upravené funkci pro hledaní maximální hodnoty p:

```rust
fn find_max_p_caching_vec(side_count: usize) -> f64 {
    // ... (identical with the previous)
    let cache = precompute_probabilities_vec(&dice);  // <-- precomputing

    for step in 1..=16 {
        let p = step as f64 * increment;
        let mut valid = false;
        'outer:
        for (i, a) in dice.iter().enumerate() {
            for (j, b) in dice.iter().enumerate() {
                if cache[j][i] < p { continue; }  // skipping innermost loop
                                                  // if P(A > B) doesnt hold
                for (k, c) in dice.iter().enumerate() {
                    if cache[k][j] >= p && cache[i][k] > p {
                        println!("A = {:?}, B = {:?}, C = {:?}", a, b, c);
                        valid = true;
                        break 'outer;
                    }
                }
            }
        }

        if !valid {
          println!("No valid configurations!");
          return max_p;
        }

        max_p = p;
    }
    // ... (identical with the previous)
}
```

Seznam 1.6: Rychlejší varianta `fn find_max_p` s předpočítanými hodnotami

Verze s předpočítanými hodnotami pravděpodobností výrazně zrychluje celý proces. Díky tomu, že místo opakovaného výpočtu pravděpodobnosti pro každý pár kostek mezi každým cyklem, máme uložené hodnoty v matici, což zrychlí nalezení pravěpodobnosti $P(X > Y)$ na konstantní čas $O(1)$.

Posledně jsem droubnou úpravou cyklů algoritmus paralelizoval:

```rust
fn find_max_p_parallel(side_count: usize) -> f64 {
    // ... (identical with the previous)

    for step in 1..=16 {
        let p = step as f64 * increment;
        println!("Testing for p = {}:", p);

        // Iterations done in paralel
        let valid = dice.par_iter().enumerate().any(|(i, _)| {
            dice.par_iter().enumerate().any(|(j, _)| {
                if cache[j][i] < p { return false; }
                dice.par_iter().enumerate().any(|(k, _)| {
                    cache[k][j] >= p && cache[i][k] > p
                })
            })
        });

        if !valid {
            println!("No valid configurations!");
            return max_p;
        }

        println!("Config found (no printout available)!");
        max_p = p;
    }

    // ... (identical with the previous)
}
```

Seznam 1.7: Paralení varianta funkce `fn find_max_p`

Vzhledem k tomu, že se zde zabýváme čtyřstěnnými kostkami, paralelizace přinesla pouze mírné časové zlepšení.

Výpis po zpuštění programu

```
Maximal p = 0.5625
Valid configurations for p = 0.5625 are:
[0]   A = [2, 2, 5, 5]  B = [3, 3, 3, 6]  C = [1, 4, 4, 4]
[1]   A = [2, 2, 5, 6]  B = [3, 3, 3, 6]  C = [1, 4, 4, 4]
[2]   A = [3, 3, 3, 6]  B = [1, 4, 4, 4]  C = [1, 2, 5, 5]
[3]   A = [3, 3, 3, 6]  B = [1, 4, 4, 4]  C = [2, 2, 5, 5]
```

Seznam 1.8: Standardní výstup v konzoli

Z výpisu algoritmu jsem zpozoroval, že maximální hodnota, kterou p může nabývat, je $\frac{9}{16}$ neboli 0.5625. Také jsem zjistil o jaké konfigurace kostek, které splňují dané podmínky, se přesně jedná. Dvě z nich dokonce odpovídají konfiguraci ve slovním zadání, neberu-li v potaz označení kostek (index 0 a 3).

Teorie grafů

Mějme strom T se sudým počtem vrcholů (je sudého řádu). Cílem je ukázat, že pro T existuje faktor F, kde všechny vrcholy grafu F jsou lichého stupně (lichý faktor).

2.1. Důkaz existence faktoru

Existenci faktoru stromu dokážeme indukci – konkrétně jeho rekurzivní konstrukcí.

Nechť $T = (V, E)$ je strom, kde $|V(T)| \equiv 0 \pmod 2$ a $|V(T)| \geq 2$.

Základní případ

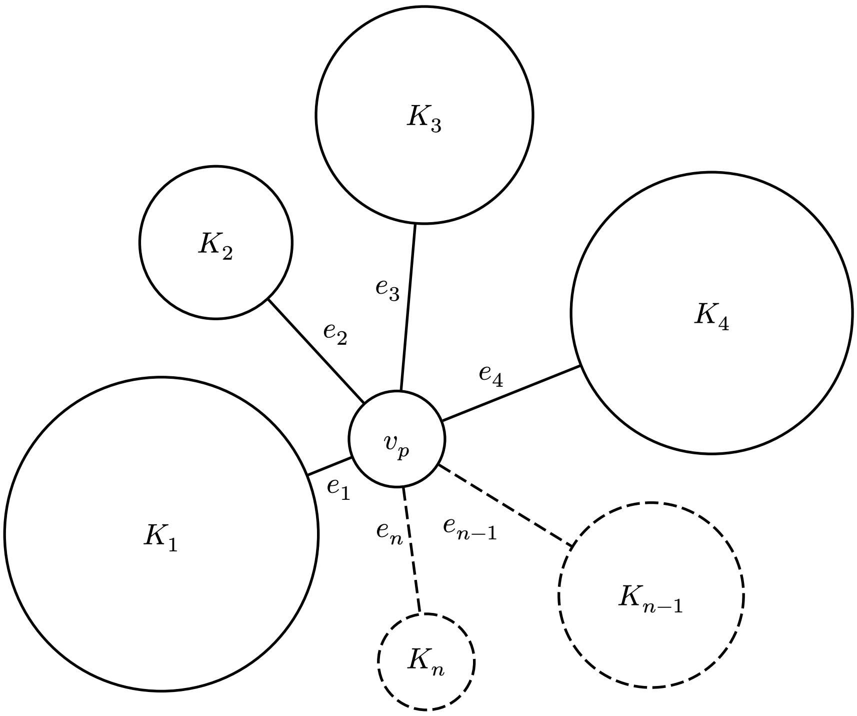
Pro strom T se dvěma vrcholy, $|V(T)| = 2$, je zřejmé, že jeho lichý faktor je právě T.

Indukční krok

Uvažujme pro $|V(T)| > 2$. Vybereme libovolný vrchol $v_p \in V(T)$, kde $\deg_T(v_p) > 1$ (tj. nebereme listy), a výjmeme ho z grafu. Výsledkem je graf $T - \{v_p\}$, jehož komponenty, které jsou rovněž stromy, označíme jako:

$$K_1, K_2, ..., K_n \quad \text{kde } n = \deg_T(v_p)$$

Hranu, která spojuje vrchol v_p s komponentou K_i, označíme jako e_i.



Obrázek 2.2: Strom T s vybraným vrcholem v_p, komponentami K_i a hranami e_i

Rozdělení komponent

Komponenty si rozdělíme do dvou množin S a L tak, aby S obsahovala komponenty sudého řádu, zatímco L obsahovala komponenty lichého řádu:

$$S = \left\{K_i : |V(K_i)| \equiv 0\right\} \quad L = \left\{K_i : |V(K_i)| \equiv 1\right\} \pmod 2$$

Analýza počtu vrcholů

Počet vrcholů grafu $T - \{v_p\}$ je lichý:

$$\left|V\left(T - \{v_p\}\right)\right| \equiv 1 \pmod 2$$

Dále platí:

$$\begin{aligned} V\left(T - \{v_p\}\right) &= \left(\bigoplus_{K \in S} V(K)\right) \oplus \left(\bigoplus_{K \in L} V(K)\right) \\ |V\left(T - \{v_p\}\right)| &= \sum_{K \in S} |V(K)| + \sum_{K \in L} |V(K)| \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

kde znak $\oplus$ představuje operátor symetrického rozdílu[6] dvou množin.

Liché číslo lze získat pouze součtem sudého a lichého čísla:

$$\underbrace{2t}_{\text{sudé}} + \underbrace{(2k+1)}_{\text{liché}} \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{pro } k, t \in \mathbb{Z}$$

Jedna z množin tedy musí mít lichý součet počtu vrcholů svých komponent, přičemž pro množinu S platí:

$$\sum_{K \in S} |V(K)| \equiv 0 \pmod 2$$

protože suma počtů vrcholů komponent v S je vždy sudá. Z čehož plyne:

$$\sum_{K \in L} |V(K)| \equiv 1 \pmod 2$$

tedy, že suma vrcholů všech komponent v L je lichá.

[6] Wikipedia, *Symmetric difference*: https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_difference

Počet komponent v L

Součet vrcholů komponent v S je vždy sudý. Naopak součet vrcholů komponent v L je vždy lichý. To znamená, že množina L obsahuje lichý počet komponent:

$$|L| \equiv 1 \pmod 2$$

neboť jediný způsob, jak získat liché číslo součtem lichých čísel (počet vrcholů komponenty v L), je, když máme lichý počet (mohutnost množiny L) lichých čísel:

$$\forall K \in L: \quad |V(K)| = 2k + 1 \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}$$
$$p = |L|$$

$$\begin{aligned} p(2k+1) &\equiv 1 \pmod 2 \\ 2pk + p &\equiv 1 \pmod 2 \\ p &\equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

Konstrukce faktoru

Pro komponentu $K \in L$ neexistuje faktor $F = (V(K), E_F)$, kde $E_F \subseteq E(K)$ a každý vrchol $v \in V(F)$ by byl lichého stupně. To vyplývá z principu sudosti:

$$\sum_{v \in K} \deg_K(v) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)$$

Nemůže tedy existovat lichý faktor stromu lichého řádu, protože to by tento princip porušovalo.

Abychom zajistili sudost, přidáme do každé komponenty $K \in L$ zpět výjmutý vrchol v_p (včetně hrany e_i), čímž získáme stromy $K + \{v_p\}$ sudého řádu. Jelikož jsou sudé, můžeme na ně aplikovat indukční krok.

Komponentám v S nepřidáváme vrchol v_p, neboť už jsou sudého řádu. I na ně aplikujeme indukční krok.

Vrchol v_p bude mít stupeň roven počtu komponent v L:

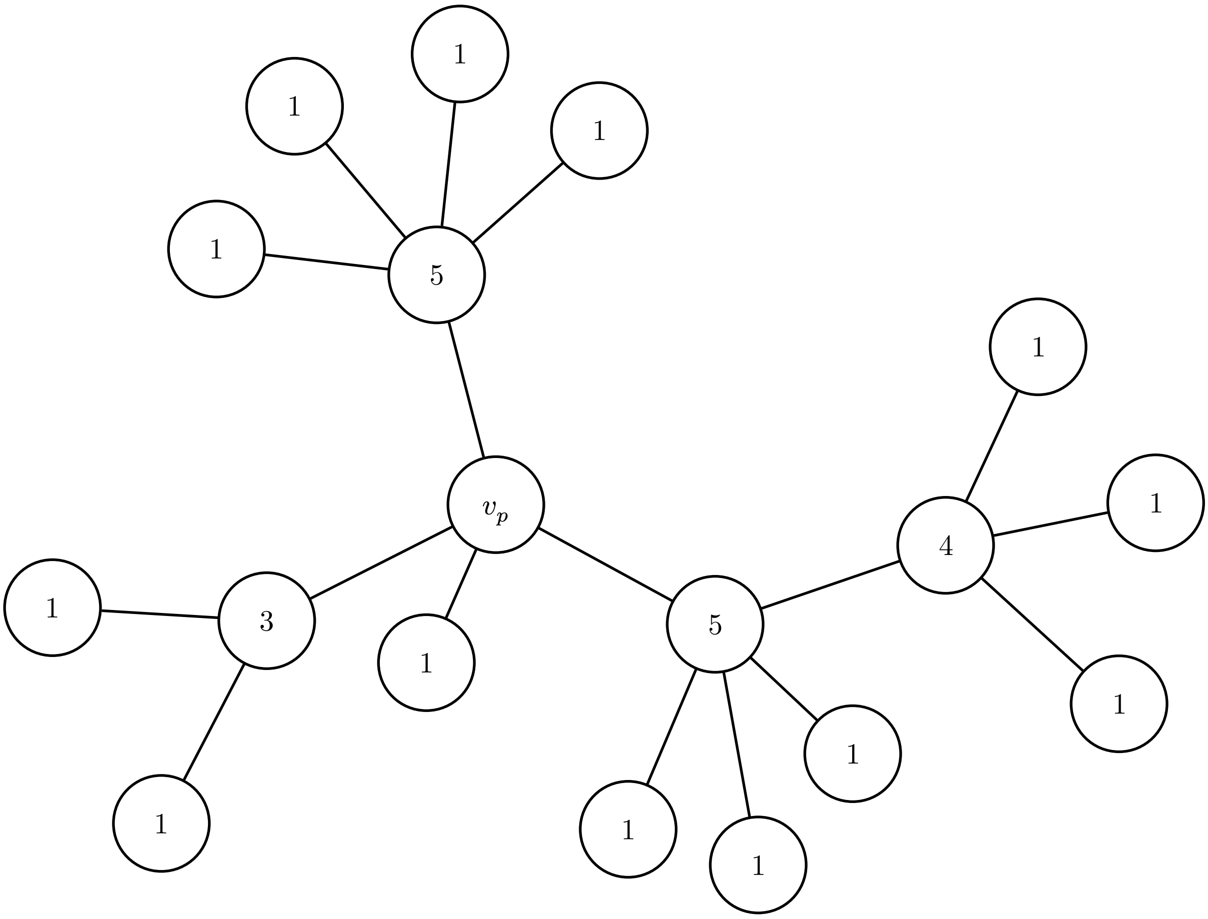
$$\deg(v_p) = |L| \equiv 1 \pmod 2$$

Na konci indukce (rekurze) bude každý vrchol $v \in V(T)$ lichého stupně, protože:

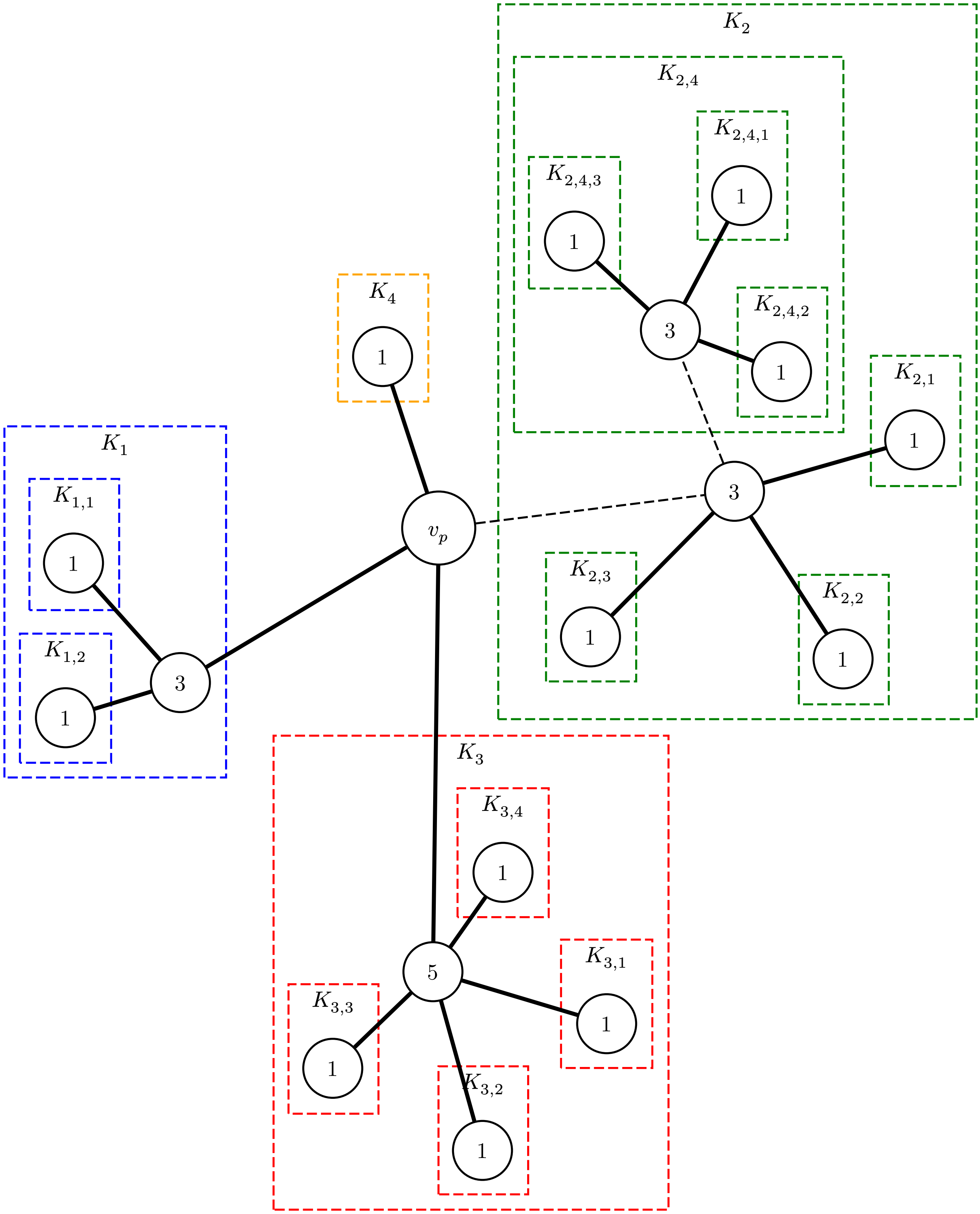
$$\deg(v) = |L|$$

přičemž mohutnost L je v každém kroku lichá. Tím je existence lichého faktoru dokázána. $\square$

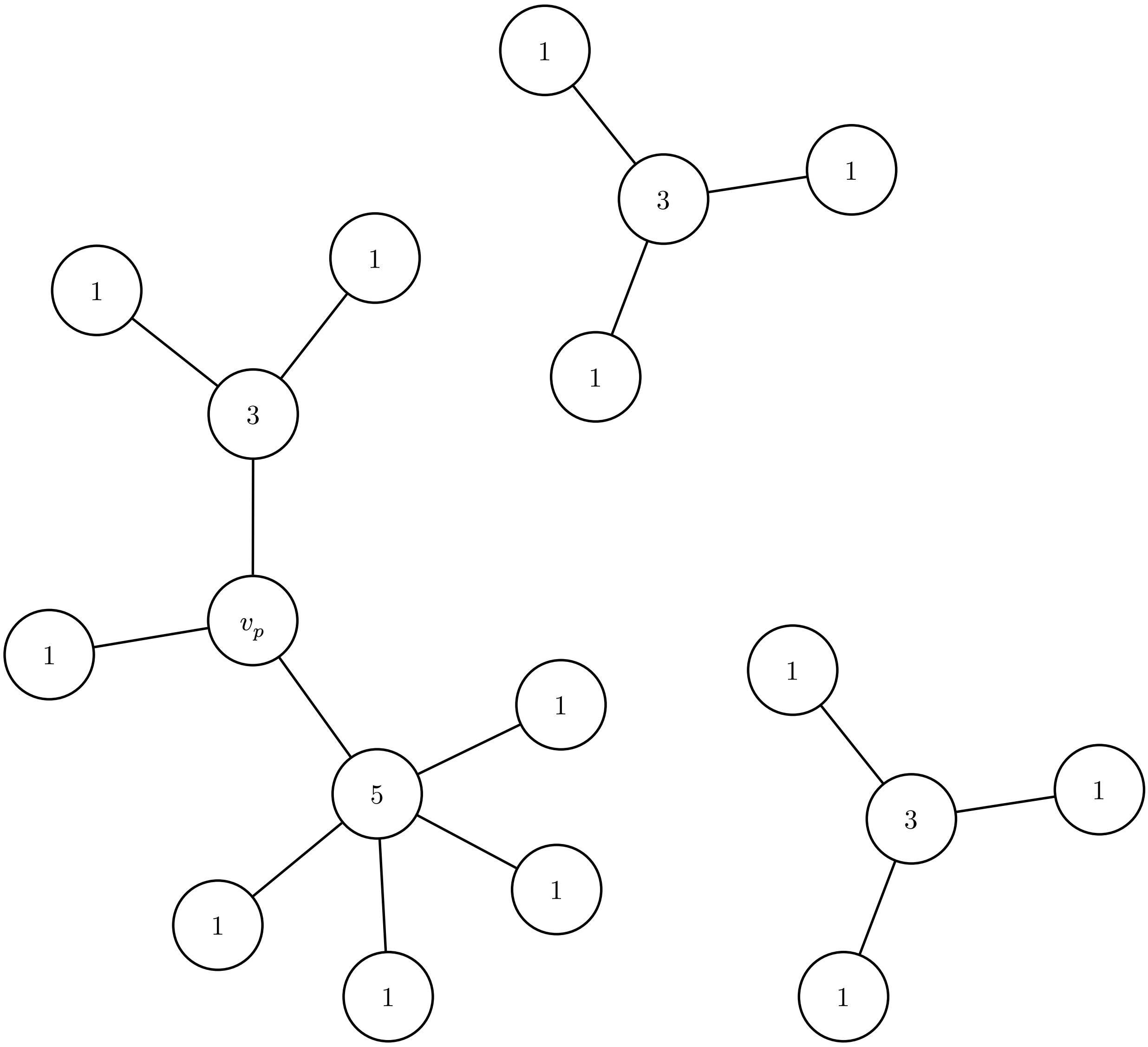
Ukázka algoritmu (indukce/rekurze)



Obrázek 2.3: Strom T s vyznačenými stupni vrcholů a vybraným vrcholem v_p



Obrázek 2.4: Rekurzivní konstrukce lichého faktoru stromu T



Obrázek 2.5: Nalezený lichý faktor stromu T

2.2. Důkaz jednoznačnosti faktoru F

Po odůvodnění existence faktoru F nyní dokážeme, že v stromu T existuje právě jeden takový faktor F, ve kterém mají všechny jeho vrcholy lichý stupeň.

Důkaz sporem

Předpokladejme, že existují dva různé liché faktory stromu T. Mějme faktory F_A, F_B, o kterých tvrdíme, že jsou od sebe odlišné. Tedy musí platit, že mají alespoň jednu hranu, která náleží pouze jim ale ne druhému.

$$\exists e \in E(F_A), e \notin E(F_B)$$

Vytvoříme nový graf G. Ten obsahuje všechny vrcholy stromu T a hrany, které jsou symetrickým rozdílem hran faktorů F_A a F_B. To znamená, že G obsahuje ty hrany, které se objevují právě v jednom z faktorů, nikoliv v obou.

$$G = \Big(V(T), E(F_A) \oplus E(F_B)\Big)$$

Pokud je graf G nulovým grafem (což znamená, že nemá žádné hrany):

$$G = \Big(V(T), \emptyset\Big)$$

potom platí, že $E(F_A) = E(F_B)$, což vede k závěru, že faktory F_A a F_B popisují tentýž graf.

Sudost a lichost stupní vrcholů $v \in V(G)$

Sudost a lichost stupně vrcholů v grafu G závisí na tom, kolik hran z faktorů F_A a F_B budou zahrnuty do vysledného grafu G. Množinu hran faktoru F_X, které jsou incidentní s vrcholem v zapíšeme:

$$E_v(F_X)$$

Při symetrickém rozdílu hran faktorů F_A a F_B, mohou nastat tyto případy:

a) Faktory F_A a F_B nesdílejí jedinou hranu:

$$E(F_A) \cap E(F_B) = \emptyset$$

Každý vrchol v grafu G je sudého stupně, neboť:

$$\begin{aligned} |E_v(F_A)| = |E_v(F_B)| &\equiv 1 \pmod 2 \\ \deg_G(v) = |E_v(F_B)| + |E_v(F_A)| &\equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

b) Pokud se všechny hrany faktorů F_A a F_B shodují:

$$E(F_A) = E(F_B) \quad \Leftrightarrow \quad E(F_A) \oplus E(F_B) = \emptyset$$

tak graf G je nulový a pro $\forall v \in V(G)$ platí $\deg_G(v) = 0$ (všechny jsou sudého stupně).

c) Pokud se některé hrany náchazejí v obou faktorech F_A a F_B:

$$\exists e \in E(F_A), e \in E(F_B) \quad \Leftrightarrow \quad E(F_A) \cap E(F_B) \neq \emptyset$$

pak jsou všechny vrcholy grafu G také sudého stupně, což lze dokázat. Nejdříve si však zjednodušme syntaxi touto substitucí:

$$\begin{aligned} A &= E_v(F_A) \\ B &= E_v(F_B) \end{aligned}$$

Víme, že:

$$|A| = |B| \equiv 1 \pmod 2$$

Pokud je počet hran v průniku množin A a B sudý, pak stupeň v je sudý:

$$\begin{aligned} |A \cap B| \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad |A \setminus B| = |B \setminus A| &\equiv 1 \pmod 2 \\ \deg_G(v) = |A \setminus B| + |B \setminus A| &\equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

Pokud je počet hran v průniku množin A a B lichý, potom stupeň v je taktéž sudý:

$$\begin{aligned} |A \cap B| \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad |A \setminus B| = |B \setminus A| &\equiv 0 \pmod 2 \\ \deg_G(v) = |A \setminus B| + |B \setminus A| &\equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

Závěr

Nyní víme, že vrcholy v grafu $G = (V(T), E(F_A) \oplus E(F_B))$ budou vždy sudého stupně:

$$\forall v \in V(G), \deg_G(v) = 2k \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}_0$$

Pokud $k = 0$, pak $F_A = F_B$ (popisují stejný graf). Uvažujeme-li, že $k > 0$, dostaneme vrcholy, jejichž stupeň je alespoň dva. Minimální graf, kde jsou všechny vrcholy alespoň druhého stupně, je graf cesty. Cesty jsou cyklické, zatímco stromy jsou acyklické - je zde kontradikce. Nemůžeme z acyklického stromu získat cyklický graf.

Tedy jedinou přípustnou možností je, že fakory F_A a F_B popisují jeden a ten samý graf. Jednoznačnost faktoru F je dokázána. $\square$