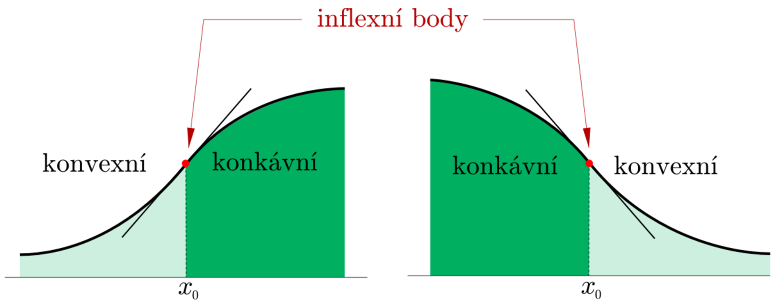
Inflexní body

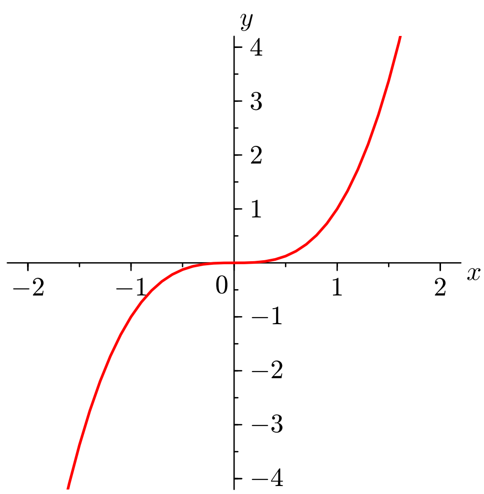
Bodům, ve kterých graf přechází z konvexního na konkávní a naopak, budeme věnovat zvláštní pozornost.

1. Definice Přechází-li graf spojité funkce $f(x)$ v bodě $B = [x_0, f(x_0)]$ z jedné strany tečny na druhou, říkáme, že $f(x)$ má v bodě B (tj. pro x_0) inflexní bod. Viz Obrázek 1.

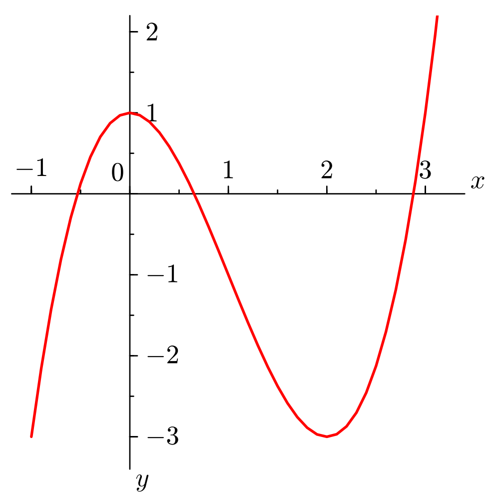


Obrázek 1: Inflexní body — podle definice

2. Příklad Například funkce $f(x) = x^3$ má inflexní bod pro $x = 0$, tj. v bodě $[0, 0]$ (viz Obrázek 2). Funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ má inflexní bod pro $x = 1$, tj. v bodě $[1, -1]$ (viz Obrázek 3). Funkce $f(x) = x^2 - 4x + 3$ nemá žádné inflexní body (viz Obrázek 4).



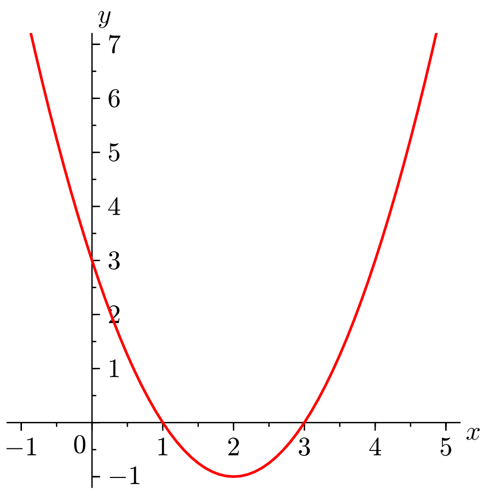
Obrázek 2: $f(x) = x^3$



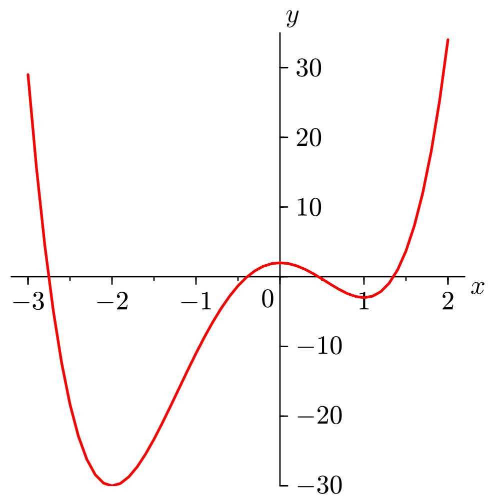
Obrázek 3: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

3. Příklad
Použijte Obrázek 5 k hrubému odhadu souřadnic inflexních bodů funkce $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ a zkontrolujte své odhady výpočtem.

Řešení
Graf přechází z konvexního na konkávní někde mezi -2 a -1, řekněme zhruba pro $x = -1,25$ a z konkávního na konvexní někde mezi 0 a 1, řekněme pro $x = 0,5$.
Pro přesný výpočet inflexního bodu potřebujeme druhou derivaci funkce $f(x)$. $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$ a $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 2)$. Položíme druhou derivaci rovnu nule, tj. $3x^2 + 2x - 2 = 0$. A zjistíme body, kde se mění funkce z konvexní na konkávní, nebo naopak. To nastává pro $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1,22$ a pro $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0,55$. Pro úplnost výpočet doplníme tabulkou.



Obrázek 4: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

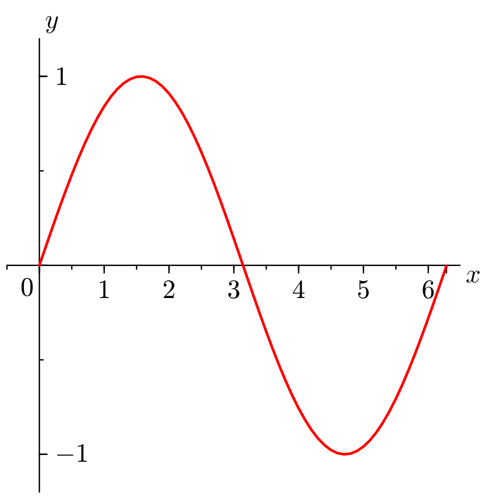


Obrázek 5: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$

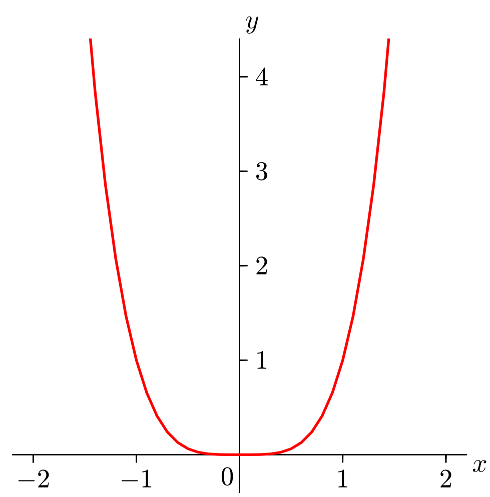
interval	znaménko $f''(x)$	závěr
$x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$	$+$	$f(x)$ je na $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\rangle$ konvexní
$\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$-$	$f(x)$ je na $\langle\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\rangle$ konkávní
$x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$+$	$f(x)$ je na $\langle\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \infty)$ konvexní

4. Příklad
Najděte inflexní bod funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Na závěr výsledky porovnejte s grafem této funkce.

Řešení
Výpočtem prvních dvou derivací obdržíme $f'(x) = \cos x$ a $f''(x) = -\sin(x)$. Tedy $f''(x) < 0$ pro $0 < x < \pi$ a $f''(x) > 0$ pro $\pi < x < 2\pi$. Což implikuje, že graf je konkávní pro $0 < x < \pi$ a konvexní pro $\pi < x < 2\pi$, a tedy inflexní bod je pro $x = \pi \approx 3,14$, tj. v bodě $[\pi, 0]$. To souhlasí s Obrázkem 6.



Obrázek 6: $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$



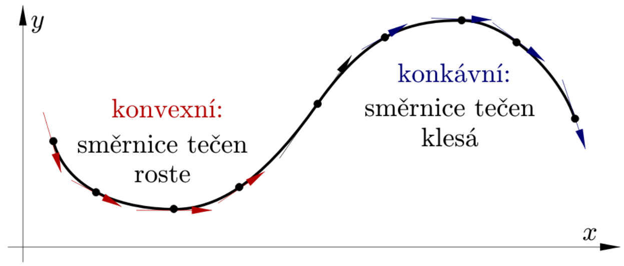
Obrázek 7: $f(x) = x^4$

5. Poznámka V předchozích příkladech inflexní body funkce $f(x)$ splňovaly podmínku $f''(x) = 0$. Pokaždé však z $f''(x) = 0$ neplyne, že by v daném bodě musel být inflexní bod. Ukažme si to na následujícím příkladu.

6. Příklad
Najděte inflexní bod (pokud vůbec existuje) funkce $f(x) = x^4$.

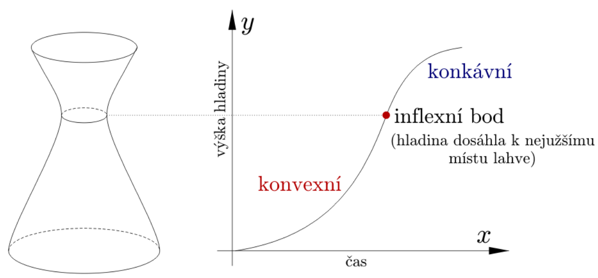
Řešení
Výpočtem prvních dvou derivací obdržíme $f'(x) = 4x^3$ a $f''(x) = 12x^2$. Tedy $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (-\infty, \infty)$, proto je funkce konvexní na $(-\infty, \infty)$ a tudíž nemá žádné inflexní body. Upozorněme na skutečnost, že pro $x = 0$ sice platí, že $f''(x) = 0$, ale o inflexní bod nejde, viz Obrázek 7.

Aplikace inflexních bodů
Dosud jsme o inflexních bodech mluvili jen v souvislosti se změnou funkce z konvexní ne konkávní a naopak. Uvědomme si, že inflexní body jsou body na křivce, ve kterých se mění směrnice tečen. Je-li funkce konvexní, směrnice, tečen narůstá a je-li konkávní, tak směrnice tečen klesá. (Viz Obrázek 8.) Ukažme si to na příkladu z fyziky.



Obrázek 8: Konvexní a konkávní podle směrnic tečen

7. Příklad
Předpokládejme, že voda je nalitá do lahve, která má tvar jako na Obrázku 9 a její objem narůstá konstantní rychlostí. Pozorujme, jak při této rychlosti narůstá výška hladiny y vzhledem k času t. Zpočátku se bude výška hladiny y zvyšovat pomalu, protože láhev má širokou podstavu. Se zužováním láhve se bude výška hladiny y zvyšovat rychleji až do nejužšího místa, kterým je hrdlo. Od té chvíle se bude výška hladiny y zvyšovat pomaleji, protože se láhev opět rozšiřuje. Tudíž hrdlo je bodem, ve kterém se mění rychlost změny výšky hladiny y v závislosti na čase t z rostoucí na klesající.



Obrázek 9: Výška hladiny v lahvi v závislosti na čase