Matematická analýza 1

Příprava na první zápočtový test

Příkady - varianty λ a κ

Phat Tran

March 25, 2024

0.1 Určete definiční obor funkce f, je-li dáno

$$f(x) = \frac{\arccos \frac{2x-11}{13}}{\ln(16-x^2)}$$

Definice funkce arccos

$$f(x) \coloneqq \cos x$$
$$f^{-1}(x) \coloneqq \arccos x$$

Naše funkce je omezená jak přirozeným logaritmem ln, tak f-ci arccos a podmínkou že ln nesmí jako nulové. Definiční obor funkce $f(x) = \ln x$ je $D(f) = (0, \infty)$, u funkce $g(x) = \arccos x$ je to $D(g) = \langle -1, 1 \rangle$. Náš výraz $(16 - x^2)$ se proto nesí rovnat nule nebo negativnímu číslu. Horní výraz $\frac{2x-11}{13}$ aby uspokojil f-ci arccos je omezený v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Naši funkci si rozdělíme na dva problémy, od nich vyřešíme definiční obory a tyto výsledně sjednotíme (konjunkce).

$$f(x) = \frac{f}{g}$$

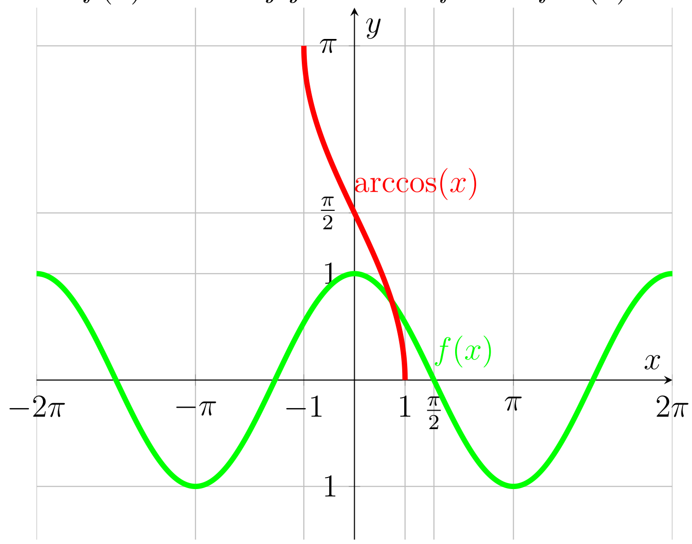
$$\ln 16 - x^2 \neq 0 \tag{1}$$
$$16 - x^2 > 0 \wedge 16 - x^2 \neq 1 \tag{2}$$
$$-x^2 > -16 \wedge -x^2 \neq -15 \tag{3}$$
$$x^2 < 16 \wedge x \neq \sqrt{15} \tag{4}$$
$$x < 4 \wedge x \neq \sqrt{15} \tag{5}$$
$$D(g) = (4, \infty) \setminus \{\sqrt{15}\} \tag{6}$$

$$-1 \leq 2x - 11 \leq 1 \tag{7}$$
$$-1 \leq 2x - 11 \tag{8}$$
$$10 \leq 2x \tag{9}$$
$$5 \leq x \tag{10}$$
$$2x - 11 \leq 1 \tag{11}$$
$$2x \leq 12 \tag{12}$$
$$x \leq 6 \tag{13}$$
$$D(f) = (-\infty, 6\rangle \cap \langle 5, \infty) = \langle 5, 6 \rangle \tag{14}$$

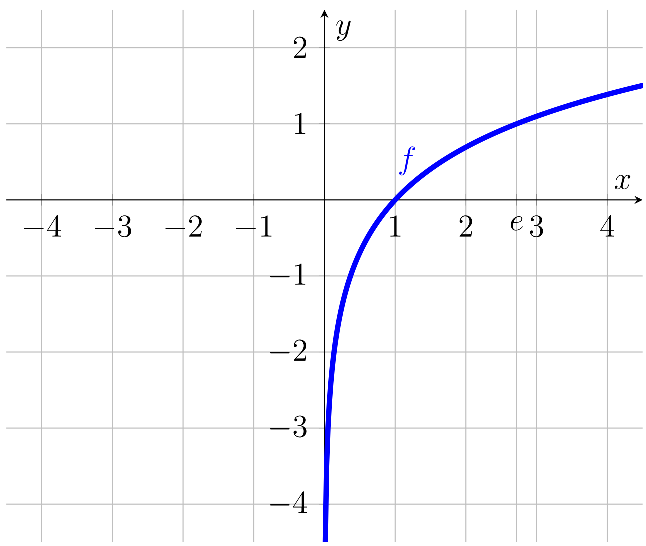
Definiční obor naší f-ce f je

$$D(f) = \langle 5, 6 \rangle \cap (4, \infty) \setminus \{\sqrt{15}\} \to (4, 6\rangle \setminus \{\sqrt{15}\}$$

Graf funkce $f(x) \coloneqq \cos x$ *její inverzní funkce* $f^{-1}(x) \coloneqq \arccos x$



Graf funkce $f(x) \coloneqq \ln x$



0.2 Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim\left(\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}\right)$$

Dosazením nekonečen do f-ce dostaneme $\infty - \infty$, což je neurčitý výraz. Budeme muset f-ci upravit tak aby po dosazení dedošlo k neurčitému výrazu. Na funkci se lze dívat jako na $a-b$, pak bychom mohli využít pravidla $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ vynásobením našeho výrazu tzv. *chytrou jedničkou* $\frac{a+b}{a+b}$.

$$\lim\left(\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}\right)\frac{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{15}$$

$$\lim\frac{\left(\left(\sqrt{n^4+3n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n^4-4n^2-1}\right)^2\right)}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{16}$$

$$\lim\frac{n^4+3n+1-n^4-4n^2-1}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{17}$$

$$\lim\frac{3n-4n^2}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{18}$$

$$\lim\frac{n^2(\frac{3}{n}-4)}{(n^4+3n+1)^{\frac{1}{2}}-(n^4-4n^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

$$\lim\frac{n^2(\frac{3}{n}-4)}{n^2\sqrt{1+3n^{-3}+1n^{-4}}-n^2\sqrt{1-4n^{-2}-1n^{-4}}} \tag{20}$$

$$\lim\frac{n^2(\frac{3}{n}-4)}{n^2\left(\sqrt{1+3n^{-3}+n^{-4}}-\sqrt{1-4n^{-2}-n^{-4}}\right)} \tag{21}$$

$$\lim\frac{\frac{3}{n}-4}{\sqrt{1+3n^{-3}+n^{-4}}-\sqrt{1-4n^{-2}-n^{-4}}} \tag{22}$$

$$\lim\frac{0-4}{\sqrt{1+0+0}-\sqrt{1-0-0}} \tag{23}$$

$$\lim\frac{4}{\sqrt{1}-\sqrt{1}} \tag{24}$$

Dostal jsem se dopasti pičo. Zkusme upravit původní výraz.

$$\lim\left(n^2\left(\sqrt{1+3n^{-3}+n^{-4}}-\sqrt{1-4n^{-2}-n^{-4}}\right)\right) \tag{25}$$

$$\lim\left(n^2\left(\sqrt{1+0+0}-\sqrt{1-0-0}\right)\right) \tag{26}$$

$$\lim\left(n\cdot 0\right)=0 \tag{27}$$

Dobrý, jsem kokot.

0.3 Vypočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

Dosazením -1 dosteneme dělení nulou, musíme výraz upravit. Můžeme jít cestou derivace ($l'H\hat{o}pital$) nebo postupným vytýkáním. Prvně provedu vytýkáním.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3(1 + x^{-3})}{x^3(1 + 3x^{-1} + 3x^{-2} + x^{-3})} \tag{28}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(1 + x^{-3})}{(1 + 3x^{-1} + 3x^{-2} + x^{-3})} \tag{29}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1 - 1}{1 - 3 + 3 - 1} = \frac{0}{0} \tag{30}$$

Nechce se mi. $L'H\hat{o}pital$ pravidlem by to vypadalo takto.

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x^3 + 1)'}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)'} \tag{31}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{3x^2 + 6x^1 + 3} \tag{32}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{3}{3 - 6 + 3} = \frac{3}{0} \tag{33}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(3x^2)'}{(3x^2 + 6x^1 + 3)'} \tag{34}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{6x}{6x + 6} \tag{35}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(6x)'}{(6x + 6)'} \tag{36}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{6}{6} = 1 \tag{37}$$

0.4 Dokažte následujicí tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Výraz přepíšem do sumy.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Prvně potřebujeme bázi indukce (base case). To znamená, že vložíme za k jedničku.

$$\sum_{k=1}^{1} (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1 \tag{38}$$

Náš báze je 1, je validní, báze indukce platí. Nyní provedeme indukční předpoklad a krok. Předpokládejme, že existuje nějaké $m \in \mathbb{N}$ takové, že pokud jej vložíme do n, tak je naše tvrzení stále platné. Pak musí platit, že i pro $m+1$ musí naše tvrzení stále platit.

$$\sum_{k=1}^{m} (2k-1)^2 = \frac{4m^3 - m}{3} \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{m} (2k-1)^2 + (2(m+1)-1)^2 = \frac{4(m+1)^3 - (m+1)}{3} \tag{40}$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + (2m + 2 - 1)^2 \tag{41}$$

Teď, když jsme si upravili naši sumu, můžeme začít dokazovat.

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + (2m + 2 - 1)^2 \tag{42}$$

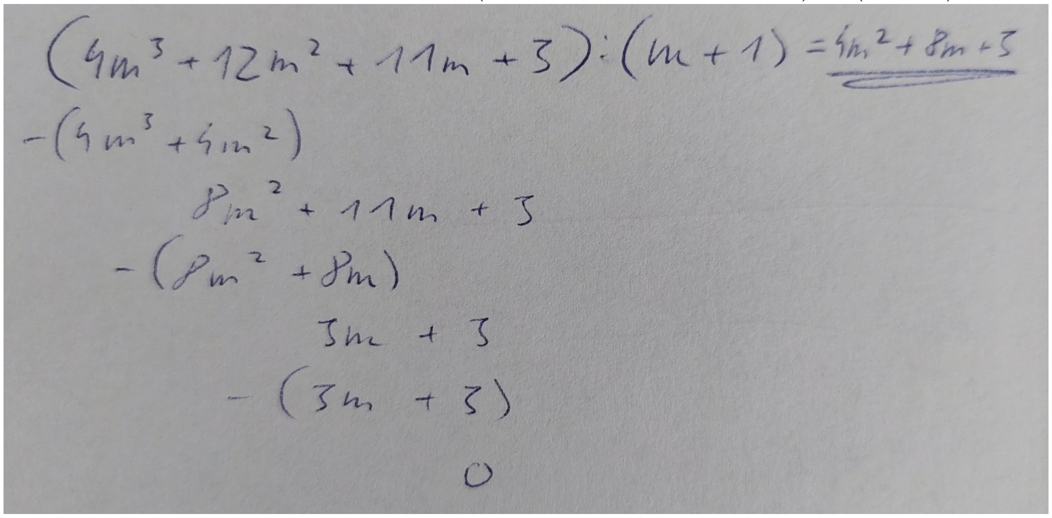
$$= \frac{4m^3 - m}{3} + (2m + 1)^2 \tag{43}$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + 4m^2 + 4m + 1 \tag{44}$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + \frac{12m^2 + 12m + 3}{3} \tag{45}$$

$$= \frac{4m^3 + 12m^2 + 11m + 3}{3} \tag{46}$$

Figure 1: Dělení polynomů $(4m^3 + 12m^2 + 11m + 3) \div (m + 1)$



$$= \frac{(m+1)(4m^2+8m+3)}{3} \tag{47}$$

$$= \frac{(m+1)(4(m^2+2m)+3)}{3} \tag{48}$$

$$= \frac{(m+1)(4((m^2+2m+1)-1)+3)}{3} \tag{49}$$

$$= \frac{(m+1)(4(m+1)^2-4+3)}{3} \tag{50}$$

$$= \frac{(m+1)(4(m+1)^2-1)}{3} \tag{51}$$

$$= \frac{4(m+1)^3-(m+1)}{3} \tag{52}$$

Tvrzení skutečně platí.

0.5 Určete definiční obor funkce f

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(x^2 - 4x + 4\right)}$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(x^2 - 4x + 4\right) &\geq 0 && (53)\\
x^2 - 4x + 4 &\geq 1 && (54)\\
x^2 - 4x + 3 &\geq 0 && (55)\\
D = 16 - 4 \cdot 3 &= 4 && (56)\\
x_{1,2} &= \frac{4 \pm 2}{2} && (57)\\
x_{1,2} &= \{1, 3\} && (58)\\
& && (59)
\end{aligned}$$

Definiční obor funkce f je

$$D_f = (-\infty, 1\rangle \cap \langle 3, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{(1, 3)\}$$

0.6 Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+3n}{2n+7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2(1-n^{-2})}+3n}{2n+7} \tag{60}$$

$$\lim \frac{n\sqrt{1-n^{-2}}+3n}{2n+7} \tag{61}$$

$$\lim \frac{n(\sqrt{1-n^{-2}}+3)}{n(2+7n^{-1})} \tag{62}$$

$$\lim \frac{\sqrt{1-n^{-2}}+3}{2+7n^{-1}} \tag{63}$$

$$\lim \frac{\sqrt{1}+3}{2} = 2 \tag{64}$$

0.7 Vypočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 21x - 72}{x^3 + 27}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{\left(x^2 - 21x - 72\right)'}{\left(x^3 + 27\right)'} \tag{65}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x - 21}{3x^2} \tag{66}$$

$$= \frac{2(-3) - 21}{3(-3)^2} \tag{67}$$

$$= \frac{-27}{27} = -1 \tag{68}$$

0.8 Dokažte následující tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \tag{69}$$

$$M(1) = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \tag{70}$$

$$\exists m \in \mathbb{N} :\ M(m) = 2 - \frac{m+2}{2^m} \Rightarrow \exists m+1 \in \mathbb{N} :\ \frac{(m+1)+2}{2^{m+1}} \tag{71}$$

$$M(m+1) = 2 - \frac{(m+1)+2}{2^{m+1}} \tag{72}$$

$$M(m+1) = \frac{2}{1} - \frac{m+2}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} / (2^m)(2^{m+1}) \tag{73}$$

$$\tag{74}$$