Matematická analýza 1

Příprava na první zápočtový test

Příkady - varianta λ

Phat Tran

March 24, 2024

0.1 Určete definiční obor funkce f, je-li dáno

$$f(x) = \frac{\arccos \frac{2x-11}{13}}{\ln(16 - x^2)}$$

Definice funkce arccos

$$f(x) \coloneqq \cos x$$
$$f^{-1}(x) \coloneqq \arccos x$$

Naše funkce je omezená jak přirozeným logaritmem ln, tak f-ci arccos a podmínkou že ln nesmí jako nulové. Definiční obor funkce $f(x) = \ln x$ je $D(f) = (0, \infty)$, u funkce $g(x) = \arccos x$ je to $D(g) = \langle -1, 1 \rangle$. Náš výraz $(16 - x^2)$ se proto nesí rovnat nule nebo negativnímu číslu. Horní výraz $\frac{2x-11}{13}$ aby uspokojil f-ci arccos je omezený v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Naši funkci si rozdělíme na dva problémy, od nich vyřešíme definiční obory a tyto výsledně sjednotíme (konjunkce).

$$f(x) = \frac{f}{g}$$

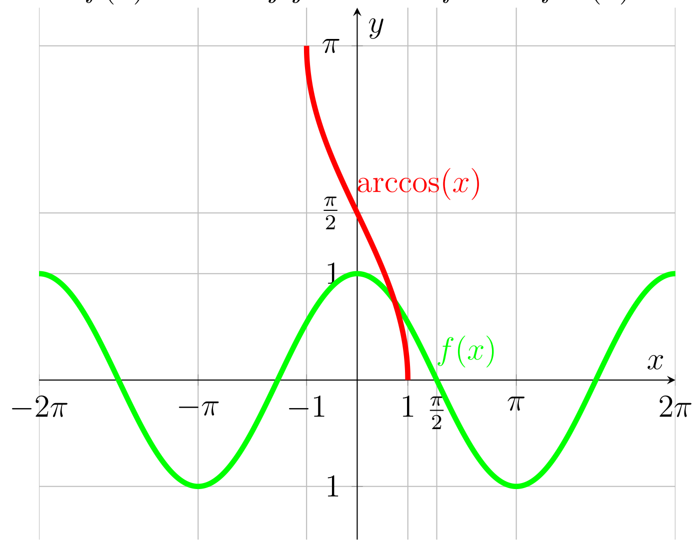
$$\begin{aligned}
\ln 16 - x^2 &\neq 0 \qquad (1)\\
16 - x^2 > 0 \wedge 16 - x^2 &\neq 1 \qquad (2)\\
-x^2 > -16 \wedge -x^2 &\neq -15 \qquad (3)\\
x^2 < 16 \wedge x &\neq \sqrt{15} \qquad (4)\\
x < 4 \wedge x &\neq \sqrt{15} \qquad (5)\\
D(g) &= (4, \infty) \setminus \{\sqrt{15}\} \qquad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-1 \leq 2x - 11 &\leq 1 \qquad (7)\\
-1 &\leq 2x - 11 \qquad (8)\\
10 &\leq 2x \qquad (9)\\
5 &\leq x \qquad (10)\\
2x - 11 &\leq 1 \qquad (11)\\
2x &\leq 12 \qquad (12)\\
x &\leq 6 \qquad (13)\\
D(f) &= (-\infty, 6\rangle \cap \langle 5, \infty) = \langle 5, 6 \rangle \qquad (14)
\end{aligned}$$

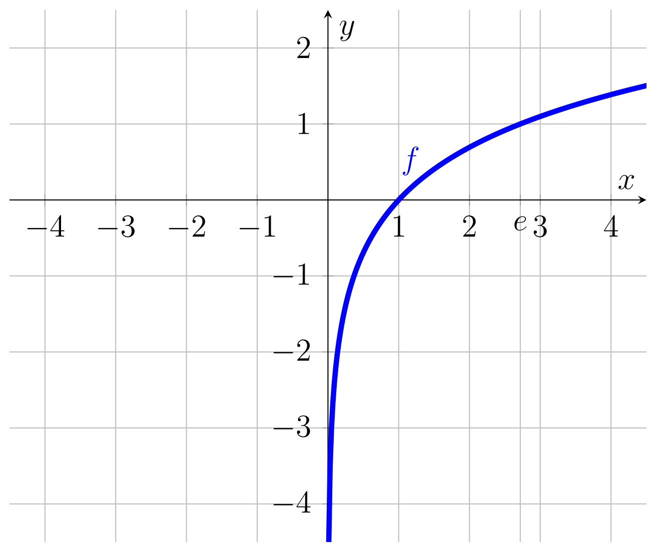
Definiční obor naší f-ce f je

$$D(f) = \langle 5, 6 \rangle \cap (4, \infty) \setminus \{\sqrt{15}\} \rightarrow (4, 6\rangle \setminus \{\sqrt{15}\}$$

Graf funkce $f(x) \coloneqq \cos x$ *její inverzní funkce* $f^{-1}(x) \coloneqq \arccos x$



Graf funkce $f(x) \coloneqq \ln x$



0.2 Vypočítejte limitu posloupnosti

$$\lim\left(\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}\right)$$

Dosazením nekonečen do f-ce dostaneme $\infty - \infty$, což je neurčitý výraz. Budeme muset f-ci upravit tak aby po dosazení dedošlo k neurčitému výrazu. Na funkci se lze dívat jako na $a-b$, pak bychom mohli využít pravidla $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ vynásobením našeho výrazu tzv. *chytrou jedničkou* $\frac{a+b}{a+b}$.

$$\lim\left(\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}\right)\frac{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{15}$$

$$\lim\frac{\left(\left(\sqrt{n^4+3n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n^4-4n^2-1}\right)^2\right)}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{16}$$

$$\lim\frac{n^4+3n+1-n^4-4n^2-1}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{17}$$

$$\lim\frac{3n-4n^2}{\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4-4n^2-1}} \tag{18}$$

$$\lim\frac{n^2(\frac{3}{n}-4)}{(n^4+3n+1)^{\frac{1}{2}}-(n^4-4n^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

$$\lim\frac{n^2(\frac{3}{n}-4)}{n^2\sqrt{1+3n^{-3}+1n^{-4}}-n^2\sqrt{1-4n^{-2}-1n^{-4}}} \tag{20}$$

$$\lim\frac{n^2(\frac{3}{n}-4)}{n^2\left(\sqrt{1+3n^{-3}+n^{-4}}-\sqrt{1-4n^{-2}-n^{-4}}\right)} \tag{21}$$

$$\lim\frac{\frac{3}{n}-4}{\sqrt{1+3n^{-3}+n^{-4}}-\sqrt{1-4n^{-2}-n^{-4}}} \tag{22}$$

$$\lim\frac{0-4}{\sqrt{1+0+0}-\sqrt{1-0-0}} \tag{23}$$

$$\lim\frac{4}{\sqrt{1}-\sqrt{1}} \tag{24}$$

Dostal jsem se dopasti pičo. Zkusme upravit původní výraz.

$$\lim\left(n^2\left(\sqrt{1+3n^{-3}+n^{-4}}-\sqrt{1-4n^{-2}-n^{-4}}\right)\right) \tag{25}$$

$$\lim\left(n^2\left(\sqrt{1+0+0}-\sqrt{1-0-0}\right)\right) \tag{26}$$

$$\lim\left(n\cdot 0\right)=0 \tag{27}$$

Dobrý, jsem kokot.

0.3 Vypočítejte limitu funkce

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^3+3x^2+3x+1}$$

Dosazením -1 dosteneme dělení nulou, musíme výraz upravit. Můžeme jít cestou derivace ($l'Hôpital$) nebo postupným vytýkáním. Prvně provedu vytýkáním.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3(1+x^{-3})}{x^3(1+3x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3})} \tag{28}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(1+x^{-3})}{(1+3x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3})} \tag{29}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1-1}{1-3+3-1} = \frac{0}{0} \tag{30}$$

Nechce se mi. $L'Hôpital$ pravidlem by to vypadalo takto.

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^3+1)'}{(x^3+3x^2+3x+1)'} \tag{31}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{3x^2+6x^1+3} \tag{32}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3}{3-6+3} = \frac{3}{0} \tag{33}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(3x^2)'}{(3x^2+6x^1+3)'} \tag{34}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{6x}{6x+6} \tag{35}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(6x)'}{(6x+6)'} \tag{36}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{6}{6} = 1 \tag{37}$$

0.4 Dokažte následujicí tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Výraz přepíšem do sumy.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

Prvně potřebujeme bázi indukce (base case). To znamená, že vložíme za k jedničku.

$$\sum_{k=1}^{1} (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1 \tag{38}$$

Náš báze je 1, je validní, báze indukce platí. Nyní provedeme indukční předpoklad a krok. Předpokládejme, že existuje nějaké $m \in \mathbb{N}$ takové, že pokud jej vložíme do n, tak je naše tvrzení stále platné. Pak musí platit, že i pro $m + 1$ musí naše tvrzení stále platit.

$$\sum_{k=1}^{m} (2k-1)^2 = \frac{4m^3 - m}{3} \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{m} (2k-1)^2 + (2(m+1)-1)^2 = \frac{4(m+1)^3 - (m+1)}{3} \tag{40}$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + (2m + 2 - 1)^2 \tag{41}$$

Teď, když jsme si upravili naši sumu, můžeme začít dokazovat.

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + (2m + 2 - 1)^2 \tag{42}$$

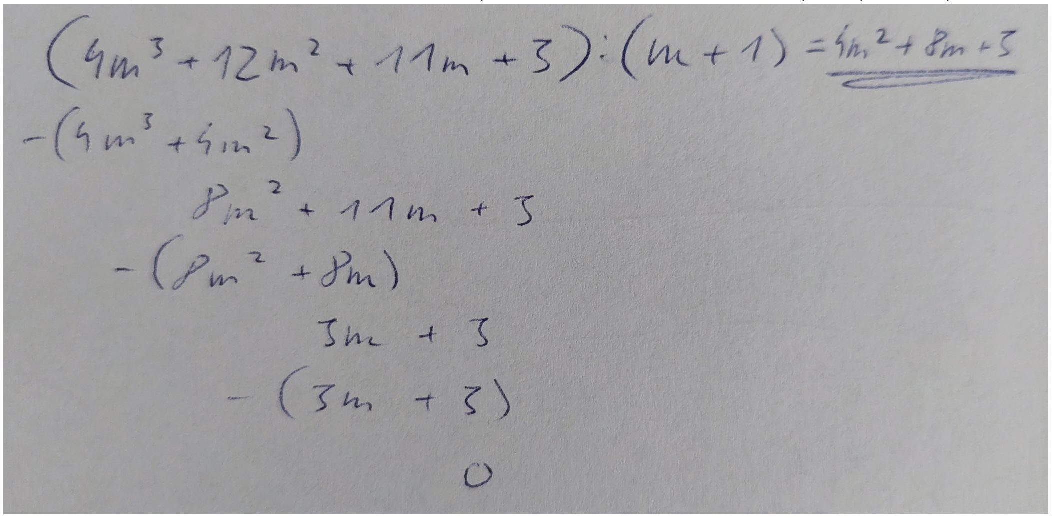
$$= \frac{4m^3 - m}{3} + (2m + 1)^2 \tag{43}$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + 4m^2 + 4m + 1 \tag{44}$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3} + \frac{12m^2 + 12m + 3}{3} \tag{45}$$

$$= \frac{4m^3 + 12m^2 + 11m + 3}{3} \tag{46}$$

Figure 1: Dělení polynomů $(4m^3 + 12m^2 + 11m + 3) \div (m + 1)$



$$= \frac{(m+1)(4m^2 + 8m + 3)}{3} \tag{47}$$

$$= \frac{(m+1)(4(m^2 + 2m) + 3)}{3} \tag{48}$$

$$= \frac{(m+1)(4((m^2 + 2m + 1) - 1) + 3)}{3} \tag{49}$$

$$= \frac{(m+1)(4(m+1)^2 - 4 + 3)}{3} \tag{50}$$

$$= \frac{(m+1)(4(m+1)^2 - 1)}{3} \tag{51}$$

$$= \frac{4(m+1)^3 - (m+1)}{3} \tag{52}$$

Tvrzení skutečně platí.