Zkouška z MA 2

(varianta A)

1. Určete a v $\mathbb{R}^2$ znázorněte definiční obor funkce f definované předpisem

$$f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2) + \sqrt{5x}.$$

   Výsledný definiční obor zapište i zakreslete.

2. Najděte jednotkový vektor u, pro nějž je směrová derivace $\dfrac{df}{du}$ funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) maximální, je-li

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2+x+y}{1+y}\right), \quad (x_0,y_0) = (1,0).$$

3. Najděte všechny lokální extrémy funkce f definované předpisem

$$f(x,y) = y^3 - 4x^2 - 12xy - 21y^2 + 20x + 75y - 23.$$

4. Najděte řešení Cauchyovy počáteční úlohy

$$2y'' - 5y' + 2y = 0,\ y\,(0) = 2,\ y'\,(0) = \frac{5}{2}$$

5. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' - 4y = 8x.$$

6. Víme, že radioaktivní izotop stroncia ${}^{90}Sr$ se rozpadá rychlostí přímo úměrnou okamžitému množství stroncia ($y' = -my, m \geq 0$). Určete konstantu m a čas, za který se sníží množství stroncia na $\frac{1}{4}$ původního množství, víte-li, že poločas rozpadu je 28,1 roku.

7. (a) Uveďte dva příklady funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $(0,0)$ stacionární bod.

   (b) Rovnice $y' + y = 8x^2 + 17x + 2$ má řešení ve tvaru $y(x) = ax^2 + bx + c$. Určete konstanty a, b, c.

   (c) Uveďte dva příklady funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro kterou je tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y)$ sestrojená v bodě $(1,1,f(1,1))$ rovnoběžná s rovinou x,y.

   (d) Určete obecné řešení zadané rovnice, je-li známo partikulární řešení $y_p(x)$:

$$y'' - 9y = 9x^2; \quad y_p(x) = -x^2 - \frac{2}{9}$$

1, $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2) + \sqrt{5x}$

$\Downarrow$

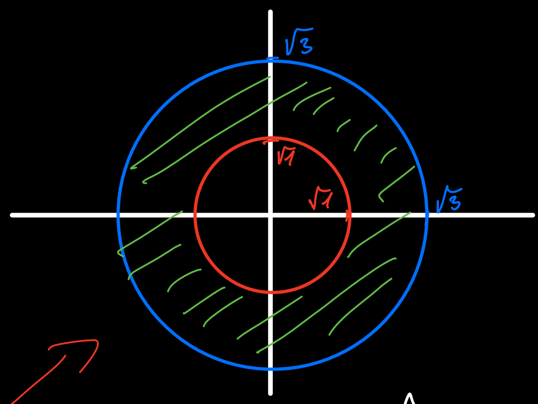
$\langle -1;1 \rangle$

x^2+y^2-2

$-1 \leq x^2+y^2-2 \leq 1$

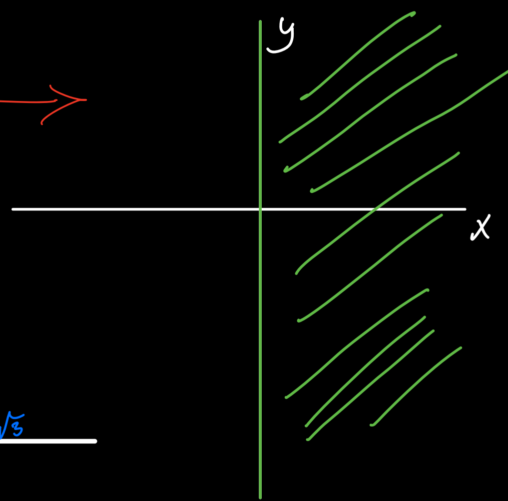
$-1 \leq x^2+y^2-2$ $\qquad$ $x^2+y^2-2 \leq 1$

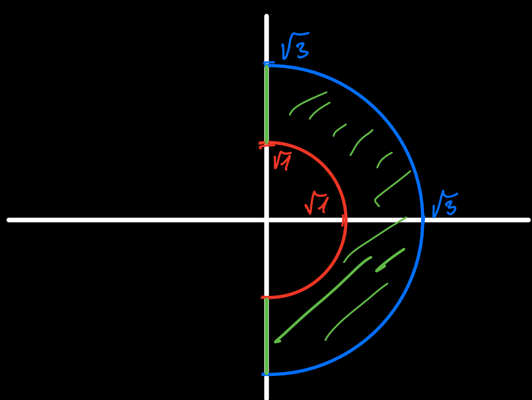
$1 \leq x^2+y^2$ $\qquad$ $x^2+y^2 \leq 3$



$\sqrt{5x} \Rightarrow 5x \geq 0$

$x \geq 0$





$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \cap x^2+y^2 \leq 3 \cap x \geq 0\}$

2, $u = \frac{df}{du}$ $\qquad$ $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2+x+y}{1+y}\right)$ $\qquad$ $(x_0,y_0) = (1,0)$

$f_x' = \frac{1}{\left(\frac{2+x+y}{1+y}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{1+y}$ $\qquad$ $\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{1 \cdot y - x \cdot 1}{y^2}$

$$f_y' = \frac{1}{\left(\frac{2+x+y}{1+y}\right)^2+1} \cdot \frac{(1\cdot 1+y)-(2+x+y\cdot 1)}{(1+y)^2}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left\langle \frac{1}{10} ; -\frac{1}{5} \right\rangle$$

$$f_x'(1,0) = \frac{1}{10}$$

$$f_y'(1,0) = \frac{1}{10} \cdot \frac{\overbrace{(1)-(3)}^{-2}}{1} = -\frac{1}{5}$$

$$\|\operatorname{grad} f\| = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1+4}{100} = \frac{5}{100}$$

$$u = \frac{\left(\frac{1}{10} ; -\frac{1}{5}\right)}{\|\operatorname{grad} f\|} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{10}} ; \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} ; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

3,

4, $2y'' - 5y' + 2y = 0$ $\quad y(0)=2,\ y'(0) = \frac{5}{2}$

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\nearrow 2 \to y_1(x) = e^{2x}$$

$$\searrow \frac{1}{2} \to y_2(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y = e^{2x}\cdot c_1 + e^{\frac{1}{2}x}\cdot c_2$$

$$y' = c_1 \cdot e^{2x} \cdot (2) + c_2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$y(0)=2:\quad 2 = e^{2\cdot 0} \cdot c_1 + e^{\frac{1}{2}\cdot 0} \cdot c_2 \Rightarrow 2 = c_1 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_1 = 2 - c_2}$

$y'(0) = \frac{5}{2}:\quad \frac{5}{2} = 2 - c_2 \cdot 2 + c_2 \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{5}{2} = 4 - 2c + \frac{1}{2}c_2$$

$$\frac{5}{2} = 4 - \frac{3}{2}c_2$$

$$\frac{5}{2} - \frac{8}{2} = -\frac{3}{2}c_2$$

$$-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 1}$$

$$\boxed{c_1 = 2 - 1 = 1}$$

$$\boxed{y = e^{2x} + e^{\frac{1}{2}x}}$$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ → $e^{2x} \cdot \cos(3x)$, $e^{2x} \cdot \sin(3x)$

$\lambda_{1,2} = 3$ → e^{3x}, $x \cdot e^{3x}$

5, $\quad y' - 4y = 8x \qquad e^{\int a(x)} = \int -4\, dx = e^{-4x}$

$$\cancel{y'} \cdot e^{-4x} - \underbrace{4y \cdot e^{-4x}} = 8x \cdot e^{-4x}$$

$$\int \left(y \cdot e^{-4x}\right)' dy = \int 8x \cdot e^{-4x}\, dx$$

sa speciality

$$y \cdot e^{-4x} =$$

$$8\int x \cdot e^{-4x}\, dx$$

$u = 8x \qquad v' = e^{-4x}$

$u' = 8 \qquad v = -\frac{1}{4}e^{-4x}$

$$\int e^{t} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \left(-\frac{1}{4}\right) \int e^{t} = -\frac{1}{4} e^{-4x}$$

$t = -4x$

$$dt = dx \cdot (-4)$$

$$\Downarrow$$

$$dx = -\frac{1}{4} \cdot dt$$

$$u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$8x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-4x} - \int 8 \cdot \left(-\frac{1}{4} e^{-4x}\right)$$

-2

$$\cancel{8}x \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{4}}\right) \cdot e^{-4x} + \cancel{2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{4}}\right) \cdot e^{-4x}$$

$$-2x e^{-4x} - \frac{e^{-4x}}{2}$$

$$e^{-4x} \cdot \left(-2x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y \cdot e^{-4x} = e^{-4x} \cdot \left(-2x - \frac{1}{2}\right) + c \qquad / : e^{-4x}$$

$$y = -2x - \frac{1}{2} + \frac{c}{e^{-4x}}$$

---

6)

6. Víme, že radioaktivní izotop stroncia ${}^{90}Sr$ se rozpadá rychlostí přímo úměrnou okamžitému množství stroncia ($y' = -my, m \geq 0$). Určete konstantu m a čas, za který se sníží množství stroncia na $\frac{1}{4}$ původního množství, víte-li, že poločas rozpadu je 28,1 roku.

$m, t = ?$

$$y' = -my$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -m$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -m\, dt$$

$$\ln|y| = -m \cdot t + c$$

$$y = e^{-m \cdot t} \cdot c$$

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(28{,}1) = \frac{1}{2}$$

$$y_3(t_1) = \frac{1}{4}$$

$y_1(0)=1: \quad 1 = e^{-m\cdot 0}\cdot C \Rightarrow \boxed{C=1}$

$\Downarrow$

1

$y_2(28{,}1)=\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{2} = e^{-m\cdot 28{,}1}\cdot 1$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -m\cdot 28{,}1$

$\boxed{m = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{28{,}1}}$

$y_3(t_1)=\frac{1}{4}: \quad \frac{1}{4} = e^{+\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{28{,}1}\cdot t_1}\cdot 1$

$\Downarrow$

$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{28{,}1}\cdot t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 28{,}1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}}$

$t_1 = \frac{-\ln 4\cdot 28{,}1}{-\ln 2} = 2\cdot 28{,}1 = \boxed{56{,}2 \text{ let}}$

6. Víme, že radioaktivní izotop uhlíku ^{14}C se rozpadá rychlostí přímo úměrnou okamžitému množství izotopu uhlíku ($y' = -my, m \geq 0$). Poločas rozpadu tohoto izotopu je 5730 let. Archeologové nalezli zkamenělinu, která obsahuje $\frac{1}{16}$ jejího původního množství tohoto izotopu uhlíku. Určete konstantu m a stáří nalezené zkameněliny.

$y_1(0)=1$

$y_2(5730)=\frac{1}{2}$

$y_3(t_1)=\frac{1}{16}$

podezřelý z extrému

1

7. (a) Uveďte dva příklady funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $(0,0)$ stacionární bod.

(b) Rovnice $y' + y = 8x^2 + 17x + 2$ má řešení ve tvaru $y(x) = ax^2 + bx + c$. Určete konstanty a, b, c.

(c) Uveďte dva příklady funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro kterou je tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y)$ sestrojená v bodě $(1,1,f(1,1))$ rovnoběžná s rovinou x, y.

(d) Určete obecné řešení zadané rovnice, je-li známo partikulární řešení $y_p(x)$:

$$y'' - 9y = 9x^2; \quad y_p(x) = -x^2 - \frac{2}{9}$$

a)

$f(x,y): 4x^2 + 2y^2$

$f_x = 8x$

$f_y' = 4y$

$f_{xy} = 0$

$f_{xx}'' \Rightarrow 0$
< 0

$f_{xy}'' = 0$

$J[0;0] \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

$f_{xx} = 8$
$f_{yy} = 4$

$f(x,y) = 4x^2 + 2y^2$

$f(x,y) = 5x^2 + 3y^2$

---

b)

$y' + y = 8x^2 + 17x + 2$

$y(x) = ax^2 + bx + c$

a, b, c

$y'(x) = 2ax + b$

$2ax + b + ax^2 + bx + c = 8x^2 + 17x + 2$

$$ax^2+(2a+b)x+b+c=8x^2+17x+2$$

$a=8$ $\qquad$ $b+c=2$

$2a+b=17$ $\qquad$ $1+c=2$

$16+b=17$ $\qquad$ $c=1$

$b=1$

$$a,b,c=(8,1,1)$$

---

c)

$\tau: z-z_0 = f_0(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

$f(x,y)\,(1,1,f(1,1))$ $\qquad$ $T=[1,1,?]$

$\tau: 2x^2+y^2$

$f_x'=4x$

$f_y'=2y$

$T=[\;\;,\;\;,\;\;]$

rovnoběžný

$\vec{n}_\varrho=(1,1,f(1,1))$

$\vec{n}_\tau=(f_x'(x_0,y_0);f_y'(x_0,y_0);f(1,1))$

$T=[4,2,f(1,1)]$

$\tau: 4x^2+8y^2$

$z=4\cdot 1+8\cdot 1$

$z=12$

$f_x'=8x$

$f_y'=16y$

$T:[f_x'(x_0,y_0);f_y'(x_0,y_0),z]$

$T:[8,16,12]$

$T: [\bar{1}, \bar{1}, 2]$

$\tau: x^2 + 2y^2$

$1^2 + 2 \cdot 1^2 = 3$

$T: [1, 1, 3]$

$f_x' = 2x = 2 \cdot 1 = 2$

$\Downarrow$

$f_y' = 4y = 4$

$T: [f_x'(x_0, y), f_y'(x_0, y_0), z]$

$T: [2, 4, 3]$

---

ex) $y'' - 9y = 9x^2$

$y_p(x) = -x^2 - \frac{2}{9}$

$y'(x) = -2x$

$y''(x) = -2$

$2 - 9y = 9x^2$

$9y = -9x^2 + 2$

$y = -x^2 + \frac{2}{9}$