

Matematická analýza 1

Zkoušková písemka - varianta B

Phat Tran

May 17, 2024

1 document

1.1

Najděte intervaly ryzí monotonie funkce

$$f(x) := x^2 - 3x + \ln x.$$

Get the first derivative of f and solve for zero to find the points where the function is changing direction.

$$f'(x) = (x^2 - 3x + \ln x)' \quad (1)$$

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$0 = 2x - 3 + \frac{1}{x} \quad (3)$$

$$3 = 2x + x^{-1} \quad (4)$$

$$3 = 2x + x^{-1} / \cdot x \quad (5)$$

$$3 = 2x^2 + x^0 \quad (6)$$

$$3 = 2x^2 + 1 \quad (7)$$

$$2 = 2x^2 \quad (8)$$

$$x = 1 \quad (9)$$

Now check if the point $x = 1$ is an actual extremum.

$$f'(-1) = 2(-1) - 3 + \frac{1}{-1} \quad (10)$$

$$= -2 - 3 - 1 = -6 \quad (11)$$

$$f'(2) = 2(2) - 3 + \frac{1}{2} \quad (12)$$

$$= 4 - 3 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \quad (13)$$

$$(14)$$

$x \in$	$(-\infty, 1) \setminus \{0\}$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$

The intervals of pure monotony are $(-\infty, 1) \setminus \{0\}$, decreasing, and $(1, +\infty)$, increasing.

1.2

Najděte inflexní body funkce

$$f(x) := 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 7x - 9.$$

Get the second derivative of f and solve for zero, $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = (3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 7x - 9)'' \quad (15)$$

$$= (15x^4 - 40x^3 + 30x^2 + 7)' \quad (16)$$

$$= 1x^3 - 2x^2 + 1x \quad (17)$$

$$0 = 1x^3 - 2x^2 + 1x \quad (18)$$

$$0 = x(1x^2 - 2x + 1) \quad (19)$$

$$x_0 = 0 \quad (20)$$

$$0 = 1x^2 - 2x + 1 \quad (21)$$

$$0 = x^2 - 2x + 1 \quad (22)$$

$$0 = (x - 1)^2 \quad (23)$$

$$x_1 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \quad (24)$$

Check if they are extrema.

$x \in$	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$

The inflection point of function f is $x_0 = 0$.

1.3

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \sin x}.$$

Try direct placement.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \sin x} \quad (25)$$

$$= \frac{\ln(1+0) - 0}{0 \sin 0} \quad (26)$$

$$= \frac{\ln 1}{0} \quad (27)$$

This will result in division by zero. *L'Hôpital's* method.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \sin x} \quad (28)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x) - x)'}{(x \sin x)'} \quad (29)$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)} - 1}{\sin x + x \cos x} \quad (30)$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)} - 1}{\sin x + x \cos x} \quad (31)$$

$$= \frac{(\frac{1}{(1+x)} - 1)'}{(\sin x + x \cos x)'} \quad (32)$$

$$= \frac{(\frac{1}{(1+x)})'}{\cos x + \sin x} \quad (33)$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \sin x} \quad (34)$$

$$= \frac{-\frac{1}{(1+0)^2}}{\cos 0 + \sin 0} \quad (35)$$

$$(36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \sin x} = -1$$

1.4

Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce f se středem v bodě x_0 , je-li

$$f(x) := \sin x + \cos x + \tan x, \quad x_0 = 0.$$

Get the first and second derivative of function f .

The chain rule:

Let $f : U \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ and $g : U \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, then

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

```
f :: R -> R                                -- R could also be R -> R
g :: R -> R                                -- ' equals derivative
f $ g x = ( f' $ g x ) * g' x
-- or
f (g x) = f'(g x) * g' x
```

The behaviour of secant function:

$$\begin{aligned} \sec^2 x &= (\sec x)^2 \\ (\sec^2 x)' &= ((\sec x)^2)' \\ 2 \sec^{2-1} x \cdot (\sec x)' &= 2 \sec x \left(\frac{1}{\cos x} \right)' \\ 2 \sec x \frac{\sin x}{\cos^2 x} &= 2 \sec x \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} \\ 2 \sec x \tan x \sec x &= 2 \sec^2 x \tan x \end{aligned}$$

Taylor's polynom of second degree.

$$P_T^2 := c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

$$\begin{aligned} P_T^2 &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\ \frac{d}{dx} P_T^2 &= c_1 + 2c_2 x \\ \frac{d^2}{dx^2} P_T^2 &= 2c_2 \end{aligned}$$

$$f(x) := \sin x + \cos x + \tan x \quad (37)$$

$$f'(x) = (\sin x + \cos x + \tan x)' \quad (38)$$

$$= \cos x - \sin x + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \quad (39)$$

$$= \cos x - \sin x + \frac{\sin x(\cos x)' - (\sin x)' \cos x}{\cos^2 x} \quad (40)$$

$$= \cos x - \sin x + \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \quad (41)$$

$$= \cos x - \sin x + \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \quad (42)$$

$$= \cos x - \sin x + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \quad (43)$$

$$= \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \quad (44)$$

$$= \cos x - \sin x + \sec^2 x \quad (45)$$

$$f''(x) = (\cos x - \sin x + \sec^2 x)' \quad (46)$$

$$= -\sin x - \cos x + 2\sec^2 x \tan x \quad (47)$$

$$f'''(x) = (-\sin x - \cos x + 2\sec^2 x \tan x)' \quad (48)$$

$$= -\cos x + \sin x + (2\sec^2 x \tan x)' \quad (49)$$

$$= -\cos x + \sin x + 2((\sec^2 x)' \tan x + \sec^2 x(\tan x)') \quad (50)$$

$$= -\cos x + \sin x + 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x \quad (51)$$

$$(52)$$

$$f(x_0) = \sin x_0 + \cos x_0 + \tan x_0 \quad (53)$$

$$= \sin 0 + \cos 0 + \tan 0 = 1 \quad (54)$$

$$f'(x_0) = \cos x_0 - \sin x_0 + \sec^2 x_0 \quad (55)$$

$$= \cos 0 - \sin 0 + \sec^2 0 \quad (56)$$

$$= 1 - 0 + 1 = 2 \quad (57)$$

$$f''(x_0) = -\sin x_0 - \cos x_0 + 2\sec^2 x_0 \tan x_0 \quad (58)$$

$$= -0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad (59)$$

$$f'''(x_0) = -\cos x_0 + \sin x_0 + 4\sec^2 x_0 \tan^2 x_0 + 2\sec^4 x_0 \quad (60)$$

$$= -\cos 0 + \sin 0 + 4\sec^2 0 \tan^2 0 + 2\sec^4 0 \quad (61)$$

$$= -1 + 0 + 0 + 2 = 1 \quad (62)$$

Taylor's polynom of third degree for our function f is

$$P_T^3 = 1 + 2x + 0x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

1.5

Vypočtete

$$\int (2x + 3)e^x dx.$$

I will use the per partes because I don't see how the sub-method will help me here.

Per partes method

$$\int uv' = uv - \int vu'$$

The *per partes* method is derived from the product rule in derivation $((uv)' = u'v + uv')$.

Výběr funkce f : $f(x) = (2x + 3) \rightarrow f'(x) = 2$

Výběr funkce g : $g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x$

$$\int (2x + 3)e^x dx = \tag{63}$$

$$= (2x + 3)e^x - 2 \int e^x dx = \tag{64}$$

$$= (2x + 3)e^x - 2e^x = \tag{65}$$

$$= e^x(2x + 1) + C \tag{66}$$

1.6

Vypočtete

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$$

Sutituce za t a dt . Vybereme ten term který má sudý exponent ($\cos x$)

$$t = \cos x$$

$$dt = -\sin x \, dx$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx \tag{67}$$

$$\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x \, dx \tag{68}$$

$$- \int (1 - t^2) t^2 \, dt \tag{69}$$

$$- \int t^2 - t^4 \, dt \tag{70}$$

$$- \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 \right) \tag{71}$$

$$- \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x \right) \tag{72}$$

$$- \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x \tag{73}$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0 - \left(-\frac{2}{15}\right) = \frac{2}{15}$$

1.7

Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá/nepravdivá.

- (a) Jestliže funkce f není v bodě x_0 spojitá, pak přímka $x = x_0$ je svislou asymptotou funkce f .
- (b) Každá periodická funkce je omezená.
- (c) Je-li $f'(1) = 0$ a $f''(1) = 5$, má funkce f v bodě $x = 1$ lokální extrém.
- (d) Na intervalu $(0, +\infty)$ platí $\int \frac{1}{x} dx = 2021 + \ln(2022x)$.
- (e) Existuje funkce f spojitá na intervalu I , která na I není omezená.

1. otázka

Ano. Body po x -ové ose se k tomuto bodu x_0 nekonečně přibližují.

2. otázka

Ne. Třeba funkce $f(x) := \tan x$ je periodická, ale není zhora ani zdora omezená.

3. otázka

Ano. Její první derivace je nulová a druhá derivace není nulová. Pokud by byla druhá derivace nulová, znamenalo by to, že je v bodě x_0 inflexní bod.

4. otázka

$$F(x) = 2021 + \ln 2022x \quad (74)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (75)$$

$$F'(x) = (2021 + \ln(2022x))' = \frac{1}{2022x} 2022 = \frac{1}{x} = f(x) \quad (76)$$

Platí. Absolutní hodnotu u \ln můžeme vynechat protože se zabýváme jen kladnými x (\mathbb{R}_0).

5. otázka

Ano, pokud je interval I otevřený, můžou hodnoty v mezních bodech nabývat $\pm\infty$, tím jsou neomezené.