MA1
Integrální počet

Phat Tran

6. května 2024

1 Integrály

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ... neurčitý integrál
- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ ... primitivní funkce k funkci $f(x)$
- $F'(x) = f(x)$ ... derivace primitivní funkce, $F(x)$, je funkce $f(x)$

Pravidlo sumy

$$\int \Big(f(x) \pm g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pravidlo konstanty

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Metoda Per Partes

$$\begin{aligned} (f\cdot g)' &= f'g + fg' \\ \int (f\cdot g)' &= \int f'g + \int fg' \\ f\cdot g &= \int f'g + \int fg' \end{aligned}$$

$$\textbf{I.}\ \int f'g = fg - \int fg'$$

$$\textbf{II.}\ \int fg' = fg - \int f'g$$

Subtituční metoda

Pokud pro funkce f a g platí, že

1. funkce f má primitivní funkci F na intervalu (a, b),
2. funkce g je na intervalu (α, β) diferenciovatelná
3. a $g((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$,

pak funkce $f(g(x)) \cdot g'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x))\,.$$

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \text{kde}$$

$$t = g(x)\,;\ \mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2 Příklady

Vypočítej integrál

$$\int \pi x^{2024} \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= \int \pi x^{2024} \, \mathrm{d}x && (1)\\
&= \pi \int x^{2024} \, \mathrm{d}x && (2)\\
&= \pi \frac{x^{2025}}{2025} && (3)\\
&= \frac{\pi}{2025} x^{2025} + C && (4)
\end{aligned}$$

Vypočítej integrál

$$\int (3x-2)e^x \, \mathrm{d}x$$

$$f(x) = 3x - 2 \,\rightarrow\, f'(x) = 3$$
$$g'(x) = e^x \,\rightarrow\, g(x) = e^x$$

Vybrání funkce $f(x)$ a $g(x)$.

$$\begin{aligned}
&= (3x-2)e^x - \int 3e^x \, \mathrm{d}x && (5)\\
&= (3x-2)e^x - 3e^x && (6)\\
&= e^x \left((3x-2) - 3\right) && (7)\\
&= e^x \left(3x-5\right) + C && (8)
\end{aligned}$$

Vypočítej integrál

$$\int (2x+3)\cos 3x \, \mathrm{d}x$$

$$f(x) = 2x + 3 \,\rightarrow\, f'(x) = 2$$
$$g'(x) = \cos 3x \,\rightarrow\, g(x) = -\frac{1}{3}\sin 3x$$

Vybrání funkce $f(x)$ a $g(x)$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}\sin 3x(2x+3) + \frac{2}{3}\int \sin 3x \, \mathrm{d}x && (9)\\
&= -\frac{1}{3}\sin 3x(2x+3) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) && (10)\\
&= -\frac{1}{3}\sin 3x(2x+3) - \frac{2}{9}\cos 3x + C && (11)
\end{aligned}$$

Vypočítej integrál

$$\int (x^2 - x)e^{4x}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = x^2 - x \rightarrow f'(x) = 2x - 1$$
$$g'(x) = e^{4x} \rightarrow g(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$$

1. Vybrání funkce $f(x)$ a $g(x)$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - x)e^{4x} - \frac{1}{4}\int (2x-1)e^{4x}\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

$$f(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(x) = 2$$
$$g'(x) = e^{4x} \rightarrow g(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$$

2. Vybrání funkce $f(x)$ a $g(x)$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - x)e^{4x} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(2x-1)e^{4x} - \frac{1}{2}\int e^{4x}\,\mathrm{d}x\right) \tag{13}$$
$$= \frac{1}{4}(x^2 - x)e^{4x} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(2x-1)e^{4x} - \frac{1}{8}e^{4x}\right) \tag{14}$$
$$= \frac{1}{4}(x^2 - x)e^{4x} - \frac{1}{16}(2x-1)e^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} \tag{15}$$
$$= \frac{1}{32}e^{4x}\left(8(x^2 - x) - 2(2x-1) + 1\right) \tag{16}$$
$$= \frac{1}{32}e^{4x}\left(8x^2 - 8x - 4x - 2 + 1\right) \tag{17}$$
$$= \frac{1}{32}e^{4x}\left(8x^2 - 12x - 1\right) + C \tag{18}$$

Vypočítej integrál

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x$$

Vybrání funkce $f(x)$ a $g(x)$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{x} x \,\mathrm{d}x \tag{19}$$
$$= x\ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x \tag{20}$$
$$= x\ln x - x \tag{21}$$
$$= x(\ln x - 1) + C \tag{22}$$

Vypočítej integrál

$$\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \ln^2 x \rightarrow f'(x) = 2\ln x \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x$$

Vybrání funkce $f(x)$ a $g(x)$

$$x\ln^2 x - \int 2\ln x \cdot \frac{1}{x} x \,\mathrm{d}x \tag{23}$$
$$x\ln^2 x - 2\int \ln x \cdot 1 \,\mathrm{d}x \tag{24}$$
$$x\ln^2 x - 2\int \ln x \,\mathrm{d}x \tag{25}$$
$$x\ln^2 x - 2(x(\ln x - 1)) \tag{26}$$
$$x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \tag{27}$$
$$x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C \tag{28}$$

Vypočítej integrál

$$\int x \arctan x \,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \arctan x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$g'(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Vybrání funkce $f(x)$ a $g(x)$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{2} x^2 \,\mathrm{d}x \tag{29}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} x^2 \,\mathrm{d}x \tag{30}$$

$$\frac{1}{1+x^2}x^2 = \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \\ = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Úprava výrazu

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\left(\int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\left(\int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \arctan x - (x - \arctan x)\right) \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \arctan x - x + \arctan x\right) + C \tag{35}$$

Vypočítej integrál

$$\int \frac{7x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$$

$$t = 1 + x^3$$
$$\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int \frac{7x^2}{\sqrt{t}}\frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}t \tag{36}$$

$$= \int \frac{7}{\sqrt{t}}\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t \tag{37}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{7}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{38}$$

$$= \frac{7}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \tag{39}$$

$$= \frac{7}{3}\int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t \tag{40}$$

$$= \frac{7}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{41}$$

$$= \frac{7}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \tag{42}$$

$$= \frac{7}{3}2t^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

$$= \frac{14}{3}t^{\frac{1}{2}} + C \tag{44}$$

Vypočítej integrál

$$\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$t = x^5 + 1$$
$$\mathrm{d}t = 5x^4\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int \frac{x^9}{t^3}\frac{1}{5x^4}\,\mathrm{d}t \tag{45}$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{x^9}{t^3}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}t \tag{46}$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{x^5}{t^3}\,\mathrm{d}t \tag{47}$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t \tag{48}$$
$$= \frac{1}{5}\left(\int t^{-2}\,\mathrm{d}t - \int t^{-3}\,\mathrm{d}t\right) \tag{49}$$
$$= \frac{1}{5}\left(-t^{-1} - \frac{t^{-2}}{-2}\right) \tag{50}$$
$$= \frac{1}{5}\left(-t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2}\right) \tag{51}$$
$$= -\frac{1}{5}t^{-1} + \frac{1}{10}t^{-2} + C \tag{52}$$

Vypočítej integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos^3 x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\arccos^3 x}\,\mathrm{d}x \tag{53}$$
$$\tag{54}$$

$$t = \arccos x$$
$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$-\int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = -\int t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-2}}{2} + C \tag{55}$$

Vypočítej integrál

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^{-2}\sin x^{-1}\,\mathrm{d}x \tag{56}$$

$$\tag{57}$$

$$t = x^{-1}$$
$$dt = -x^{-2}\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{x^{-2}}{1}\sin(t)\left(-\frac{1}{x^{-2}}\right)\mathrm{d}t && (58)\\
&= -\int \sin(t)\,\mathrm{d}t && (59)\\
&= -\int \sin t\,\mathrm{d}t && (60)\\
&= -(-\cos t) && (61)\\
&= \cos t && (62)\\
&= \cos\frac{1}{x} + C && (63)
\end{aligned}
$$

Vypočítej integrál

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$t = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{(1+t^2)t}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}t && (64)\\
&= \int \frac{1}{(1+t^2)t}\cdot\frac{2t}{1}\,\mathrm{d}t && (65)\\
&= 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t && (66)\\
&= 2\arctan t && (67)\\
&= 2\arctan\frac{1}{x} + C && (68)
\end{aligned}
$$

Vypočítej integrál

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \tag{69}$$

$$t = \cos x$$
$$\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{1}{-\sin x} \, \mathrm{d}t \tag{70}$$
$$= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{-1} \, \mathrm{d}t \tag{71}$$
$$= -\int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \tag{72}$$
$$= -\ln|t| \tag{73}$$
$$= -\ln|\cos x| + C \tag{74}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int (5x-1)^3 \, \mathrm{d}x$$

$$t = 5x - 1$$
$$\mathrm{d}t = 5 \, \mathrm{d}x$$

Subtituce

$$= \frac{1}{5} \int t^3 \, \mathrm{d}x \tag{75}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} t^4 \tag{76}$$
$$= \frac{1}{20} t^4 \tag{77}$$
$$= \frac{1}{20} (5x-1)^4 + C \tag{78}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{5x}{(x^2+4)^3} \, \mathrm{d}x$$

$$t = x^2 + 4$$
$$\mathrm{d}t = 2x \, \mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \frac{1}{2} \int \frac{5x}{t^3} \frac{1}{2x^1} \,\mathrm{d}t \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{5x}{t^3} x^{-1} \,\mathrm{d}t \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{5}{t^3} \,\mathrm{d}t \tag{81}$$

$$= \frac{5}{2} \int t^{-3} \,\mathrm{d}t \tag{82}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot -\frac{1}{2} t^{-2} \tag{83}$$

$$= -\frac{5}{4} t^{-2} + C \tag{84}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \sqrt[3]{4x-7} \,\mathrm{d}x$$

$$t = 4x - 7$$

$$\mathrm{d}t = 4 \,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int \sqrt[3]{t} \cdot 4^{-1} \,\mathrm{d}t \tag{85}$$

$$= \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}t \tag{86}$$

$$= \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}t \tag{87}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \tag{88}$$

$$= \frac{3}{16} t^{\frac{4}{3}} + C \tag{89}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int e^{5x} \,\mathrm{d}x$$

$$t = 5x$$

$$\mathrm{d}t = 5 \,\mathrm{d}x$$

Subtituce

$$= 5^{-1} \int e^t \,\mathrm{d}t \tag{90}$$

$$= 5^{-1} e^t \tag{91}$$

$$= 5^{-1} e^{5x} \tag{92}$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x} + C \tag{93}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int e^{1+\sin x} \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$t = 1 + \sin x$$
$$\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int e^t \, \mathrm{d}t \tag{94}$$
$$= e^t \tag{95}$$
$$= e^{1+\sin x} + C \tag{96}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int x \cdot e^{x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$t = x^2$$
$$\mathrm{d}t = 2x \, \mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int x(2x)^{-1} \cdot e^t \, \mathrm{d}t \tag{97}$$
$$= \frac{1}{2} \int e^t \, \mathrm{d}t \tag{98}$$
$$= \frac{1}{2} e^t \tag{99}$$
$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C \tag{100}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int e^{3-2x} \, \mathrm{d}x$$

$$t = 3 - 2x$$
$$\mathrm{d}t = -2 \, \mathrm{d}x$$

Substituce

$$= -\frac{1}{2} \int e^t \, \mathrm{d}t \tag{101}$$
$$= -\frac{1}{2} e^{3-2x} + C \tag{102}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int 3e^x\sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

$$t = 1+e^x$$

$$\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int 3(t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \tag{103}$$

$$= 3\int (t-1)t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{104}$$

$$\tag{105}$$

$$f(x) = t-1 \rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = t^{\frac{1}{2}} \rightarrow g(x) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

Per Partes

$$= (t-1)\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{106}$$

$$= (t-1)\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \tag{107}$$

$$= (t-1)\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}t^{\frac{5}{2}} \tag{108}$$

$$= \frac{4}{15}\left(\frac{5}{2}(t-1)t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{5}{2}}\right) \tag{109}$$

$$= \frac{4}{15}\left(\frac{5}{2}\left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right) - t^{\frac{5}{2}}\right) \tag{110}$$

$$= \frac{4}{15}\left(\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{5}{2}}\right) \tag{111}$$

$$= \frac{4}{15}\left(\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}\right) \tag{112}$$

$$= \frac{12}{30}t^{\frac{3}{2}} - \frac{20}{30}t^{\frac{3}{2}}$$ 2005/06/28ver

$$= \frac{2}{6}\left(1+e^x\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{\frac{3}{2}}$$ 2005/06/28ver

$$= -\frac{2}{6}\left(1+e^x\right)^{\frac{3}{2}} \tag{115}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$t = x^{-1}$$
$$\mathrm{d}t = -x^{-2}\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= -\int t\,\mathrm{d}t \tag{116}$$
$$= -\frac{t^2}{2} \tag{117}$$
$$= -\frac{x^{-2}}{2} \tag{118}$$
$$= -\frac{1}{2x^2} + C \tag{119}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$t = 1 + \ln x$$
$$\mathrm{d}t = x^{-1}\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \tag{120}$$
$$= \int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{121}$$
$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C \tag{122}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$$

$$t = \ln x$$
$$\mathrm{d}t = x^{-1}\,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int \frac{1}{x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}x \tag{123}$$
$$= \int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{124}$$
$$= 2t^{\frac{1}{2}} \tag{125}$$
$$= 2\sqrt{\ln x} + C \tag{126}$$
$$\tag{127}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} \,\mathrm{d}x$$

$$t = \ln x$$
$$\mathrm{d}t = x^{-1} \,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \int \ln^4 t \,\mathrm{d}t \tag{128}$$
$$= \frac{1}{5} \ln^5 t \tag{129}$$
$$= \frac{1}{5} \ln^5 (\ln x) + C \tag{130}$$
$$= \frac{1}{5} (\ln (\ln x))^5 + C \tag{131}$$
$$= \frac{1}{5} (\ln \circ \ln)^5 (x) + C \tag{132}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \cos \frac{x}{4} \,\mathrm{d}x$$

$$t = \frac{1}{4} x$$
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \frac{1}{4} \int \cos t \,\mathrm{d}t \tag{133}$$
$$= \frac{1}{4} \sin t \tag{134}$$
$$= \frac{1}{4} \sin \left(\frac{1}{4} x \right) + C \tag{135}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \sin 2x \,\mathrm{d}x$$

$$t = 2x$$
$$\mathrm{d}t = 2 \,\mathrm{d}x$$

Substituce

$$= \frac{1}{2} \int \sin t \, \mathrm{d}t \tag{136}$$

$$= -\frac{1}{2} \cos t \tag{137}$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x + C \tag{138}$$

Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \cot{(2x+1)} \, \mathrm{d}x$$

$$t = 2x + 1$$

$$\mathrm{d}t = 2 \, \mathrm{d}x$$

Substituce

$$= 2 \int \cot t \, \mathrm{d}t \tag{139}$$

$$= 2 \int \frac{\cos t}{\sin t} \, \mathrm{d}t \tag{140}$$

$$= 2 \int \frac{1}{\sin t} \cos t \, \mathrm{d}t \tag{141}$$

$$\tag{142}$$

Za podmínek, že

1. $f(x) = \frac{1}{x}$,
2. $g(x) = \sin x$
3. a $F(x) = \ln |x|$ je primitivní f-ce k f-ci $f(x)$.

Potom $(F \circ g)(x) + C$ je

$$= 2 \ln |\sin t| + C \tag{143}$$