

# Hồi quy tuyến tính (Linear Regression- Supervised learning)

Trường Đại học Công nghệ Thông tin, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh  
Tài liệu nội bộ

Tháng 2 năm 2020



# Tổng quan

---

- 1 Giới thiệu về hàm hồi quy
- 2 Phương pháp bình phương bé nhất-Least square method (LSM)
- 3 Thực hành với python

# Nội dung trình bày

---

- 1 Giới thiệu về hàm hồi quy

# Hồi quy là gì?

---

Khái niệm hồi quy dùng để mô tả quan hệ thống kê giữa các biến.

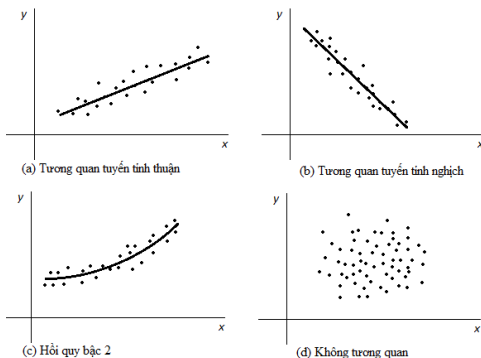
Để “đọc” được mối liên hệ giữa  $X$  và  $Y$  và dự đoán được  $Y$  khi biết giá trị của  $X$  người ta theo các bước sau:

- Biểu diễn mỗi quan sát  $(x_i; y_i)$  bởi một điểm trên mặt phẳng tọa độ, ta còn gọi nó là *đồ thị phân tán*
- “Vẽ” một đường cong để mô tả mối quan hệ giữa hai đại lượng và dùng nó để dự đoán xu hướng của  $Y$  cũng như giá trị của nó khi biết giá trị của  $X$ . Đường cong như vậy được gọi là đường hồi quy (hay đường cong xấp xỉ). Thuật toán hồi quy tuyến tính thuộc vào nhóm học có giám sát (supervised learning)

## Cách chọn hàm hồi quy

Chọn hàm hồi quy tùy thuộc hình dáng đám mây điểm. Hàm hồi quy có thể tuyến tính  $y = a + bx$ , hay bậc hai  $y = a + bx + cx^2, \dots$ . Các trường hợp kể trên thuộc họ hồi qui có tham số.

Phương pháp chọn một đường cong như vậy gọi là phương pháp hồi qui, còn phương trình của đường cong được gọi là phương trình hồi qui.



Hình 1: Đám mây điểm (trên mặt phẳng) và đường hồi quy

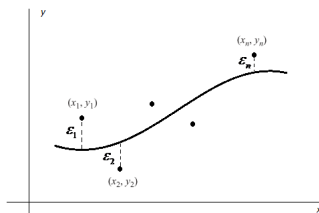
## Tại sao chọn mô hình tuyến tính

---

Bằng phép biến đổi, nhiều đường cong có thể được “tuyến tính hóa”

- $y = a + bx + cx^2 = A + B(C + Dx)^2$ . Đặt  $X = (C + Dx)^2$  ta được  $y = A + BX$
- Hoặc  $y = a + bx + cx^2 = A + B(C + Dx)^2$ , đặt  $x^2 = X$  ta sẽ được ”đường tuyến tính”  $y = a + bx + cx^2$  (chính là phương trình mặt phẳng).
- $y = a^{b+cx}$ . Lấy log hai vế ta được  $\ln y = (b + cx) \ln a = b \ln a + (c \ln a)x$ . Đặt  $Y = \ln y$ ,  $A = b \ln a$ ,  $B = c \ln a$  ta được  $Y = A + BX$
-

- ② Phương pháp bình phương bé nhất-Least square method (LSM)



Hình 2: Sai số của dữ liệu và đường hồi quy

- Xác định trước dạng của hàm hồi quy  $y = E(Y/X = x) = f(x)$ .
- Đặt hàm mất mát (lost function) (còn gọi là tổng bình phương sai số)

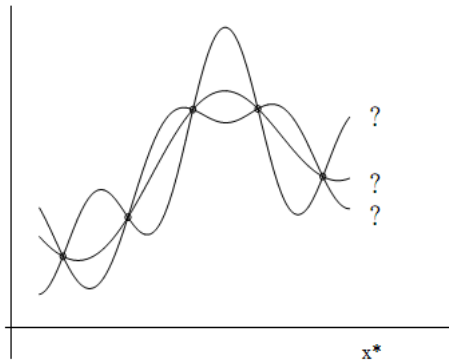
$$L = \sum \varepsilon_i^2 = \sum_i \left[ y^{(i)} - f(x^{(i)}) \right]^2 \quad (1)$$

Trong đó  $\varepsilon_i$  là độ lệch giữa giá trị quan sát thực tế và giá trị dự đoán bởi hàm hồi qui.

- Ta chọn các tham số của mô hình sao cho  $L$  là bé nhất.



**Mô hình quá khớp với dữ liệu (Overfitting a model):** Nếu ta muốn chọn hàm hồi quy sao cho hàm mất mát bằng 0, tức là phương trình hồi quy đi qua tất cả các điểm số liệu, thì có nhiều cách để chọn hàm hồi quy thỏa mãn điều này. Chính vì vậy mà xu hướng của dữ liệu và việc dự đoán số liệu mới trở nên khó đoán hơn.



Hình 3: Mô hình quá khớp với dữ liệu

## Hồi quy tuyến tính

---

Giả sử biến đáp ứng  $y$  phụ thuộc vào  $n - 1$  biến độc lập (hay *biến đầu vào*)  $x_i, i = 1, \dots, n - 1$ . Khi đó phương trình hồi quy của  $y$  theo  $x_i$  được gọi là PTHQ đa biến.

Mô hình tuyến tính có dạng

$$\hat{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_{n-1} x_{n-1} = \boldsymbol{\theta}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^- \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} \quad (2)$$

trong đó  $\mathbf{x}^- \in \mathbb{R}^{n-1}$  là véc tơ biến đầu vào và  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$  là véc tơ tham số của mô hình. Giá trị của tham số sẽ được ước lượng bằng cách sử dụng  $m$  cặp giá trị  $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$  của dữ liệu đã quan sát (hay còn gọi là *tập huấn luyện*).

Các tên gọi khác trong ứng dụng:

- $n - 1$  là số thuộc tính (feature)
- $x_i$  là giá trị thuộc tính thứ  $i$
- $\theta_i$  là trọng số của thuộc tính thứ  $i, i \geq 1$

## Hồi quy tuyến tính

Giả sử ta có  $m$  cặp dữ liệu huấn luyện  $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}), i = \overline{1, m}$  được biểu diễn tương ứng bằng các véc tơ  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}]^\top, \mathbf{y} = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}]^\top$  - được gọi là ma trận mẫu (hay ma trận thiết kế-design matrix), và  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$  là kết quả dự đoán tương ứng.

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}]^\top = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_{n-1}^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & \dots & x_{n-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & \dots & x_{n-1}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Để ý rằng ở ma trận  $\mathbf{X}$ , ta sắp mỗi dữ liệu huấn luyện theo hàng ( $m$  hàng) và các thuộc tính của chúng theo cột ( $n$  cột).

Để xác định tham số  $\boldsymbol{\theta}$  theo phương pháp bình phương bé nhất, ta cần cực tiểu hàm mất mát  $J(\boldsymbol{\theta})$  - (loss (cost) function)- như sau:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})^2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{x}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2 \quad (4)$$

Biểu thức có chia cho

# Tổng quát hóa mô hình tuyến tính đa biến

---

Mô hình hồi quy tuyến tính đa biến tổng quát có dạng:

$$\hat{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \theta_0 + \theta_1 \varphi_1(\mathbf{x}) + \dots + \theta_{n-1} \varphi_{n-1}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

trong đó các hàm theo biến  $\mathbf{x}$  là  $\varphi_i(\mathbf{x})$  được gọi là các hàm cơ bản (basic function). Thường người ta sẽ đặt  $\varphi_0(\mathbf{x}) = 1$  và viết lại công thức trên như sau:

$$\hat{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \varphi_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

Trong các công thức trên véc tơ được đề cập được hiểu là véc tơ cột.  
Mô hình hồi quy tuyến tính tương ứng với chọn hàm  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

Vậy tham số  $\theta$  được ước lượng bằng giá trị làm cực tiểu hàm mất mát:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta) \quad (7)$$

Giải phương trình đạo hàm  $J'(\theta) = 0$  ta được giá trị ước lượng của  $\theta$  là:

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (8)$$

Nhận xét Công thức trên??

## Ví dụ (mô phỏng quá trình tính toán ma trận)

Lập phương trình hồi quy tuyến tính của Y theo X từ tập huấn luyện sau:

$(x_i, y_i) = (147, 49), (150, 53), (153, 51), (160, 54)$ .

Giải: Ma trận mẫu và ma trận đáp ứng

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 147 \\ 1 & 150 \\ 1 & 153 \\ 1 & 160 \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 49 \\ 53 \\ 51 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Các ma trận trung gian:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 610 \\ 610 & 93118 \end{bmatrix}; (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{186} \begin{bmatrix} 46559 & -305 \\ -305 & 2 \end{bmatrix}$$

Thay các ma trận trên vào công thức nghiệm ta được

^

$$\hat{\theta} \approx \begin{bmatrix} 5.02 \\ 0.31 \end{bmatrix} \text{ Vậy phương trình hồi quy cần tìm là: } y = 5.02 + 0.31x$$

Xét mô hình tuyến tính

$$y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_{n-1} x_{n-1} + u = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} + u \quad (9)$$

- $u \sim N(0, \sigma^2)$
- $E(u_i) = 0, \text{cov}(u_i, u_j) = 0, \forall i \neq j, \text{var}(u_i) = \sigma^2 \forall i$

## Đánh giá sự phụ thuộc tuyến tính- hệ số xác định $R^2$

- $TSS(\text{total sum squares}) = \sum (y_i - \bar{y})^2$  ( $SS_{TOT}$ )  
Tổng bình phương tất cả sai lệch giữa  $y_i$  và giá trị trung bình.
- $ESS(\text{explained sum of squares}) = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$  ( $SS_{REG}$ )  
Tổng bình phương các sai lệch giữa giá trị dự đoán của biến phụ thuộc  $y$  và giá trị trung bình  $\Rightarrow$  đo độ chính xác của hàm hồi qui.
- $RSS(\text{residual sum of squares}) = \sum (e_i^2)$  ( $SS_{ERR}$ )  
Tổng bình phương sai số.

Từ quan hệ

$$TSS = ESS + RSS \quad (10)$$

Chia hai vế cho  $TSS$  ta được hệ số xác định (hay giá trị thống kê “good of fit”)

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad (11)$$

$R^2$  càng cao (càng gần 1) thì mô hình càng giải thích được biến động của biến phụ thuộc (VD:  $R^2 = 0.85$  cho thấy biến độc lập giải thích được 85% sự thay đổi của biến phụ thuộc, còn 15% còn lại là do các yếu tố ngẫu nhiên gây ra.



## Đánh giá sự phụ thuộc tuyến tính-Hệ số xác định hiệu chỉnh (Adjusted R-squared)

---

Khi sử dụng nhiều biến độc lập trong mô hình hồi quy thì số bậc tự do sẽ giảm đi (do  $df=m-n$ ,  $m$  là cỡ mẫu,  $n$  là số hệ số của mô hình). Để khắc phục điều này điều chỉnh hệ số xác định  $R^2$  bằng cách đưa thêm bậc tự do của các tổng bình phương vào công thức hệ số xác định:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(m-n)}{TSS/(m-1)} = R^2 + (1 - R^2) \frac{1-n}{m-n} \quad (12)$$

Thông thường, biến độc lập đưa thêm vào mô hình là xác đáng nếu nó làm tăng giá trị  $\bar{R}^2$  và hệ số hồi quy của biến này khác 0 có ý nghĩa thống kê.

Ghi chú:  $\bar{R}^2$  có thể âm, khi đó ta gán giá trị 0.

number of observations, n	number of variables, k	$R^2$	Adj- $R^2$
25	4	0.71	0.6520
25	5	0.76	0.6968
25	6	0.78	0.7067
25	7	0.79	0.7035
10	4	0.71	0.4780
10	5	0.76	0.4600
10	6	0.78	0.3400
10	7	0.79	0.0550

Hình 4

## Bảng phân tích phương sai một biến (one-way ANOVA hay univariate ANOVA)

---

Source	Sum of squares	Degrees of freedom	Mean squares	$F$
Model	$SS_{\text{REG}}$ $= \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	1	$MS_{\text{REG}}$ $= SS_{\text{REG}}$	$\frac{MS_{\text{REG}}}{MS_{\text{ERR}}}$
Error	$SS_{\text{ERR}}$ $= \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$	$m - 2$	$MS_{\text{ERR}}$ $= \frac{SS_{\text{ERR}}}{m - 2}$	
Total	$SS_{\text{TOT}}$ $= \sum (y_i - \bar{y})^2$	$m - 1$		

## Bảng phân tích phương sai nhiều biến (Multivariate ANOVA)

Source	Sum of squares	Degrees of freedom	Mean squares	$F$
Model	$SS_{\text{REG}}$ $= (\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})$	$n-1$	$MS_{\text{REG}}$ $= \frac{SS_{\text{REG}}}{n-1}$	$\frac{MS_{\text{REG}}}{MS_{\text{ERR}}}$
Error	$SS_{\text{ERR}}$ $= (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$	$m-n$	$MS_{\text{ERR}}$ $= \frac{SS_{\text{ERR}}}{m-n}$	
Total	$SS_{\text{TOT}}$ $= (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})$	$m-1$		

Hình 6

# Kiểm định mức ý nghĩa toàn bộ mô hình- Xem có hệ số nào khác 0 không, mức $\alpha$

- Đặt giả thuyết  $H_0$ : "tất cả các hệ số  $\theta_i$  đều bằng 0 ( $i > 0$ ".  $H_1$ : "Có một hệ số nào đó khác 0".
- Tính kiểm định F-Stat: Tuân theo phân phối Fisher-Snedecor ( $n-1, m-n$ )
- Nếu  $P - \text{value for } F < \alpha$  thì bác giả thuyết  $H_0$

Các giá trị được tính sẵn trong python.

OLS Regression Results						
=====						
Dep. Variable:	y	R-squared:	0.733			
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.730			
Method:	Least Squares	F-statistic:	268.6			
Date:	Tue, 17 Mar 2020	Prob (F-statistic):	7.88e-30			
Time:	16:50:19	Log-Likelihood:	-147.81			
No. Observations:	100	AIC:	299.6			
Df Residuals:	98	BIC:	304.8			
Df Model:	1					
Covariance Type:	nonrobust					
=====						
	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
-----						
Intercept	4.1648	0.203	20.503	0.000	3.762	4.568
X	2.9328	0.179	16.389	0.000	2.578	3.288
=====						
Omnibus:	1.707	Durbin-Watson:		1.886		
Prob(Omnibus):	0.426	Jarque-Bera (JB):		1.200		
Skew:	-0.241	Prob(JB):		0.549		
Kurtosis:	3.237	Cond. No.		3.54		
=====						

## Kiểm định giả thuyết hệ số của mô hình

Để biết hệ số  $\theta_i$  của mô hình tuyến tính thực sự có ý nghĩa không, ta cần kiểm định giả thuyết  $H_0 : \theta_i = 0$ , với đối thuyết  $H_1 : \theta_i \neq 0$  ở mức ý nghĩa  $\alpha$  cho trước (thường được chọn là 0.05).

- Tính

$$t = \left| \frac{\theta_i}{S(\theta_i)} \right|, S(\theta_i) = \sqrt{Var(\theta)[i, i]} \quad (13)$$

trong đó  $\sigma^2 = ESS/(m - n)$  là ước lượng của phương sai biến  $Y$ ,  
 $Var(\theta) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$  là ma trận hiệp phương sai của véc tơ  $\theta$

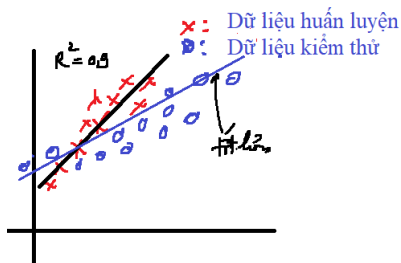
- Tra bảng t-Student giá trị  $t(m - n, \alpha)$ ,  $n$  là số tham số cần xác định trong mô hình,  $m$  là kích thước tập huấn luyện.
- Nếu  $t \geq t(m - n, \alpha)$  thì bác giả thuyết  $H_0$ , nghĩa là biến  $x_i$  có ý nghĩa.

Trong python hay sử dụng giá trị  $P - value$ :

$$P - value = P(T \geq t) \quad (14)$$

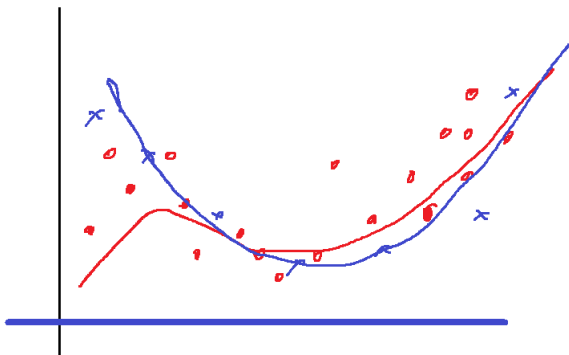
Nếu  $P - value \leq \alpha$  thì bác giả thuyết  $H_0$ , nghĩa là biến  $x_i$  có ý nghĩa.

# Các mô hình hồi quy tuyến tính quy tắc hóa- Regularize linear regression models



Hình 8

- Quy tắc hóa một mô hình hồi quy là dạng hồi quy với các hệ số được ràng buộc nhằm tránh hiện tượng quá khớp (overfitting)
- Với mô hình hồi quy đa thức ( $y = \theta_0 + \theta_1 x^1 + \dots + \theta_k x^k$ ), một cách đơn giản để quy tắc hóa mô hình là giảm bậc của đa thức.



Hình 9



## Mô hình hồi quy ridge

---

- Hồi quy ridge (Hồi quy sườn đồi, hay hồi quy quy tắc hóa Tikhonov) là mô hình hồi quy tuyến tính với ràng buộc các hệ số là

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_n^2 = \sum_{j=1}^n \theta_j^2 = \|\boldsymbol{\theta}\|_2^2$$

- Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, ta có thể viết hàm mất mát dưới dạng:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{x}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2 + \alpha \sum_{j=1}^n \theta_j^2 \quad (\alpha \geq 0) \quad (15)$$

- Thành phần thứ hai trong hàm mất mát được gọi là "penalty term"
- Nhận xét:
  - ▶  $\alpha = 0$ : Hồi quy ridge trở thành hồi quy tuyến tính
  - ▶  $\alpha \rightarrow +\infty$ : Hàm mất mát cực tiểu khi  $\sum_{j=1}^n \theta_j^2$  tiến về 0, suy ra  $\theta_j \sim 0, \forall j$ , đường hồi quy là hằng số.

## Mô hình hồi quy ridge

Gọi  $I_{n+1}$  là ma trận đơn vị cấp  $n + 1$  ( $n$  là số thuộc tính), khi đó lấy đạo hàm và giải phương trình đạo hàm bằng 0 theo  $\theta$  ta được công thức ước lượng hệ số là

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (X^T X + \alpha I_{n+1})^{-1} X^T Y \quad (16)$$

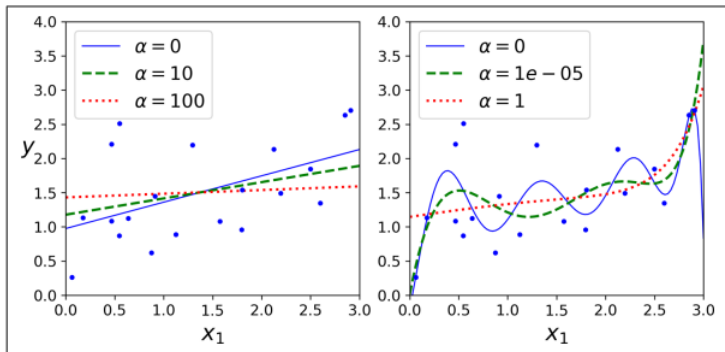


Figure 4-17. A linear model (left) and a polynomial model (right), both with various levels of Ridge regularization

Hình 10

# Mô hình hồi quy LASSO-Least Absolute Shrinkage and Selection of Operator

- Tương tự hồi quy ridge, nhưng thay ràng buộc các hệ số hồi quy bằng chuẩn  $L^1$ :  $\|\boldsymbol{\theta}\|_1 = \sum_{j=1}^n |\theta_j|$
- Hàm mất mát của hồi quy lasso có dạng:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{x}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2 + \alpha \sum_{j=1}^n |\theta_j| \quad (\alpha \geq 0) \quad (17)$$

- Đề ý là ta không có biểu thức tường minh để tìm hệ số hồi quy trong mô hình lasso (vì hàm trị tuyệt đối không có đạo hàm tại 0). Do vậy, ta thường dùng xấp xỉ để ước lượng  $\boldsymbol{\theta}$ . Nếu sử dụng phương pháp GD thì biểu thức gradient có dạng

$$g(\boldsymbol{\theta}, J) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \text{MSE}(\boldsymbol{\theta}) + \alpha \begin{pmatrix} \text{sign}(\theta_1) \\ \text{sign}(\theta_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(\theta_n) \end{pmatrix} \quad \text{where } \text{sign}(\theta_i) = \begin{cases} -1 & \text{if } \theta_i < 0 \\ 0 & \text{if } \theta_i = 0 \\ +1 & \text{if } \theta_i > 0 \end{cases}$$

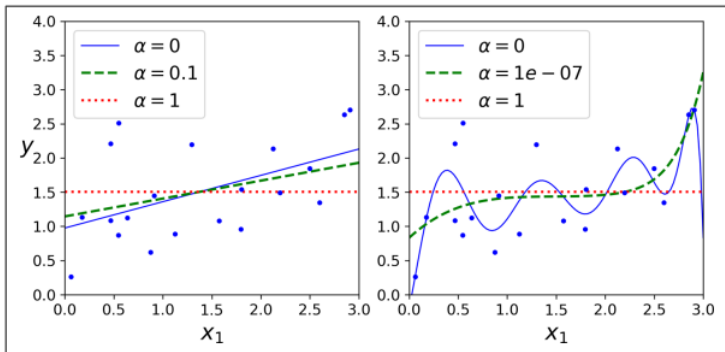
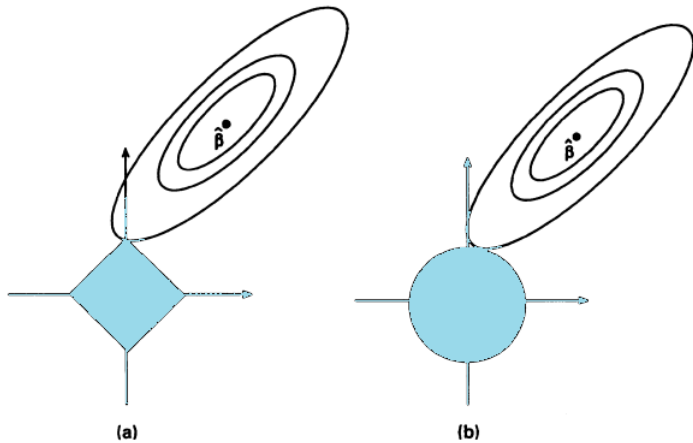


Figure 4-18. A linear model (left) and a polynomial model (right), both using various levels of Lasso regularization

Hình 12



Estimation picture for (a) the lasso and (b) ridge regression

Hình 13

- Đặc điểm quan trọng của hồi quy lasso là nó có xu hướng loại bỏ các trọng số của các thuộc tính ít quan trọng (nghĩa là gán chúng bằng 0), đồng nghĩa với việc hồi quy lasso tự động chọn thuộc tính cho mô hình (sparse model: mô hình với vài hệ số khác 0).

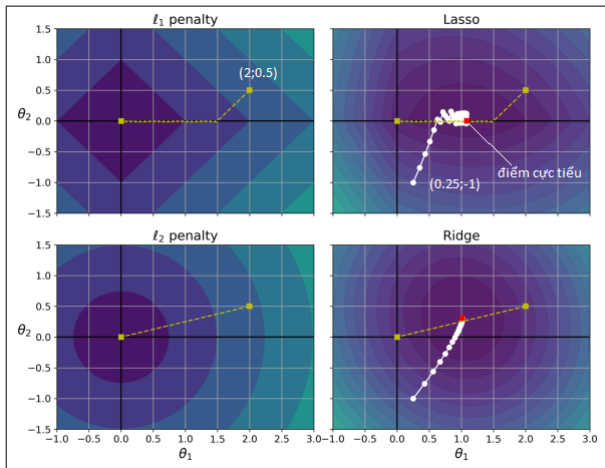


Figure 4-19. Lasso versus Ridge regularization

## Hình 14

- Để tránh pp GD cho mô hình lasso không hội tụ tại điểm cực tiểu, ta cần giảm dần độ học (learning rate) trong quá trình huấn luyện.

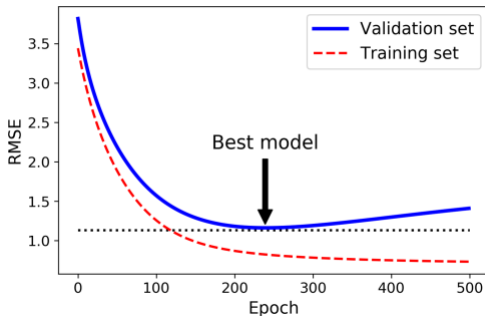
- Là mô hình hỗn hợp giữa Ridge và Lasso
- Hàm mất mát có dạng

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{x}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2 + r\alpha \sum_{j=1}^n |\theta_j| + \frac{1-r}{2} \alpha \sum_{j=1}^n \theta_j^2 \quad (\alpha \geq 0) \quad (18)$$

## Dừng sớm (early stopping)

Trong quá trình huấn luyện mô hình quy tắc hóa bằng thuật toán lặp (như GD), quá trình lặp nên dừng huấn luyện khi sai số trên tập kiểm định (validation set) đạt giá trị nhỏ nhất. Ta gọi việc dừng huấn luyện này là dừng sớm.

Xem mô hình hồi quy đa thức trong hình sau. Mô hình được huấn luyện bởi thuật toán GD bó (batch GD). Ta dừng huấn luyện khi thấy sai số dự báo (RMSE) trên tập kiểm định bắt đầu tăng- điều này cho thấy mô hình bắt đầu quá khớp với tập dữ liệu huấn luyện.



Hình 15



# Nội dung trình bày

---

## ③ Thực hành với python

**BT1.** Tìm hiểu các lệnh thống kê trong chương trình python, giải thích các thông số trong bảng phân tích hồi quy:

```
4 import statsmodels.formula.api as smf
5 from pandas import DataFrame
6 import numpy as np
7 #Đọc dữ liệu
8 xl = pd.ExcelFile('demo_data.xls')
9 # get the first sheet as an object
10 df = pd.read_excel(xl, 0, header=0)
11 #print(df.head())
12 #print(df)
13
14 results = smf.ols('y ~ X', data=df).fit()
15 print(results.summary())
16
```

Hình 16: Phân tích hồi quy bằng python

**BT2.** Thực hành trên python tính phương trình hồi quy đơn (tr 117).

**BT3.** Sử dụng CT python tr 117 tính lại VD mô phỏng ở slide 11.

**BT4.** Thực hành với dữ liệu cho trong Sheet1 file Excel demo-data.xls.

- Vẽ biểu đồ phân tán (biểu đồ Scatter) và nhận định về quan hệ giữa  $x$  và  $y$ .
- Thay đổi một giá trị của  $y$  sao cho thật khác biệt. Chạy CT và quan sát.

**BT5.** (Phân tích hồi quy đa biến) Cho dữ liệu về giá cổ phiếu demo-data-mul.xls.

- Vẽ biểu đồ Scatter giữa giá cổ phiếu và các thuộc tính Interest Rate và Unemployment Rate

- Tìm phương trình hồi quy của giá cổ phiếu theo hai thuộc tính (biến) Interest Rate và Unemployment Rate.

**BT6.** Thực hành với dữ liệu cho trong Sheet2 file Excel demo-data.xls.

- Thực hiện các yêu cầu tương tự BT5.
- Bỏ bớt biến và quan sát sự thay đổi các thông số trong bảng phân tích hồi quy
- Xác định phương trình hồi quy có chứa  $X_2^2$  và nhận xét các thông số (Tạo thêm cột  $X_2^2$ )

- Hands-on Machine Learning with Scikit-Learn, Keras & TensorFlow, 2nd Edition của tác giả “Aurélien Géron”.
- Robert Tibshirani, Regression Shrinkage and Selection via the lasso, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol 58, No. 1 pp. 267-288, 1996