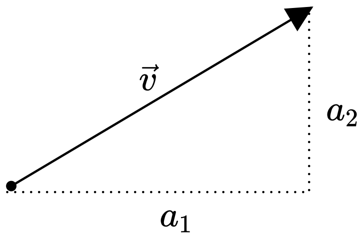
## Betrag eines Vektors

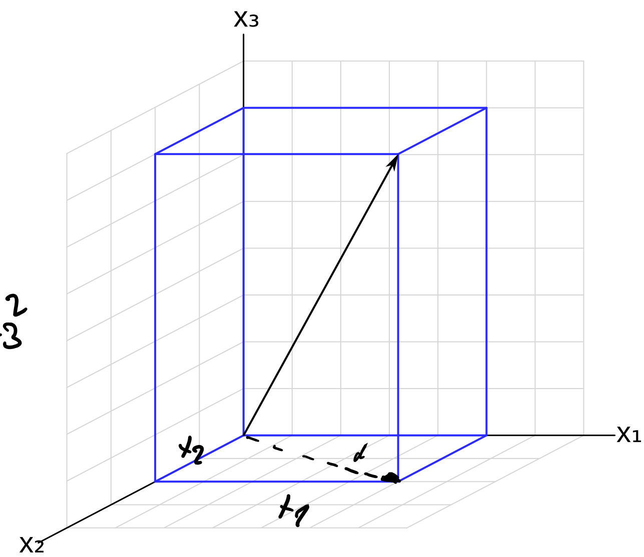
Die Länge eines Vektors bezeichnet man als seinen Betrag und schreibt dafür $|\vec{v}|$. Die Länge von Vektoren im Zweidimensionalen kann man ganz einfach mit dem Satz des Pythagoras berechnen, wie die nebenstehende Skizze verdeutlicht. Damit gilt $\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Für den Betrag dreidimensionaler Vektoren gilt eine ähnliche Formel.




**1** Fülle den folgenden Lückenbeweis für den Betrag dreidimensionaler Vektoren aus. Beschrifte und ergänze auch die untenstehende Skizze entsprechend.

Wir betrachten einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Man kann sich diesen als die Raumdiagonale eines Quaders vorstellen, wie die untenstehende Skizze zeigt. Die Kanten dieses Quaders haben dann die Seitenlängen $a_1$, $a_2$ und $a_3$. Für die Länge der Diagonale $d$ der unteren Rechteckfläche gilt mit dem Satz des Pytagoras $|d|^2 =$ $a_1^2 + a_2^2$. Nun kann man den satz des P ein zweites Mal anwenden, um die Länge von $\vec{v}$ zu bestimmen. Damit gilt nämlich $|\vec{v}|^2 =$ $|d|^2 + a^3$. Ersetzt man nun $|d|^2$ entsprechend obiger Rechnung und zieht anschließend die Wurzel, erhält man $|\vec{v}| =$ $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ als Formel für den Betrag dreidimensionaler Vektoren.

$$\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



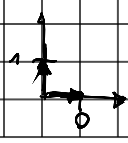
## Abstand zweier Punkte

Mithilfe der Formel für den Vektor zwischen zwei Punkten und der Formal für den Betrag eines Vektors kannst du nun eine Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten im Raum herleiten.

**2** Stelle eine Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ und $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ auf. Bestimme dazu zunächst den Vektor $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ} = P - Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q_1 \\ p-q_2 \\ p-q_3 \end{pmatrix}$

$\left| \begin{pmatrix} p-q_1 \\ p-q_2 \\ p-q_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{p-q_1{}^2 + p-q_2{}^2 + p-q_3{}^2}$



## Einheitsvektoren

Vektoren mit Betrag 1 nennt man Einheitsvektoren. Die einfachsten Einheitsvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Zweidimensionalen und entsprechende Vektoren im Dreidimensionalen. Zu jedem Vektor $\vec{v}$ existiert ein kollinearer Einheitsvektor $\overrightarrow{v_0}$. Diesen erhält man, indem man $\vec{v}$ abhängig von seiner Länge skaliert. Einen Vektor der Länge 2 muss halbiert werden, ein Vektor der Länge 3 gedrittelt usw. Umgekehrt muss ein Vektor der Länge 0,5 verdoppelt, ein Vektor der Länge 0,25 vervierfacht werden usw. Allgemein gilt $\overrightarrow{v_0} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$.

Vektor

Länge des Vektors

## Übungen

**1** Wir betrachten die Situation aus Aufgabe 4 vom Blatt „Geraden im Raum“. Eine Längeneinheit entspricht 5 km.

a) Welche Entfernung hat das Flugzeug vom Start im Punkt $S(-28 \mid -8 \mid 0)$ zum Punkt $H(5 \mid 3 \mid 12)$ zurückgelegt? $\overrightarrow{SH} = S - H = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -28 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\left|\begin{pmatrix} 33 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{33^2 + 11^2 + 12^2} \approx 36{,}8 \cdot 5$

b) Welche Entfernung hat das Flugzeug in der darauffolgenden Minute zurückgelegt? $\approx$ 184 km

c) Gib den zum Richtungsvektor der Gerade gehörenden Einheitsvektor an. $\frac{1}{36{,}8} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{36{,}8} \\ \frac{11}{36{,}8} \\ \frac{12}{36{,}8} \end{pmatrix}$

**2** Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(5 \mid 4 \mid 1)$, $B(14 \mid -2 \mid 3)$, $C(11 \mid 8 \mid 2)$ und $D(2 \mid 14 \mid 0)$. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Beweise, dass es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm handelt.

b) Berechne den Umfang des Vierecks.

c) Berechne die Länge der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und zeige, dass sie sich gegenseitig halbieren. Berechne dazu den Schnittpunkt $M$ der Geraden $AC$ und $BD$ und anschließend die Abstände der Eckpunkte zu $M$.

D C

A B



b) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9^2 + -6^2 + 2^2} = 7$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{-3^2 + 10^2 + (-1)^2} = 3 \cdot \sqrt{10}$ $U = |\overrightarrow{AB}| \cdot 2 + |\overrightarrow{BC}| \cdot 2$