Suites de Fonctions

1. Convergence simple.

- Dans tout ce paragraphe, X et Y sont des parties de $\mathbf{C}$, $X \subset Y$.
- Pour tout entier n, f_n est une fonction définie sur Y à valeurs dans $\mathbf{C}$, $f_n : Y \longrightarrow \mathbf{C}$.
- On s'intéresse à la limite de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ lorsque $n \to \infty$.

  ⋆ Quel est le comportement de $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ si $n \to \infty$?

Définition. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge simplement vers* f *sur* X si, pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ ce qui signifie que

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(x,\varepsilon), \qquad n \geq N(x,\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Le plus grand ensemble X pour l'inclusion sur lequel $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement s'appelle le domaine de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

Exemple. $Y = \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ sur l'intervalle $X =]-1, 1]$.

- Les propriétés de convergence des suites numériques se transfèrent aisément à la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$.

Insuffisance de la convergence simple.

- $f_n(x) = x^n$ sont continues sur $]-1, 1]$ mais la limite elle est discontinue au point $x = 1$!
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction nulle ! Pourtant,

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx) \text{ ne converge pas vers } f'(x) = 0.$$

- On introduit une notion plus forte de convergence

 Ph. Briand, 2011/2012

2. Convergence uniforme.

Définition. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément vers f sur X* si,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

ce qui signifie que

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon), \qquad & n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \\ & n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

- La convergence uniforme entraîne la convergence simple

Exemple. $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$.

- Pour démontrer la convergence uniforme, on peut étudier les variations de $|f_n - f|$
  - ⋆ Dans la plupart des cas, on ne peut pas calculer $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.
  - ⋆ Par contre, on cherche à majorer cette quantité !

Proposition. *La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ positive telle que*

1. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *;*
2. *pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.*

- Dans l'exemple $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$, $\alpha_n = 1/\sqrt{n}$.

Proposition. *$(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de X, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0.$$

- La condition nécessaire est évidente : $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.
- Cette proposition est surtout utilisée pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément
  - ⋆ $f_n(x) = nx^n(1-x)$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$ mais ne converge pas uniformément $x_n = 1 - 1/n$.

Remarque. En pratique, on détermine d'abord la fonction f en étudiant la limite simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ puis on étudie la convergence uniforme.

3. Convergence uniforme et permutation de symboles.

- Nous allons voir que la convergence uniforme permet beaucoup d'opérations

Théorème (Interversion des limites). *Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur Y et f une fonction définie sur $X \subset Y$. Soit a un point adhérent à X.*
On suppose que :

1. *$(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur X vers f ;*
2. *pour tout n, $\lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$.*

Alors, la suite $(l_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite l et $\lim_{x\to a} f(x) = l$ c'est à dire

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} l_n = l.$$

- Le résultat est encore valable si $a = +\infty$ dans le cas réel.

Corollaire. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues sur X qui converge uniformément sur X vers f. Alors f est continue sur X.*

Preuve directe. • Par définition, il existe $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ et

$$\forall n \geq 0, \qquad \forall x \in X, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n.$$

- Soient x_0 et x deux points de X. Pour tout $n \geq 0$,

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| \leq 2\alpha_n+|f_n(x)-f_n(x_0)|.$$

- Soit $\varepsilon > 0$; puisque $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ t.q. pour tout $p \geq N$, $0 \leq \alpha_p < \varepsilon/3$.
- Fixons $p \geq N$; puisque f_p est continue au point x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad \Longrightarrow |f_p(x) - f_p(x_0)| < \varepsilon/3.$$

- Par suite, si $|x - x_0| < \eta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\alpha_p + |f_p(x) - f_p(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Remarque. Plus élégant

$$\limsup_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq 2\alpha_n + \limsup_{x\to x_0} |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq 2\alpha_n.$$

Exemple. • $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 2^{-n}}$ converge uniformément vers $|x|$ qui est continue

- $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $\mathbf{1}_1(x)$ sur $[0, 1]$ mais pas uniformément puisque la limite est discontinue.

Théorème (Permutation limite et intégrale)**.** *On suppose que* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$ *(*f_n*,* f *continues par morceaux). Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Plus généralement, si $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$*, on a convergence uniforme sur* $[a,b]$ *de*

$$F_n(x) = y_n + \int_a^x f_n(t)\,dt \qquad \textit{vers} \qquad F(x) = y + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Démonstration. Pour tout $x\in[a,b]$,

$$|F_n(x)-F(x)| \leq |y_n-y| + \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)-f(t)|\,dt \leq |y_n-y| + (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|$$

□

Exemple. Puisque $\sqrt{x^2+2^{-n}}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers $|x|$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1 \sqrt{t^2+2^{-n}}\,dt = \int_{-1}^1 |t|\,dt = 2.$$

Théorème (Permutation limite et dérivée)**.** *Soient* I *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *et* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions dérivables sur* I*. On suppose que*

1. $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge simplement vers* f *sur* I *;*
2. $(f_n')_{n\geq 0}$ *converge uniformément vers* g *sur tout intervalle borné* $J\subset I$*.*

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément vers* f *sur tout intervalle borné* $J\subset I$*,* f *est dérivable sur* I *et, pour tout* $x\in I$*,* $f'(x)=g(x)$ *soit*

$$\forall x\in I, \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = f'(x)$$

En outre, si les fonctions f_n *sont* $\mathcal{C}^1$*,* f *est également* $\mathcal{C}^1$*.*

2011/2012 : fin du cours 6

- Attention, il faut la convergence uniforme des dérivées !! pas celle des fonctions !!
  - ⋆ $f_n(x)=\sqrt{x^2+2^{-n}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et converge uniformément vers $|x|$ sur $\mathbf{R}$ qui n'est pas dérivable en 0.
  - ⋆ $f_n'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2^{-n}}}$ converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbf{R}$ vers $\mathrm{sgn}(x)$.

Remarque. Plus généralement, soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, x_0 un point de I et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dérivables sur I. On suppose que

1. $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ converge vers y_0 ;

2. $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers g sur tout intervalle borné $J \subset I$.

Alors, il existe une fonction f définie sur I telle que $f(x_0) = y_0$, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle borné $J \subset I$, f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$.

Démonstration. • On fait la preuve dans le cas où f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout n.

• On a, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbf{N}$, notant S le segment d'extrémité x et x_0,

$$\left|f_n(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right| = \left|f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right|$$
$$\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + |x - x_0| \sup_{t\in S} |f'_n(t) - g(t)|.$$

• En passant à la limite, on obtient

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

• g étant continue, f est dérivable sur I et $f'(x) = g(x)$. `Pas fait`

□

4. Complément : théorèmes de Dini.

• Deux théorèmes qui permettent d'obtenir la convergence uniforme si on a la convergence simple.

Théorème (Premier théorème de Dini)**.** *Soient $I = [a, b]$ un segment et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles convergeant simplement vers f sur I. On suppose que*

1. *pour tout n, f_n est continue sur I ;*

2. *f est continue sur I ;*

3. *pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \geq 0$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.*

Alors, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I.

Exemple. $f_n(x) = (1 + x/n)^n$ converge uniformément vers e^x sur tout intervalle $[-a, a]$.

Théorème (Deuxième théorème de Dini)**.** *Soient $I = [a, b]$ un segment et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles convergeant simplement vers f sur I. On suppose que*

1. *pour tout n, f_n est croissante sur I ;*

2. *f est continue sur I.*

Alors, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur I.

Exemple. $f_n(x) = n\,\sin(x/n)$ converge uniformément vers x sur tout segment.