Le Modèle de Black–Scholes

Master IDESSE 2e année

Université de Savoie

Philippe Briand

philippe.briand@univ-savoie.fr

Cours des 3 et 4 novembre 2009

Plan du cours

Plan du cours

1. Introduction : de Cox–Ross–Rubinstein à Black–Scholes

2. Le mouvement brownien
   - Généralités
   - Intégrale stochastique

Évolution du prix d'une action

- On observe une action S_t sur l'intervalle $[0, T]$ à des instants réguliers $k\delta t = kT/N$
- On observe donc la suite $\left(S_k^{(N)} = S_{k\delta t}\right)_{k=0,\dots,N}$
- On suppose que la suite $\left(S_k^{(N)} = S_{k\delta t}\right)_{k=0,\dots,N}$ suit le modèle de Cox–Ross–Rubinstein le plus simple :

$$S_{k+1}^{(N)} = S_k^{(N)} u_N \text{ avec proba } 1/2, \quad S_{k+1}^{(N)} = S_k^{(N)} d_N \text{ avec proba } 1/2$$

- On écrit $u_N = 1 + h_N$, $d_N = 1 + b_N$
- L'espérance et la variance de $\ln(S_T/S_0)$ sont proportionnels à T :

$$\mathbb{E}\left[\ln(S_T/S_0)\right] = mT, \qquad \mathbb{V}\left[\ln(S_T/S_0)\right] = \sigma^2 T$$

Évolution du prix d'une action

- On obtient :

$$\mathbb{E}\left[\ln\left(S^{(N)}_{N\delta t}/S_0\right)\right] = \frac{N}{2}\left(\ln(1+h_N)+\ln(1+b_N)\right) = mT,$$
$$\mathbb{V}\left[\ln\left(S^{(N)}_{N\delta t}/S_0\right)\right] = \frac{N}{4}\left(\ln(1+h_N)-\ln(1+b_N)\right)^2 = \sigma^2 T$$

- Par suite, $\delta t = T/N$,

$$1+h_N = e^{m\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}}, \qquad 1+b_N = e^{m\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

- Ce qui au premier ordre donne :

$$h_N = \left(m+\sigma^2/2\right)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}, \qquad b_N = \left(m+\sigma^2/2\right)\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}.$$

Évolution du prix d'une action

Notant $\mu = m + \sigma^2/2$

$$S_{(k+1)\delta t} = S_{k+1}^{(N)} = S_k^{(N)} \left(1 + \mu\,\delta t + \sigma\,\sqrt{\delta t}\,\xi_{k+1}\right) = S_{k\delta t} \left(1 + \mu\,\delta t + \sigma\,\sqrt{\delta t}\,\xi_{k+1}\right)$$

avec $\mathbb{P}(\xi_{k+1} = \pm 1) = 1/2$.

Soit encore

$$S_{(k+1)\delta t} - S_{k\delta t} = S_{k\delta t} \left(\mu\,\delta t + \sigma\,\sqrt{\delta t}\,\xi_{k+1}\right)$$

À la limite lorsque $\delta t \to 0$

$$dS_t = S_t\,(\mu dt + \sigma\, d??)$$

Évolution du prix d'une action

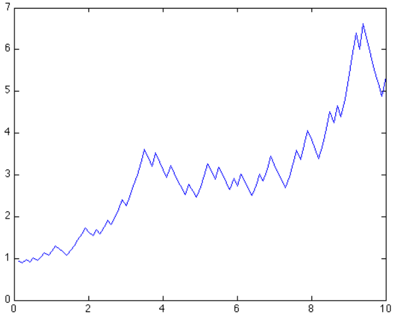

FIGURE: $T = 10$, $\delta t = 1/10$

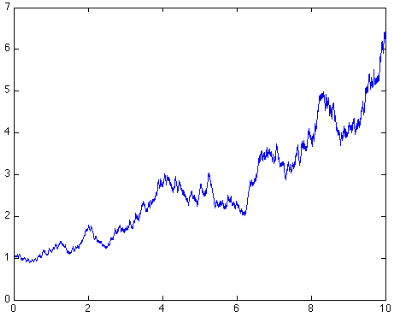

FIGURE: $T = 100$, $\delta t = 1/100$

Plan du cours

1. Introduction : de Cox–Ross–Rubinstein à Black–Scholes

2. Le mouvement brownien
   - Généralités
   - Intégrale stochastique

Un peu d'histoire

- Tout commence en 1827 avec le botaniste Robert Brown
- Il observe des particules de pollen dans l'eau et il voit

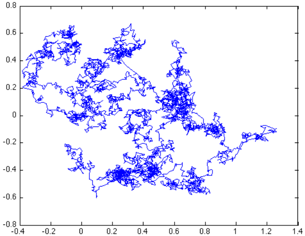

FIGURE: Une particule

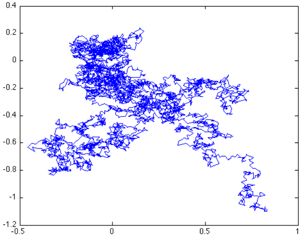

FIGURE: Une deuxième particule

Mouvement brownien

- Il pense que les particules de pollen sont vivantes
- Il observe que le déplacement de la particule est proportionnel à $\sqrt{t}$
- Louis Bachelier (1900), Albert Einstein (1905), Norbert Wiener (1920), ...

Définition

Le mouvement brownien est un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ c'est à dire une application $B : \Omega \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que

- $B_0(\omega) = 0$ pour tout ω ;
- à trajectoires continues : pour tout ω, $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue ;
- à accroissements indépendants : B_{t_1}, $B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes ;
- pour tous $0 < s < t$, $B_t - B_s$ suit la loi normale centrée de variance $t - s$.

Trajectoires browniennes

- Elles sont très irrégulières : nulle part dérivables

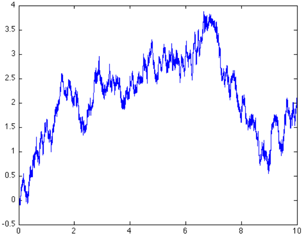

FIGURE: Une trajectoire brownienne

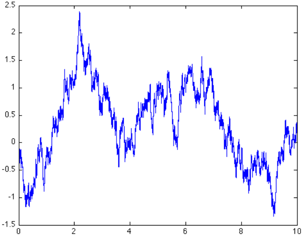

FIGURE: Une deuxième

- Calcul intégral et différentiel par rapport à B ? ?

Processus à temps continu

- $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t)$ information du mouvement brownien à l'instant t
  - ⋆ X est $\mathcal{F}_t$–mesurable si X dépend de la trajectoire de B jusqu'à t
  - ⋆ $X = \sin(B_t)$, $X = \sin(B_{t/2})$, $X = \sup_{s \leq t} B_s$ sont $\mathcal{F}_t$–mesurable
  - ⋆ B_{t+1} n'est pas $\mathcal{F}_t$–mesurable

Définition

Un processus stochastique est une famille $\{X_t\}_{t \geq 0}$ de variables aléatoires : pour tout t, X_t est une variable aléatoire.

- ⋆ Un processus X est une application de $\Omega \times \mathbf{R}_+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$
- ⋆ À ω fixé, l'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ s'appelle une trajectoire de X
- ⋆ Un processus X est adapté si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable

Martingales à temps continu

Définition

Un processus stochastique X est une martingale si :

- pour tout t, $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < +\infty$;
- pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable ;
- pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) = X_s$$

Exemples

B_t est une martingale
$X_t = B_t^2 - t$ est aussi une martingale