

# Martingales à temps discret

- Dans toute la suite, on travaille sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

## 1. Processus, filtrations, temps d'arrêt.

- Un *processus* (*stochastique*) est une suite  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires à valeurs dans le même espace.
- Une *filtration* est une suite  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  croissante (pour l'inclusion) : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ .
- ★ On note  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ .

- Un processus  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  est *adapté* par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  si, pour tout entier  $n$ ,  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Il est dit *prévisible* par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  si,  $X_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable pour tout  $n$ .

★ Si besoin  $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ .

- Si  $X$  est un processus, on appelle filtration naturelle de  $X$ , la filtration définie par

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

★ C'est la plus petite filtration qui fait de  $X$  un processus adapté.

★ Si  $X$  est adapté par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ , alors  $\mathcal{F}_n^X \subset \mathcal{F}_n$  pour tout  $n$ .

**Définition.** Une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  est un *temps d'arrêt* de la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  si, pour tout entier  $n$ ,  $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ .

- Si  $T$  est un temps d'arrêt,

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

est une tribu appelée *tribu des événements antérieurs à  $T$* .

★ Définitions équivalentes en remplaçant  $\{T \leq n\}$  par  $\{T = n\}$ .

**Exemple(s).** 1. Soient  $S$  et  $T$  deux TA. Alors  $S \vee T = \max(S, T)$  et  $S \wedge T = \min(S, T)$  sont aussi des temps d'arrêt. En effet,

$$\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\}, \quad \{S \wedge T > n\} = \{S > n\} \cap \{T > n\}.$$

2. Soient  $B$  un ensemble borélien et  $T_B$  le temps d'entrée dans  $B$  de  $(X_n)_{n \geq 0}$  i.e.

$$T_B = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}, \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Alors  $T_B$  est un temps d'arrêt de la filtration naturelle de  $X$  puisque

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \in B\}.$$

3. Si  $S$  et  $T$  sont deux TA avec  $S \leq T$ , alors  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ . En effet, si  $A \in \mathcal{F}_S$ , pour tout  $n$ ,

$$A \cap \{T \leq n\} = A \cap \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\}$$

appartient à  $\mathcal{F}_n$  puisque  $A \cap \{S \leq n\}$  et  $\{T \leq n\}$  sont aussi éléments de  $\mathcal{F}_n$ .

4. Si  $X$  est un processus adapté et  $T$  un TA fini, alors la v.a., notée  $X_T$ , définie par  $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. En effet, si  $B$  est un borélien et  $n$  un entier,

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

- Soient  $T$  un TA et  $X$  une v.a.  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable.  $X$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable si et seulement si, pour tout entier  $n$ ,  $X\mathbf{1}_{T \leq n}$  (ou  $X\mathbf{1}_{T=n}$ ) est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable.
- Si  $X$  est intégrable, alors

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_T] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n} + \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_\infty] \mathbf{1}_{T=+\infty} = \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n}.$$

En effet, si  $Y$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et bornée,  $Y\mathbf{1}_{T=n}$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout  $n \in \overline{\mathbb{N}}$  et

$$Y \sum \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] Y \mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}[XY \mathbf{1}_{T=n} | \mathcal{F}_n],$$

et prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[Y \sum \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n}\right] = \sum \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY \mathbf{1}_{T=n} | \mathcal{F}_n]] = \sum \mathbb{E}[XY \mathbf{1}_{T=n}] = \mathbb{E}[XY].$$

## 2. Martingales and co.

**Définition.** Soient  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  un processus et  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  une filtration. On dit que  $X$  est une *martingale* relativement à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  si

1.  $X$  est adapté par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  : pour tout entier  $n$ ,  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable ;
  2.  $X$  est intégrable : pour tout entier  $n$ ,  $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$  ;
  3. Pour tout entier  $n$ ,  $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ .
- Un processus réel, adapté par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  et intégrable, est une *surmartingale* par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n \geq \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

- Un processus réel, adapté par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  et intégrable, est une *sous-martingale* par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

**Remarque(s).** 1. Lorsque la filtration n'est pas précisée, il est entendu qu'il s'agit de la filtration naturelle du processus considéré.

2.  $X$  est une surmartingale ssi  $-X$  est une sous-martingale.
3.  $X$  est une martingale ssi  $X$  est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.
4. Si  $X$  est une sous-martingale, pour tous entiers  $n$  et  $p$ ,  $X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+p} | \mathcal{F}_n]$ . En effet,

$$\mathbb{E}[X_{n+2} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+2} | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n.$$

- ★ Si  $X$  est une sous-martingale,  $n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$  est croissante ;
- ★ Si  $X$  est une surmartingale,  $n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$  est décroissante ;
- ★ Si  $X$  est une martingale,  $n \mapsto \mathbb{E}[X_n]$  est constante.

**Exemple(s).** 1. Soient  $Z$  une variable aléatoire intégrable et  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  une filtration. On pose, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $X_n = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_n]$ .  $X$  est une martingale. Les points 1 et 2 de la définition sont évidents. Pour le 3<sup>e</sup>,

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_n] = X_n.$$

- ★ Il faut retenir que « la » martingale est  $\mathbb{E}[\text{TRUC} | \mathcal{F}_n]$ .

★ En particulier,  $X$  est une sous-martingale si le processus est sous « la » martingale :

$$X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n].$$

2. Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes, intégrables et centrées. On pose  $S_0 = 0$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$S_n = U_1 + \dots + U_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n).$$

$S = (S_n)_{n \geq 0}$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale. Très clairement,  $S$  est adapté.  $S$  est intégrable car une somme finie de v.a. intégrables est intégrable. Finalement,

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] - S_n = \mathbb{E}[S_{n+1} - S_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{indpt.}}{=} \mathbb{E}[U_{n+1}] \stackrel{\text{centrée}}{=} 0.$$

3. Soient  $0 \leq p \leq 1$  et  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi donnée par  $\mathbb{P}(U_1 = 1) = p$ ,  $\mathbb{P}(U_1 = -1) = 1 - p$ . Avec les notations de l'exemple précédent,  $S$  est adapté par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  et intégrable. De plus, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] - S_n = \mathbb{E}[S_{n+1} - S_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{indpt.}}{=} \mathbb{E}[U_{n+1}] = 2p - 1.$$

$S$  est une sous-martingale ssi  $p \geq 1/2$ , une surmartingale ssi  $p \leq 1/2$ , une martingale ssi  $p = 1/2$ .

4. Les notations sont celles de l'exemple précédent avec  $p = 1/2$ . On considère, pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_n = e^{S_n}$ .  $X$  est une sous-martingale. Les deux premiers points sont évidents et, pour  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[e^{S_n} e^{U_{n+1}} | \mathcal{F}_n] = e^{S_n} \mathbb{E}[e^{U_{n+1}} | \mathcal{F}_n] \stackrel{i.}{=} e^{S_n} \mathbb{E}[e^{U_{n+1}}] = X_n \cosh(1).$$

Comme  $X_n \geq 0$  et  $\cosh(1) \geq 1$ ,  $X$  est une sous-martingale.

### Inégalité de Jensen.

- Une fonction  $g$  est convexe si, pour tous réels  $x, y$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

★ On a alors  $g(x) \geq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$  (« la courbe est au dessus de la tangente »)

★ Si  $g$  est dérivable,  $g$  est convexe ssi  $g'$  est croissante.

- La fonction  $x \mapsto |x|^p$  est convexe dès que  $p \geq 1$  et  $x \mapsto e^{ax}$  est convexe pour tout réel  $a$ .

**Proposition** (Inégalité de Jensen). *Soient  $X$  une v.a. intégrable et  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . Soit  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction convexe telle que  $\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty$ . Alors,*

$$g(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[g(X) | \mathcal{G}].$$



- En particulier, lorsque  $g$  est convexe

$$g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)].$$

★ Par exemple,

$$\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X^2], \quad e^{\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}[e^X].$$

**Corollaire.** Soient  $X$  une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale et  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction convexe. On suppose que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $g(X_n)$  est intégrable. Alors  $(g(X_n))_{n \geq 0}$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -sous-martingale.

*Démonstration.* Pour tout  $n \geq 0$ , on a, d'après l'inégalité de Jensen

$$\mathbb{E}[g(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} g(\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]) = g(X_n).$$

□

- Soit  $X$  est une sous-martingale; si  $g$  est convexe et **croissante** alors  $g(X)$  est une sous-martingale.

**Exemple(s).** Si  $X$  est une martingale ou une sous-martingale positive alors, pour  $p \geq 1$ ,  $(|X_n|^p)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale dès que  $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$  pour tout entier  $n$ .

### 3. Théorème d'arrêt.

**Définition.** Une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  est un *temps d'arrêt* de la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  si, pour tout entier  $n$ ,  $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ .

- Si  $T$  est un temps d'arrêt,

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \in \mathbf{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

est une tribu appelée *tribu des événements antérieurs à  $T$* .

★ Définitions équivalentes en remplaçant  $\{T \leq n\}$  par  $\{T = n\}$ .

- Soient  $T$  un TA et  $X$  une v.a.  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable.  $X$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable si et seulement si, pour tout entier  $n$ ,  $X \mathbf{1}_{T \leq n}$  (ou  $X \mathbf{1}_{T=n}$ ) est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable.
- Si  $X$  est intégrable, alors

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_T] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n} + \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_\infty] \mathbf{1}_{T=+\infty} = \sum_{n \in \overline{\mathbf{N}}} \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n}.$$

En effet, si  $Y$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et bornée,  $Y\mathbf{1}_{T=n}$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout  $n \in \bar{\mathbf{N}}$  et

$$Y \sum \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] Y \mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}[XY \mathbf{1}_{T=n} | \mathcal{F}_n],$$

et prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[Y \sum \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{T=n}\right] = \sum \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY \mathbf{1}_{T=n} | \mathcal{F}_n]] = \sum \mathbb{E}[XY \mathbf{1}_{T=n}] = \mathbb{E}[XY].$$

**Lemme.** Soient  $X$  une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale et  $H = (H_n)_{n \geq 1}$  un processus prévisible et bornée. On pose  $M_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$M_n = H_1(X_1 - X_0) + \dots + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

Alors,  $M$  est une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale.

*Démonstration.* Pour  $n \geq 0$ , on a

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n] \stackrel{H \text{ prév.}}{=} H_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] \stackrel{X \text{ mart.}}{=} 0.$$

□

**Remarque(s).** Si  $X$  est une sous-martingale (resp. une surmartingale) et  $H$  prévisible bornée et **positif**,  $M$  est une sous-martingale (resp. une surmartingale). En effet,

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \stackrel{H \text{ pr\'ev.}}{=} H_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] \geq 0,$$

car  $X$  est une sous-martingale et  $H$  est positif (le sens des inégalités est préservé).

- Rappelons que si  $X$  est un processus adapté et  $T$  un TA fini, alors la v.a.  $X_T$  définie par  $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable

**Définition** (Processus arrêté au temps  $T$ ). Soient  $X$  un processus adapté et  $T$  un temps d'arrêt par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . On appelle *processus arrêté au temps  $T$*  le processus  $X^T$  défini par

$$X_n^T = X_{n \wedge T}, \quad \text{i.e.} \quad X_n^T(\omega) = X_{n \wedge T(\omega)}(\omega), \quad n \in \mathbf{N}.$$

**Proposition.** Soient  $T$  un temps d'arrêt et  $X$  une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une surmartingale) par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . Alors,  $X^T = (X_{n \wedge T})_{n \geq 0}$  est une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une surmartingale) par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

*Démonstration.* Remarquons que pour tous  $n$  et  $p$  entiers,

$$X_{n \wedge p} = X_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{k \leq p} (X_k - X_{k-1}).$$

Par conséquent, comme pour  $k$  et  $T$  entiers,  $T \geq k$  équivaut à  $T > k - 1$ , nous avons

$$X_n^T = X_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{k \leq T} (X_k - X_{k-1}) = X_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{T > k-1} (X_k - X_{k-1}).$$

Le processus  $(H_k = \mathbf{1}_{T > k-1})_{k \geq 1}$  étant prévisible, borné et positif le lemme précédent (ou la remarque qui suit) montrer que  $X^T$  est une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une surmartingale) par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .  $\square$

**Théorème** (Théorème d'arrêt de Doob). *Soient  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  une sous-martingale,  $S$  et  $T$  deux temps d'arrêt par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . On suppose que  $S \leq T$  et que  $T$  est borné i.e. il existe  $k \in \mathbf{N}$  tel que  $T \leq k$ . Alors,*

$$X_S \leq \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S].$$

**Remarque(s).** 1. Si  $X$  est une martingale alors  $X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$ .

2. Ce résultat s'utilise souvent avec  $S = 0$  et en prenant l'espérance, c'est à dire, dans le cas d'une martingale

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]. \tag{1}$$

*Démonstration.* Puisque  $S \leq T \leq k$ , on a

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = \sum_{p=0}^k \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_p] \mathbf{1}_{S=p} = \sum_{p=0}^k \mathbb{E}[X_{T \wedge k} | \mathcal{F}_p] \mathbf{1}_{S=p},$$

et comme  $X^T$  est une sous-martingale,

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \geq \sum_{p=0}^k X_{T \wedge p} \mathbf{1}_{S=p} = \sum_{p=0}^k X_{T \wedge S} \mathbf{1}_{S=p} = X_{T \wedge S} = X_S.$$

□

**Remarque(s).** La formule (1) est vraie dans les cas suivants :

1.  $T$  est borné p.s. ;
2.  $T$  est fini p.s. et  $\sup_{n \geq 0} |X_n|$  est intégrable ;
3.  $T$  est intégrable et il existe une constante  $C \geq 0$  telle que :

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}[|X_{n+1} - X_n| | \mathcal{F}_n] \leq C \text{ p.s.}$$

Si on ne peut pas appliquer l'un de ces résultats, on essaie de passer à la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ , dans la relation  $\mathbb{E}[X_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[X_0]$ .

**Exemple(s)** (Ruine du joueur). Deux joueurs s'affrontent dans une partie de pile ou face. La fortune initiale du 1<sup>er</sup> joueur est de  $a$  euros, celle du second  $b$  euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. La fortune du 1<sup>er</sup> joueur est donnée par

$$S_n = a + \sum_{i=1}^n U_i, \quad \text{avec } (U_i)_{i \geq 1} \text{ i.i.d. et } \mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(U_1 = -1) = 1/2.$$

La fin de la partie est donnée par le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = a + b\} = \inf\{n \geq 1 : S_n(a + b - S_n) = 0\}.$$

$(S_n)_{n \geq 0}$  et  $(S_n^2 - n)_{n \geq 0}$  sont des martingales ; il vient

$$\mathbb{E} [S_{n \wedge T}^2 - n \wedge T] = a^2, \quad \mathbb{E} [S_{n \wedge T}] = a.$$

Comme  $0 \leq S_{n \wedge T} \leq a + b$ , on obtient par convergence monotone,

$$\mathbb{E} [T] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [T \wedge n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [S_{n \wedge T}^2] - a^2 \leq (a + b)^2 - a^2.$$

$T$  est intégrable et donc fini p.s. ; en particulier,  $S_{n \wedge T} \longrightarrow S_T$  et comme  $0 \leq S_{n \wedge T} \leq a + b$ , on obtient facilement par passage à la limite,

$$\mathbb{E} [S_T] = a, \quad \mathbb{E} [S_T^2 - T] = a^2.$$

Comme  $S_T$  est à valeurs dans  $\{0, a + b\}$ ,

$$\mathbb{E}[S_T] = (a + b)\mathbb{P}(S_T = a + b), \quad \mathbb{E}[T] = (a + b)^2\mathbb{P}(S_T = a + b) - a^2.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(S_T = a + b) = \frac{a}{a + b}, \quad \mathbb{P}(S_T = 0) = \frac{b}{a + b}, \quad \mathbb{E}[T] = ab.$$

## 4. Inégalités maximales.

**Proposition.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une sous-martingale. Pour tout  $a \geq 0$ ,

$$a \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq a\right) \leq \mathbb{E}[X_n^+].$$

**Remarque(s).** 1. Rappelons que  $x^+ = \max(x, 0) \leq |x|$ .

2. Cette inégalité généralise l'inégalité de Markov : si  $X \geq 0$  et  $a \geq 0$ ,  $a\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}[X]$ .

*Démonstration.* Soit  $a > 0$ . On considère le temps d'arrêt  $S = \inf\{0 \leq k \leq n : X_k \geq a\} \wedge n$  et on note  $X_n^* = \max_{0 \leq k \leq n} X_k$ . Comme  $S$  est borné par  $n$ , on a d'après le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[X_S] = \mathbb{E}[X_S \mathbf{1}_{X_n^* \geq a}] + \mathbb{E}[X_S \mathbf{1}_{X_n^* < a}].$$



Par définition de  $S$ , lorsque  $X_n^* \geq a$ ,  $X_S \geq a$  et quand  $X_n^* < a$ ,  $S = n$ . Par conséquent,

$$\mathbb{E}[X_n] \geq a\mathbb{P}(X_n^* \geq a) + \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{X_n^* < a}]$$

et l'on déduit que

$$a\mathbb{P}(X_n^* \geq a) \leq \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{X_n^* \geq a}] \leq \mathbb{E}[X_n^+].$$

□

**Remarque(s).** En fait, on a montré que

$$a\mathbb{P}(X_n^* \geq a) \leq \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{X_n^* \geq a}], \quad \text{où } X_n^* = \max_{0 \leq k \leq n} X_k. \quad (2)$$

**Corollaire.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une sous-martingale. Pour tout  $a \geq 0$ ,

$$a\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 0} X_k \geq a\right) \leq \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[X_n^+].$$

*Démonstration.* Soit  $a > 0$ . Comme  $\{\sup_{k \geq 0} X_k > a\} = \cup_{n \geq 0} \{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\}$  et que les ensembles  $\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\}$  sont croissants

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 0} X_k > a\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\right) \leq a^{-1} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[X_n^+].$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , comme  $\{\sup_{k \geq 0} X_k \geq a\} \subset \{\sup_{k \geq 0} X_k > a - \varepsilon\}$ , on a

$$\mathbb{P} \left( \sup_{k \geq 0} X_k \geq a \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{k \geq 0} X_k > a - \varepsilon \right) \leq (a - \varepsilon)^{-1} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} [X_n^+],$$

et on obtient quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\mathbb{P} \left( \sup_{k \geq 0} X_k \geq a \right) \leq a^{-1} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} [X_n^+].$$

□

**Corollaire.** Soient  $p \geq 1$  et  $(X_n)_{n \geq 0}$  une martingale ou une sous-martingale positive telle que  $X_n \in L^p$  pour tout  $n$ . Alors, pour tout  $a \geq 0$ ,

$$a^p \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq a \right) \leq \mathbb{E} [|X_n|^p].$$

*Démonstration.* Si  $X$  est une martingale ou une sous-martingale positive, alors  $|X|^p$  est une sous-martingale. Comme, pour  $p \geq 1$ ,  $\{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq a\} = \{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k|^p \geq a^p\}$ , on a

$$a^p \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq a \right) = a^p \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|^p \geq a^p \right) \leq \mathbb{E} [|X_n|^p].$$

□

- Ce dernier corollaire permet de retrouver une inégalité classique :

**Inégalité de Kolmogorov.** Soient  $Y_1, \dots, Y_n$  des variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et centrées. Pour  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n} |Y_1 + \dots + Y_k| \geq a \right) \leq a^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [Y_k^2].$$

**Théorème.** Soient  $p > 1$  et  $(X_n)_{n \geq 0}$  une martingale ou une sous-martingale positive telle que  $X_n \in L^p$  pour tout  $n$ . Alors,

$$\mathbb{E} \left[ \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|X_n|^p].$$

- Le résultat n'est pas vrai pour  $p = 1$ .
- Par convergence monotone, on obtient

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{n \geq 0} |X_n|^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} [|X_n|^p].$$

- ★ Pour une martingale (ou une sous-martingale positive) bornée dans  $L^p$ , la variable aléatoire  $\sup_{n \geq 0} |X_n| \in L^p$ .

- La preuve utilise le résultat suivant : si  $X$  est une v.a. positive, pour  $p > 0$ ,

$$\mathbb{E}[X^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

★ En particulier, si  $X$  est entière

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(X > i) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

*Démonstration.* Remarquons que, comme  $X$  est une martingale ou une sous-martingale positive,  $|X|$  est une sous-martingale. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Notons  $Y_n = \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|$ . D'après la formule précédente et la majoration (2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_n^p] &= p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(Y_n > t) dt \leq p \int_0^\infty t^{p-2} \mathbb{E}[|X_n| \mathbf{1}_{Y_n > t}] dt, \\ &= p \mathbb{E}\left[|X_n| \int_0^\infty t^{p-2} \mathbf{1}_{Y_n > t} dt\right] = \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[|X_n| Y_n^{p-1}]. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathbb{E}[|X_n| Y_n^{p-1}] \leq (\mathbb{E}[|X_n|^p])^{1/p} (\mathbb{E}[Y_n^p])^{(p-1)/p},$$

et par conséquent,

$$\mathbb{E}[Y_n^p] \leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}[|X_n|^p])^{1/p} (\mathbb{E}[Y_n^p])^{(p-1)/p}.$$

On en déduit alors que

$$(\mathbb{E}[Y_n^p])^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}[|X_n|^p])^{1/p}$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

## 5. Convergence.

- Il s'agit de déterminer si  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  existe et dans ce cas de préciser en quel sens.

### 5.1. Martingales de carré intégrable.

**Proposition** (Décomposition de Doob). *Soient  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  une filtration et  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  un processus adapté et intégrable i.e.  $X_n \in L^1$  pour tout  $n$ . Alors, il existe une martingale  $(M_n)_{n \geq 0}$  et un processus prévisible  $(V_n)_{n \geq 0}$  tels que :  $M_0 = V_0 = 0$  et*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = X_0 + M_n + V_n.$$

*De plus, cette décomposition est unique.*

*Démonstration.* Commençons par l'existence. Supposons que cette décomposition existe. Alors,  $V$  étant prévisible, comme  $M$  est une martingale,

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= \mathbb{E}[V_n - V_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}], \\ &= \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]. \end{aligned}$$

On pose donc  $M_0 = V_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$V_n = \sum_{k=1}^n (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}], \quad M_n = X_n - X_0 - V_n.$$

De manière évidente,  $V$  a toutes les propriétés requises. Pour voir que  $M$  est une martingale, il suffit de remarquer que

$$M_n - M_{n-1} = X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}], \quad \text{et donc } \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

Supposons que deux décompositions existent :  $X_n = X_0 + M_n + V_n = X_0 + M'_n + V'_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n$ ,  $M_n - M'_n = V'_n - V_n$  et  $M - M'$  est une martingale prévisible. Par suite, pour tout  $n$ ,

$$M_n - M'_n \stackrel{\text{mart.}}{=} \mathbb{E}[M_{n+1} - M'_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \stackrel{\text{prév.}}{=} M_{n+1} - M'_{n+1}.$$

Donc, pour tout  $n$ ,  $M_n - M'_n = M_0 - M'_0 = 0$  dont on déduit que  $V_n = V'_n$ . □

- Remarquons que
  - ★  $X$  est une martingale ssi  $V = 0$  i.e. pour tout  $n$ ,  $V_n = 0$  p.s.
  - ★  $X$  est une sous-martingale ssi  $V$  est croissant i.e. pour tout  $n$ ,  $V_n \leq V_{n+1}$  p.s.
  - ★  $X$  est une surmartingale ssi  $V$  est décroissant i.e. pour tout  $n$ ,  $V_n \geq V_{n+1}$  p.s.
- Lorsque  $X$  est une martingale de carré intégrable,  $X^2$  est une sous-martingale
  - ★ La décomposition de Doob de  $X^2$  s'écrit  $X_n^2 = X_0^2 + M_n + A_n$  avec  $M$  martingale et  $A$  prévisible croissant
  - ★ On a, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ X_k^2 - X_{k-1}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ (X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right].$$

- ★ Le processus  $A$  s'appelle le crochet prévisible de  $X$  : il est noté  $A_n = \langle X \rangle_n$
- ★ Le processus  $A$  est souvent plus simple que  $X^2$
- ★ Si  $X_n = U_1 + \dots + U_n$  avec  $(U_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. de loi  $\mathbb{P}(U_1 = \pm 1) = 1/2$ , alors  $A_n = n$ .

**Théorème.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une martingale bornée dans  $L^2$  i.e.  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} [|X_n|^2] < +\infty$ . Alors  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge p.s. et dans  $L^2$  vers une v.a.  $X_\infty$  de carré intégrable.

- Ceci signifie qu'il existe  $N \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbb{P}(N) = 0$  et

$$\forall \omega \in N^c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega), \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|X_n - X_\infty|^2] = 0.$$

- Les accroissements d'une martingale de  $L^2$  sont orthogonaux : pour  $i \leq j \leq k \leq l$ ,  $\mathbb{E} [(X_l - X_k)(X_j - X_i)] = 0$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X_l - X_k)(X_j - X_i)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [(X_l - X_k)(X_j - X_i) | \mathcal{F}_k]] \\ &= \mathbb{E} [(X_j - X_i) \mathbb{E} [(X_l - X_k) | \mathcal{F}_k]] = 0. \end{aligned}$$

★ En particulier, en écrivant  $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X_n|^2] &= \mathbb{E} [|X_0|^2] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [(X_k - X_{k-1})^2], \\ \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} [|X_n|^2] &= \mathbb{E} [|X_0|^2] + \sum_{k \geq 1} \mathbb{E} [(X_k - X_{k-1})^2]. \end{aligned}$$

- Finalement, pour tous entiers  $r \geq n$ ,  $\mathbb{E} [(X_r - X_n)^2] = \mathbb{E} [|X_r|^2] - \mathbb{E} [|X_n|^2]$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(X_r - X_n)^2 | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} [|X_r|^2 | \mathcal{F}_n] - 2X_n \mathbb{E} [X_r | \mathcal{F}_n] + |X_n|^2, \\ &= \mathbb{E} [|X_r|^2 | \mathcal{F}_n] - 2X_n X_n + |X_n|^2 = \mathbb{E} [|X_r|^2 | \mathcal{F}_n] - |X_n|^2. \end{aligned}$$



*Démonstration.* Comme  $(X_n^2)_{n \geq 0}$  est une sous-martingale, la suite  $(\mathbb{E}[X_n^2])_{n \geq 0}$  est croissante. Puisque  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty$ , cette suite est également bornée. Par conséquent, elle converge dans  $\mathbf{R}$ , disons vers  $x_\infty^2$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^2] = x_\infty^2$ .

- Pour  $r \geq n$ ,

$$\mathbb{E}[(X_r - X_n)^2] = \mathbb{E}[|X_r|^2] - \mathbb{E}[|X_n|^2] \leq x_\infty^2 - \mathbb{E}[|X_n|^2].$$

Donc  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2$ . Elle converge vers  $X_\infty$  dans  $L^2$ .

- Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $V_n = \sup_{p \geq n, q \geq n} |X_p(\omega) - X_q(\omega)|$  est décroissante et minorée par 0. Elle converge vers  $V(\omega) \geq 0$ . On a, pour tout  $n \geq 0$ , comme  $V_n \leq 2 \sup_{r \geq n} |X_r - X_n|$ ,

$$\mathbb{E}[V^2] \leq \mathbb{E}[V_n^2] \leq 4 \mathbb{E}\left[\sup_{r \geq n} |X_r - X_n|^2\right] \leq 16 \sup_{r \geq n} \mathbb{E}[|X_r - X_n|^2]$$

d'après l'inégalité maximale de Doob. Par suite, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[V^2] \leq 16 \left( \sup_{r \geq n} \mathbb{E}[|X_r|^2] - \mathbb{E}[|X_n|^2] \right) = 16 (x_\infty^2 - \mathbb{E}[|X_n|^2]).$$

D'où  $V = 0$  p.s. : p.s. la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $\mathbf{R}$  et donc convergente.

- La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge donc presque sûrement et dans  $L^2$  vers  $X_\infty$ .

□

## 5.2. Cas général.

**Théorème.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une sous-martingale bornée dans  $L^1$  i.e.  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ .

Alors,  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement vers une v.a.  $X_\infty$  intégrable.

**Corollaire.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une surmartingale positive. Alors,  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement vers une v.a.  $X_\infty$  intégrable et

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n] \leq X_n.$$

- Ce corollaire s'applique en particulier pour une martingale positive. On a dans ce cas

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n] \leq X_n.$$

★ L'inégalité ne devient pas une égalité en général.

**Théorème.** Soient  $p \geq 1$ ,  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  une filtration et  $X$  une v.a. dans  $L^p$ . Alors  $(\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n])_{n \geq 0}$  converge presque sûrement et dans  $L^p$  vers  $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_\infty]$ .

**Théorème.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale bornée dans  $L^1$ . On a équivalence entre :

1.  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $X_\infty$  dans  $L^1$  ;
2. Pour tout  $n \geq 0$ ,  $X_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n]$  ;
3. Il existe  $X \in L^1$  telle que, pour tout  $n$ ,  $X_n = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ .