Séries Entières

1. Définitions et exemples.

- Formule de Taylor, si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

  où $0 < \theta < 1$.

  ⋆ Comportement lorsque $n \to \infty$

- Par exemple $f(x) = \frac{1}{1-x}$: pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ si } |x| < 1$$

Définition. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique.
La série de fonctions $f_n(z) = a_n z^n$, $f_n : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, est appelée série entière associée à $(a_n)_{n\geq 0}$. On la note $\sum a_n z^n$. Les nombres a_n sont les coefficients de la série.

- Objectifs :

  ⋆ Trouver tous les nombres $z \in \mathbf{C}$ tels que $\sum a_n z^n$ converge

  ⋆ Étudier les propriétés de la limite $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

- Les sommes partielles sont :

$$S_0(z) = a_0, \quad S_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

Exemple. 1. $a_n = 1$, $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$; pour tout $|z| < 1$, $S(z) = \frac{1}{1-z}$.

2. $a_0 = 0$, $a_n = n^{-2}$, $\sum a_n z^n$ converge ssi $|z| \leq 1$.

- Dans la suite, pour $r > 0$, on note

$$\mathrm{D}(0,r) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < r\}, \qquad \overline{\mathrm{D}(0,r)} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$$

2. Rayon de convergence.

Théorème. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que :*

1. *pour $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ est ACV,*
2. *pour $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ est GDV.*

On a de plus

$$R = \sup\{r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n \geq 0} \text{ suite majorée}\}.$$

Définition. R s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- $\sum a_n z^n$ est toujours convergente pour $z = 0$
- Lorsque $R = +\infty$, la série entière $\sum a_n z^n$ est ACV pour tout $z \in \mathbf{C}$
- Comme il s'agit d'ACV, on est toujours conduit à des séries à termes positifs
- Si $R < +\infty$, on ne peut rien dire a priori de la convergence de $\sum a_n z^n$ pour $|z| = R$
  - ⋆ Il faut faire une étude « à la main »

Exemple. 1. $\sum z^n$: $R = 1$ (Cauchy) — GDV si $|z| = R$

2. $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$: $R = 1$ — ACV si $|z| = R$
3. $\sum \dfrac{z^n}{n}$: $R = 1$ (d'Alembert) — si $|z| = R$, CV ssi $z \neq 1$
4. $\sum \dfrac{z^n}{n!}$: $R = +\infty$ (d'Alembert)
5. $\sum 2^{n^2} z^n$: $R = 0$

Preuve du théorème. • Soit $I = \{r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n \geq 0}$ suite majorée$\}$; $0 \in I$!

- I est un intervalle : $I = [0, R]$, $I = [0, R[$ ou $I = [0, +\infty[$.
  - ⋆ $I = [0, +\infty[$. Soit $z \in \mathbf{C}$; $r > |z|$:

$$|a_n||z|^n = |a_n| r^n \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq k \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

`Pas fait`
  - ⋆ $R = \sup I < +\infty$.
    - Si $|z| < R$, il existe r t.q. $|z| < r < R$

$$|a_n||z|^n = |a_n| r^n \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq k \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

    - Si $|z| > R$, par définition du sup, $(|a_n||z|^n)_{n \geq 0}$ n'est pas majorée ! Elle ne tend pas vers 0.

$\square$

- Si $\sum a_n z^n$ a pour RdC $R > 0$, on définit une fonction S sur $D(0, R)$ en posant

$$\forall |z| < R, \qquad S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

`2011/2012 : fin du cours 9`

3. Opérations sur les séries entières.

- $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières
  - ⋆ la somme $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$
  - ⋆ si $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \sum a_n z^n$ est la série entière $\sum \lambda a_n z^n$

Proposition. *Si $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*
Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs R et R', $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R'' \geq \min(R, R')$. Si $R \neq R'$, $R'' = \min(R, R')$.

Démonstration. • Le premier point est évident.

- Si $|z| < \min(R, R')$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont ACV : par définition, $R'' \geq \min(R, R')$.
- Si $R < R'$, pour $R < |z| < R'$, $\sum a_n z^n$ est GDV et $\sum b_n z^n$ est ACV ; donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ est GDV et $R'' \leq R = \min(R, R')$.

$\square$

Produit de deux séries.

- $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites. Pour $n \geq 0$, on pose

$$w_n = u_0 + v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$

  - ⋆ La suite $(w_n)_{n \geq 0}$ est le produit de convolution des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.
  - ⋆ La série $\sum w_n$ est appelée le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

Théorème (Mertens)**.** *Si $\sum u_n$ converge absolument et $\sum v_n$ converge (resp. converge absolument), alors $\sum w_n$ converge (resp. converge absolument) et*

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \sum_{n \geq 0} u_n \times \sum_{n \geq 0} v_n.$$

Remarque. Dès que l'un des deux séries converge absolument, c'est bon !

- L'application standard est $e^{x+y} = e^x e^y$
  - ⋆ Pour $z \in \mathbf{C}$, $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. La série précédente est ACV (d'Alembert).
  - ⋆ $u_n = x^n/n!$, $v_n = y^n/n!$,

$$w_n = (u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

  - ⋆ Mertens

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \sum_{n \geq 0} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \times \sum_{n \geq 0} \frac{y^n}{n!}.$$

- Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, le produit de Cauchy de ces deux séries est la série de t.g.

$$\begin{aligned} w_n &= a_0 z^0 b_n z^n + a_1 z^1 b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} b_1 z^1 + a_n z^n b_0 z^0 \\ &= (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) z^n \end{aligned}$$

  - ⋆ C'est une série entière !

Corollaire. *Le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon R et R' est une série entière de rayon $R'' \geq \min(R, R')$.*

- C'est une conséquence directe du théorème de Mertens.

Série dérivée.

Définition. La série dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$

- Il s'agit bien de la série dérivée :

$$\sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} z^k = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (a_n z^n)'$$

Proposition. *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. • Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Notons R' le RdC de $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$

  - ⋆ $R' \leq R$: si $0 < |z| < R'$, puisque $|a_n||z^n| \leq n |a_n||z|^{n-1} |z|$, $\sum a_n z^n$ est ACV et $R \geq R'$.
  - ⋆ $R \leq R'$: si $|z| < R$, prenons r t.q. $|z| < r < R$; on a

$$(n+1)|a_{n+1}||z|^n \leq (n+1)|a_{n+1}| r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n = |a_{n+1}| r^{n+1} \frac{n+1}{r} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

    - La série de t.g. $|a_{n+1}| r^{n+1}$ est CV puisque $r < R$
    - $\frac{n+1}{r} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \longrightarrow 0$ puisque $r > |z|$
    - Donc $\sum (n+1)|a_{n+1}||z|^n$ est CV

□

4. Régularité des séries entières.

Proposition. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de RdC* $R > 0$. $\sum a_n z^n$ *est normalement convergente sur* $\overline{D(0,r)}$ *pour tout* $r < R$

Démonstration. • Soit $r < R$; $\sum |a_n| r^n$ est CV

• $\sup_{|z|\leq r} |a_n z^n| = |a_n| r^n$

$\square$

Théorème. *Soit* $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique t.q. la série entière* $\sum a_n z^n$ *a un RdC* $R > 0$. *Pour tout réel* $x \in]-R, R[$, *notons* $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
Alors S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$,

1. *pour tout* $|x| < R$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$,
2. *la primitive de* S *qui s'annule en 0 est la fonction* F *définie pour tout* $x \in]-R, R[$ *par* $F(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Démonstration. • On applique le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $]-r, r[$ avec $r < R$: possible puisque la série dérivée a même RdC

• C'est une conséquence du théorème d'intégration des séries de fonctions.

$\square$

Exemple.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}, \qquad F(x) = -ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

`2011/2012 : fin du cours 10`

`Pas fait`

Définition. Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Soit $r > 0$ ou $r = +\infty$ t.q. $]-r, r[\subset I$.
On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ (à coefficients réels) de RdC $R \geq r$ telle que

$$\forall |x| < r, \qquad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

• Par exemple, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1, 1[$.

`Pas fait`

Proposition. *Soit* $r > 0$. *Si* f *est développable en série entière sur* $]-r, r[$,

$$\forall |x| < r, \qquad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

alors

1. *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$;*

2. *f possède un DL en 0 à tous les ordres : le DL à l'ordre n est*

$$f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \ ;$$

3. *les coefficients a_n sont donnés par*

$$\forall n \geq 0, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

- Attention, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière
- Par exemple, $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ car on montre que, pour tout n, $f^{(n)}(0) = 0$.

Développement des fonctions usuelles.

Pas fait

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots & |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots & |x| < 1 \\
-\ln(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots & |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots & |x| < 1 \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots & x \in \mathbf{R} \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots & x \in \mathbf{R} \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots & x \in \mathbf{R} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots & |x| < 1
\end{aligned}$$