Correction de l'exercice 3-12

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $n^2 + x^2 \geq n^2$. Par suite, pour $x \in [-1, 1]$ et $n \geq 1$,

$$|u_n(x)| = \frac{2|x|}{n^2 + x^2} \leq \frac{2|x|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Puisque la série de Riemann d'exposant $2 > 1$, $\sum \frac{1}{n^2}$, est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$.

2. Soit $x \in [-1, 1]$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et donc normalement (et uniformément) sur le segment d'extrémités 0 et x. Par conséquent,

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x u_n(t)\, dt = \ln\left(n^2 + x^2\right) - \ln\left(n^2\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right).$$

3. Rappelons, que pour tout $u \geq 0$, $0 \leq \ln(1 + u) \leq u$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [-1, 1]$,

$$|v_n(x)| = v_n(x) \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $2 > 1$), la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$.

4. Pour $n \geq 1$ et $x \in [-1, 1]$, $0 \leq n^2 - x^2 \leq n^2$ et $n^2 + x^2 \geq n^2$. Par suite, pour $n \geq 1$,

$$\sup_{x \in [-1,1]} |w_n(x)| = \sup_{x \in [-1,1]} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} \leq \frac{n^2}{(n^2)^2} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de fonctions $\sum w_n$ est donc normalement convergente sur $[-1, 1]$ puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

5. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$. De plus, pour tout $n \geq 1$, u_n est dérivable sur $[-1, 1]$ et, pour tout $x \in [-1, 1]$, $u_n'(x) = w_n(x)$. Comme la série de fonctions $\sum u_n' = \sum w_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$, $f = \sum u_n$ est dérivable sur $[-1, 1]$ et

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x).$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [-1, 1]$, $w_n(x) \geq 0$. Donc, pour $x \in [-1, 1]$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x) \geq 0$. La fonction f est croissante sur $[-1, 1]$.