Espaces probabilisés, Révisions

Dans toute la suite Ω est un ensemble non vide.

Exercice 1. Soit $A \subset \Omega$ un ensemble. Montrer que $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 2. Soient I un ensemble non vide et $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ une famille de tribus sur Ω. Montrer que $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu sur Ω.

Exercice 3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties A de Ω dénombrables ou dont le complémentaire est dénombrable. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 4. Soit $\omega \in \Omega$. Pour $A \subset \Omega$, on pose $\delta_\omega(A) = 1$ si $\omega \in A$ et $\delta_\omega(A) = 0$ sinon : $\delta_\omega(A) = \mathbf{1}_A(\omega)$. Montrer que δ_ω est probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 5. 1. Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $p \in [0,1]$. On pose, pour $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = p\,\mathbb{P}_1(A) + (1-p)\,\mathbb{P}_2(A)$. Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

2. Soient $(\mathbb{P}_k)_{k\geq 0}$ une suite de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(p_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels de $[0,1]$. Montrer que l'application $\mathbb{P}$, définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{k\geq 0} p_k\,\mathbb{P}_k(A),$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dès que $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 7. Soient $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ une suite de parties de $\mathcal{F}$. On note A l'ensemble $\cap_{n\in\mathbf{N}} \cup_{k\geq n} A_k$. Montrer que $\mathbb{P}(A) \leq \inf_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k)$. Que vaut $\mathbb{P}(A)$ si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$?

Exercice 8. Soient Ω un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties de Ω. On définit

$$\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k, \qquad \text{et}, \qquad \liminf A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

1. Que signifie $\omega \in \limsup A_n$? $\omega \in \liminf A_n$?
2. Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
3. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les exemples suivants :

- la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante ;
- la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante ;
- $\forall n \in \mathbf{N}$, $A_{2n} = A$ et $A_{2n+1} = B$ où $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$;
- $\Omega = \mathbf{R}$ et pour tout n, $A_n = \left[2 + (-1)^{n+1}, 3 + \frac{1}{n+1}\right]$.

Exercice 9. Une main au bridge c'est la donnée de 13 cartes prises dans un jeu de 52. Trouver le nombre de mains possibles. Quelle est la probabilité qu'une main possède exactement 3 trèfles ? exactement un roi et une dame ? au moins un as ?

Exercice 10. 20 chevaux sont au départ d'une course. Trouver le nombre de tiercés, de quartés, de quintés dans l'ordre et dans le désordre.

Exercice 11. Soit Ω un ensemble à np éléments. Trouver le nombre de partitions de Ω en n parties de p éléments.

Exercice 12. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants suivant le TD possèdent le même jour d'anniversaire ?

Exercice 13. Une ville compte 3 médecins ; 4 personnes sont malades. Quelle est la probabilité pour que tous les malades appellent le même médecin ? Quelle est la probabilité pour que tous les médecins soient appelés ?

Exercice 14. Trois machines A, B, C produisent 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées par une usine. Le pourcentage de pièces défectueuses pour chaque machine est respectivement 3%, 4% et 5%.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ?

2. Si on prend une pièce qui s'avère être défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par A, B, C ?

Exercice 15. Une particule π peut occuper deux positions A et B. Au temps $n = 0$, π se trouve en A. Pour tout entier n, on note A_n (respectivement B_n) l'événement « π est en A (respectivement en B) au temps n » et $\alpha_n = \mathbb{P}(A_n)$, $\beta_n = \mathbb{P}(B_n)$. On suppose qu'il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = \theta\alpha_n$, $\mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) = \theta\beta_n$.

1. Calculer, en fonction de θ et β_n, $\mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1})$.

2. Déterminer une relation de récurrence entre α_n et α_{n+1} puis calculer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 16. La police recherche un alcoolique qui est, avec probabilité p, occupé à étancher sa soif dans l'un des huit bistrots du quartier. Sachant qu'il n'a pas de préférence pour un bistrot et que les policiers l'ont cherché en vain dans les sept premiers bistrots, quelle est la probabilité qu'ils le dénichent dans le huitième ?

Exercice 17. On considère n menteurs indépendants $I_1, \ldots, I_n$. Le premier menteur reçoit une information sous la forme oui ou non. Chacun d'eux transmet le message qu'il a reçu à son successeur avec probabilité p. Le dernier écrit au tableau le message qu'il a reçu avec probabilité p. Calculer la probabilité p_n de l'événement « l'information est fidèlement transmise ».

Exercice 18. Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires.

1. On tire successivement sans remise n boules de l'urne ($n \leq N$). Déterminer la probabilité $p(k)$ d'obtenir exactement k boules blanches.

2. On tire successivement avec remise n boules de l'urne ($n \leq N$). Déterminer la probabilité $q(k)$ d'obtenir exactement k boules blanches.

3. On suppose que $N \to +\infty$ et $N_1/N \to p \in [0, 1]$. Que vaut $\lim p(k)/q(k)$?