UNIVERSITÉ DE SAVOIE

LST – S3
2011–2012

Mathématique

Série n° 2 — Suites de fonctions

Ex 2.1 – Pour chacun des cas suivants, étudier les convergences simple et uniforme sur l'ensemble X de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de X dans $\mathbf{R}$:

1. $X \coloneqq \mathbf{R}$ et $f_n(x) \coloneqq \dfrac{n^2x^4}{1+n^2x^2}$.
2. $X \coloneqq [0,1]$ et $f_n(x) \coloneqq x^n(1-x^2)$.
3. $X \coloneqq]0,+\infty[$ puis $X \coloneqq [a,+\infty[$ avec $a>0$ et $f_n(x) \coloneqq \arctan(nx)$.
4. $X \coloneqq \mathbf{R}$ et $f_n(x) \coloneqq [nx]/n$, $[x]$ désignant la partie entière de x.

Ex 2.2 – Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$f_n(x) \coloneqq (n-1)x \ \text{ si } \ x\in[0\,,\,1/n] \qquad \text{et} \qquad f_n(x) \coloneqq 1-x \ \text{ si } \ x\in\,]1/n\,,\,1].$$

Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout $[a,1]$ avec $0<a\leqslant 1$, mais pas sur $]0,1]$.

Ex 2.3 –

1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par
$$f_n(x) \coloneqq \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}.$$
Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, f_n est dérivable ; que peut-on dire de la limite de $(f_n)_{n\geqslant 1}$. Comparer à un résultat du cours.
2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par
$$f_n(x) \coloneqq \frac{1}{n}\sin(nx).$$
Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément. Étudier la convergence de la suite des dérivées. Comparer à un résultat du cours.
3. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par
$$f_n(x) \coloneqq \arctan(\frac{x}{n}).$$
Montrer que $(f'_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur toute partie bornée. La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}$?

Ex 2.4 –

1. Étudier la limite simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ dans les cas suivants :
$$\text{(a)}\quad f_n(x) = \frac{ne^x}{n+x}\ ; \qquad\qquad \text{(b)}\quad f_n(x) = \frac{x^5}{(1+x^2)^n}.$$
2. On considère, pour $n\geqslant 0$ et $|x|\leqslant 1$, $f_n(x) = \max(0, 1-n|x|)$. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)\,dx$. La convergence est-elle uniforme sur $[-1,1]$?