Séries de Fourier

1. Fonctions périodiques.

Définition. Soient $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $T > 0$. f est T–périodique si

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad f(t+T) = f(t).$$

Si f est une fonction T–périodique,

1. $\omega = 2\pi/T$ s'appelle la pulsation de f,
2. $\nu = 1/T$ est la fréquence de f.

- Pour déterminer une fonction T-périodique, il suffit de connaitre cette fonction sur un intervalle de longueur T

Exemple. 1. $t \longmapsto \sin t$ est 2π–périodique.

2. Si $\omega > 0$, $t \longmapsto \cos(\omega t)$ est $2\pi/\omega$–périodique.

- Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.
  - ⋆ f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si f est continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points où elle possède des limites à droite et à gauche finies.
  - ⋆ La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ si f est continûment dérivable sauf en un nombre fini de points où f et f' possèdent des limites à gauche et à droite finies.
- Une fonction T-périodique est continue ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux si elle est continue ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, T]$.

Exemple. 1. $f(x) = 1/x$ sur $]0, 1]$, $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux

2. La fonction de la figure 1

- Si f est T-périodique et continue par morceaux,

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \qquad \int_0^T f(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt.$$

  - ⋆ En particulier, $\alpha = -T/2$,

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt.$$

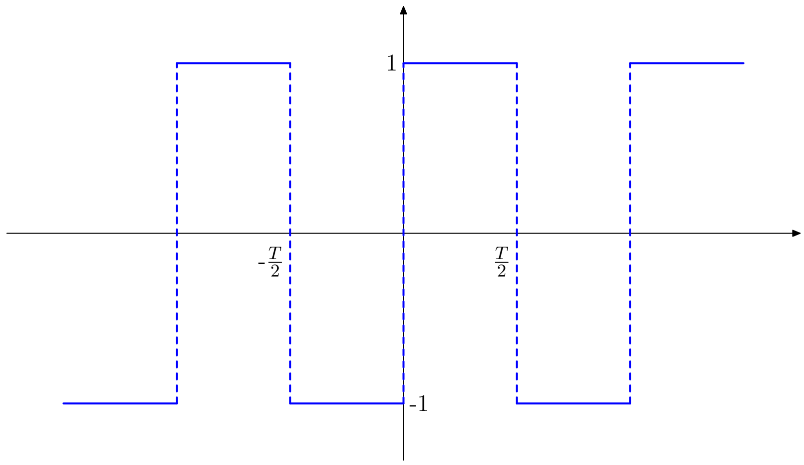


FIGURE 1 – Signal en escalier : graphe de f

2. Coefficients de Fourier.

- Dans toute la suite, $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction T-périodique, continue par morceaux
- On a toujours la relation $\omega T = 2\pi$: $\omega = 2\pi/T$, $T = 2\pi/\omega$

2.1. Motivation.

- Rappelons que, si $\omega > 0$, $T = 2\pi/\omega$, pour tous $n \geq 1$, $m \geq 1$,

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\, dt = 0, \qquad \int_0^T \sin(n\omega t)\, dt = 0, \qquad \int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt = 0$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt = \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \geq m. \end{cases}$$

- Soit $f(x) = c_0 + a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x)$, $T = 2\pi/\omega$. On a

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt, \qquad a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega t)\, dt, \qquad b_1 = \frac{2}{T} \int 0^T f(t) \sin(\omega t)\, dt$$

2.2. Coefficients de Fourier trigonométriques.

Définition. Soit f une fonction T–périodique et continue par morceaux ; $\omega = 2\pi/T$ la pulsation associée.
Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définies par

$$c_0 = c_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt,$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt,$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt.$$

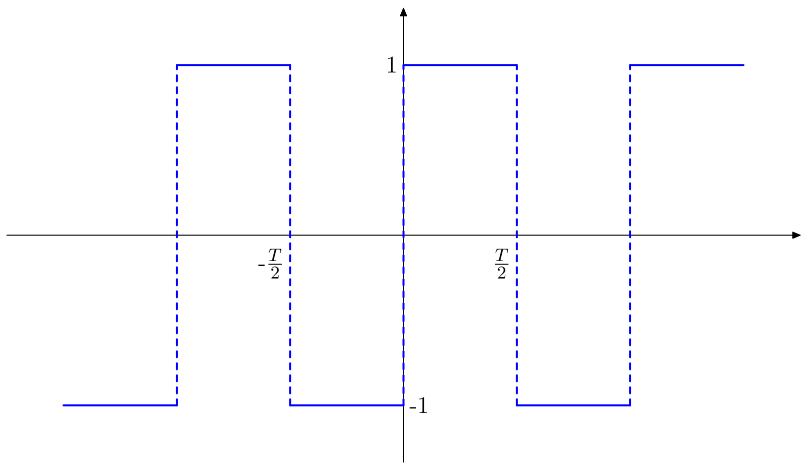
Remarque. 1. Si f est une fonction paire – pour tout réel t, $f(-t) = f(t)$ –, pour tout $n \geq 1$,

$$c_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt, \qquad a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \qquad b_n(f) = 0.$$

2. Si f est une fonction impaire – pour tout réel t, $f(-t) = -f(t)$ –, pour tout $n \geq 1$,

$$c_0(f) = 0, \qquad a_n(f) = 0, \qquad b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

Exemple. 1. *Signal en escalier.* Soit f la fonction T–périodique définie à la figure 1



- f est impaire : $c_0 = 0$ et $a_n = 0$;
- Calculons b_n ; on a $f(t) = 1$ pour $t \in]0, T/2[$ et

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \sin(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{4}{n\omega T}\left(1 - \cos(n\omega T/2)\right).$$

- Comme $\omega T = 2\pi$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$, on obtient

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2. *Signal triangulaire.* On considère la fonction g T–périodique dont le graphe est

- g est paire : $b_n = 0$;
- on a $g(t) = 1 - \frac{2}{T}t$ pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$; on a

$$c_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} (1 - 2t/T)\,dt = 1 - \frac{4}{T^2}\int_0^{T/2} t\,dt = 1 - \frac{4}{T^2}\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

- Pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} (1 - 2t/T)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} - \frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)\,dt.$$

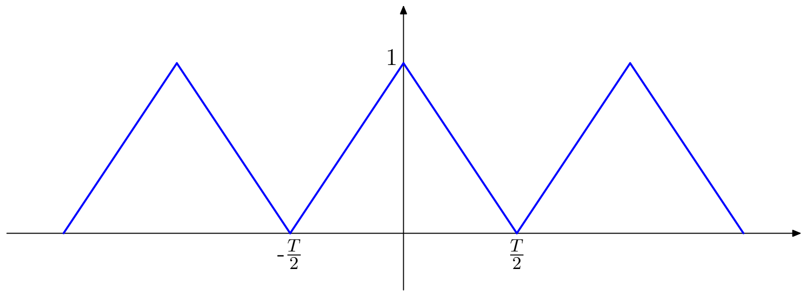


FIGURE 2 – Signal triangulaire : graphe de g

- Comme $\omega T = 2\pi$ et $\sin(n\pi) = 0$, on a

$$a_n = -\frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)\,dt.$$

- Faisons une intégration par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(n\omega t)$: $u'(t) = 1$ et $v(t) = \sin(n\omega t)/(n\omega)$. Il vient ($\sin(n\pi) = 0$)

$$-\frac{T^2}{8}\,a_n = [t\sin(n\omega t)/(n\omega)]_0^T - \int_0^{T/2}\sin(n\omega t)/(n\omega)\,dt = 0 - \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_0^{T/2}$$

- Comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

$$a_n = \frac{8}{(nT\omega)^2}(1-(-1)^n) = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases}\frac{4}{n^2\pi^2}, & \text{si n est impair,}\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

2.3. Coefficients complexes.

Remarque. Surtout utile si f est à valeurs complexes.

Définition. Soit f une fonction T-périodique ; on note $\omega = 2\pi/T$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on définit,

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}\,dt.$$

- On retrouve la définition de $c_0(f)$.
- Si f est une fonction réelle,

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{+in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{e^{-in\omega t}}\,dt = \frac{1}{T}\overline{\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt} = \overline{c_n(f)}.$$

- Si f est une fonction réelle, pour tout $n \geq 1$,

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \qquad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2},$$
$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \qquad b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right).$$

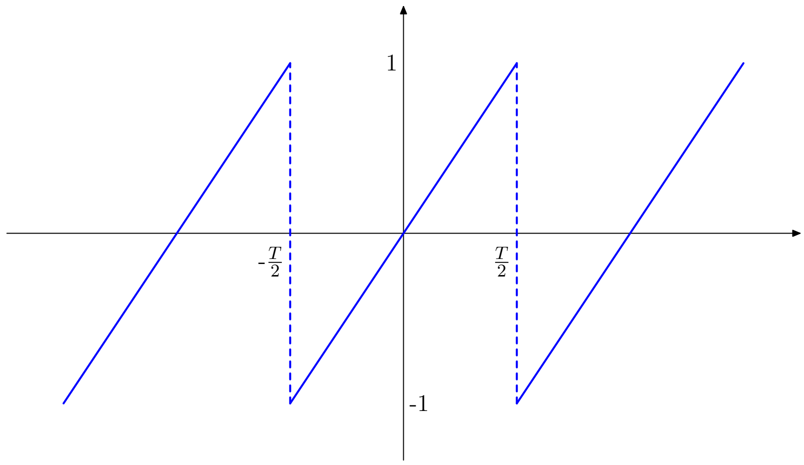


FIGURE 3 – Signal en dents de scie : graphe de h

Exemple. *Signal en dents de scie.* Soit h la fonction T–périodique définie par $f(t) = \frac{2}{T}t$ pour $|t| < \frac{T}{2}$; le graphe de h est donné à la figure 3.

- h est impaire, $c_0 = 0$.
- Pour $n \neq 0$, une primitive de $2te^{-in\omega t}/T$ est de la forme $(at+b)e^{-in\omega t}$: en dérivant,

$$-in\omega(at+b) + a = 2t/T, \qquad a = 2/(-in\omega T) = i/(n\pi), \quad b = a/in\omega = 1/(n^2\omega\pi)$$

- Comme $e^{-in\omega T/2} = e^{in\omega T/2} = (-1)^n$

$$c_n = \frac{1}{T}\left[(at+b)e^{-in\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{i(-1)^n}{n\pi}.$$

- On en déduit a_n et b_n

$$a_n = (c_n + c_{-n}) = 0, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

2.4. Propriétés des coefficients de Fourier.

- Soient f et g deux fonctions T–périodiques continues par morceaux, λ un réel.
  1. $c_n(f+\lambda g) = c_n(f)+\lambda c_n(g)$, $a_n(f+\lambda g) = a_n(f)+\lambda a_n(g)$, $b_n(f+\lambda g) = b_n(f)+\lambda b_n(g)$;
  2. Si f est **continue** sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors

$$c_n(f') = in\omega c_n(f), \qquad a_n(f') = n\omega b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega a_n(f);$$

  3. Si $g(t) = f(t-\tau)$, $c_n(g) = e^{-in\omega\tau}c_n(f)$;
  4. $\lim_{n\to+\infty}(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)| + |b_n(f)| + |a_n(f)|) = 0$.

Remarque. La seconde propriété montre que plus la fonction f est régulière plus les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 rapidement.

Démonstration. • Pour illustrer la remarque, montrons le dernier point lorsque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

• On a

$$|c_n(f)| = \left|\frac{c_n(f')}{in}\right| \leq \frac{\|f'\|_\infty}{n}.$$

□

• On peut remarque que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, il existe une constante C telle que

$$|c_n(f)| + |c_{-n}(f)| + |b_n(f)| + |a_n(f)| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Exemple. 1. • La fonction f – cf. Fig. 1 – est à peu près la dérivée de la fonction g (Fig. 2).

$$g'(t) = \begin{cases} -\frac{2}{T}, & \text{si } t \in]0, T/2[, \\ +\frac{2}{T}, & \text{pour } t \in]-T/2, 0[\end{cases} = -\frac{2}{T} f(t).$$

• Comme g est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux,

$$a_n(f) = -\frac{T}{2} a_n(g') = -\frac{n\omega T}{2} b_n(g) = -n\pi b_n(g),$$
$$b_n(f) = -\frac{T}{2} b_n(g') = \frac{n\omega T}{2} a_n(g) = n\pi a_n(g).$$

• C'est cohérent avec les résultats précédents.

2. g est continue alors que f ne l'est pas : g est plus régulière que f. Les coefficients de Fourier de g convergent vers 0 comme $1/n^2$ tandis que ceux de f le font comme $1/n$ donc plus lentement.

3. Série de Fourier, convergence.

3.1. Définition.

Pour tout $N \geq 1$, on désigne par $S_N[f]$ la *somme partielle de Fourier d'ordre N* c'est à dire la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad S_N[f](t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\Big).$$

Compte tenu des relations entre les coefficients réels et complexes, on a

$$a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t) = c_n(f)e^{in\omega t} + c_{-n}(f)e^{-in\omega t}$$

et par suite

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad S_N[f](t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\omega t}.$$

- On introduit également la *série de Fourier* de f, $S[f]$, définie par

$$S[f](t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\Big) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{in\omega t}.$$

- Il s'agit d'une série de fonctions

Exemple. Reprenons l'exemple de la fonction g cf. FIG. 2. On a trouvé

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}, \text{ si } n \text{ impair}, \quad a_n = 0, \text{ sinon.}$$

La série de Fourier de g est

$$S[g](t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1,\text{ impair}} \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)\omega t).$$

Définition. Soit f, T–périodique, continue par morceaux ; $\omega = 2\pi/T$.
On appelle série de Fourier de f la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$f_0(t) = c_0(f), \qquad f_n(t) = c_n(t)\,e^{in\omega t} + c_{-n}(f)\,e^{in\omega t}.$$

- Comme déjà dit,

$$\forall n \geq 1, \qquad f_n(t) = a_n(f)\,\cos(n\omega t) + b_n\,\sin(n\omega t).$$

3.2. Convergence de la série de Fourier.

- On note

$$f(t+) = \lim_{\substack{x \to t \\ x\geq t}} f(x), \qquad f(t-) = \lim_{\substack{x\to t \\ x\leq t}} f(x).$$

Théorème (Jordan—Dirichlet)**.** *Soit f une fonction T-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\omega = 2\pi/T$.*

1. *Pour tout réel t, la série de Fourier de f converge au point t et*

$$S[f](t) = \lim_{n\to+\infty} S_n[f](t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}.$$

   En particulier, si f est continue au point t, $S[f](t) = f(t)$.

2. *De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle $[\alpha,\beta]$ sur lequel f est continue*

Remarque. • En particulier, si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, la convergence est normale sur $\mathbf{R}$

Exemple. Reprenons la fonction f de la FIG. 1. Si $0 < t < T/2$, f est continue au point t et on a $1 = f(t) = S[f](t)$. Par contre au point $t = 0$, $S[f](0) = (f(0+) + f(0-))/2 = 0$. On a donc, pour $t = T/4$, d'après les coefficients de f,

$$1 = S[f](T/4) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair} \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n\omega T/4) = \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\pi/2)$$

et comme $\sin((2p+1)\pi/2) = \sin(p\pi + \pi/2) = \cos(p\pi) = (-1)^p$, on en déduit que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}, \qquad \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

La fonction g dont le graphe est donné à la FIG. 2 est continue. On a donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $S[g](t) = g(t)$ c'est à dire

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)\omega t).$$

Pour $t = 0$, on obtient

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Théorème (Bessel-Parseval)**.** *Soit f une fonction T–périodique et continue par morceaux. Les séries $\sum |c_n|^2$ et $\sum |c_{-n}|^2$ sont convergentes et*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

- On montre facilement que

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

- D'après Pythagorre

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - S_n[f](t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx - \frac{1}{T} \int_0^T |S_n[f](x)|^2 dx = \sum_{|k|>n} |c_k|^2 \longrightarrow 0$$

Exemple. Pour la fonction f (FIG. 1) qui est impaire, l'égalité de Parseval s'écrit

$$E(f) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} |b_n|^2$$

c'est à dire compte tenu des calculs faits avant

$$1 = \frac{1}{2} \frac{16}{\pi^2} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}, \quad \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Si on prend la fonction h de la FIG. 3, on a $c_0 = a_n = 0$ et $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$. De plus

$$E(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2t}{T}\right)^2 dt = \frac{8}{T^3} \int_0^{T/2} t^2 \, dt = \frac{1}{3}$$

et l'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2 \pi^2}, \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$