UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST – S3**
2011–2012

Mathématique

Série n° 3 — Séries de fonctions

Ex 3.1 – Étant donné un réel $\alpha \geqslant 1$, on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_n(x) \coloneqq x^\alpha e^{-nx}$.
Discuter de la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ suivant les valeurs du paramètre α.

Ex 3.2 – Pour $0 < a \leqslant b$ réels fixés, calculer l'intégrale $I \coloneqq \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}\right) \mathrm{d}x$ après avoir justifié son existence.

Ex 3.3 – On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$, pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de cette série de fonctions.
2. Déterminer sur quel domaine la convergence est absolue.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.
4. Déduire de la question précédente que f est continue sur $]0,+\infty[$.
5. Étudier la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Ex 3.4 – Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n(x) = \dfrac{x^2 e^{-nx}}{n^\alpha}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Ex 3.5 – Étudier la série de fonctions définie par $u_n(x) = n(\sin x)^n \cos x$ sur $[0, \pi/2]$.

Ex 3.6 –Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $u_n(x) = e^{nx\ln n}$ sur $]-\infty, a]$, $a < 0$ puis sur $]-\infty, 0]$.

Ex 3.7 –Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha < 2$ et $x \in \mathbf{R}_+$. On pose pour $n \geqslant 1$, $u_n(x) = x^{2-\alpha} e^{-nx}$.

1. Montrer qu'il y a convergence simple sur $\mathbf{R}_+$.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+$ si $\alpha < 1$.
3. Y-a-t-il convergence uniforme si $\alpha = 1$?

Ex 3.8 – Montrer que la série définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a, b]$ mais n'est absolument convergente pour aucune valeur de x.

Ex 3.9 – Soit la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x(1-x)^n$.

1. Déterminer le domaine de convergence de cette série.
2. Calculer sa somme sur son domaine de convergence.
3. Etudier la convergence uniforme sur $[0,1]$, sur $[a,1]$ avec $0 < a < 1$ puis sur $]0,1[$.

Ex 3.10 – Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer que si la série de terme général na_n est absolument convergente alors la série définie par $a_n \cos nx$ (resp. $a_n \sin nx$) est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.

Ex 3.11 – Quel est le domaine de définition de f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$. Montrer f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

Ex 3.12 – Soit la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{2x}{n^2+x^2}$, $n \geqslant 1$.

1. Montrer que cette série converge normalement sur $[-1,1]$. On note f sa somme.
2. Exprimer sous forme d'une série de fonctions $\int_0^x f(t)dt$ pour $x \in [-1,1]$.
3. Etudier la convergence normale sur $[-1,1]$ de la série de fonctions de terme général $v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$.
4. Etudier la convergence normale sur $[-1,1]$ de la série de fonctions de terme général $w_n(x) = \frac{2(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2}$.
5. En déduire f' sous forme d'une série de fonctions et que f est croissante sur $[-1,1]$.

Ex 3.13 –

1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions définie par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que la somme f de cette série est continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
3. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$.