Université de Savoie Année 10/11

MATH326 : Mathématiques pour les sciences III

Suites & séries numériques, suites & séries de fonctions et calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Stéphane Simon

Table des matières

Bien que de nombreux résultats soient énoncés dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, la majorité d'entre eux s'étend de manière naturelle à $\mathbb{R}^n$.
Par ailleurs, on munira systématiquement $\mathbb{R}$ de la valeur absolue $|\cdot|$.

1 Suites & séries numériques

1.1 Suites numériques

1.2 Séries numériques

2 Suites & séries de fonctions

2.1 Suites de fonctions

2.2 Séries de fonctions

2.3 Séries entières

2.4 Séries de Fourier

3 Fonctions de plusieurs variables

3.1 L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$

3.1.1 Norme et boule sur $\mathbb{R}^2$

L'analyse exige souvent de *quantifier* la proximité des points, autrement dit de *mesurer* la distance entre deux points. Dans le cas d'un espace vectoriel tel que $\mathbb{R}^2$, on a une notion sensiblement plus forte.

Définition 3.1.1 Une *norme* sur $\mathbb{R}^2$ est une application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que :

1. pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*séparation*),
2. pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (*positive-homogénéité*),
3. pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (*1ère inégalité triangulaire*).

On désigne souvent une norme par $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ voire $|\cdot|$ (si aucune confusion n'est possible), ou encore N.

Exemple 3.1.1 dans $\mathbb{R}^2$:

1. $\|u\|_2 = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norme euclidienne) ; cette norme provient du produit scalaire euclidien (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur $\mathbb{R}^2$: $(u|u') = ((x, y)|(x', y')) = xx' + yy'$ et $\|u\|_2^2 = (u|u)$. En particulier, les inégalités de Cauchy-Schwartz :
$$|(u|u')| \leqslant \|u\|_2\|u'\|_2$$
et de Minkowski :
$$(u + u'|u + u') \leqslant (\|u\|_2 + \|u'\|_2)^2$$
sont satisfaites. On a : $\|(1, 2)\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
2. $\|u\|_1 = |x| + |y|$. On a : $\|(1, 2)\|_1 = |1| + |2| = 3$.

3. $\|u\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. On a : $\|(1,2)\|_\infty = 2$.

Proposition 3.1.1 (*2nde inégalité triangulaire*) Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leqslant \|u - v\|.$$

Définition 3.1.2 La norme N_1 (sur $\mathbb{R}^2$) est *équivalente* à N_2 si il existe $a > 0$ et $A > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$aN_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant AN_1(u).$$

Théorème 3.1.1 Toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Le théorème 3.1.1 signifie que le choix d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ importe peu : une propriété de caractère topologique sur $\mathbb{R}^2$ ou de nature différentielle (pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$) satisfaite par $\|\cdot\|_1$ sera conservée pour $\|\cdot\|_2$ et réciproquement.
Sauf indication contraire, on raisonnera avec la norme euclidienne.

Exemple 3.1.2

1. $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant 2\|\cdot\|_\infty$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$.
3. L'équivalence de normes est une « *relation d'équivalence* ».

Définition 3.1.3 La *boule ouverte* (resp. *fermée*) de *centre* p_0 ($\in \mathbb{R}^2$) et de *rayon* r ($\in \mathbb{R}_+$) est le sous-ensemble

$$B(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_0\| < r\}$$

(resp.

$$B'(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_0\| \leqslant r\}).$$

La *sphère* de centre p_0 et de rayon r est l'ensemble :

$$S(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_0\| = r\}.$$

Autrement dit, $S(p_0, r)$ est la *frontière* de $B(p_0, r)$.

Exemple 3.1.3 Dans $\mathbb{R}^2$:

1. $B_2(0,r) = \begin{cases} D(0,r) & \text{si } r > 0 \\ \varnothing & \text{si } r = 0 \end{cases}$; $B_2'(0,r) = \begin{cases} D'(0,r) & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$;
   $S_2(0,r) = \begin{cases} C(0,r) & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$.
2. $B_\infty(0,r) = \begin{cases}]-r, r[^2 & \text{si } r > 0 \\ \varnothing & \text{si } r = 0 \end{cases}$; $B_\infty'(0,r) = \begin{cases} [-r, r]^2 & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$;
   $S_\infty(0,r) = \begin{cases} ([-r,r] \times \{\pm r\}) \cup (\{\pm r\} \times [-r,r]) & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$.
3. $B_1(0,1) = Rot_{(0,\pi/4)}(B_\infty(0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$; $B_1'(0,1) = Rot_{(0,\pi/4)}(B_\infty'(0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$;
   $S_1(0,1) = Rot_{(0,\pi/4)}(S_\infty(0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$.
4. $B'(p_0, r) = B(p_0, r) \sqcup S(p_0, r)$.
5. $B(p_0, r) = t_{p_0} \circ h_r(B(0,1))$.
6. **Exercice :** Représenter ces ensembles.

3.1.2 Partie ouverte, fermée, adhérence, partie compacte

Définition 3.1.4 Un *voisinage* de p est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenant une boule ouverte $B(p,r)$ où $r > 0$. On note $\mathcal{V}(p)$ l'ensemble des voisinages de p.

On adopte volontiers la notion de voisinage, en évitant ainsi de décrire explicitement une boule ouverte (essentiellement son rayon), pour indiquer la nature locale de la propriété considérée.

Exemple 3.1.4

1. Une boule ouverte (ou fermée) de rayon $r > 0$ est un voisinage de son centre. En fait, une boule ouverte est un voisinage de chacun de ses points. Ce n'est pas le cas pour une boule fermée (considérer les points sur la sphère).
2. L'espace total $\mathbb{R}^2$ est un voisinage de l'un quelconque de ses points.

Définition 3.1.5 Une partie U est *ouverte* si pour tout $p \in U$, il existe un voisinage V de p contenu dans U.

Autrement dit, une partie U est ouverte (s)si pour chacun de ses point p, il existe une boule ouverte centrée en p et de rayon $r > 0$, entièrement contenue dans U.

Exemple 3.1.5

1. Une boule ouverte et l'espace tout entier $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts.
2. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont ouverts.
3. Une réunion d'ouverts est un ouvert. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

Définition 3.1.6 Le complémentaire d'une partie ouverte est une partie *fermée*.

Exemple 3.1.6

1. Une boule fermée est un fermé.
2. Une intersection de fermés est fermée.
3. On a : $S(p_0,r) = B'(p_0,r) \cap (B(p_0,r))^c$, donc $S(p_0,r)$ est fermé.
4. Une réunion **finie** de fermés est fermée.
5. Un ensemble réduit à un point (*singleton*) dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est fermé.

Définition 3.1.7 Une suite de points $(p_n) = ((x_n, y_n))$ *converge* vers (a,b)

$$\begin{array}{rl} \text{si} & ||(x_n,y_n)-(a,b)|| = ||(x_n-a, y_n-b)|| \to 0 \\ \text{ssi} & x_n \to a \ \textbf{et} \ y_n \to b. \end{array}$$

Exemple 3.1.7 La suite $(\ln(1+\frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n^2})^{n\ln n+\sin n})$ converge vers $(0,1)$.

Proposition 3.1.2 (Critère séquentiel de fermeture) Une partie A (de $\mathbb{R}^2$) est fermée ssi pour toute suite de points de A, qui converge vers l dans $\mathbb{R}^2$, on a $l \in A$.

Définition 3.1.8 Un point l de $\mathbb{R}^2$ est *adhérent* à A si il existe une suite de points de A qui converge vers l ; l'*adhérence* $\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.

Exemple 3.1.8

1. L'adhérence de $B(0,1)$ est $B'(0,1)$ *i.e.* $\overline{B(0,1)} = B'(0,1)$.
2. On a : $0 \in \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}}$; plus précisément, $\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. En effet, il est clair que $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}}$. D'autre part, soit (x_n) une suite à valeurs $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ convergente dans $\mathbb{R}$ vers a. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geqslant 0$, on obtient $a \geqslant 0$. Distinguons 2 cas :
   - $(\exists \epsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n \geqslant \epsilon$: donc, (x_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs (au plus $E(\frac{1}{\epsilon})$). La suite est stationnaire et $(\exists P \in \mathbb{N}^*)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n \geqslant n_0) : x_n = x_P = a > 0$.
   - (x_n) est minorée par aucun $\epsilon > 0$ et $a = 0$.

Remarque 3.1.1

1. L'adhérence d'une partie est fermée.
2. L'adhérence d'une partie A est le plus **petit** fermé contenant A.

Proposition 3.1.3 Une partie F est fermée ssi $F = \bar{F}$.

Remarque 3.1.2 Une partie $U \subseteq A$ (resp. $F \subseteq A$) est *ouverte* (resp. *fermée*) *dans* A si U (resp. F) est l'intersection d'une partie ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^2$ avec A.

Définition 3.1.9 Une partie de $\mathbb{R}^2$ est *compacte* si elle est fermée et *bornée* (*i.e.* incluse dans une boule de rayon fini).

Exemple 3.1.9 Dans $\mathbb{R}^2$:

1. Une boule fermée, une sphère et un pavé fermé sont compacts.
2. Une intersection de parties compactes est compacte.
3. Une réunion **finie** de *compacts* est compacte.
4. L'adhérence de (l'ensemble de) la suite dans l'exemple 3.1.8 est compacte.

Théorème 3.1.2 (Bolzano-Weierstrass) Pour qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ soit compacte il faut et il suffit que de toute suite de points à valeurs dans A, on puisse extraire une sous-suite convergeant dans A.

Définition 3.1.10 Un point p est *intérieur* à une partie A si il existe un voisinage V de p entièrement contenu dans A ; l'*intérieur* de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.

Remarque 3.1.3

1. L'intérieur d'une partie est le plus **grand** ouvert contenu dans cette partie.
2. $A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A$ ouvert.

Exemple 3.1.10

1. $\overset{\circ}{B'}(p_0, r) = B(p_0, r)$ si $r > 0$.
2. $\overset{\circ}{\overbrace{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}}} = \varnothing$.

3.2 Exemples de fonctions de plusieurs variables

Les fonctions de plusieurs variables interviennent de manière naturelle dans des contextes variés et tout à fait ordinaires. Commençons par quelques exemples.

– Aire (algébrique) d'un rectangle :

$$S : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

– Volume d'un parallélépipède rectangle et du cylindre :

$$V : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & xyz \end{array} \text{ et } V : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\rho,h) & \mapsto & \pi\rho^2 h \end{array}$$

– Energies potentielle et cinétique d'un point matériel en mécanique newtonienne :

$$E : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (m,v,z) & \mapsto & (\frac{1}{2}mv^2, mgz) \end{array}$$

– Intérêts cummulés, s solde en $t = 0$, c taux d'intérêt :

$$I : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3_+ & \to & \mathbb{R} \\ (s,c,t) & \mapsto & s(1+c)^t \end{array}$$

– Coordonnées sphériques :

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta,\phi) & \mapsto & (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi) \end{array}$$

3.3 Continuité

Définition 3.3.1 (*en dimension* 3) Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Les (3) *applications partielles* déduites de f sont :
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x,b,c)$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f(a,y,c)$
- $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto f(a,b,z)$

Remarque 3.3.1 Ces applications jouent un role fondamental dans l'étude d'une application de plusieurs variables (car elles permettent de réduire la dimension de la source) mais elles ne suffisent pas !

Définition 3.3.2 Une application $f : A \to \mathbb{R}$ est *continue* en $p_0 \in A$ si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p \in A : \|p - p_0\| < \delta) : |f(p) - f(p_0)| < \epsilon.$$

L'application f est *continue sur* A si elle est continue en tout $p_0 \in A$.

Proposition 3.3.1 (Continuité séquentielle) Une application f est continue en $p \in A$ ssi pour toute suite (p_n) de points de A convergeant vers $p \in A$, $(f(p_n))$ converge vers $f(p)$.

En particulier, la proposition 3.3.1 assure :

$$f \text{ continue en } p_0 \Leftrightarrow \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$$

Remarque 3.3.2 Compte-tenu de la définition de la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^n$, une application $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (par exemple) est continue si et seulement si g_i est continue pour $i \in \{1,2,3\}$.

Exemple 3.3.1

1. Les résultats généraux en une variable restent valables (fonction polynômiale, somme, produit, quotient, composition... sont continues) mais...
2. (a) Il faut se garder d'adopter les mêmes réflexes que dans $\mathbb{R}$. Compte-tenu des dimensions, il existe de nombreuses « directions tendant » vers p.

   (b) En effet, *pièges* :

   i. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;

   ii. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ (en particulier $val\ N > val\ D \not\Rightarrow C^0$).

   iii. $\tilde{f}(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $\tilde{f}(0,0) = 0$.
3. En particulier, les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, + : (x,y) \mapsto x+y$ (*linéaire*) et $\times : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$ (*bilinéaire*) sont continues.
4. $(x,y) \mapsto e^{\sin(x+\ln(1+|y|))}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ($f = \exp \circ \sin \circ + (\pi_1, \ln(1+|\cdot|) \circ \pi_2)$).

Définition 3.3.3 L'application $f : A \to \mathbb{R}^m$ est *lipschitzienne* de rapport $K \geqslant 0$ si pour tout $p, q \in A$: $\|f(p) - f(q)\| \leqslant K\|p-q\|$.

Proposition 3.3.2 Une application lipschitzienne est continue.

Mentionnons aussi le critère suivant (utile notamment pour vérifier la fermeture ou l'ouverture de certaines parties de $\mathbb{R}^2$) :

Proposition 3.3.3 (Image réciproque d'un ouvert (resp. fermé)) L'image réciproque d'une partie ouverte (resp. fermée) quelconque de $\mathbb{R}$ par une application $f : U \to \mathbb{R}$ est ouverte (resp. fermée) dans U si et seulement si f est continue.

Exemple 3.3.2

1. Si $f(x) = x^2$ alors $f^{-1}(]-10^{-10000}, 1[) =]-1,1[$ ouvert ; $f^{-1}(1) = \{\pm 1\}$ fermé.
2. Si $f(x,y,z) = ||(x,y,z)||_2^2$ alors $f^{-1}([0,1[) = B(0,1)$ ouvert ; $f^{-1}(1) = S^2(0,1)$ fermé.

Enfin, rappelons le théorème de Weierstrass qui confère aux fonctions continues un comportement contrôlé sur les parties compactes.

Théorème 3.3.1 (Weierstrass) Soit $A \subset U$, A compact (*i.e.* fermé et borné) dans $\mathbb{R}^2$. Si f est continue sur A alors f est bornée et atteint ses bornes.

Dém. On va le démontrer pour la borne inférieure. Soit $(p_n) \subseteq A$ une suite *minimisante* (*i.e.* $f(p_n)$ converge vers $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Comme (p_n) est à valeurs dans A compact, il existe une sous-suite (p_{n_k}) convergente vers p dans A. Dés lors, $f(p_{n_k}) \to f(p) = m \in \mathbb{R}$.

Interprétation : notons $m = \inf f(A) \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $> -\infty$) et $M = \sup f(A) \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $< +\infty$). Alors il existe $p_{min}, p_{max} \in A$ tels que $f(p_{min}) = m$ et $f(p_{max}) = M$.

Exemple 3.3.3 Soit $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la première projection définie par $\pi_1(x,y) = x$. Alors $\pi_1(B'(0,1)) = [-1,1]$; $\pi_1(\pm 1, 0) = \pm 1$.

3.4 Différentiabilité et gradient

L'estimation des variations d'une fonction requiert souvent d'en connaître les propriétés locales. Bien que la situation ne l'exige pas toujours, on s'intéressera principalement ici, à une classe particulière d'applications, suffisamment régulières : la classe des applications qui sont localement semblables à une application affine (car on connait assez bien ces dernières).

Dans cette partie, on supposera que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.4.1 Soient $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ et $p \in U$. L'application f est *différentiable* en p si il existe $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que

$$f(p+u) = f(p) + L(u) + o(u)$$

avec $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{o(u)}{\|u\|} = 0$.

L'*application linéaire* L (qui est **unique**) est la *différentielle* de f **en** p ; on note $df(p) = L$ (et donc $df(p).u = L(u)$ pour $u \in \mathbb{R}^n$). La définition s'étend naturellement à $f : U \to \mathbb{R}^p$.

Pour que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit différentiable en (x, y) il faut et il suffit que $f(x+h, y+k) = f(x, y) + ah + bk + o(h, k)$.

Remarque 3.4.1

1. Compte-tenu du caractère local de la définition précédente, il faut entendre :
   (a) « pour tout u suffisamment petit », sinon $p+u$ peut très bien ne pas appartenir à U !
   (b) la condition $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{o(u)}{\|u\|} = 0$ signifie :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \|u\| < \delta) : \frac{|o(u)|}{\|u\|} < \epsilon.$$

   (Ici, $o(u) = f(p+u) - f(p) - L(u)$. On note aussi $o(u) = \|u\|\epsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u \to 0} \epsilon(u) = 0$.)
2. L'application linéaire $df(p) = L$ dépend de p (et de f) mais pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.4.1

1. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en p_0 alors $f(p_0 + u) = f(p_0) + f'(p_0).u + o(u)$ et $f'(p_0)$ s'identifie au *nombre dérivé* usuel.
2. Si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(p_0 + u) = f(p_0) + f(u)$ donc $df(p_0).u = f(u)$ et $o(u) = 0$.
3. Si $f_9(x, y) = x + y$ alors $df_9(p).u = df_9(x, y).(h, k) = f_9(h, k) = h + k$.
4. Si $f_{10}(x, y) = xy$ alors $f_{10}(p+u) = f_{10}(x+h, y+k) = (x+h)(y+k) = xy+xk+yh+hk$. Or $\dfrac{|hk|}{\|(h, k)\|_2} \leq \dfrac{1}{2}\|(h, k)\|_2$. Donc $df_{10}(p).u = xk + yh$.

5. Les résultats généraux restent valables (fonction polynômiale, somme, produit, quotient... sont différentiables). En particulier, la différentielle est un opérateur linéaire *i.e.* $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$.
6. L'application $f(x, y) = ||(x, y)||_2^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $df(p).u = 2xh + 2yk$.
7. Une norme n'est **jamais** différentiable en 0.

Définition 3.4.2 Si la limite $\lim_{t \to 0} \dfrac{f(p + tu) - f(p)}{t}$ existe, on l'appelle la *dérivée directionnelle* de f dans la direction u en p et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial u}(p)$.
La *dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p)$ (resp. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)$) est la dérivée directionnelle en p dans la direction $e_1 = i = (1, 0)$ (resp. $e_2 = j = (0, 1)$).

Une dérivée partielle s'obtient donc en dérivant formellement par rapport à une variable les autres variables étant fixées. C'est aussi la dérivée usuelle de la fonction partielle correspondante.

Exemple 3.4.2

1. $\dfrac{\partial f_9}{\partial x}(p) = 1\,;\ \dfrac{\partial f_9}{\partial y}(p) = 1$
2. $\dfrac{\partial f_{10}}{\partial x}(p) = y\,;\ \dfrac{\partial f_{10}}{\partial y}(p) = x$
3. $f_{11}(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$.
4. Coordonnées sphériques !

Proposition 3.4.1 Si f est différentiable en p alors $df(p).u = \dfrac{\partial f}{\partial u}(p)$.

Corollaire 3.4.1 Si f est différentiable en p alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)$ existent.

Remarque 3.4.2 La **réciproque est fausse**, *cf* f_7 et proposition 3.4.2 suivante.

Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, on démontre :

Proposition 3.4.2 Une application différentiable en un point est continue en ce point.

Proposition 3.4.3 Si g est différentiable en p et f différentiable en $g(p)$ alors $f \circ g$ est différentiable en p et

$$d(f \circ g)(p) = df(g(p)) \circ dg(p)$$

(composée d'applications linéaires).

Corollaire 3.4.2 Une application $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en p ssi f_i est différentiable en p pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. De plus $df(p) = (df_1(p), \ldots, df_m(p))$.

Définition 3.4.3 On identifie généralement la différentielle *en un point* de

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

à la *matrice jacobienne en ce point* :

$$Jf := mat(df, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Lorsque $m = n$, le déterminant de la matrice (*carrée*) jacobienne est le *jacobien*, jf, de f. S'il est non nul en p_0 et si f est C^1 alors f est **localement** inversible en p_0.

Remarque 3.4.3

1. Si $p \in U$ et $u = (h, k)$ alors $df(p).u = \dfrac{\partial f}{\partial x}(p)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(p)k$.
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors
$$Jf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ ou encore, au point } p,\ Jf(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(p) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \end{pmatrix}.$$
3. On a donc $J(f \circ g) = Jf_g Jg$.

Exemple 3.4.3

1. Le jacobien du jeu de coordonnées polaires est ρ.
2. Le jacobien du jeu de coordonnées cartésiennes est 1 et celui du jeu de coordonnées sphériques est $-\rho^2 \sin\varphi$.

Définition 3.4.4 Le *gradient* de f (relativement au produit scalaire euclidien) est le *champ de vecteur* $\nabla f = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y})$ en coordonnées cartésiennes ; si $p \in U$ alors $\nabla f(p) = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(p), \dfrac{\partial f}{\partial y}(p))$.

Exemple 3.4.4 Le gradient de f_4 en p est le vecteur $\nabla f_4(p) = 2(x, y)$.

Remarque 3.4.4

1. On a : $df(p).u = (\nabla f(p)|u)$.
2. Le gradient de f (s'il est non nul) est dirigé vers les *potentiels croissants* de f. En effet, soit γ une courbe dérivable passant par $0 \in f^{-1}(0)$ en $t = 0$ telle que $\gamma'(0) = u$ avec $u \in S^{n-1}$. Alors, comme $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)).\gamma'(t) = (\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t))$, on obtient :
$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(t) &= f \circ \gamma(0) + (f \circ \gamma)'(0)t + o(t) \\ &= f(0) + t(\nabla f(\gamma(0))|\gamma'(0)) + o(t) \\ &= t(\nabla f(0)|u) + o(t) \end{aligned}$$
Or, $(\nabla f(0)|u)$ est maximal ssi u est colinéaire à $\nabla f(0)$ et de même sens (voir l'inégalité de Cauchy-Schwartz). On conclut que la croissance de f le long d'un chemin dérivable γ tel que $\gamma'(0) \in S^{n-1}$ est maximale ssi $\gamma'(0) = \dfrac{\nabla f(0)}{|\nabla f(0)|}$.

3. (a) Les opérateurs différentiels tels que divergence, rotationnel et laplacien sont classiquement écrits à l'aide de l'opérateur ∇.
   (b) Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{X}$ à travers une surface orientée S est relié à la divergence de ce champ par la formule d'Ostrogradski :
$$\iint_S (\vec{X}|\vec{n})ds = \iiint_V div(\vec{X})dv \text{ avec } S = \partial V.$$
   (c) Dans le cas particulier d'un champ de gradient $\vec{X} = \nabla f$, on obtient :
$$\iint_S (\nabla f|\vec{n})ds = \iiint_V \Delta f dv.$$

Proposition 3.4.4 Les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (existent et) sont continues sur U ssi f est continûment différentiable sur U (*i.e.* $df : U \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$ est une application continue).

Exemple 3.4.5 L'application f_4 est continûment différentiable.

Remarque 3.4.5 Si $\varphi : \mathbb{R}^2 \overset{C^1}{\to} \mathbb{R}^2$ est injective, $j\varphi$ partout non nul, et si f est continue sur le compact $K \subset \operatorname{Im}\varphi$ alors
$$\iint_K f dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |j\varphi| dxdy \text{ (\textit{changement de variable})}.$$

Lemme 3.4.1 (Schwartz) Si f est deux fois différentiable en p alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p).$$

Exemple 3.4.6 Si $f_{12}(x, y) = \sin(xy^2)$ alors f_{12} est C^∞ donc
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_{12}}{\partial y \partial x}(x, y) &= 2y\cos(xy^2) + y^2(-2yx\sin(xy^2)) \\ &= 2y\cos(xy^2) - (2yx)y^2\sin(xy^2) = \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x \partial y}(x, y).\end{aligned}$$

Remarque 3.4.6 Sous les hypothèses précédentes, la matrice hessienne :
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$
des dérivées partielles secondes de f en (x, y) est symétrique.

Exemple 3.4.7 $H_{f_{12}}(x, y) = \begin{pmatrix} -y^4\sin(xy^2) & \dfrac{\partial^2 f_{12}}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f_{12}}{\partial x \partial y}(x, y) & 2x(\cos(xy^2) - 2xy^2\sin(xy^2)) \end{pmatrix}.$

3.5 Développement limité d'ordre 2

Théorème 3.5.1 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en un point p_0 d'un ouvert U. Alors pour tout u suffisamment petit :

$$f(p_0 + u) = f(p_0) + df(p_0).u + \frac{1}{2}d^2f(p_0)(u, u) + o(\|u\|^2)$$

(avec $\dfrac{o(\|u\|^2)}{\|u\|^2} \to 0$ quand $u \to 0$).

Sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$
$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2) + o(h^2 + k^2)$$

avec $\dfrac{o(h^2 + k^2)}{h^2 + k^2} \to 0$ quand $(h, k) \to (0, 0)$.

Remarque 3.5.1

$$\lim_{u \to 0} \frac{o(\|u\|^2)}{\|u\|^2} = 0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall\ 0 < \|u\| < \alpha) : \frac{o(\|u\|^2)}{\|u\|^2} < \epsilon.$$

Exemple 3.5.1 $f_{12}(h, 1 + k) = h + 2hk + o(h^2 + k^2)$.

Proposition 3.5.1 Si f est deux fois différentiable sur un voisinage U de p_0, alors pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $[p_0, p_0 + u] \subset U$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(p_0 + u) = f(p_0) + df(p_0).u + \frac{1}{2}d^2f(p_0 + \theta u)(u, u).$$

Le $DL_2(f)_{p_0}$ renseigne sur le comportement local *à l'ordre* 2 de f au voisinage de p_0.

4 Optimisation

4.1 Résultats généraux

Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.1.1 La fonction f présente un *minimum* (resp. *maximum*) *global* (ou *absolu*) en $p_0 \in A$ si pour tout $p \in A$: $f(p) \geqslant f(p_0)$ (resp $\leqslant$). L'*extremum* ou *point extrémal* p_0 est :

- *strict* si pour tout $p \in A - \{p_0\}$ on a $f(p) > f(p_0)$ (resp. $<$)
- *local* (ou *relatif*) si il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $p \in B(p_0, \rho) \cap A$: $f(p) \geqslant f(p_0)$ (resp $\leqslant$).

Exemple 4.1.1 L'application f_4 admet un minimum global strict en $(0, 0)$.

4.1.1 Un résultat d'existence

En vertu du théorème de Weierstrass, on a :

Proposition 4.1.1 Si f est une fonction continue sur une partie compacte alors f possède un maximum et un minimum.

Corollaire 4.1.1 Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\lim_{\|p\|\to+\infty} f(p) = +\infty$ alors f est minorée et il existe $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(p_0) = \inf_{p\in\mathbb{R}^2} f(p)$.
Dém. En effet, il existe $R \geqslant 0$ tel que si $\|p\| > R$ alors $f(p) > f(0)$. Ainsi, $\inf f = \inf_{B'(0,R)} f$. En vertu de la proposition précédente, cet inf est réalisé.

4.1.2 Une condition du premier ordre

En une variable, il est bien connu que le nombre dérivé d'une fonction (lorsqu'il existe) est nul, en un point extrémal. Ce résultat est conservé lorsque la variable est vectorielle.

Proposition 4.1.2 (CN1) Si f est différentiable en p_0 et **si** p_0 est un extremum de f **alors** $df(p_0) = 0$.
Dém. Supposons que f présente un minimum local en p_0.
Soient $t \neq 0$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\frac{f(p_0 + tu) - f(p_0)}{t} \leqslant 0 \text{ si } t < 0$$

et

$$\frac{f(p_0 + tu) - f(p_0)}{t} \geqslant 0 \text{ si } t > 0.$$

D'où $df(p_0) = 0$.
Autre démonstration. Notons $p_0 = (x_0, y_0)$. Si $h \in \mathbb{R}^*$ alors

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{o(h)}{h}.$$

Donc

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leqslant 0.$$

De manière analogue

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geqslant 0.$$

Dès lors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ d'où le résultat.

Définition 4.1.2 Le point p est *critique* pour f si $df(p) = 0$. On note $C(f)$ ou C_f ou $\Sigma(f)$ ou Σ_f l'ensemble des points critiques de f.

Exemple 4.1.2

1. $C_{f_4} = \{0\}$.
2. Si $f_{13}(x) = x^3$ alors $f'_{13}(0) = 0$ mais f_{13} n'est pas extrémale en 0.

4.2 Extrema libres (optimisation sans contrainte)

4.2.1 Position du problème

On cherche les extrema dans U ouvert de $\mathbb{R}^2$, d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ supposée deux fois différentiable sur U. Ces extremas sont *libres* de varier dans U.

On va voir que le comportement de f est étroitement lié à la forme quadratique $q(u) = d^2f(p_0)(u,u) = d^2f(p_0).u^2$.

Cas de la dimension 1 : Soit p un point critique d'une fonction $f :]a,b[\xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$.

1. Si $f''(p) > 0$ (resp. $f''(p) < 0$) alors p est un minimum (resp. maximum) local strict.
2. Si $f''(p) = 0$ alors on ne peut rien dire encore :
   (a) si $f^{(k)}(p) = 0$ pour tout $1 < k < K$ et $f^{(K)}(p) \neq 0$:
      i. K pair : si $f^{(K)}(p) > 0$ (resp. $f^{(K)}(p) < 0$) alors p est un minimum (resp. maximum) local strict ;
      ii. K impair : f ne présente ni maximum ni minimum local en p (*type point d'inflexion*).
   (b) sinon (*i.e.* $f^{(k)}(p) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ - on dit que f est une *fonction plate* en p), il faut procéder autrement.

Remarque 4.2.1 si $f = 1_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{1}{x}}$ alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et plate en 0. En particulier f n'est pas analytique en 0 (*i.e.* f n'est pas égale à sa série de Taylor).

4.2.2 Une condition du second ordre

Méthode de Gauss

On va réduire une forme quadratique $q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j$ à l'aide de la *méthode de Gauss*, en faisant chuter le nombre de variables de manière itérative. On pose $q_1 = q$.

Deux cas se présentent :

- il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\alpha_{ii} \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = 1$; on écrit le début d'un carré :

$$\begin{aligned} q_1(u) &= \alpha_{11}(x_1^2 + x_1 l(x_2, \dots, x_n)) + q'(x_2, \dots, x_n) \text{ où } l \text{ est une forme linéaire} \\ &= \alpha_{11}(x_1 + \frac{l}{2})^2 + q' - \alpha_{11}\frac{l^2}{4}. \end{aligned}$$

  Puis on recommence avec $q_2(x_2, \dots, x_n) = q'(x_2, \dots, x_n) - \alpha_{11}\dfrac{l(x_2, \dots, x_n)^2}{4}$.

- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $\alpha_{ii} = 0$; alors il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : \alpha_{ij} \neq 0$ (sinon $q = 0$) ; on peut supposer $\alpha_{12} \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} q_1(u) &= \alpha_{12}(x_1x_2 + x_1 l_1(x_3, \dots, x_n) + x_2 l_2(x_3, \dots, x_n)) + q'(x_3, \dots, x_n) \\ &= \alpha_{12}(x_1 + l_2)(x_2 + l_1) + q' - \alpha_{12} l_1 l_2 \\ &= \alpha_{12}\frac{(x_1 + l_2 + x_2 + l_1)^2 - (x_1 + l_2 - x_2 - l_1)^2}{4} + q' - \alpha_{12} l_1 l_2. \end{aligned}$$

  On recommence avec $q_2(x_3, \dots, x_n) = q'(x_3, \dots, x_n) - \alpha_{12} l_1(x_3, \dots, x_n) l_2(x_3, \dots, x_n)$.

On a ainsi écrit q comme somme (ou différence) de carrés d'au plus n formes linéaires indépendantes.

Exemple 4.2.1 On considère $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3^2 + x_1x_3$.

1. $q(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + \frac{x_1}{2})^2 - \frac{x_1^2}{4} + x_1x_2 = (x_3 + \frac{x_1}{2})^2 - \frac{1}{4}(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2$.
2. $$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_20 + x_3^2 = (x_1 + 0)(x_2 + x_3) - 0x_3 + x_3^2 \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2 - x_3)^2}{4} + x_3^2. \end{aligned}$$
3. $\sigma(q) = (2, 1)$.

Proposition 4.2.1 (CS2 : classification des points critiques) Soit f une fonction deux fois différentiable en $p_0 \in U$, supposé critique pour f. Notons $q(u) = d^2f(p_0).u^2$.

1. Si q est définie positive (resp. négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local strict en p_0.
2. Si q est non dégénérée et non définie alors f ne présente pas d'extremum en p_0.
3. Si q est dégénérée alors on ne peut pas conclure (aucune conclusion n'est à exclure).

Dém.

1. On va traiter la cas q définie positive. On a :
$$f(p_0 + u) = f(p_0) + \frac{1}{2}q(u) + o(\|u\|_2^2)$$
car p_0 est point critique de f supposée deux fois différentiable en p_0. En vertu de la nature de la forme quadratique, il existe donc $a > 0$ tel que $q(u) \geqslant a\|u\|_2^2$ pour tout u. Par suite, pour tout $u \neq 0$ suffisamment petit,
$$f(p_0 + u) - f(p_0) \geqslant \|u\|_2^2(\frac{a}{2} + \frac{o(\|u\|_2^2)}{\|u\|_2^2}).$$
Finalement, $f(p_0 + u) - f(p_0) > 0$ pour $u \neq 0$ suffisamment petit.
2. On a :
$$f(p_0 + u) - f(p_0) = \frac{1}{2}q(u) + o(u^2)$$
avec q non dégénérée non définie (*i.e.* q change de signe). Donc il existe $u \in S^{n-1}$ (resp. $v \in S^{n-1}$) tel que $q(u) = \lambda < 0$ (resp. $q(v) = \mu > 0$). Par suite, on a :
$$f(p_0 + tu) - f(p_0) = t^2(\frac{\lambda}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}) < 0$$
et
$$f(p_0 + tv) - f(p_0) = t^2(\frac{\mu}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}) > 0$$
pour tout $0 < |t| << 1$.

Remarque 4.2.2 (**Important**) Evidemment, si q est *dégénérée* **mais** qu'il existe u et v comme ci-dessus (*i.e.* $\sigma(q) = (s, t)$ avec $s > 0$ et $t > 0$), alors la conclusion de 2. demeure.

Proposition 4.2.2 Soit p_0 un point critique d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur un ouvert U. Si il existe $V \in \mathcal{V}(p_0)$ tel que pour tout $p \in V$, $d^2f(p) \geqslant 0$ *i.e.* f est *convexe* sur V (resp. > 0 *i.e.* f est *strictement convexe*) alors p_0 est un minimum local (resp. strict) de f.

Dém. En effet, pour tout $0 < \|u\| << 1$, il existe $p \in]p_0, p_0+u[$ tel que $f(p_0+u) - f(p_0) = \frac{1}{2} d^2 f(p)(u,u)$. D'où le résultat.

Exemple 4.2.2 L'application f_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On a : $df_3(p) = 0 \Leftrightarrow p \in \{0\} \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, $H_{f_3}(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0$. Donc, $(0,y)$ est un minimum local de f_3 ; il est clair que c'est un minimum global non strict.

Proposition 4.2.3 (CN2) Si f est deux fois différentiable en un minimum (resp. maximum) local p alors la forme quadratique $q(u) = d^2 f(p).u^2$ est positive (resp. négative).
Dém. En effet, si p_0 est un minimum local de f alors

$$(\exists \eta > 0)(\forall u \in S_\eta^{n-1}) : 0 \leqslant f(p_0 + u) - f(p_0) = \frac{1}{2} d^2 f(p_0)(u,u) + o(u^2).$$

Par suite,

$$\forall \epsilon > 0, -\epsilon \leqslant \inf_{u \in S^{n-1}} d^2 f(p_0)(u,u).$$

4.2.3 Cas de la dimension 2

Dans ce cas, en appliquant le corollaire au théorème de Sylvester - proposition **??** - on obtient un critère commode pour déterminer la nature de q.

Proposition 4.2.4 Soit p_0 un point critique de f. Posons $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)$. Soit $q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$ et notons $\Delta = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2$.

1. $\Delta > 0$: q est définie ;
   (a) $r < 0$ ($\Leftrightarrow tr(q) < 0$) : f présente un maximum local strict en p_0
   (b) $r > 0$ ($\Leftrightarrow tr(q) > 0$) : f présente un minimum local strict en p_0 ;
   on dit que p_0 est un *extremum local (strict)*.
2. $\Delta < 0$: q est non dégénérée non définie ; f ne présente ni minimum ni maximum local en p_0 ; on dit que p_0 est un *point selle*.
3. $\Delta = 0$: on ne peut rien conclure (q est dégénérée).

Exemple 4.2.3

1. $f_4(x,y) = x^2 + y^2$.
2. $f_{14}(x,y) = x^2 - y^2$.
3. $f_{15}(x,y) = x^2 + y^6$.
4. $f_{16}(x,y) = x^2 - y^6$.