UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Master 1re année — Année 2006/2007

Probabilités de base - DM 1

À rendre en cours le lundi 25 septembre ou en TD le mardi 26 septembre.

Exercice 1. *Inverse de loi de Cauchy*
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ c'est-à-dire de densité $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^{-1}$.

Exercice 2. *Partie entière d'une v.a. exponentielle*
Soit X une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Quelle est la loi de $1 + [X]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x ?

Exercice 3. *Convergence dominée*
On considère la fonction réelle $u(x) = (1 + |x|)^{-1}$.

1. Soit X une variable réelle. On considère, pour $s \geq 0$, $\theta(s) = \mathbb{E}[u(sX)]$.

Montrer que θ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Exprimer $\theta'(s)$ comme une espérance. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$.

2. Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $c \in]0, 1[$. On considère la variable aléatoire $X = (U - c)^+$. Calculer, pour la variable X, $\theta(s)$ puis $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$. Est-ce cohérent avec la question précédente ?

Exercice 4. *Somme aléatoire de v.a. aléatoires*
Soient X_0, ..., X_n $n+1$ v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées ; soit N une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante de X_0, ..., X_n. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

Exprimer la fonction caractéristique de Y en fonction de celle de X_1.

Exercice 5. *Variables aléatoires exponentielles indépendantes*
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z et en déduire sa loi.
2. Montrer $\mathbb{P}(Z = X) = \lambda/(\lambda + \mu)$.
3. Que dire des variables aléatoires Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$?