Les séries numériques — Généralités

- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$
- $(u_n)_{n\geq 0}$ suite dans $\mathbf{K}$
  - ⋆ On forme les sommes

$$S_0 = u_0, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- Étude de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$
  - ⋆ On peut souvent dire si (S_n) est convergente ou pas
  - ⋆ Calcul de la limite difficile en général !

1. Définitions et Exemples.

- Notation : si (u_n) est une suite dans $\mathbf{K}$, on note

$$S_0 = u_0, \qquad \forall n \geq 1, \quad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbf{K}$. $S_n = u_0 + \ldots + u_n$.

1. Si la suite de t.g. S_n est convergente, on dit que *la série de t.g. u_n est convergente* ou encore que *la série $\sum u_n$ converge.*
2. Si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente, on dite que *la série de t.g. u_n est divergente* ou que *la série $\sum u_n$ diverge.*

- S_n = somme partielle de la série $\sum u_n$
- Si la série $\sum u_n$ est convergente, la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ s'appelle la *somme de la série* $\sum u_n$ et se note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou encore,} \quad \sum_{n\geq 0} u_n$$

- Étudier la nature de la série $\sum u_n$ c'est dire si cette série est convergente ou divergente

Remarque. 1. Si la suite (u_n) est définie seulement pour $n \geq n_0$, on peut considérer la série $\sum u_n$; les sommes partielles sont alors

$$S_n = u_{n_0} + \ldots + u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Si ces sommes partielles convergent, la limite est $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k \geq n_0} u_k$

2. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On a, pour $n \geq n_0$,

$$S_n = u_0 + \ldots + u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n$$

(S_n) est cv ssi $(S_n - S_{n_0})$ est cv.

La nature d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite ! Par contre, la valeur de la somme si !

3. Lorsque $\sum u_n$ est cv, notons S la limite de (S_n) i.e. $S = \sum_{n \geq 0} u_n$. Pour $n \geq 0$, le reste d'ordre n est

$$R_n = S - S_n = \sum_{k>n} u_k \longrightarrow 0, \quad \text{si } n \to \infty.$$

Proposition. *Si* $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim u_n = 0$.

- En effet, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Définition. Lorsque (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente (GDV).

Remarque. Attention, la réciproque est fausse ! ! ! On peut avoir $\lim u_n = 0$ et $\sum u_n$ divergente.

Exemple. 1. Série géométrique. Soit $z \in \mathbf{C}$. On étudie $\sum z^n$, $u_n = z^n$.

$$S_n = 1 + z + \ldots + z^n = \begin{cases} n+1, & \text{si } z = 1, \\ \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, & \text{si } z \neq 1. \end{cases}$$

- Si $|z| \geq 1$, $|u_n| = |z^n| = |z|^n \geq 1$. La série est GDV !
- Si $|z| < 1$, $z^{n+1} \to 0$ et

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

2. Série harmonique. Pour $n \geq 1$, $u_n = 1/n$. On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a $\lim_{n \to \infty}(1/n) = 0$ et pourtant $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge ! En effet,

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si $\sum n^{-1}$ convergeait, on aurait $\lim (H_{2n} - H_n) = 0$! !

Proposition. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbf{K}$. On note, pour $n \geq 0$, $u_n = a_n - a_{n+1}$. La série $\sum u_n$ est convergente ssi (a_n) est convergente et dans ce cas*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = a_0 - \lim a_n.$$

- En effet,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}.$$

Exemple. 1. $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ cv : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

2. $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ diverge : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

2011/2012 : fin du cours 2

2. Opérations sur les séries.

Proposition. *1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cv, alors $\sum (u_n + v_n)$ cv et*

$$\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n.$$

2. Si $\sum u_n$ cv, alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\sum (\lambda u_n)$ cv et

$$\sum_{n\geq 0} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$$

Corollaire. *Soit $\lambda \neq 0$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum (\lambda u_n)$ ont même nature.*

Remarque. 1. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente

2. On ne peut rien dire pour la somme de deux séries divergentes :

   (a) $u_n = v_n = 1/n$, $\sum (u_n + v_n)$ diverge

   (b) $u_n = 1/n$, $v_n = -1/(n+1)$, $u_n + v_n = 1/(n(n+1))$, $\sum (u_n + v_n)$ converge

Proposition. *Soit (u_n) une suite complexe ; $u_n = a_n + \imath b_n$. $\sum u_n$ cv ssi $\sum a_n$ et $\sum b_n$ cv et dans ce cas*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} a_n + \imath \sum_{n\geq 0} b_n, \qquad \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Re}(u_n), \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}(u_n).$$

3. Convergence absolue.

Définition. Soit $\sum u_n$ une série dans $\mathbf{K}$. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, on dit que la série de t.g. u_n est absolument convergente (ACV).

Théorème. *Une série absolument convergente est convergente et* $|\sum u_n| \leq \sum |u_n|$

- Attention : la réciproque est fausse cf. exemple plus loin.

Définition. Si la série $\sum u_n$ est convergente et la série $\sum |u_n|$ divergente, on dit que la série de t.g. u_n est semi-convergente (SCV).

Preuve du théorème. • On montre que le suite (S_n) est de Cauchy

- Puisque $\sum |u_n|$ est cv, $T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ est de Cauchy.
- Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p \geq 0$ tel que $|T_n - T_m| < \varepsilon$ dès que $p \leq n \leq m$.
- D'après l'inégalité triangulaire, si $p \leq n \leq m$,

$$|S_n - S_m| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_m| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_m| = |T_n - T_m| < \varepsilon.$$

- On suppose que $\sum |u_n|$ cv.
- Pour l'inégalité, on envoie $n \to \infty$, dans l'inégalité

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq |T_n| = \sum_{k=0}^{n} |u_k|.$$

$\square$

Remarque. Si $\sum |u_n|$ est GDV, $\sum u_n$ est aussi GDV !

Exemple. La série de t.g. $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n(n+1)}$ est cv pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.

- D'où l'intérêt d'étudier les séries à termes positifs

`Faire la série harmonique alternée à l'aide des suites adjacentes.`

Séries à termes positifs

- Dans ce chapitre, $u_n \geq 0$, pour tout n, et on étudie $\sum u_n$.
- On a $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$: (S_n) est croissante !

1. Généralités.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs.*
$\sum u_n$ converge ssi les sommes partielles sont majorées i.e il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n \leq K$$

- Si $u_n \geq 0$ et $\sum u_n$ diverge on a $S_n \to +\infty$: on écrit parfois $\sum_{n\geq 0} u_n = +\infty$.

Théorème (Comparaison). *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq v_n$.*

1. *Si $\sum v_n$ cv, alors $\sum u_n$ cv et $0 \leq \sum_{n\geq 0} u_n \leq \sum_{n\geq 0} v_n$.*
2. *Si $\sum u_n$ dv, alors $\sum v_n$ dv.*

Démonstration. • On a $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} u_k \leq T_n = \sum_{0\leq k\leq n} v_k$

⋆ Si (T_n) est majorée, il en va de même de (S_n)
⋆ Si (S_n) n'est pas majorée, (T_n) ne l'est pas non plus

□

- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$, $\sum u_n$ cv si $\sum v_n$ cv et $\sum v_n$ est dv si $\sum u_n$ l'est.

Remarque (Retour sur ACV implique CV). • Cas u_n réel. Notons $v_n = |u_n| - u_n$. D'après l'inégalité triangulaire, $v_n = |v_n| \leq 2|u_n|$. $\sum v_n$ cv. Comme $u_n = |u_n| - v_n$, $\sum u_n$ est convergente.

- Cas $u_n \in \mathbf{C}$: $u_n = a_n + \imath b_n$. On a $|a_n| \leq |u_n|$ et $|b_n| \leq |u_n|$. $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont ACV. `Pas fait`

Corollaire. *Soient (u_n) à termes positifs et (v_n) à termes strictement positifs.*
Si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = l > 0$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

- Il existe n_0 tq, pour $n \geq n_0$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - l\right| \leq \dfrac{l}{2}$ soit $u_n \dfrac{l}{2} \leq v_n \leq u_n \dfrac{3l}{2}$.

- Bien penser aux équivalents pour les séries à termes positifs !

Exemple. 1. $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$: $\sum v_n$ cv donc $\sum u_n$ cv.

2. $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$: $\sum v_n$ dv donc $\sum u_n$ dv

- Si $u_n \geq 0$, $v_n > 0$ et $u_n/v_n \longrightarrow 0$ alors $\sum u_n$ cv si $\sum v_n$ cv

  ⋆ Pour $\varepsilon = 1$, il existe n_0 tq $0 \leq u_n \leq v_n$ si $n \geq n_0$

- $u_n = \frac{1}{n^3}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$. On vient de voir que $\sum v_n$ cv ; par suite, $\sum u_n$ cv

2. Comparaison à une série géométrique.

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier n_0 et un réel $0 < k < 1$ tels que

$$\forall n \geq n_0, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k.$$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

- Pour $n > n_0$,

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \ldots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \leq k^{n-n_0}\, u_{n_0} = k^n\, u_{n_0} k^{-n_0}.$$

- Puisque $0 < k < 1$, le théorème de comparaison donne le résultat.

Corollaire. *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs t.q. $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$.*

1. Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;

2. si $l > 1$, la série $\sum u_n$ est GDV

- Si $l = 1$ on ne peut rien dire !

  ⋆ $u_n = 1/n$: $\sum u_n$ dv

  ⋆ $u_n = 1/n^2$: $\sum u_n$ cv

Démonstration. • Dans le premier cas, $k = (1 + l)/2 < 1$ et il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1}/u_n \leq k$

- Dans le second cas, $k = (1+l)/2 > 1$ et il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $u_{n+1}/u_n \geq k$ et

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \ldots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \geq k^{n-n_0} u_{n_0} \geq u_{n_0} > 0.$$

□

2011/2012 : fin du cours 3

Exemple. • Étude de la série de t.g. $u_n = n^2 x^n$.

  - ⋆ Si $x = 0$, $u_n = 0$! Rien à faire !

- Il ne s'agit pas d'une série à termes positifs. On regarde l'ACV
  - ⋆ On a $\lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x|$
  - ⋆ Si $|x| < 1$, la série $\sum u_n$ est ACV d'après le corollaire
  - ⋆ Si $|x| > 1$, d'après le corollaire, $\sum |u_n|$ est GDV donc $\sum u_n$ est aussi GDV
  - ⋆ Si $|x| = 1$, on ne peut pas conclure. Mais $|u_n| = n^2 \to \infty$ donc $\sum u_n$ est GDV
- Si $\sum u_n$ est à termes positifs et $u_{n+1}/u_n \geq 1$ alors u_n est croissante et $\sum u_n$ est GDV sauf si tous les termes sont nuls !

Règle de Cauchy. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe un entier n_0 et un réel $0 < k < 1$ tels que

$$\forall n \geq n_0, \qquad \sqrt[n]{u_n} \leq k.$$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

- En effet, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq k^n$.
- Rappel, si $u_n > 0$, $\sqrt[n]{u_n} = u_n^{1/n} = e^{\ln(u_n)/n}$.

Corollaire. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls. On suppose que* $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

1. *Si $l < 1$, $\sum u_n$ est convergente*
2. *Si $l > 1$, $\sum u_n$ est GDV*

Démonstration. • Si $l < 1$, $k = (1+l)/2 < 1$ et il existe n_0 t.q. $u_n \leq k^n$ si $n \geq n_0$.

- Si $l > 1$, $k = (1+l)/2 > 1$ et il existe n_0 t.q. $u_n \geq k^n \longrightarrow +\infty$.

□

- On utilise cette règle quand u_n comporte des puissances n-ièmes.

Exemple. Étude de la série de t.g. $u_n = x^n/n^n$. Ce n'est pas une série à termes positifs, on étudie d'abord l'ACV. On a $\sqrt[n]{u_n} = |x|/n \longrightarrow 0$. D'après le critère de Cauchy, la série $\sum u_n$ est ACV.

3. Comparaison à une série de Riemann.

Définition. Soit α un réel. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ s'appelle la série de Riemann.

Théorème. *La série de tg* $\dfrac{1}{n^\alpha}$ *est convergente ssi* $\alpha > 1$.

Démonstration. • Si $\alpha \leq 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 : la série est GDV

• Si $0 < \alpha \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$,

$$n = n^\alpha \times n^{1-\alpha} \geq n^\alpha, \qquad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Nous avons vu que $\sum \dfrac{1}{n}$ dv il en va de même de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$

• Soit $\alpha > 1$. Considérons la fonction $f(x) = -\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ définie sur $]0, +\infty[$. L'égalité des AF donne, pour tout $n \geq 2$, l'existence d'un c tel que $n - 1 < c < n$ et

$$f(n) - f(n-1) = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n)^{\alpha-1}} = (n-(n-1))f'(c) = \frac{\alpha-1}{c^\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

⋆ Puisque $\alpha - 1 > 0$, $\lim \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$, la série télescopique de t.g. $\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge.

⋆ Il en va de même de la série de t.g. $\dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$

⋆ Par conséquent la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est cv si $\alpha > 1$.

□

• **Il faut connaître le résultat sur les séries de Riemann par cœur !!**

Critère de Riemann. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls et soit $\alpha \geq 0$.

1. Si $\lim n^\alpha u_n = l > 0$, $\sum u_n$ cv ssi $\alpha > 1$.
2. Si $\alpha > 1$ et $\lim n^\alpha u_n = 0$, $\sum u_n$ cv.
3. Si $\lim n u_n = +\infty$, $\sum u_n$ est divergente.

Démonstration. • Csq du théorème de comparaison !

⋆ Cas 1 : $\sum u_n$ et $\sum n^{-\alpha}$ ont même nature

⋆ Cas 2 : pour $n \geq n_0$, $u_n \leq n^{-\alpha}$.

⋆ Cas 3 : pour $n \geq n_0$, $u_n \geq n^{-1}$.

□

Exemple. 1. Étude des séries de t.g. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$.

(a) $n^{3/2}u_n \longrightarrow 0$ d'où $\sum u_n$ cv

(b) $nv_n \longrightarrow +\infty$ d'où $\sum v_n$ dv

2. Série harmonique alternée — On étudie la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2k(2k-1)}.$$

Puisque $\dfrac{n^2}{2n(2n-1)} \longrightarrow \dfrac{1}{4}$, le critère de Riemann montre que S_{2n} converge vers $l \in \mathbf{R}$. D'autre part, nous avons, pour $n \geq 1$,

$$S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{1}{2n+1} \longrightarrow l$$

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) converge vers l, $\lim S_n = l$. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Comme d'autre part, $\sum \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, la série harmonique alternée est une série semi-convergente. On verra que la valeur de la somme est $-\ln(2)$.

- Si on ne connaît pas le signe de u_n, mais si $\lim n^\alpha u_n = l > 0$, u_n est positif pour $n \geq n_0$ et on peut appliquer le critère de Riemann.

2011/2012 : fin du cours 4

---

4. Comparaison à une intégrale.

- Soit $a \geq 0$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive et décroissante.

- Pour $a \leq n_0 < n$, on a

$$f(n) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \leq f(n_0) + f(n_0+1) + \ldots + f(n-1) + f(n) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt.$$

- En effet, soit $n_0 \leq k \leq n$. Pour $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ et

$$f(k+1) = \int_{k}^{k+1} f(k)\,dt \leq \int_{k}^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) = \int_{k}^{k+1} f(k)\,dt$$

- On fait la somme de ces inégalités de $k = n_0$ à $k = n-1$, pour obtenir

$$f(n_0+1) + \ldots + f(n) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \leq f(n_0) + \ldots + f(n-1)$$

- Soit encore

$$f(n_0) + f(n_0+1) + \ldots + f(n) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$
$$\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt + f(n) \leq f(n_0) + \ldots + f(n-1) + f(n)$$

Définition. Soit $a \geq 0$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$. On dit que l'*intégrale impropre* ou l'*intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge lorsque la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

- Lorsque que f est positive, F est croissante : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si F est majorée, $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Proposition. *Soient $a \geq 0$ et $f : [a, +\infty[$ positive et décroissante.*
La série $\sum f(n)$ converge ssi $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Démonstration. • Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, F est majorée disons par K. Soit n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à a. On a

$$S_n = f(n_0)+\ldots+f(n) \leq f(n_0)+\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \leq f(n_0)+\int_a^n f(t)\,dt \leq f(n_0)+F(n) \leq f(n_0)+K.$$

  ⋆ Les sommes partielles de $\sum f(n)$ sont majorées ! $\sum f(n)$ cv

- Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, puisque f est positive,

$$S_n = f(n_0) + \ldots + f(n) \geq f(n) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \geq \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt = F(n) - F(n_0)$$

  ⋆ Comme $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, les sommes partielles ne sont pas majorées et $\sum f(n)$ dv.

□

Séries de Bertrand. On étudie la série de t.g. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour α et β réels.

- Si $\alpha > 1$, $\gamma = (1+\alpha)/2 > 1$ et $n^\gamma u_n = \dfrac{1}{n^{(\alpha-1)/2}(\ln n)^\beta} \longrightarrow 0$: $\sum u_n$ cv d'après le critère de Riemann
- Si $\alpha < 1$, $nu_n = \dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \longrightarrow +\infty$: $\sum u_n$ dv d'après le critère de Riemann.
- Cas $\alpha = 1$
  - ⋆ $\beta \leq 0$: $u_n \geq \dfrac{1}{n}$ et $\sum u_n$ dv

* $\beta > 0$: la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. La série $\sum u_n$ a même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$. Or pour tout $x \geq 2$, $t = e^s$,

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{ds}{s^\beta} = \begin{cases} \ln\ln x - \ln\ln 2, & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right), & \text{si } \beta \neq 1 > 0 \end{cases}$$

* $\beta > 0$: F est majorée ssi $\beta > 1$.

- En conclusion,
  1. $\alpha > 1$ converge pour tout β
  2. $\alpha < 1$ diverge pour tout β
  3. $\alpha = 1$ converge ssi $\beta > 1$

Compléments sur les séries

1. Séries alternées.

Définition. Une série réelle $\sum u_n$ est alternée lorsque, pour tout $n \geq 0$, $u_n \times u_{n+1} \leq 0$.

- On a dans ce cas $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout n ou $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$ pour tout n
- Par exemple, $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

Proposition (Critère des séries alternées). *Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0, la série $\sum u_n$ est convergente.*
De plus, la somme de la série $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ est comprise entre S_n et S_{n+1} et l'on a

1. $|S - S_n| \leq |u_{n+1}|$;
2. $S - S_n$ *du signe de* u_{n+1}.

Démonstration. • On traite seulement le cas $u_n = (-1)^n |u_n|$.

- On montre que les suite (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En effet,
  - ⋆ $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| + (-1)^{2n+1}|u_{2n+1}| = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$ puisque $|u_n|$ est décroissante.
  - ⋆ $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -|u_{2n+1}| + |u_{2n}| \geq 0$ puisque $(|u_n|)$ est décroissante
  - ⋆ $|S_{2n+1} - S_{2n}| = |(-1)^{2n+1}|u_{2n+1}|| = |u_{2n+1}| \longrightarrow 0$.
- D'après le résultat sur les suites adjacentes, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes de même limite S.
  - ⋆ Les résultats s'en suivent immédiatement.

□

Exemple (Série de Riemann alternée). $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 0$.

Proposition (Critère d'Abel). *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite positive et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe. On suppose que*

1. *il existe $K \geq 0$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq K$$

2. $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0.

Alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

- On retrouve le résultat sur les séries alternées : $b_n = (-1)^n$, $a_n = |u_n|$.

Exemple (Application typique)**.** Soit (a_n) une suite décroissante et convergente de limite 0. $\sum a_n \sin(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $\sum a_n \cos(nx)$ converge pour tout $x \neq 0 \mod 2\pi$.

- Si $x = 0 \mod 2\pi$, $\sum a_n \sin(nx)$ est la série nulle !
- On se ramène au cas où $0 < x < 2\pi$. Montrons que $\sum a_n e^{inx}$ est convergente. On a pour tout n, puisque $e^{ix} \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-ix(n+1)/2} - e^{ix(n+1)/2}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = e^{inx/2} \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

- On en déduit que, pour $0 < x < 2\pi$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sin(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

- Par conséquent, pour $0 < x < 2\pi$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}.$$

- D'après le critère d'Abel, $\sum a_n e^{inx}$ est convergente pour $0 < x < 2\pi$
- Il en va de même de $\sum a_n \cos(nx) = \sum \mathrm{Re}(a_n e^{inx})$ et $\sum a_n \sin(nx) = \sum \mathrm{Im}(a_n e^{inx})$

`2011/2012 : fin du cours 5`

2. Utilisation des développements limités.

`Pas fait`

- Nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3}\right), \quad \varepsilon_n = \varepsilon\left(n^{-1}\right) \longrightarrow 0$$
$$= \frac{1}{6n^{5/2}} - \frac{\varepsilon_n}{n^{5/2}}, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

  - ⋆ Si n grand, u_n est positif
  - ⋆ Critère de Riemann avec $\alpha = 5/2 > 1$: $\sum u_n$ cv

- Nature de la série de terme général

$$u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon\left((-1)^n n^{-1/2}\right) \longrightarrow 0$$

  - ⋆ La série de t.g. $v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ est cv d'après les séries alternées
  - ⋆ Si n est grand $w_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$ est positif ! Critère de Riemann $\alpha = 1$, $\sum w_n$ diverge
  - ⋆ Par conséquent $\sum u_n = \sum(v_n + w_n)$ diverge
  - ⋆ Pourtant $u_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$! Attention, u_n n'est pas positif !

3. Produit de Cauchy.

`Pas fait`

- $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites. Pour $n \geq 0$, on pose

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$

  - ⋆ La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est le produit de convolution des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.
  - ⋆ La série $\sum w_n$ est appelée le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$

Théorème (Mertens)**.** *Si $\sum u_n$ converge absolument et $\sum v_n$ converge (resp. converge absolument), alors $\sum w_n$ converge (resp. converge absolument) et*

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \sum_{n\geq 0} u_n \times \sum_{n\geq 0} v_n.$$

- L'application standard est $e^{x+y} = e^x e^y$

  - ⋆ Pour $z \in \mathbf{C}$, $e^z = \sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$. La série précédente est ACV (d'Alembert).
  - ⋆ $u_n = x^n/n!$, $v_n = y^n/n!$,

$$w_n = (u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

  - ⋆ Mertens

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \sum_{n\geq 0} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \times \sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!}.$$