UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST – S3**
2011–2012

Mathématique

Série n° 6 — Fonctions de plusieurs variables

Ex 6.1 – Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x,y) \coloneqq \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) \coloneqq 0$.

2) $f(x,y) \coloneqq (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) \coloneqq 0$.

3) $f(x,y) \coloneqq xy\ln|x/y|$ si $xy \neq 0$ et $f(x,y) \coloneqq 0$ si $xy = 0$.

4) $f(x,y) \coloneqq \dfrac{y}{x^2}e^{-|y|/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(x,y) \coloneqq 0$ si $x = 0$.

Ex 6.2 – Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x,y,z) \coloneqq e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$ si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ et $f(0,0,0) \coloneqq 0$.

2) $f(x,y,z) \coloneqq xyz\ln(x^2+y^2+z^2)$ si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ et $f(0,0,0) \coloneqq 0$.

Ex 6.3 – Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

1) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) \coloneqq x^2e^{xy}$.

2) $g : U \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $g(x,y) \coloneqq \ln(1+x/y)$ avec $U \coloneqq \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x+y)y > 0\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

3) $h : \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $h(x,y,z) \coloneqq x^2y^3\sqrt{z}$.

Ex 6.4 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) \coloneqq \frac{x^3y}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) \coloneqq 0.$$

1) Étudier la continuité de f.

2) Calculer les dérivées partielles premières de f.

3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

4) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Ex 6.5 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) \coloneqq xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ \text{ si } \ (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) \coloneqq 0.$$

1) Étudier la continuité de f.
2) Calculer les dérivées partielles premières de f.
3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?
4) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
5) La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$?

Ex 6.6 – Dans chacun des cas suivants, déterminer les points en lesquels la fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ admet un extremum en précisant leur nature :

1) $f(x,y) \coloneqq (x^2 - y^2)e^{-x^2}$.
2) $f(x,y) \coloneqq x^3 + y^3 - 3xy$.
3) $f(x,y) \coloneqq x^2y - xy^2 + xy$.
4) $f(x,y) \coloneqq \arctan(xy)$.
5) $f(x,y) \coloneqq x^4 + y^4 - (x-y)^2/4$.
6) $f(x,y) \coloneqq x^2/2 + y^5 + y^4/4 + 1$.