INSTITUT DE GESTION DE RENNES
UNIVERSITÉ RENNES I

DEA de Finance
Année 2002/2003

Évaluation des actifs financiers.

Examen 1re session : durée une heure.

Documents autorisés.

Jeudi 9 janvier 2003.

Responsable : Philippe BRIAND.

Exercice 1. On se place dans le modèle de Cox–Ross–Rubinstein sur une période : le taux d'intérêt sur la période est de 5 %, le prix initial de l'action est de 100 euros. À l'instant 1, l'action peut subir une hausse de 10 % ou une baisse de 15 %.

1. Déterminer le prix d'un call européen de prix d'exercice 100 euros et de maturité 1. Préciser la stratégie de couverture.

2. On considère une option européenne de maturité 1 dont la valeur à l'instant 1 est donnée par $X_1 = f(S_1)$.

En précisant la démarche utilisée, déterminer le prix de vente de cette option ainsi que la stratégie de couverture.

Solution. D'après le cours, le prix d'une option européenne de valeur $f(S_1)$ est donné par

$$P = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[f(S_1)] = \frac{1}{1+r}\left(f(su)p^* + f(sd)(1-p^*)\right),$$

où $p^* = (1+r-d)/(u-d)$ est la probabilité que l'action monte sous la probabilité risque neutre. On obtient $p^* = 4/5$.

Pour une stratégie de couverture, on doit avoir – notant ϕ la somme investie dans l'actif non risqué et ψ le nombre d'actions détenues avant parution du cours S_1 – $P = \phi + \psi S_0$ et $\phi(1+r) + \psi S_1 = f(S_1)$. Ceci donne $\phi(1+r) + \psi su = f(su)$ dans le cas d'une hausse et $\phi(1+r) + \psi sd = f(sd)$ dans celui d'une baisse. Par suite,

$$\psi = \frac{f(su) - f(sd)}{su - sd}.$$

La signification est la suivante : on perçoit la prime P et on achète ψ options en investissant la différence dans l'actif non risqué.

Pour le call de prix d'exercice 100 euros, on a $f(x) = (x-100)^+$ et on obtient $P \simeq 7,62$ et $\psi = 0,4$.

Exercice 2. On désigne par X_t la valeur d'un dollar en euros : le cours du dollar. On suppose que X_0 est un réel strictement positif et que

$$dX_t = X_t\,(\mu dt + \sigma dB_t)\,,$$

où B est un mouvement brownien. On rappelle que

$$X_t = X_0\,\exp\left\{\sigma B_t + \left(\mu - \sigma^2/2\right)t\right\}. \tag{1}$$

1. En appliquant la formule d'Itô (prendre $F(x) = 1/x$), déterminer l'équation satisfaite par $Z_t = 1/X_t$ le prix d'un euro en dollars ?

2. Trouver l'équation satisfaite par $U_t = \ln X_t$ et en déduire celle satisfaite par $V_t = \ln Z_t$.

3. Retrouver l'équation satisfaite par Z_t en utilisant la formule d'Itô pour calculer de^{V_t}.

4. Démontrer la formule (1).

Solution. Rappelons tout d'abord la formule d'Itô. Soient B un mouvement brownien et X un processus vérifiant

$$dX_t = K_t\,dt + H_t\,dB_t.$$

Si $(t,x) \longmapsto F(t,x)$ est 2 fois continûment dérivable en t et x alors

$$dF(t,X_t) = \Big(F'_t(t,X_t) + F'_x(t,X_t)K_t + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,X_t)H_t^2\Big)dt + F'_x(t,X_t)H_t\,dB_t.$$

1. On a $F'(x) = -1/x^2$ et $F''(x) = 2/x^3$. La formule d'Itô donne

$$dF(X_t) = F'(X_t)\mu X_t\,dt + \frac{1}{2}F''(X_t)\sigma^2 X_t^2\,dt + F'(X_t)\sigma X_t\,dB_t = \frac{\sigma^2-\mu}{X_t}\,dt - \frac{\sigma}{X_t}\,dB_t,$$

soit $dZ_t = Z_t\left[(\sigma^2 - \mu)\,dt - \sigma\,dB_t\right]$.

2. On a, d'après la formule (1), $U_t = \ln X_t = \ln X_0 + \sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t$, et donc

$$dU_t = (\mu - \sigma^2/2)\,dt + \sigma\,dB_t.$$

D'autre part, $V_t = \ln Z_t = -\ln X_t = -U_t$; par suite, $dV_t = (\sigma^2/2 - \mu)\,dt - \sigma\,dB_t$.

3. Comme $(e^x)' = e^x$, la formule d'Itô donne

$$de^{V_t} = e^{V_t}(\sigma^2/2 - \mu)\,dt + \frac{1}{2}e^{V_t}\sigma^2\,dt - e^{V_t}\sigma\,dB_t = e^{V_t}\,\left[(\sigma^2 - \mu)\,dt - \sigma\,dB_t\right]$$

soit encore $dZ_t = Z_t\left[(\sigma^2 - \mu)\,dt - \sigma\,dB_t\right]$.

4. Si $Y_t = \sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t$, alors $X_t = X_0 e^{Y_t}$. La formule d'Itô conduit à l'égalité

$$dX_t = X_0\left(e^{Y_t}(\mu - \sigma^2/2)\,dt + e^{Y_t}\sigma^2/2\,dt + e^{Y_t}\sigma\,dB_t\right) = X_t\left[\mu\,dt + \sigma\,dB_t\right].$$

Ceci démontre la formule (1) puisque les solutions de cette équation différentielle stochastique sont uniques.

Exercice 3. 1. On se place dans le modèle de Black–Scholes. Décrire les arguments principaux qui permettent de déterminer le prix des options européennes.

2. Dans un modèle à temps discret, expliquer pourquoi l'existence d'une probabilité risque neutre assure l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Solution. Voir cours.