Séries de Fonctions

1. Définitions et exemples.

- Dans toute ce paragraphe, X et Y sont des parties de $\mathbf{C}$, $X \subset Y$.
- Pour tout entier n, f_n est une fonction définie sur Y à valeurs dans $\mathbf{C}$, $f_n : Y \longrightarrow \mathbf{C}$.
- On s'intéresse à la limite lorsque $n \to \infty$ de la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$:

$$\forall x \in Y, \qquad S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

1.1. Convergence simple.

Définition. La suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ définies sur Y par

$$\forall x \in Y, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

est appelée la série de fonctions de terme général $(f_n)_{n\geq 0}$.
Pour chaque entier n, S_n est la n^{e} somme partielle de la série de fonctions.

- On désigne la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ par $\sum f_n$.

Définition. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $X \subset Y$ si, pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.
Dans ce cas, on désigne par $S(x)$, la valeur de la limite :

$$\forall x \in X, \qquad S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

- Lorsqu'on étudie la convergence simple de $\sum f_n$, c'est à dire lorsqu'on étudie la convergence de la série $\sum f_n(x)$ à x fixé tous les résultats sur les séries numériques sont applicables.

Exemple. 1. $Y = \mathbf{C}$, $f_n(x) = x^n$. La série de t.g. $\sum x^n$ est absolument convergente si $|x| < 1$, grossièrement divergente si $|x| \geq 1$. $\sum f_n$ converge simplement sur $B(0,1)$ et

$$\forall |x| < 1, \qquad S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

2. $Y = \mathbf{C}$, $f_n(x) = x^n/n!$. D'après la règle de d'Alembert, pour tout $x \in \mathbf{C}$, $\sum f_n(x)$ converge absolument. $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbf{C}$.

3. $Y = \mathbf{R}$, $f_n(x) = (-1)^n/\sqrt{x^2+n^2}$. D'après le critère des séries alternées, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sum f_n(x)$ est convergente. $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

- Si $\sum f_n$ converge simplement sur X, alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pour tout $x \in X$.
- La réciproque est fausse ; prendre f_n constante égale à $1/n$.

1.2. Convergence uniforme.

Définition. La série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément vers* S *sur* X si,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |S_n(x) - S(x)| = 0,$$

ce qui signifie qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ telle que

1. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;
2. pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in X$, $|S_n(x) - S(x)| \leq \alpha_n$.

- La convergence uniforme de la série $\sum f_n$ entraîne sa convergence simple
- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur X vers 0.
  - ⋆ Réciproque fausse

Exemple. La série de fonctions de terme général $f_n(x) = (-1)^n/\sqrt{n^2 + x^2}$ est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.

1. Nous avons déjà dit que $\sum f_n$ était simplement convergente sur $\mathbf{R}$.
2. D'après le théorème sur les séries alternées, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |S_n(x) - S(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + x^2}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

- En pratique, l'étude de la convergence uniforme de $\sum f_n$ n'est pas toujours facile.
  - ⋆ On introduit une autre notion de convergence de la série $\sum f_n$

`2011/2012 : fin du cours 7`

1.3. Convergence normale.

Définition. La série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur X si la série numérique de terme général $\sup_{x\in X} |f_n(x)|$ est convergente.

- Ceci signifie qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à termes positifs telle que :
  1. pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq u_n$;
  2. $\sum u_n$ est convergente.

Exemple. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha + x^4}$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ dès que $\alpha > 1$.

Proposition. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur X alors $\sum f_n$ converge uniformément sur X.*

- Attention la réciproque est fausse.
  - ⋆ $f_n(x) = (-1)^n/\sqrt{n^2 + x^2}$; $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| = 1/n$.

Exemple. La série de t.g. $f_n(x) = \sin(x/n)/n$ est normalement convergente sur $[-a, a]$.

Plan d'étude d'une série de fonctions.

- On commence par étudier la convergence simple de $\sum f_n$
    - $\star$ On détermine à cette étape l'ensemble X
- On étudie la convergence normale de $\sum f_n$ sur X ou sur une partie de X
- Si les résultats de convergence normale ne sont pas suffisants, on étudie la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X ou sur une partie de X

2. Traduction des résultats sur les suites de fonctions.

- Les théorèmes d'interversion de symboles se traduisent aisément dans le cadre des séries de fonctions

Théorème (Interversion des limites)**.** *Soient $\sum f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur X et a un point adhérent à X.*
Si, pour tout $n \geq 0$, $\lim_{x\to a} f_n(x) = u_n$, alors la série $\sum u_n$ est convergente et

$$\lim_{x\to a} \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} u_n.$$

Corollaire. *Supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X et notons $S = \sum_{n\geq 0} f_n$.*

1. *Si toutes les fonctions f_n sont continues au point $x_0 \in X$, S est continue en x_0 ;*
2. *Si toutes les fonctions f_n sont continues sur X, S est continue sur X*

Exemple. • $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^4}$; $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbf{R}$.

- $\star$ Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
- $\star$ $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} 0 = 0$

- $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n(1+nx)}$, $x \geq 0$; $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ (et $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$). Comme toutes les f_n sont continues sur $[a, +\infty[$, $\sum_{n\geq 1} f_n$ est continue sur $[a, +\infty[$; ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\sum_{n\geq 1} f_n$ est convergente sur $]0, +\infty[$.

Théorème. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (f_n continues par morceaux), alors*

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} f_n(t)\, dt = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(t)\, dt.$$

Remarque. Plus généralement, si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur $[a,b]$ (f_n continues par morceaux), alors la série de fonctions de terme général $x \longmapsto \int_a^x f_n(t)\,dt$ est uniformément (resp. normalement) convergente sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$,

$$\int_a^x \sum_{n\geq 0} f_n(t)\,dt = \sum_{n\geq 0} \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

Théorème. *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $\sum f_n$ une série de fonctions dérivables (resp. $\mathcal{C}^1$) qui converge simplement sur I. Si la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est dérivable (resp. $\mathcal{C}^1$) sur I et*

$$\forall x \in I, \qquad \Big(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\Big)' = \sum_{n\geq 0} f_n'(x).$$

3. Transformation d'Abel.

- Le critère des séries alternées et la transformation d'Abel s'appliquent également pour les séries de fonctions

Proposition (Séries alternées de fonctions)**.** *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles définies X. On suppose que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in X$,*

1. $f_n(x) \times f_{n+1}(x) \leq 0$ *;*
2. $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$ *;*
3. $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément sur X vers* 0.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur X ; plus précisément, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

1. $|S(x) - S_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$,
2. $S(x) - S_n(x)$ *est du signe de* $f_{n+1}(x)$.

Proposition (Transformation d'Abel)**.** *Pour $n \geq 0$ et $x \in X$, $f_n(x) = g_n(x)h_n(x)$ où g_n est une fonction réelle. On suppose qu'il existe K tel que, pour tout $n \geq 0$, et tout $x \in X$,*

1. $(g_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément vers 0,*
2. $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$,
3. $|\sum_{k=0}^n h_k(x)| \leq K$.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur X

Corollaire. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle décroissante qui converge vers* 0.
Les séries $\sum a_n \cos(nx)$ et $\sum a_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, pour tout $0 < \alpha < \pi$.

`2011/2012 : fin du cours 8`