UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST – S3**
2011–2012

Mathématique

Série n° 5 — Séries de Fourier

Ex 5.1 – Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(t) \coloneqq 0 \;\text{ si }\; t \in]-\pi, 0[, \qquad f(0) \coloneqq \pi \qquad \text{et} \qquad f(t) \coloneqq t \;\text{ si }\; t \in]0, \pi].$$

1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2) En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Ex 5.2 – Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) \coloneqq |t|$ pour tout $t \in [-\pi, \pi[$.

1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $\displaystyle f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)t]}{(2p+1)^2}$.

3) Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

4) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ et en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Ex 5.3 – Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) \coloneqq e^t$ pour tout $t \in [-\pi, \pi[$.

1) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

2) En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Ex 5.4 – Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f(x) = x^2.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Déterminer le domaine de convergence D de cette série et pour tout x dans D la valeur $S(x)$ de la somme de cette série.
4. (*) Préciser sur quels intervalles cette série converge uniformément.
5. Déduire des calculs précédents la somme des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(*) question plus difficile.

Ex 5.5 – Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f(x) = x(2\pi - x).$$

1. Reprendre les 4 premières questions de l'exercice précédent.
2. En utilisant l'égalité de Parseval, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Ex 5.6 – Soit f l'application 2π-périodique paire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(t) = t$ pour tout $t \in [0, \pi]$.

1. Reprendre les 4 premières questions de l'exercice 5.4.
2. Déduire de ce qui précède la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Puis retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. Montrer que pour tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(2n+1)x}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}x^2 - \frac{\pi}{6}x^3$.

Ex 5.7 – Soit $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ et soit f_α l'application 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Reprendre les 4 premières questions de l'exercice 5.4
2. Déduire de ce qui précède que $\forall t \in \mathbf{R}\backslash\pi\mathbf{Z}, \cot t = \displaystyle\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$.
3. En déduire que pour tout t tel que $0 <\mid t \mid< \pi$:

$$\sin t = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t - p\pi)^2}.$$

Ex 5.7 – On considère deux fonctions 2π-périodiques vérifiant les conditions suivantes : f est impaire, g est paire et $\forall x \in]0, \pi]$, $f(x) = g(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

1. Reprendre les 4 premières questions de l'exercice 5.4.
2. Vérifier sur cet exemple que deux séries trigonométriques différentes peuvent converger uniformément vers la même fonction sur un intervalle non vide.

Ex 5.8 – Développer en série de Fourier la fonction f 2π-périodique définie par $f(x) = e^{iax}$ pour $|\,x\,|< \pi$ avec $a \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{Z}$.
Etudier la convergence la convergence de la série de Fourier vers la fonction f.
Si a est réel montrer que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a-n)^2}.$$

Ex 5.9 – Soient f et g les fonctions 2π-périodiques définies par $f(x) = x$ et $g(x) = \sin(x/2)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1. Déterminer le développement en série de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier vers la fonction f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de g, étudier la convergence de la série de Fourier vers la fonction g. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
3. Soit h la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

   (a) Déterminer explicitement la fonction h.

   (b) Donner les développements en série de Fourier complexe et réel de h.

   (c) En déduire une relation simple reliant les coefficients de Fourier exponentiels des fonctions f, g, h.

Ex 5.10 –

1. Soit f une fonction de E continue sauf en un nombre fini de points par période. Soient $a_1, \ldots, a_k$ les points de discontinuité de f dans l'intervalle $]a_0, a_0 + 2\pi[$. On note $s_j(f) = f(a_j^+) - f(a_j^-)$ le saut de la fonction f en a_j. On suppose que f est dérivable dans I en dehors des points a_j et que f' appartient à E.

   Montrer que $c_n(f') = inc_n(f) - \displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} s_j(f)e^{-ina_j}$. En déduire des expressions de $a_n(f')$ et $b_n(f')$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
2. Application : soit f la fonction de E telle que $f(t) = -\pi t$ sur $[-\pi, 0[$ et $f(t) = t^2$ sur $[0, \pi[$. Calculer f', f'', f'''.

   En utilisant la question 1, déterminer les séries de Fourier de f'', f' et f.