MATH326 : Mathématique pour les sciences 3

Série n° 1 — Suites et séries numériques

Ex 1.1 – On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n \coloneqq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.
2) Établir que pour tout réel $x > -1$ on a $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Ex 1.2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \coloneqq 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et qu'elle est décroissante.
   Indication : on montrera au préalable que $\sqrt{2} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.
3) Calculer $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}+\sqrt{2}}$ en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis retrouver le résultat précédent.

Ex 1.3 – (Moyenne arithmético-géométrique)
Étant donné des réels $0 < a \leqslant b$, on considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $a_0 \coloneqq a$, $b_0 \coloneqq b$ ainsi que $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $0 < a_n \leqslant b_n$.
   Indication : on pourra regarder $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2) Établir que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3) En déduire que ces deux suites sont convergentes.
4) Prouver enfin que les limites de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont égales.
   Indication : on pourra comparer $|b_{n+1} - a_{n+1}|$ à $|b_n - a_n|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   Remarque : cette valeur commune est appelée la moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b, notée $M(a, b)$.

Ex 1.4 – Soit (u_n) une suite et (v_n) la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Vérifier que si (u_n) converge, alors (v_n) converge vers 0. Montrer que la réciproque est fausse en considérant la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ pour $n \geqslant 1$.

Ex 1.5 – Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n+1}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0} (-1/4)^n+(3/4)^n\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(1+1/n)}{n}\ ,$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n2^n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(1+n)}{n^3}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}-\frac{1}{n+\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+\alpha^n} \quad \text{avec} \quad \alpha>0.$$

Ex 1.6 – Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\ ,$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)2^n}{n!}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{n^{2n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{(n!)^2}\ .$$

Ex 1.7 – Calculer les sommes des séries numériques suivantes après avoir montré qu'elles convergent :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+2)}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^2-1}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} na^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n}{n} \quad \text{avec} \quad a\in[0,1[.$$

Ex 1.8 – On considère la série $\sum u_n$ dont le terme général est défini par $u_{2p}=(\frac{1}{3})^p$ et $u_{2p+1}=4(\frac{1}{3})^p$ pour tout $p\in\mathbf{N}$. Appliquer la règle de d'Alembert, puis la règle de Cauchy. En déduire la nature de la série.

Ex 1.9 – Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n\frac{2n}{4n^2-3}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n+(-1)^n n^2}{n^3} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n}\ .$$

Ex 1.10 – Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\ln n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$