INSTITUT DE GESTION DE RENNES
UNIVERSITÉ RENNES I

DEA de Finance
Année 2002/2003

Évaluation des actifs financiers.

Examen 2[e] session : durée une heure.

Documents autorisés.

Mercredi 3 septembre 2003.

Responsable : Philippe BRIAND.

Exercice 1. On se place dans le modèle de Cox–Ross–Rubinstein sur une période : le taux d'intérêt sur la période est de 5 %, le prix initial de l'action est de 100 euros. À l'instant 1, l'action peut subir une hausse de 10 % ou une baisse de 15 %.

On considère une option européenne de maturité 1 dont la valeur à l'instant 1 est donnée par $X_1 = [(S_1 - K)^+]^2$ avec $K = 105$ euros.

Déterminer le prix de vente de cette option ainsi que la stratégie de couverture.

Solution. D'après le cours, le prix d'une option européenne de valeur $f(S_1)$ est donné par

$$P = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[f(S_1)] = \frac{1}{1+r}\left(f(su)p^* + f(sd)(1-p^*)\right),$$

où $p^* = (1+r-d)/(u-d)$ est la probabilité que l'action monte sous la probabilité risque neutre. On obtient $p^* = 4/5$ et $P = 20/1,05 \simeq 19,05$.

Pour une stratégie de couverture, on doit avoir – notant ϕ la somme investie dans l'actif non risqué et ψ le nombre d'actions détenues avant parution du cours S_1 – $P = \phi + \psi S_0$ et $\phi(1+r) + \psi S_1 = f(S_1)$. Ceci donne $\phi(1+r) + \psi su = f(su)$ dans le cas d'une hausse et $\phi(1+r) + \psi sd = f(sd)$ dans celui d'une baisse. Par suite,

$$\psi = \frac{f(su) - f(sd)}{su - sd} = 1.$$

La signification est la suivante : on perçoit la prime P et on achète une option en empruntant la différence.

Formule d'Itô. Soient B un mouvement brownien et X un processus vérifiant

$$dX_t = K_t\,dt + H_t\,dB_t.$$

Si $(t,x) \longmapsto F(t,x)$ est 2 fois continûment dérivable en t et x alors

$$dF(t,X_t) = \Big(F'_t(t,X_t) + F'_x(t,X_t)K_t + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,X_t)H_t^2\Big)dt + F'_x(t,X_t)H_t\,dB_t.$$

Exercice 2. On considère le modèle de Black–Scholes avec un actif sans risque de taux r et un actif risqué dont le cours à l'instant t est noté S_t ; $S_0 = x > 0$. On note $\tilde{S}_t$ le cours actualisé.

On se place sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ et on rappelle que l'évolution de $\tilde{S}$ est donnée par l'équation :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t \, dB_t,$$

où σ est la volatilité du marché et B un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$.

1. Soient a un réel et $F(t,x) = e^{\sigma^2(T-t)}x^2 - 2ax + a^2$.

(a) En appliquant la formule d'Itô, montrer que $dF(t,\tilde{S}_t)$ est de la forme $\psi_t \, dB_t$.

(b) En déduire que $F(t,\tilde{S}_t)$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ et donc que $F(0,\tilde{S}_0) = \mathbb{E}^*[F(T,\tilde{S}_T)]$.

(c) En déduire que, pour tout réel a,

$$\mathbb{E}^*\left[\left(\tilde{S}_T - a\right)^2\right] = e^{\sigma^2 T}x^2 - 2ax + a^2.$$

2. On se propose de calculer le prix P d'une option européenne de maturité $T > 0$, de sous-jacent S et dont la valeur à l'instant T est $X_T = (S_T - K)^2$ où $K > 0$.

(a) Rappeler la formule donnant P sous forme d'une espérance sous $\mathbb{P}^*$.

(b) Exprimer P en fonction σ, r, T, K et x.

Solution. 1. (a) On a $F_t'(t,x) = -\sigma^2 e^{\sigma^2(T-t)}x^2$, $F_x'(t,x) = e^{\sigma^2(T-t)}2x - 2a$ et enfin $F_{xx}''(t,x) = 2e^{\sigma^2(T-t)}$. On a alors,

$$F_t'(t,\tilde{S}_t) + \frac{1}{2}F_{xx}''(t,\tilde{S}_t)(\sigma\tilde{S}_t)^2 = 0,$$

et donc $dF(t,\tilde{S}_t) = F_x'(t,\tilde{S}_t)\sigma\tilde{S}_t \, dB_t$.

(b) $F(t,\tilde{S}_t)$ est une intégrale brownienne sous $\mathbb{P}^*$; c'est donc une martingale sous la probabilité risque neutre. Par conséquent,

$$F(0,\tilde{S}_0) = \mathbb{E}^*[F(0,\tilde{S}_0)] = \mathbb{E}^*[F(T,\tilde{S}_T)].$$

(c) On a $F(T,\tilde{S}_T) = (\tilde{S}_T - a)^2$ et donc l'égalité précédente se réécrit, comme $\tilde{S}_0 = x$,

$$F(0,x) = e^{\sigma^2 T}x^2 - 2ax + a^2 = \mathbb{E}^*\left[(\tilde{S}_T - a)^2\right].$$

2. (a) On a, d'après le cours, $P = e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[(S_T - K)^2\right]$.

(b) Par suite, comme $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, on a

$$P = e^{-rT}\,\mathbb{E}^*\left[\left(e^{rT}\tilde{S}_T - e^{rT}e^{-rT}K\right)^2\right] = e^{rT}\,\mathbb{E}^*\left[\left(\tilde{S}_T - e^{-rT}K\right)^2\right].$$

D'après la question 1, on a

$$P = e^{rT}\left(e^{\sigma^2 T}x^2 - 2Ke^{-rT}x + K^2 e^{-2rT}\right) = e^{\sigma^2 T}e^{rT}x^2 - 2Kx + e^{-rT}K^2.$$