UNIVERSITÉ DE SAVOIE **LST – S3**
2011–2012

Mathématique

Série n° 4 — Séries entières

Ex 2.1 – Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0}(1+n+n^2)z^n,\quad \sum_{n\geqslant 1} n\ln n\, z^n,\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{n^n}z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0}\big(3+(-1)^n\big)^n z^n.$$

Ex 2.2 – Calculer les sommes des séries numériques suivantes après avoir montré qu'elles convergent :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n2^n}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)!}\ ,\quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+n-2}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n\sin(n\theta)}{2^n} \quad \text{avec} \quad \theta\in\mathbf{R}.$$

Ex 2.3 – Soient R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ et f la restriction de sa somme à $]-R,R[$.

1) Montrer qu'on a $R=1$.
2) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=1$ sur $]-1,1[$.
3) En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x\in\,]-1,1[$.

Ex 2.4 – Déterminer une série entière de rayon $R>0$ dont la somme est une solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle $3xy'+(2-5x)y=x$.

Ex 2.5 – On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}$ dont on note $\Delta\subseteq\mathbf{R}$ le domaine de convergence et $S:\Delta\longrightarrow\mathbf{R}$ la somme.

1) Montrer qu'on a $\Delta=\,]-1,1[$ et calculer $S(x)$ pour tout $x\in\Delta$.
2) En déduire que pour tout $x\in\Delta$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$.
3) Prouver que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ ne converge pas normalement sur Δ, mais qu'elle y converge uniformément.
4) En déduire l'égalité $\pi=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$ avec $u_n\coloneqq 4\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
5) Déterminer une valeur de $n\in\mathbf{N}$ pour que les sept premières décimales de u_n soient égales à celles de π.

Exercice 2.6 – Soient R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et f la restriction de sa somme à $]-R,R[$.

1) Montrer qu'on a $R=+\infty$.
2) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $y''+y=0$ sur $\mathbf{R}$.
3) En déduire que pour tout $x\in\mathbf{R}$ on a $\sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.