Séance de TP du 9/12/2009 :

De Cox-Ross-Rubinstein à Black-Scholes

1. Le Modèle de Cox–Ross–Rubinstein.

On considère un marché financier avec deux actifs : l'un deux est une obligation dont le prix d'une part à l'instant n est $R_n = (1+r)^n$, l'autre est une action dont le prix d'une part à l'instant n est S_n ; $S_0 = x > 0$ est donné.

On suppose que pour tout $n \geq 1$, $S_n = S_{n-1}\, T_n$ où les variables $(T_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. suivant la loi $\mathbb{P}(T_n = u) = p$, $\mathbb{P}(T_n = d) = 1 - p$ avec $d < 1 + r < u$ et $0 < p < 1$.

Dans toute la suite, l'échéance des options est N.

1. Écrire une fonction (ou un programme) qui simule et trace une trajectoire de longueur `N` du prix de l'action.

2. On considère à présent une option européenne dont la valeur au temps N est $X_N = f(S_N)$. On se concentrera sur le call européen correspondant à $f(x) = (x - K)^+$ où le strike K est un paramètre du modèle. Écrire une fonction qui calcule la prime de cette option c'est à dire le prix de vente de l'option. On rappelle que la prime X_0 est donnée par la formule

$$X_0 = \mathbb{E}^*[f(S_N)]\,(1+r)^{-N}, \quad p^* = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

Faites varier p pour vérifier que la prime est insensible à ce paramètre.

3. Créer à présent une fonction qui simule la valeur du call à l'instant n lorsque $S_n = n$; on rappelle que

$$X_n = X(n, S_n), \quad \text{avec} \quad X(n,x) = (1+r)^{N-n}\,\mathbb{E}\left[f\left(x\frac{S_N}{S_n}\right)\right].$$

4. Étant donnée la trajectoire des prix $(S_n)_{n\leq N}$, déterminer la trajectoire du prix de l'option $(X_n)_{n\leq N}$ ainsi que la stratégie de couverture $(\psi_n)_{1\leq n\leq N}$. On rappelle que si $X_n = X(n, S_n)$,

$$\psi_n = \frac{X(n, S_{n-1}u) - X(n, S_{n-1}d)}{(u-d)S_{n-1}}, \qquad n \leq 1 \leq N.$$

5. Vérifier graphiquement que la valeur du portefeuille associé à la stratégie autofinancée $(\psi_n)_{1\leq n\leq N}$ est bien égal à chaque instant à la valeur de l'option.

On pourra tester les programmes avec un call européen et les paramètres :

```
So=x=100; u=1.02; d=0.985; r=0.01; N=100; p=.55; MC=10000; K=50;
```

2. Le modèle de Black–Scholes.

On considère à présent le modèle de Black-Scoles : un actif sans risque dont le prix à l'instant t est $R_t = e^{\rho t}$ (ρ est le taux d'intérêt instantané), une action dont le prix à l'instant t est

$$S_t = x\,e^{\mu t}\,\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t),$$

avec $x > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$ et $\sigma > 0$.

On s'intéresse à nouveau au call européen de maturité $T > 0$ et de strike $K > 0$, payoff $X_T = (S_T - K)^+$.

1. Écrire une fonction permettant de déterminer la prime X_0 du call européen :

$$X_0 = e^{-\rho T}\,\mathbb{E}^*\Big((S_T - K)^+\Big).$$

On rappelle que, sous $\mathbb{P}^*$, $\widetilde{S}_T$ à la même loi que

$$x\,\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T\right) \quad \text{où} \quad Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1),$$

et que la fonction matlab `randn(m,n)` retourne une matrice $m \times n$ de nombres aléatoires distribués suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Cette question illustre la convergence du modèle de Cox–Ross-Rubinstein vers le modèle de Black–Scholes. On considère dans la suite le modèle de Cox–Ross–Rubinstein avec les paramètres $p = 1/2$, r, u et d lorsque le nombre de périodes N tend vers l'infini en imposant les relations

$$r = \rho\,\frac{T}{N}, \quad u = 1 + \mu\,\frac{T}{N} + \sigma\,\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}}, \quad d = 1 + \mu\,\frac{T}{N} - \sigma\,\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{N}}.$$

En faisant varier N, montrer que la prime du call européen du modèle de Cox–Ross–Rubinstein converge vers la prime du call européen du modèle de Black–Scholes.

3. (a) Simulation du mouvement brownien — On rappelle que les accroissements du mouvement brownien B sont indépendants et que $B_t - B_s$ a la même loi que $\sqrt{t-s}\,Z$ où $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Soit T fixé et N un entier grand. Pour $k = 0, \ldots, N$, on note $t_k = kT/N$. En observant que,

$$\forall k = 0, \ldots, N, \qquad B_{t_k} = \sum_{i=1}^{k}(B_{t_i} - B_{t_{i-i}}),$$

écrire une procédure permettant de simuler et de tracer une trajectoire de $t \longmapsto B_t$.

(b) Tracer sur une même figure les graphes de $t \longmapsto S_t$ et de $t \longmapsto e^{\mu t}$ sur $[0,T]$. Faîtes varier σ. Qu'observez-vous ?

(c) Illustration de la formule d'Itô — Si F est une fonction régulière,

$$dF(S_t) = F'(S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}F''(S_t)\,\sigma^2(S_t)^2\,dt.$$

Lorsque N est grand, pour $i = 1, \ldots, N$,

$$F(S_{t_i}) - F(S_{t_{i-1}}) \simeq F'(S_{t_{i-1}})\,\left(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}F''(S_{t_{i-1}})(S_{t_{i-1}})^2\,(t_i - t_{i-1}).$$

Simuler une trajectoire de $t \longmapsto S_t$ et tracer le graphe de $t \longmapsto F(S_t)$. Utiliser la formule ci-dessus et la trajectoire de $t \longmapsto S_t$ pour obtenir une trajectoire de $t \longmapsto F(S_t)$. On pourra prendre $F(x) = \sin(x)$. Comparez les résultats.

4. Reprendre la question 2 en considérant une option asiatique de payoff

$$X_T = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u\,du - K\right)^+.$$